Министерство образования и науки

Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Часть 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Курс лекций

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим систему линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ - матрица системы размерности $m \times n$.

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$ - вектор свободных членов (правых частей) размерности $m \times 1$.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ - вектор независимых переменных размерности $n \times 1$.

СЛАУ в матричной форме: $AX = B$.

Блочная матрица $[A|B]$ называется расширенной матрицей системы.

Если в СЛАУ все свободные члены $b_i = 0$, то система – однородная. В противном случае – неоднородная.

Решением системы уравнений называется такой вектор X, при подстановке которого все уравнения системы превращаются в верные равенства. Если система имеет хотя бы одно решение, то она совместна. Иначе – несовместна.

Если система имеет единственное решение, то она называется определенной. Иначе – неопределенной.

Уравнения СЛАУ линейно независимы, если никакие два из них не могут быть получены одно из другого путем умножения на число и суммирования.

Количество линейно независимых уравнений называется рангом СЛАУ (рангом матрицы A). Обозначается $rang\ A$.

Возможны следующие варианты.

1. $m = n$

В этом случае однородная система имеет единственное решение $(X = 0)$, если $rang\ A = n$ (все уравнения системы линейно независимы). Если $rang\ A < n$, то система имеет бесконечно много решений.
Неоднородная система неразрешима, если $rang\ A < n$. Если $rang\ A = n$, то система имеет единственное решение.

2. $m < n$

Ранг матрицы системы в этом случае $rang\ A \le m$. Предположим, что $rang\ A = m$ (все уравнения системы линейно независимы). В противном случае все линейно зависимые (кроме одного) можно вычеркнуть.
В этом случае m переменных могут быть выражены через оставшиеся $n - m$ переменных. Те, **которые выражаются**, называются базисными (основными). Те, **через которые** выражаются базисные переменные, называются свободными (неосновными).
Рассмотрим систему (1). Выразим первые m переменных:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1m+1}x_{m+1} - \alpha_{1m+2}x_{m+2} - \ldots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2m+1}x_{m+1} - \alpha_{2m+2}x_{m+2} - \ldots - \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \beta_m - \alpha_{mm+1}x_{m+1} - \alpha_{mm+2}x_{m+2} - \ldots - \alpha_{mn}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

(2) представляет собой общее решение (1).

Из общего решения можно получить частное решение, придав свободным переменным произвольные значения. При этом базисные приобретут соответствующие.
Частным случаем частного решения является базисное решение СЛАУ. Оно формируется следующим образом: все свободные переменные полагаются равными 0, при этом базисные становятся равны свободным членам. Если все базисные переменные оказываются неотрицательными, то говорят о неотрицательном базисном решении.

3. $m > n$

В этом случае СЛАУ является переопределенной. Среди уравнений системы обязательно есть линейно зависимые. Вычеркнув их, придем к одному из вышеописанных вариантов.

В рамках методов оптимизации нас будут интересовать, как правило, системы второго варианта.

1.2 Метод Гаусса

Метод Гаусса является методом определения ранга системы, а для систем первого варианта – методом отыскания решения.

Будем рассматривать СЛАУ второго варианта $(m < n)$. Предположим для определенности, что все уравнения системы линейно независимы.

Суть метода Гаусса заключается в таком эквивалентном преобразовании исходной расширенной матрицы системы, при котором получается матрица, содержащая столбцы единичной матрицы. Их число должно быть равно числу уравнений в системе. Под эквивалентными понимают преобразования, не меняющие ранга. К ним относятся:

а) перестановка строк;

б) умножение строки на число;

в) замена строки на ее сумму с другой строкой, умноженной на некоторое число.

Пример

Найти общее, частное и базисное решение следующей системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases}.$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы. Будем получать для определенности столбцы единичной матрицы на месте первого и второго столбца исходной матрицы. Для этого сначала разделим **всю** первую строку на «2»:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 2 & 1,5 \\ 3 & -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Теперь получим на пересечении второй строки и первого столбца «0» вместо «3». Для этого к каждому элементу второй строки прибавим соответствующий элемент первой строки, умноженный на « -3»:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 3 & -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Теперь получим «1» на пересечении второго столбца и второй строки. Для этого всю вторую строку поделим на элемент, стоящий на пересечении, т.е. на «0,5»:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь получим «0» на пересечении первой строки и второго столбца (на месте «-1,5»). Для этого к каждому элементу первой строки прибавим соответствующий элемент второй строки, умноженный на «1,5»:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Процесс закончен. В получившейся матрице первый и второй столбцы – это столбцы единичной матрицы. Этой матрице соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_3 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Переменная x_3 является свободной, переменные x_1, x_2 - базисные.

Частное решение:

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Базисное решение:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Оно является неотрицательным.

1.3 Решение линейных неравенств

Дадим некоторые определения и сформулируем ряд теорем.

Множество называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Теорема. Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Среди точек выпуклого множества можно выделить внутренние, граничные и угловые точки.

Точка множества называется внутренней, если в некоторой ее окрестности содержатся точки только данного множества.

Точка множества называется граничной, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему.

Точка множества называется угловой (крайней), если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

Для выпуклого множества угловые точки всегда совпадают с вершинами многогранника.

Множество точек называется замкнутым, если включает в себя все свои граничные точки.

Множество точек называется ограниченным, если существует шар (круг) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество. В противном случае множество называется неограниченным.

Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклым многогранником (выпуклым многоугольником), если оно ограниченное, и выпуклой многогранной (многоугольной) областью, если оно неограниченное.

Теорема. Множество решений неравенства с двумя переменными $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ является одной из двух полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, включая и эту прямую. Другая полуплоскость с той же прямой есть множество решений неравенства $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$.

Множество всех точек $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ образует n-мерное точечное (векторное) пространство.

Множество точек X, удовлетворяющих уравнению $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$, при $n = 3$ является плоскостью, а при $n > 3$ называется гиперплоскостью. Справедливо следующее обобщение предыдущей теоремы.

Теорема. Множество всех решений линейного неравенства с n переменными $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$ является одним из полупространств, на которые все пространство делится плоскостью ($n = 3$) или гиперплоскостью ($n > 3$), включая и эту плоскость (гиперплоскость).

1.4 Решение систем линейных неравенств.

Теорема. Множество решений совместной системы линейных неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

является выпуклым многоугольником (или выпуклой многоугольной областью).

Рассмотрим множество допустимых решений системы m линейных уравнений с n переменными.

Теорема. Множество всех допустимых решений совместной системы m линейных уравнений с n переменными $(m < n)$ является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.

Между неотрицательными базисными решениями и угловыми точками множества допустимых решений системы линейных уравнений существует взаимно-однозначное соответствие: каждому неотрицательному базисному решению соответствует своя угловая точка (вершина), замена одной базисной переменной сопровождается переходом в **соседнюю** вершину

2. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 Примеры задач, сводящихся к задачам линейного программирования. Общая постановка задач линейного программирования (ЗЛП).

Рассмотрим примеры составления математической модели.

1. *Задача об использовании сырья*. Пусть предприятие выпускает два вида продукции P_1 и P_2 для продажи. Для производства продукции используется три вида сырья S_1 S_2 S_3. Расход сырья на каждый вид продукции, стоимость продукции и запасы сырья представлены в таблице

Виды сырья	Расходы сырья на единицу продукции		Запасы сырья
	P_1	P_2	
S_1	3	4	70
S_2	5	7	80
S_3	8	6	90
Стоимость ед. продукции	20	30	

Какое количество каждого вида продукции необходимо предприятию, чтобы прибыль была максимальной? Составить ЗЛП.

Решение:

Обозначим x_1, x_2 – объемы выпуска соответственно 1-го и 2-го видов. Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z = 20x_1 + 30x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 70, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 80, \\ 8x_1 + 6x_2 \le 90, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. *Задача о диете*. Пусть диетолог составляет диету, согласно которой пациент должен получит не менее 18 единиц питательного вещества S_1, не менее 25 единиц вещества S_2 и не менее 32 единиц вещества S_3. Диета состоит и з двух составляющих

D_1, D_2 . Содержание количества единиц питательных веществ в единице веса каждой составляющей диеты и стоимость продуктов приведены в таблице

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в ед.объема продуктов	
	D_1	D_2
S_1	3	4
S_2	5	7
S_3	6	8
Стоимость диеты	20	25

Требуется составить дневной рацион необходимой питательности, чтобы затраты были минимальными. Составить ЗЛП.

Решение:

Обозначим x_1, x_2 – количество питательных веществ в продуктах 1-го и 2-го видов соответственно. Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z = 20x_1 + 25x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 18, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 25, \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 32, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

В общем случае задача линейного программирования имеет вид:

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max(\min) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, i = \overline{1, j} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leq b_i, i = \overline{j+1, m} \\ x_k \geq 0, k = \overline{1, l}, l \leq n \end{cases} \qquad (2)$$

Если $j = 0$, а $l = n$, то имеем задачу линейного программирования в каноническом виде (все ограничения – равенства, все переменные имеют ограничения на знак).

Если $j = m$, а $l = n$, то имеем задачу в стандартном виде (задачу со стандартными условиями).

Функция $L(X)$ из выражения (1) называется линейной формой или целевой функцией задачи линейного программирования.

Вектор $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$ называется вектором коэффициентов линейной формы, вектор $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ называется вектором переменных задачи (вектором независимых переменных).

Матрица $A = \left\lfloor a_{ik}, i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n} \right\rfloor$ называется матрицей условий (технологической матрицей). Столбцы матрицы условий называются векторами условий. Вектор $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ называется вектором свободных членов (вектором правых частей).

Вектор X, элементы которого удовлетворяют всем ограничениям системы (2), называется планом ЗЛП. Множество всех планов ЗЛП называется областью определения ЗЛП. План ЗЛП, доставляющий максимум (минимум) линейной форме, называется оптимальным планом задачи линейного программирования.

2.2 Графический метод решения ЗЛП.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется при решении задачи с двумя независимыми переменными x_1, x_2 в стандартном виде.

Он основывается на следующем алгоритме.

1. На плоскости в координатных осях x_1, x_2 строятся прямые соответствующие исходным ограничениям – неравенствам.

2. Указываются полуплоскости, удовлетворяющие каждому из ограничений.

3. Определяется многоугольник решений, соответствующий области определения ЗЛП. Вычисляются значения целевой функции во всех вершинах многоугольника решений. Выбирая наибольшее и наименьшее значение из этих вычисленных величин, определяются экстремальные значения целевой функции.

4. Экстремальные значения можно определить, построив две линии уровня: $L(X) = const = \gamma_1$ и $L(X) = const = \gamma_2$. Установив, куда движется линейная форма (ЛФ), возрастая, можно определить минимум целевой функции как первую точку встречи ЛФ с областью определения и максимум целевой функции как последнюю точку встречи ЛФ и областью определения ЗЛП.

5. Определяется градиент целевой функции: $grad\ L = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, направление которого показывает наибольшее возрастание целевой функции и является перпендикуляром к линиям уровня. Перемещая линию уровня в направлении градиента до первой встреченной вершины, можно найти минимальное значение целевой функции. Перемещая линию уровня в направлении градиента до последней встреченной вершины, можно найти максимальное значение целевой функции.

Пример

Решить геометрически задачу линейного программирования

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ 3x_1 \le 21, \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Изобразим многоугольник решений (рис.1) При $F = 0$ линия уровня $2x_1 + 3x_2 = 0$ проходит через начало координат. Зададим, например, $F = 6$ и построим линию уровня $2x_1 + 3x_2 = 6$. Её расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор $\overline{q} = (2,3)$). Так как задача на отыскание максимума, то оптимальное решение – в угловой точке *C*, находящейся на пересечении прямых I и II, т.е. координаты точки *C* определяются решением системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. И максимум линейной функции равен $F_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$.

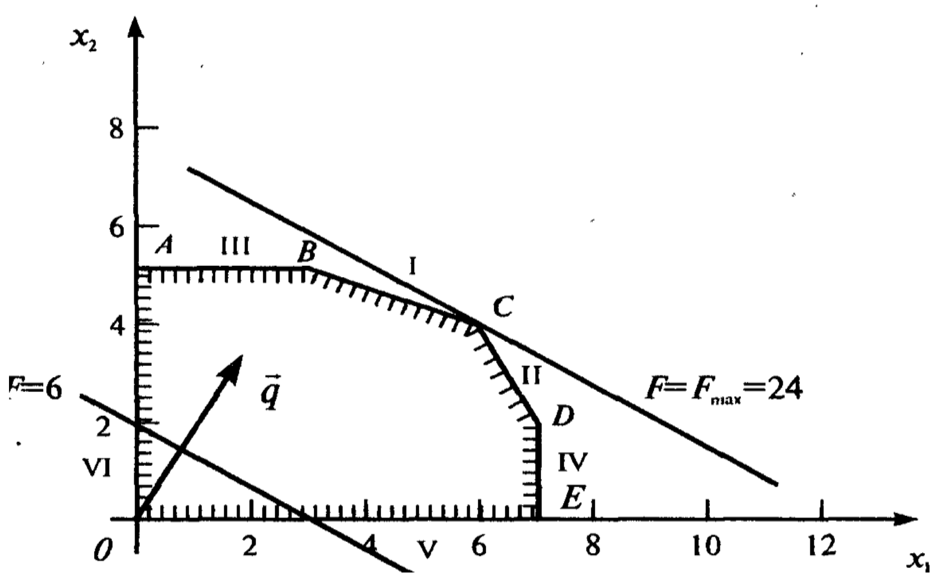


Рис. 1

2.3 Свойства решений задачи линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования в каноническом виде. Можно доказать следующие свойства решений ЗЛП.

1. Область определения ЗЛП представляет собой выпуклый многогранник (выпуклую многогранную область).
2. Решение ЗЛП достигается в вершине области определения. Если оптимальное значение ЛФ достигается в двух и более вершинах области, то такое же значение достигается в любой выпуклой линейной комбинации этих вершин.
3. Вершине области определения соответствует неотрицательное базисное решение системы ограничений задачи линейного программирования (в канонической форме).

2.4 Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Симплекс-метод представляет собой метод перебора вершин области определения задачи линейного программирования. В его основе лежат два принципа:

1. Ограниченность перебора.

Рассматриваются только точки, подозрительные на экстремум, т.е. вершины области определения.

2. Упорядоченность перебора.

Переход от вершины в соседнюю вершину осуществляется таким образом, чтобы линейная форма при этом не ухудшалась.

Симплекс-метод может быть реализован в двух вариантах: в общем виде и с помощью симплекс-таблиц. Второй вариант предпочтительнее, так как достаточно легко алгоритмизуется для автоматических вычислений.

2.5 Симплекс-таблицы

Прежде чем приступить к составлению симплекс-таблиц, необходимо выполнить следующие действия.

1. Привести ЗЛП к **каноническому** виду: ЛФ – минимизируется, все ограничения – равенства, все переменные задачи имеют ограничения на знак.
2. В системе m ограничений m переменных (**базисные**) выразить через оставшиеся (**свободные**): $X_B = \beta - \alpha \cdot X_C$, $\beta \geq 0$. Если для какого-то ограничения не выполняется условие $\beta \geq 0$, то ввести **искусственные** переменные как разность между правой и левой частями соответствующего ограничения.
3. В **линейной** форме **базисные** переменные **исключить**: $L(X) = \gamma_0 - \gamma \cdot X_c$. Если есть искусственные переменные, то сформировать **вспомогательную** ЛФ $l(X)$ как сумму всех искусственных переменных.
4. Построить симплекс-таблицу. Для каждого ограничения предназначена строка. Предпоследняя строка – для $L(X)$, предпоследняя строка – для $l(X)$.

В построенной симплекс-таблице просматриваем **последнюю** строку. Если среди коэффициентов последней строки нет положительных (кроме, может быть, свободного члена), то задача решена. Оптимальный план записывают так: свободные переменные полагают равными 0, базисные – соответствующим свободным членам. Оптимальное значение ЛФ равно свободному члену в строке с ЛФ. Если положительных коэффициентов нет в строке со **вспомогательной** ЛФ, то это означает, что ЗЛП не имеет решения, так как система ограничений задачи несовместна.

Если в последней строке симплекс-таблицы есть положительный коэффициент (кроме свободного члена), отмечаем столбец с этим элементом (**ведущий столбец**). Если таких элементов несколько, выбираем любой.

Просматриваем элементы ведущего столбца, относящиеся к **ограничениям**. Если среди них нет положительных, то задача не имеет решения, поскольку линейная форма неограничена снизу.

Если среди элементов ведущего столбца есть положительные (относящиеся к ограничениям), то отмечаем строку (**ведущая строка**) с минимальным отношением свободного члена к соответствующему положительному элементу ведущего столбца.

На пересечении ведущего столбца и ведущей строки стоит **разрешающий элемент**.

После отыскания разрешающего элемента переходят к построению новой симплекс-таблицы. В новой симплекс-таблице первой заполняется строка, которая была ведущей в предыдущей симплекс-таблице. Все элементы ведущей строки делят на разрешающий элемент. Остальные строки преобразуют так, чтобы на месте прежнего ведущего столбца появился столбец единичной матрицы с единицей на месте разрешающего элемента.

Процесс решения ЗЛП сводится к последовательному построению симплекс-таблиц до тех пор, пока не будет найдено решение или не будет обнаружено, что задача решения не имеет.

2.6 Двойственные задачи линейного программирования

Пусть задана задача линейного программирования в общей постановке. Будем предполагать для определенности, что линейная форма минимизируется:

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \le b_i, i = \overline{1, j} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, i = \overline{j+1, m} \\ x_k \ge 0, k = \overline{1, l}, l \le n \end{cases} \qquad (3)$$

Рассмотрим задачу следующего вида:

$$L'(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \ge c_k, k = \overline{1, l} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i = c_k, k = \overline{l+1, n} \\ y_i \ge 0, i = \overline{1, j}, j \le m \end{cases} \qquad (4)$$

Если в задаче (3) $j = m$, а $l = n$ (задача со стандартными условиями), то двойственная задача также является задачей со стандартными условиями. Имеем следующую пару задач (5)-(6):

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max \qquad\qquad L'(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \le b_i, i = \overline{1, m} \\ x_k \ge 0, k = \overline{1, n} \end{cases} \quad (5) \qquad\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \ge c_k, k = \overline{1, n} \\ y_i \ge 0, i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (6)$$

Задачи (5)-(6) называются симметричными двойственными задачами линейного программирования.

Лемма. Если X – план задачи (3), а Y – план задачи (4), то $L(X) \le L'(Y)$.

Теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач (3)-(4) разрешима, то разрешима и другая, причем

$$max\, L = min\, L'$$

Если же в одной из задач (3)-(4) линейная форма является неограниченной, то в другой задаче система условий несовместна (нет ни одного плана).

Лемма и теорема справедливы, в частности, и для пары (5)-(6). Более того, для симметричных задач существует возможность по решению одной из задач записать не только оптимальное значение линейной формы, но и оптимальный план другой.

Рассмотрим теорему двойственности для симметричных задач.

Модифицируем задачу (5):

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$

…………………………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$

$L_1 = - L = - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$.

$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \geq 0.$

Аналогично, (6):

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1$

………………………………………

$a_{1n}y + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n$

$y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+n} \geq 0.$

Таким образом, обе задачи приведены к каноническому виду. Установим следующее соответствие между переменными задач:

$$\begin{aligned} x_k &\leftrightarrow y_{m+k}, k = \overline{1,n} \\ x_{n+i} &\leftrightarrow y_i, i = \overline{1,m} \end{aligned} \qquad (7)$$

Если найдено решение одной из взаимно двойственных задач, то оптимальный план другой задачи получается приравниванием ее переменных значениям соответствующих в смысле (7) коэффициентов линейной формы для последнего базисного решения первой задачи, взятым с обратным знаком.

2.7 Экономическая интерпретация взаимно двойственных задач.

Рассмотрим пример, показывающий, как в реальной экономической ситуации появляются взаимно двойственные задачи линейного программирования.

На некотором предприятии после выполнения годового плана возник вопрос: как поступить с остатками сырья? Некоторые заводские экономисты предложили наладить из оставшегося сырья производство изделий ширпотреба; другие специалисты предложили продать сырье «на сторону» какой-нибудь нуждающейся в нем организации. Исследование этих двух возможностей поручили математикам. Вывод, к которому пришли математики, оказался неожиданным. Но прежде чем изложить их соображения, перечислим исходные данные задачи. Будем считать (для простоты), что имеются остатки двух видов сырья S_1 и S_2, из которых можно наладить производство трех видов товаров: T_1, T_2, T_3. Нормы расхода сырья на производство товаров вместе с данными о прибыли и запасах приведены в таблице:

Сырье Виды товаров	S_1	S_2	Прибыль
T_1	1	2	7
T_2	1	1	6
T_3	5	2	18
Запасы	35	20	

Проанализируем каждую из возможностей, описанных выше. При исследовании первой возможности (наладить выпуск товаров T_1, T_2, T_3) возникает вопрос о плане выпуска товаров. План выпуска задается тремя числами x_1, x_2, x_3, где x_i – количество единиц товара T_i , которое следует произвести. Неизвестные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять неравенствам:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 35 \qquad (2)$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \qquad (3)$$

Смысл каждого неравенства в (2)-(3) очевиден: слева записано количество сырья соответствующего вида, которое расходуется на производство x_1 единиц товара T_1, x_2 единиц товара T_2, x_3 единиц товара T_3. Это количество не должно превышать имеющегося запаса соответствующего сырья.

Прибыль, которую получит предприятие от реализации плана (x_1, x_2, x_3), очевидно, будет равна:

$$F = 7x_1 + 6x_2 + 18x_3 \text{ (руб)}$$

В интересах предприятия максимизировать эту прибыль. Следовательно, чтобы наилучшим образом использовать первую возможность, нужно решить ЗЛП: F $\to$ max при ограничениях (1), (2). Назовем эту задачу задачей I или исходной задачей.

Исследуем теперь другую возможность (продать сырье другой организации). Здесь возникает вопрос: по каким ценам продавать сырье? Обозначим эти цены y1, y2 (yi – цена единицы сырья Si). Очевидно:

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \ (1')$$

Справедливое требование к ценам со стороны продающего предприятия состоит в следующем: если взять сырье, идущее на производство единицы товара $\boldsymbol{T_i}$**,** то выручка от продажи этого сырья должна быть не меньше, чем прибыль от реализации готового изделия. В противном случае нет смысла продавать сырье – лучше изготовить из него товар и получить прибыль от продажи товара. Указанное требование приводит к неравенствам:

$$y_1 + 2y_2 \ge 7$$

$$y_1 + y_2 \ge 6$$

$$5y_1 + 2y_2 \ge 18$$

Первое из записанных неравенств означает, что выручка от продажи единицы сырья S_1 и двух единиц сырья S_2 (именно такое количество расходуется на производство единицы товара T_1) не меньше, чем прибыль, которую могло бы получить предприятие от продажи единицы товара T_1, если бы оно отказалось от идеи продавать сырье и занялось изготовлением из него товара T_1. Аналогичный смысл имеют другие два неравенства.

Других требований к ценам y_1, y_2 предприятие-продавец предъявлять не вправе. Что касается покупателя, то для него единственное пожелание заключается в сокращении до минимума расходов на покупку сырья, т.е. величины $F^* = 35y_1 + 20y_2$.

Следовательно, для наилучшего использования второй возможности необходимо решить ЗЛП: $F^* \to min$ при условиях (1'), (2'). Назовем эту задачу задачей II или двойственной задачей. Составим таблицу, в которой приведем и сравним экономико-математическую модель и содержательную интерпретацию задач I и II:

Задача I (исходная)	Задача II (двойственная)
$\boldsymbol{F = C^T X \to \underset{X}{max}}$ $\boldsymbol{AX = B}$	$\boldsymbol{F^* = B^T Y \to \underset{Y}{min}}$ $\boldsymbol{A^T Y = C}$

$X \geq 0$	$Y \geq 0$
Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, \ldots, x_n)$, при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.	Найти такой набор чисел $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли от реализации этой продукции.

Цены ресурсов $y_1, \ldots, y_m$ в экономической литературе получили названия: учетные, неявные, теневые. Смысл этих названий состоит в том, что это условные, «ненастоящие» цены. В отличие от «внешних» цен $c_1, \ldots, c_n$ на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены $y_1, \ldots, y_m$ являются» внутренними», т.к. они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи (в процессе использования ресурса в одном цикле производства), поэтому их часто называют также оценками ценности ресурсов. Оценка ценности ресурса отвечает на вопрос – сколько прибыли может принести вовлечение в производство еще одной единицы данного ресурса.

2.8. Анализ устойчивости двойственных оценок.

Рассуждения проведем на примере задачи использования сырья. Предприятие использует для производства двух видов продукции два вида сырья. Расход сырья для выпуска единицы продукции приведен в таблице:

	Сырье		
Продукт	1	2	Доход
1	1	1	4
2	2	1	5
Запасы	4	3	

Математическая модель задачи имеет вид:

$$F = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Приведем к канонической форме и запишем необходимым для симплекс-метода образом:

$x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 4$

$x_1 + x_2 \quad + x_4 = 3$

$F - 4x_1 - 5x_2 = 0$

Здесь: x_1 – выпуск первого изделия, x_2 – выпуск второго изделия, x_3 – остаток первого изделия, x_4 – остаток второго изделия.

Составим симплекс-таблицу.

i	Базис	C_B	P_0	4	5	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	4	1	2	1	0
2	P_4	0	3	1	1	0	1
3			0	-4	-5	0	0

i	Базис	C_B	P_0	4	5	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	1	0	1	1	-1
2	P_1	4	3	1	1	0	1
3			12	0	-1	0	4

i	Базис	C_B	P_0	4	5	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	0	1	0	1	1	-1
2	P_1	4	2	1	0	-1	2
3			13	0	0	1	3

Задача решена, так как в последней строке нет отрицательных элементов. При этом:
$X^* = (2\ 1\ 0\ 0)$, $F(X^*) = 13$

Таким образом, оптимальным является план выпуска, при котором первого вида продукции изготавливается две единицы, а второго вида – одна единица. При этом оба вида ресурсов используются полностью, так как их остатки в оптимальном плане равны нулю.

Запишем теперь двойственную задачу:

$$F^* = 4y_1 + 3y_2 \to min$$
$$y_1 + y_2 \geq 4$$
$$2y_1 + y_2 \geq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

В канонической форме:

$$F^* = 4y_1 + 3y_2 \to min$$
$$y_1 + y_2 - y_3 = 4$$
$$2y_1 + y_2 - y_4 = 5$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Установим соответствие между переменными задач: $x_3 \leftrightarrow y_1$, $x_4 \leftrightarrow y_2$, $x_1 \leftrightarrow y_3$, $x_2 \leftrightarrow y_4$.

Из теоремы двойственности следует, что: $Y^* = (1\ 3\ 0\ 0)$, $F^*(Y^*) = F(X^*) = 13$.

Дадим экономическую интерпретацию результатов двойственной задачи:

1. Положительную двойственную оценку имеют виды сырья, которое использовано полностью. Ресурс с положительной двойственной оценкой называют еще. узким местом производства или дефицитным сырьем.
2. Нулевую двойственную оценку имеют виды сырья, которые использованы не полностью. Не эти ресурсы сдерживают получение еще большей прибыли – ведь их запасы еще не исчерпаны.
3. Положительная двойственная оценка имеет такой смысл – на эту величину можно увеличить доход, если дополнительно использовать одну единицу этого сырья.

Оптимальный план задачи а значит, и максимальное значение F зависят от величины b_i запасов сырья. Естественно заинтересоваться таким вопросом: при каких изменениях величин запасов сырья двойственные оценки сырья не изменятся. Это будет означать, что не изменится ассортимент выпускаемой продукции. Это важно, поскольку практически всякое изменение ассортимента выпускаемой продукции болезненно для производства: надо искать покупателей новых видов продукции, возможно, выплачивать неустойку покупателям старых видов, перестраивать производство и т.д. Математически вопрос формулируется так: при каких изменениях b_i вектор P_0 в последней симплекс-таблице останется положительным. Тогда не изменится базис, а значит, сохранят свои значения и двойственные оценки. Таким образом, речь идет об устойчивости двойственных оценок.

Из теории СЛАУ следует, что $\boldsymbol{P_0} = \boldsymbol{D^{-1}B}$, где $\boldsymbol{D}$ – матрица, составленная из векторов, образующих базис. Значит, исследование устойчивости двойственных оценок сводится к решению системы неравенств:

$$D^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m + \Delta b_m \end{bmatrix} > 0$$

В нашем примере:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 + \Delta b_1 \\ 3 + \Delta b_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{cases} -(4 + \Delta b_1) + 2(3 + \Delta b_2) > 0 \\ 4 + \Delta b_1 - 3 - \Delta b_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta b_1 + 2\Delta b_2 > -2 \\ \Delta b_1 - \Delta b_2 > -1 \end{cases}$$

Полученную систему неравенств можно решить графически, определив область пересечения соответствующих полуплоскостей.

Изменения в пределах этой области обеспечивают неизменность двойственных оценок, при этом, например, $\Delta b_1 = \Delta b_2 = 2$ дает увеличение дохода на величину:

$y_1^* \Delta b_1 + y_2^* \Delta b_2 = 2 + 6 = 8.$

Для контроля правильности построения области устойчивости следует иметь в виду, что точка ***(0, 0)*** всегда принадлежит этой области.

В общем случае ($\boldsymbol{m > 2}$) анализ устойчивости усложняется. Обычно, упрощая анализ, рассматривают лишь случаи, когда все $\boldsymbol{\Delta b_i}$, кроме одного, нулевые, либо ограничиваются проверкой влияния на устойчивость каких-либо конкретных изменений запасов сырья.

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

3.1 Постановка транспортной задачи.

В пунктах $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ выпускается или хранится однородная продукция в количестве $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ единиц. Себестоимость единицы продукции в пункте $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ равна $C_i\left(i=\overline{1,n}\right)$. Готовая продукция поставляется в пункты $B_j\left(j=\overline{1,m}\right)$, потребности которых составляют $b_j\left(j=\overline{1,m}\right)$ единиц. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j известна.

Пункты $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ называются поставщиками или отправителями, пункты $B_j\left(j=\overline{1,m}\right)$

Будем обозначать x_{ij} - количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j (или объем перевозки).

Необходимо таким образом организовать перевозку груза от поставщиков к потребителям, чтобы суммарные затраты на перевозки оказались минимальными. При этом все запасы должны быть вывезены, все потребности удовлетворены.

Математическая модель транспортной задачи (ТЗ) выглядит следующим образом.

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m}\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n}\\ x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\end{cases}$$

Доказано, что транспортная задача имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие баланса: $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$. Задачи, для которых выполнено условие баланса, называются закрытыми. Система уравнений закрытой ТЗ является линейно зависимой: по крайней мере одно уравнение является линейной комбинацией остальных уравнений. Следовательно, базис ТЗ содержит не более $m+n-1$ ненулевую компоненту. План, соответствующий неотрицательному базисному решению системы ограничений ТЗ, называется опорным. Решение ТЗ следует искать среди опорных планов.

Транспортная задача обычно представляется в виде таблицы следующего вида.

	B_1	B_2	$\dots$	B_n	З
A_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_n
П	b_1	b_2	$\dots.$	b_n	

Необходимо таким образом вписать в клетки значения x_{ij}, чтобы сумма в строке была равна запасу, а сумма в столбце была равна потребности. При этом суммарные расходы были бы минимальными. На основании необходимого и достаточного условия разрешимости ТЗ можно утверждать, что в таблице необходимо заполнить ровно $m+n-1$ клетку так, чтобы выполнились требования ТЗ.

Основным методом решения ТЗ является аналог симплекс-метода – метод потенциалов. Метод потенциалов также представляет собой метод упорядоченного перебора вершин области определения. Чтобы его осуществить, необходимо найти первую вершину (первый опорный план).

3.2 Способы построения первого опорного плана.

Рассмотрим три метода построения первого опорного плана ТЗ. Все методы различаются способом выбора клетки для заполнения из числа допустимых. Принцип заполнения выбранной клетки одинаков для всех способов.

- Метод северо-западного угла.

В этом методе каждый раз для заполнения выбирается северо-западная (левая верхняя) клетка из числа допустимых.

Принцип заполнения следующий.

Выбранная клетка максимально нагружается: в нее записывают минимум между запасом соответствующего поставщика и потребностями соответствующего потребителя. Таким образом, либо вывозят весь запас, либо полностью удовлетворяют потребности. После этого вычеркивают строку (если был вывезен запас), либо столбец (если удовлетворены потребности). Вычеркнутые ячейки становятся недопустимыми. При этом соответственно либо потребности, либо запас уменьшаются на величину вывезенного груза.

После заполнения $m+n-1$-ой клетки определяют суммарные транспортные расходы. Для этого находят сумму произведений стоимости перевозки на ее объем для заполненных клеток.

Метод северо-западного угла прост в реализации, что особенно актуально для таблиц большой размерности. Существенным недостатком является то, что он совершенно не использует исходную информацию о стоимости перевозок. Это пытается учесть следующий метод.

- Метод минимальной стоимости.

В этом методе каждый раз для заполнения выбирается клетка с минимальной стоимостью из числа допустимых. Все остальные операции являются такими же, как в предыдущем методе.

- Метод Фогеля.

Этот метод рассматривает ситуацию на шаг вперед. Для этого для каждого столбца и для каждой строки определяют разность между двумя минимальными стоимостями. Среди всех разностей выбирают самую большую. Эта разность соответствует определенному столбцу или определенной строке. В выбранном столбце или строке заполняют клетку с минимальной стоимостью. Принцип заполнения – такой же, как в предыдущих способах.

Следует отметить, что ни метод минимальной стоимости, ни метод Фогеля не являются однозначно лучшими, чем метод северо-западного угла. Кроме того, построив первый план нельзя сразу сказать, является ли он оптимальным. Для того чтобы это проверить, а также для того, чтобы при необходимости улучшить построенный план используют метод потенциалов.

3.3 Метод потенциалов.

Пусть найден первый опорный план транспортной задачи. Тогда все переменные x_{ij} задачи разбиты на две группы: базисные переменные $(i,j) \in B$ и свободные $(i,j) \in S$. Предположим, что найдены выражения базисных переменных через свободные и их подстановкой в линейную форму L задачи базисные переменные исключены из выражения для L:

$$L = \gamma_0 + \sum_{(p,q)\in S} \gamma_{pq} \cdot x_{pq} \quad \textbf{(1).}$$

Из (1) следует, что найденный опорный план оптимален, если все $\gamma_{pq} \geq 0$, $(p, q) \in S$. В противном случае можно уменьшить суммарную стоимость перевозок, введя в базис одну из свободных переменных x_{pq}, для которой $\gamma_{pq} < 0$.

Метод потенциалов дает возможность вычислять коэффициенты γ_{ij} в (1) без получения в явном виде выражений базисных переменных через свободные. В этом его единственное отличие от симплекс-метода.

Опишем процедуру улучшения опорного плана.

I. Поставим каждому поставщику A_i в соответствие величину α_i, а каждому потребителю B_j – величину β_j. Величины α_i, $i = 1, m$ и β_j, $j = 1,n$ будем называть потенциалами поставщиков и потребителей соответственно. Свяжем их между собой условиями:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij},\ (i, j) \in B. \quad (2)$$

(2) – система линейных уравнений ($m + n - 1$ уравнение с $m + n$ неизвестными), имеющая бесконечно много решений. Зафиксируем одно из его решений, задав произвольно один из ее потенциалов (обычно полагают $\alpha_1 = 0$).

II. Вычислим величины

$$c_{pq}^{/} = \alpha_p + \beta_q,\ (p, q) \in S, \quad (3)$$

которые называют косвенными стоимостями, и определим коэффициенты γ_{pq} в (1) по формулам:

$$\gamma_{pq} = c_{pq} - c_{pq}^{/},\ (p, q) \in S. \quad (4)$$

III. Если $\gamma_{pq} \geq 0$, $(p, q) \in S$, то найденный опорный план оптимален. В противном случае осуществляем переход к новому опорному плану. Произвольно выбираем некоторое число $\gamma_{p0q0} < 0$. Переменную x_{p0q0} будем вводить в базис.

$$x_{p0q0} = \rho\ (\rho \geq 0) \rightarrow x_{p0q1} - \rho \rightarrow x_{p1q1} + \rho \rightarrow x_{p1q2} - \rho \rightarrow \ldots \rightarrow x_{pkqk} + \rho \rightarrow x_{pkq0} - \rho. \quad (5)$$

Цепочку (5) называют циклом пересчета. Заметим, что все переменные (кроме x_{p0q0}), входящие в цепочку, – базисные переменные.

Переменной x_{p0q0} следует придать по возможности большее значение, т.к. $\gamma_{p0q0} < 0$. Поэтому определим ρ из условия:

$$\rho = \min \{x_{p0q1}, x_{p1q2}, \ldots, x_{pkq0}\}. \qquad (6)$$

Положив теперь $x_{p0q0} = \rho$ и пересчитав значения базисных переменных, вошедших в цикл пересчета (5), получим новый опорный план; суммарная стоимость перевозок при этом будет равна:

$$L = \gamma_0 + \gamma_{p0q0} \cdot \rho,$$

т.е. уменьшится.

При пересчете значений базисных переменных, входящих в (5), по крайней мере одна из них обратится в нуль и ровно одна станет свободной. После завершения перехода к новому опорному плану возвращаемся к п. I.

3.4 Открытые транспортные задачи

На практике условие баланса выполняется редко. Поэтому необходимо найти способ решать несбалансированные (открытые) транспортные задачи.

Нарушение условия баланса может быть одним из двух: суммарные запасы превышают суммарные потребности либо суммарные потребности превышают суммарные запасы. Рассмотрим каждый вариант.

1. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

Такую ТЗ называют задачей «на недостаток». Поскольку теорема о разрешимости доказана только для закрытых задач, то решение открытой ТЗ должно начинаться с приведения ее к сбалансированному виду. Для этого формулируют следующую вспомогательную задачу. К имеющимся поставщикам вводят еще одного – фиктивного. При этом в таблице транспортной задачи появляется дополнительная строка. В качестве запаса фиктивному поставщика приписывают разность между суммарными потребностями и суммарными запасами. Стоимость фиктивных перевозок полагают равной нулю, если речь идет только о транспортных расходах, либо задают ее равной «ущербу от недопоставки».

Сформированную сбалансированную задачу решают методом потенциалов. Когда построен оптимальный план вспомогательной задачи, оптимальный план исходной задачи получают вычеркиванием дополнительной строки. При этом вычеркнутая строка содержит количество недопоставленного груза.

2. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Такая задача называется задачей «на избыток». Как и в предыдущем случае, решение начинается с приведения ее к сбалансированному виду. Для этого к имеющимся потребителям вводят еще одного – фиктивного. При этом в таблице транспортной задачи добавляется дополнительный столбец. В качестве потребностей фиктивному потребителю приписывают разность между суммарными запасами и суммарными потребностями. Стоимость фиктивных перевозок полагают равной нулю, если речь идет только о транспортных расходах, либо задают ее равной «ущербу от пролеживания».

Сформированную сбалансированную задачу решают методом потенциалов. Когда построен оптимальный план вспомогательной задачи, оптимальный план исходной задачи получают вычеркиванием дополнительного столбца. При этом вычеркнутый столбец содержит количество невывезенного груза.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1 Задачи линейного программирования

1. Указать каноническую форму записи ЗЛП:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 6x_2 + 2x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

2. Отметить планы ЗЛП, изображенных на рисунках 1 и 2, доставляющие максимум и минимум линейной форме:

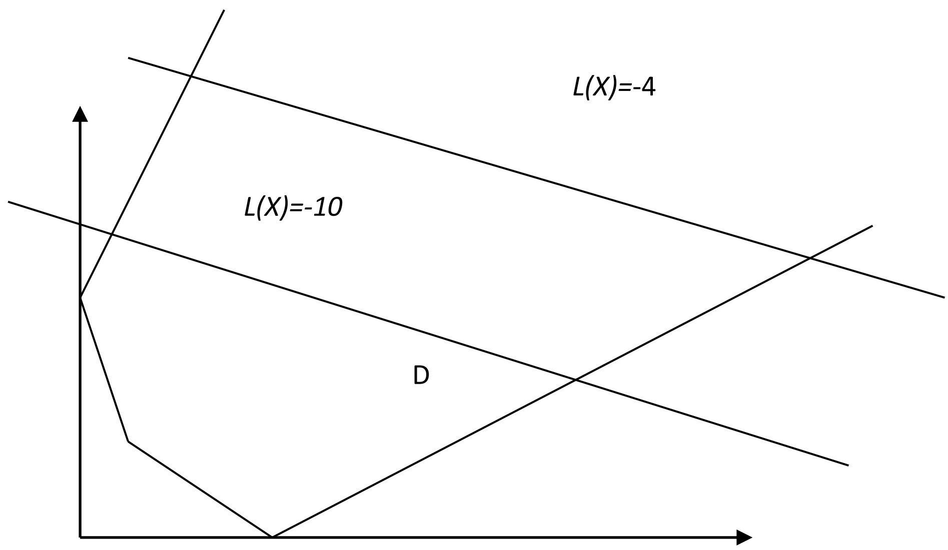


Рис. 1

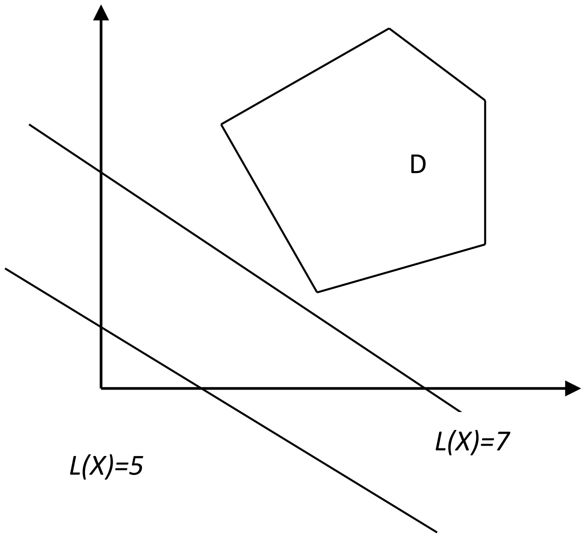


Рис. 2

3. Даны следующие ЗЛП:

а) $L(X) = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $L(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le -8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Поставить им в соответствие симметричные двойственные:

а) $L(Y) = 5y_1 + 7y_2 + 3y_3 \to \min$
$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 - y_3 \le 2 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 1 \end{cases}$$

б) $L(Y) = -2y_1 + 8y_2 - 5y_3 \to \min$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $L(Y) = 5y_1 + 7y_2 + 3y_3 \to \min$
$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 - y_3 \ge 2 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

г) $L(Y) = 5y_1 + 7y_2 + 3y_3 \to \min$
$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 - y_3 \le 2 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

д) $L(Y) = 2y_1 - 8y_2 + 5y_3 \to \min$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

е) $L(Y) = -2y_1 + 8y_2 - 5y_3 \to \min$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. Для каждой пары симметричных взаимно двойственных задач из предыдущего пункта установить соответствие между переменными задач, исходные задачи решить графически, записать решение обеих задач.

Ответы. 1) в.

2) Рис. 1 Линейная форма неограничена сверху ($maxL(X) = +\infty$). Минимум X^*– на рисунке:

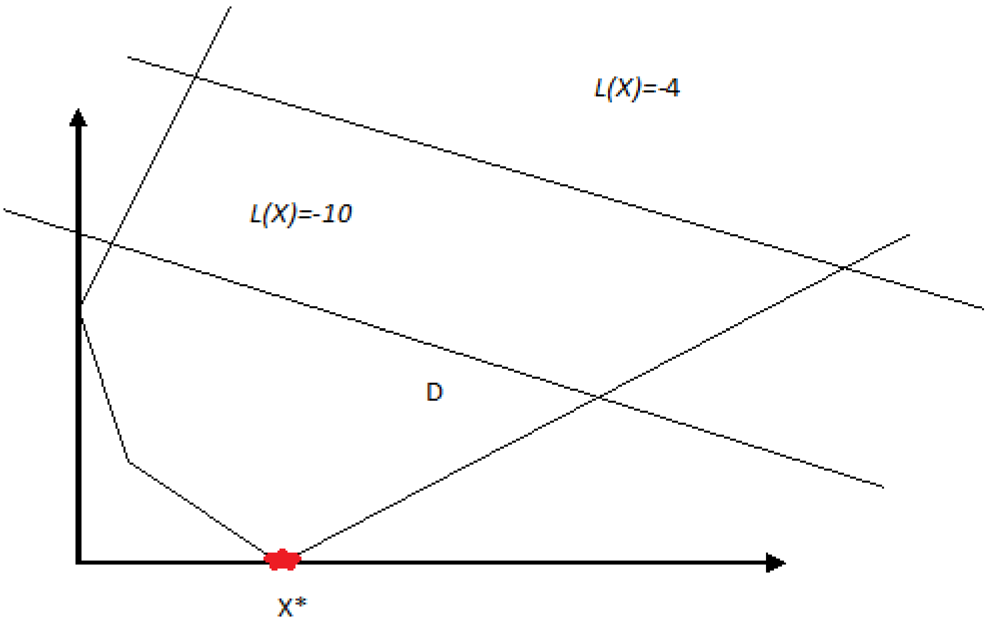
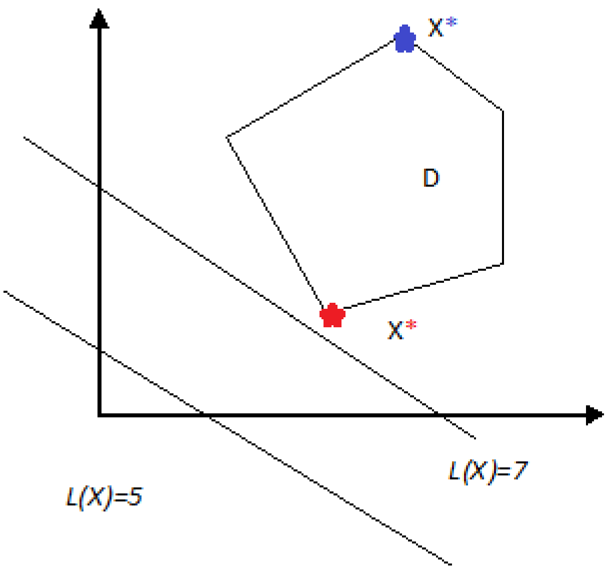


Рис. 2 Максимум линейной формы X^*; минимум линейной формы X^*



3) а↔в; б↔д.

4) $X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad Y^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad L(X^*) = L(Y^*) = 3.$

4.2 Транспортная задача

1. Укажите правильные записи транспортной задачи:

а) $L(X) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge a_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

б) $L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

в) $L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

г) $L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

д) $L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to \min$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \end{cases}.$$

2. Составить первый план тремя способами: методом северо-западного угла, методом минимальной стоимости, методом Фогеля. Определить значение линейной формы.

	B_1	B_2	B_3	B_4	$З$
A_1	47	8	20	65	11
A_2	33	0	7	28	22
A_3	24	70	3	46	8
$П$	5	54	65	3	127

3. Для следующей ТЗ составить первый план методом минимальной стоимости и найти оптимальный план методом потенциалов.

	B_1	B_2	B_3	B_4	$З$
A_1	47	5	41	38	59
A_2	34	41	70	17	73
A_3	21	41	38	50	53
$П$	5	70	38	8	

Ответы. 1) б, в, г.

2) задача на недостаток, вводим фиктивного поставщика А4 с запасами $a_4 = 86$.

Метод северо-западного угла $L(X^1)$ =843;

	B1	B2	B3	B4	З			
A1	47	8	20	65	11	6	0	
	5	6						
A2	33	0	7	28	22	0		
		22						
A3	24	70	3	46	8	0		
		8						
A4	0	0	0	0	86	68	3	0
		18	65	3				
П	5	54	65	3	127			
	0	48	0	0				
		26						
		18						
		0						

Метод минимальной стоимости $L(X^1)$ =379

	B1	B2	B3	B4	З			
A1	47	8	20	65	11	3	0	
			8	3				
A2	33	0	7	28	22	0		
		22						
A3	24	70	3	46	8	0		
			8					
A4	0	0	0	0	86	81	49	0
	5	32	49					
П	5	54	65	3	127			
	0	32	16	0				
		0	8					
			0					

Метод Фогеля $L(X^1) = 112$

	B1	B2	B3	B4	З	Разность	Разность	Разность	Разность	Разность	Разность
A1	47	8	20	65	11	12	12	12	12		
		11			0						
A2	33	0	7	28	22	7	7	7	7	7	
		22			0						
A3	24	70	3	46	8	21	21	67			
			8		0						
A4	0	0	0	0	86	0	0	0	0	0	0
	5	21	57	3	83 78 57						
П	5	54	65	3	127						
	0	43 21 0	57 0	0							
Разность	24	0	3	28							
Разность	24	0	3								
Разность		0	3								
Разность		0	7								
Разность		0	0								

4. Задача на избыток.

Оптимальный план X^* :

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	47	5	41	38	59
		59			
A2	34	41	70	17	73
		1		8	
A3	21	41	38	50	53
	5	10	38		
Потр	5	70	38	8	185

Оптимальные расходы: $L(X^*) = 2431$ у.е.

ЛИТЕРАТУРА

4. Математические методы и модели исследования операций: Учебник для ВУЗов / А.С. Шапкин, Н.П. Мазаева. – 4-е изд. – М.: Дашков и К^0, 2007.- 395с.

5. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / Н. Ш. Кремер, И.М. Тришин, Б.А. Путко, М.Н. Фридман; под. Ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд. – М.: Юрайт, 2010. – 430с

6. Экономико-математические методы и модели: пособие к решению задач/ А.И. Стрикалов, И.А. Печенежская. – Ростов на Дону: Феникс, 2008. – 348с.

7. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие для вузов / под редакцией проф. Н.А. Орехова. – М.: Юнити-Дана, 2004. – 302с.