Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Математика (пособие по самостоятельной работе)

Учебно-методическое пособие для 09.03.03 (прикладная информатика в экономике)

Разработчик: доцент каф. математики
Приходовский М.А.

Томск
ТУСУР
2017

Оглавление

Введение

В данном пособии приведены типовые варианты контрольных работ за весь учебный год для специальности 09.03.03 (прикладная информатика в экономике) ФСУ ТУСУР. В каждом семестре проводится по 4 контрольных работы, каждая из них на 45 минут раз в месяц и состоит из 4 заданий. Соответственно, есть 16 отчётных заданий в семестр, 32 за год. На каждое контрольное задание приводится пример решения одной или нескольких задач из практических занятий на эту тему.

Полное освоение методов решения всех этих базовых задач гарантирует получение высокого балла семестровой части рейтинга. Впрочем, надо осознавать, что прочтение одного лишь только этого краткого пособия не является достаточным, так как понимание методов не может быть достингуто без изучения всего курса. Это пособие рекомендуется именно для непосредственной подготовки к контрольным работам, после прослушивания курса лекций и практических занятий, где содержатся и задачи более сложного уровня, по сравнению с которыми эти базовые задачи вам покажутся не столь трудными.

Данное пособие особенно рекомендуется заочникам.

Методы самостоятельной работы:

1. Прочесть электронный конспект.
2. Задачи из практики решить с чистого листа, не глядя в решение.
3. Прочесть доказательства (сначала не учить наизусть,а понять).
4. Онлайн-консультация: уметь формулировать вопросы.

<u>1 семестр</u>

Контрольная № 1.

1. Действия над матрицами.
2. Определители.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.

Вариант для самостоятельного решения:

1) Умножить матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

2) Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3) Найти обр.матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

4) Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Аналогичные задачи из практических занятий:

Задача 1. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем эти матрицы. Если первую разбить на строки, а вторую на столбцы, то видно, что есть всего 4 варината скалярно умножить друг на друга вектор-строку их первой на вектор-столбец из второй.

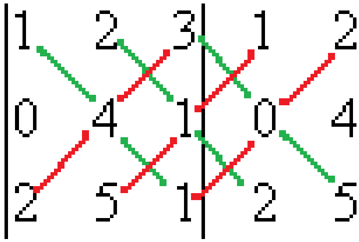
$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \\ 2 \quad 1 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} \end{pmatrix}$	$1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 3 + 1 + 0 = 4$
$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \\ 2 \quad 1 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}} \end{pmatrix}$	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 0 + 4 + 0 = 4$
$\begin{pmatrix} 1 \quad 1 \quad 0 \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} \end{pmatrix}$	$2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6 + 1 + 2 = 9$
$\begin{pmatrix} 1 \quad 1 \quad 0 \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}} \end{pmatrix}$	$2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 7 = 0 + 4 + 7 = 11$

Например, если умножаем строку номер 1 на столбец номер 2, то и число, которое при этом получается, ставим в 1 строку 2 столбец новой матрицы. Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}. \quad \textbf{Ответ.} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Допишем копии первых двух столбцов, проведём 3 параллельных линии (главная диагональ и ещё две). Перемножим все эти тройки элементов и внесём в общую сумму с их исходным знаком. А вот для побочной диагонали и линий, ей параллельных, со сменой знака.



$1\cdot4\cdot1+2\cdot1\cdot2+3\cdot0\cdot5-2\cdot4\cdot3-5\cdot1\cdot1-1\cdot0\cdot2=$
$4+4+0-24-5-0=8-29=-21$. **Ответ.** -21.

Обратная матрица.

Формула вычисления элементов обратной матрицы: $b_{ij}=\dfrac{A_{ji}}{|A|}$.

Алгоритм нахождения A^{-1}.
1. Проверить невырожденность с помощью определителя.
2. Составить матрицу из дополняющих миноров M_{ij}.
3. Изменить знаки в шахматном порядке, то есть домножить на $(-1)^{i+j}$, где i,j - номера строки и столбца.
4. Транспонировать полученную матрицу.
5. Поделить на определитель исходной матрицы.

Задача 3. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Сначала ищем определитель. Так как матрица треугольная, то достаточно перемножить числа по диагонали. $|A|=2$.

Строим матрицу, состоящую из дополняющих миноров. Зачёркиваем ту строку и тот столбец, где находится элемент, и остаётся минор 2 порядка из 4 элементов.

На схеме показано, что именно надо зачеркнуть:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь надо сменить знаки в шахматном порядке, т.е. переходим от миноров к алгебраическим дополнениям. Обведено красным, где надо менять знак. Ясно, что 0 остаётся 0, там знак менять нет смысла.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Транспонируем эту матрицу, то есть бывшие строки запишем по столбцам.

$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. И осталось разделить на $|A| = 2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Поменяем 1-ю и 2-ю строки, так чтобы в верхнем левом углу было число 1. Это удобнее для преобразований к треугольной форме методом Гаусса. Ранг при этом не меняется. После этого, вычтем 1-ю строку с коэффициентом 1 либо 4 из последующих, так, чтобы обнулить всё ниде углового элемента.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \end{pmatrix}$$

Ещё мы поменяли 2 и 3 строку, чтобы продолжить метод Гаусса без излишних дробных коэффициентов.

Теперь 2-ю строку, домноженную на 10, прибавим к 3-й.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 46 & -18 \end{pmatrix}.$$

Итак, исходная матрица сводится к такой, в которой уже есть треугольная сруктура в первых трёх столбцах.

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 46 \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 \\ 1 \\ -18 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Очевидно, что обведённый минор равен 46, не равен 0. Он 3-го порядка, поэтому ранг равен 3.

Ответ: $r(A) = 3$.

Контрольная работа № 2.

5. Векторная алгебра (скалярные, векторные произведения).
6. Системы уравнений, метод Гаусса
7. Собственные числа и векторы
8. Уравнения прямой и плоскости

Вариант для самостоятельного решения:

5) Векторы a, b выражены через p, q: $a = p + q$, $b = p + 2q$. $|p| = 2$, $|q| = 3$, угол между ними 60 градусов. Найти (a, b).

6) Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

7) Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8) Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1,4,2) перпендикулярно вектору (2,1,2).

Аналогичные задачи из практических занятий:

Векторы a,b выражены через p,r: $a = 3p + r$, $b = p - 3r$.
$|p| = 5, |r| = \sqrt{2}$, угол между ними 45 град.

Задача 5.1. Найти (a, b). **Задача 5.2.** Найти | [a,b] |.

Решение задачи 5.1.

$(a, b) = (3p + r, p - 3r) = 3(p, p) - 9(p, r) + (r, p) - 3(r, r)$.

Это мы раскрыли скобки, используя свойства скалярного произведения. Далее, так как $(p,r)=(r,p)$ то объединим их, и получим $3(p,p)-8(p,r)-3(r,r)$.
Это можно выразить так:
$3|p|^2-8|p||r|\cos 45^0-3|r|^2$ и получаем $75-40-6=29$. **Ответ.** 29.

Решение задачи 5.2.

$|[a,b]|=|[3p+r,p-3r]|=|3[p,p]-9[p,r]+[r,p]-3[r,r]|$

Несмотря на то, что скобки мы раскрыли похожим образом, дальше будет существенное отличие, т.к. свойства векторного произведения совсем другие, чем скалярного. Так, $(p,p)=|p|$, но $[p,p]=0$. Кроме того, чтобы объединить $[p,r],[r,p]$ в одно слагаемое, здесь надо сначала у одной из них сменить знак.

$|3[p,p]-9[p,r]+[r,p]-3[r,r]| = |0-9[p,r]-[p,r]-0| =$

$|-10[p,r]| = 10|[p,r]|$. Модуль векторного произведения p и r это площадь параллелограмма, где эти векторы являются сторонами, поэтому далее можно продолжить так:

$10|[p,r]| = 10|p||r|\sin 45^0 = 10\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 50.$ **Ответ.** 50.

Задача 6. Решить систему уравнений $\left.\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =6 \end{matrix}\right\}$

Решение.

Построим расширенную матрицу системы и преобразуем её.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

чтобы обнулились коэффициенты ниже левого верхнего угла, то есть чтобы исчезла переменная x из всех уравнений кроме первого, надо:
а) из 2-й строки вычесть 1-ю;

б) из 3-й строки вычест удвоенную 1-ю.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 1-1 & 2-1 & -3-2 & 1-5\\ 2-2 & 1-2 & 1-4 & 6-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5 & -4\\ 0 & -1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

Теперь, чтобы обнулить ниже чем a_{22}, нужно к 3-й строке просто прибавить 2-ю, так как знаки там противоположны. При этом структуру из нулей, которые уже получились слева, мы на последующем шаге всё равно никак не испортим, ведь там к 0 будет прибавляться 0 либо вычитаться 0, то есть ступенчатая структура там уже всё равно будет сохраняться.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5 & -4\\ 0 & -1+1 & -3-5 & -4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5 & -4\\ 0 & 0 & -8 & -8\end{pmatrix}$$

Когда в основной матрице уже получена треугольная структура, снова перепишем в виде системы

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5\\ & x_2 & -5x_3 & =-4\\ & & -8x_3 & =-8\end{array}\right\}$$

В первом уравнении 3 неизвестных, а в каждом следующем всё меньше и меньше, а в последнем вообще только одна неизвестная. Именно этой цели мы и хотели добиться, приводя к треугольному виду: из последнего уравнения можно теперь сразу выразить $x_3 = 1$. Затем с этой информацией мы поднимаемся в предпоследнее уравнение, где две неизвестных, впрочем, одна из них уже известна.

$x_2 - 5 = -4 \Rightarrow x_2 = 1$.

А теперь уже две последних неизвестных стали известны, и с этой информацией поднимаемся в 1-е уравнение, подставляя туда $x_3 = 1$ и $x_2 = 1$. Итак, $x_1 + 1 + 2 = 5 \Rightarrow x_1 = 2$.

Ответ. x_1=2, x_2=1, x_3=1.

Можно ответ записать и в виде вектора: $\bar{x} = (2,1,1)$.

Задача 7. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ сводится к уравнению

$(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$, корни которого $\lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 4$.

Найдём собственные векторы.

$\lambda = 2$. Вычтем 2 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}.$$

Из этих уравнений следует, что $z = 0, y = 0$, про x нет информации, это свободная переменная. ФСР: вектор (1,0,0).

$\lambda = 3$. Вычтем 3 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Из этих уравнений следует $z = 0, y = x$, ФСР: вектор (1,1,0).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базисный минор здесь во 2 и 3 столбцах, так что x могло считаться свободной переменной.

$\lambda = 4$. Вычтем 4 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

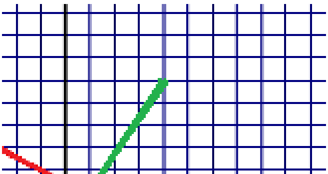
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисный минор можно найти, например, в левом верхнем углу, тогда z считаем свободной переменной и все остальные выразим именно через неё. Из 2-го $y = z$, а затем из 1-го $-2x + 2z = 0$, то есть $x = z$. ФСР: вектор (1,1,1).

Ответ.
Собст. число $\lambda = 2$ собст. вектор (1,0,0),
собст. число $\lambda = 3$ собст. вектор (1,1,0)
собст. число $\lambda = 4$ собст. вектор (1,1,1).

Задача 8.1. Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 с координатами (1,2) и перпендикуляру n (3,5).

Решение. Возьмём произвольную точку M с координатами (x, y). Если она принадлежит этой прямой, то вектор M_0M, координаты которого равны $(x-1, y-2)$ перпендикулярен вектору n.



Таким образом, скалярное произведение векторов $(x-1, y-2)$ и (3,5) есть 0. Тогда $3(x-1)+5(y-2)=0$, приводя подобные, получаем $3x+5y-13=0$.

Ответ. $3x+5y-13=0$.

Задача 8.2. Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 с координатами (1,2) и направляющему ***l*** (3,5).

Решение. Возьмём произвольную точку M с координатами (x, y). Если она принадлежит этой прямой, то вектор M_0M а именно $(x-1, y-2)$ коллинеарен вектору ***l*** (3,5). Таким образом, их координаты пропорциональны: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5}$. Это уравнение называется каноническим. Приведём к обычному уравнению, для этого домножим на константы. $5(x-1) = 3(y-2)$, то есть $5x-5 = 3y-6$ что сводится к $5x-3y+1=0$.

Замечание. Нормаль к полученной прямой - вектор $(5,-3)$. Вообще говоря, мы могли бы сразу перейти от направляющего вектора к нормали (поменять координаты и у одной из них сменить знак), а потом уже строить уравнение по нормали, как в прошлом методе.

Ответ. $5x-3y+1=0$.

Задача 8.3. Построить уравнение плоскости, проходящей через точку А (1,2,3) перпендикулярно вектору n (1,4,2).

Решение. Для произвольной точки $M(x, y, z)$ в плоскости, вектор AM с координатами $(x-1, y-2, z-3)$ ортогонален $n(1,4,2)$. Их скалярное произведение 0. Тогда $(x-1)+4(y-2)+2(z-3)=0$, т.е. $x+4y+2z-15=0$.

Ответ. Уравнение плоскости $x+4y+2z-15=0$.

Контрольная работа № 3.

9. Предел последовательности
10. Предел функции, с неопределённостью 0/0.
11. Предел функции, 1-й замеч. lim
12. Предел функции, 2-й замеч. lim

Вариант для самостоятельного решения:

9) Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+1}-n)$

10) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

11) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^3+2x^2+x}$

12) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}$

Аналогичные задачи из практических занятий:

Задача 9. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+8}-n\right)$.

Решение. Здесь неопределённость типа $\infty-\infty$.
Чтобы свести к дроби, и сокращать как в прошлых примерах, надо сначала домножить на «сопряжённое» выражение, то есть такое где вместо разности сумма, это позволит использовать формулу сокращённого умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+6n+8}-n\right)\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n+8}^{\,2}-n^2}{\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+8-n^2}{\sqrt{n^2+6n+8}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+8}{\sqrt{n^2+6n+8}+n}.$$

Теперь можно сократить на первую степень n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+8}}{n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+8}}{\sqrt{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+6n+8}{n^2}}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}}+1} = \frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{6}{\sqrt{1}+1} = 3.$$ **Ответ**. 3.

Задача 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$.

Решение. Способ 1. Тот факт, что при подстановке $x=1$ и в числителе, и в знаменателе даёт значение 0, говорит о том, что множитель $(x-1)$ присутствует хотя бы один раз. Поэтому найти корни можно даже без дискриминанта.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-5}=\frac{1-3}{1-5}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

Способ 2. (Лопиталя).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)'}{(x^2-6x+5)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-4}{2x-6}=\frac{2-4}{2-6}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

Задача 11.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

Решение. С помощью преобразований получим в знаменателе такое же выражение, как под знаком синуса в числителе.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-1)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)}\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-1}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Второй предел вообще не содержит неопределённости, а первый это в точности $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ если переобозначить $t=x-5$.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$.

Задача 11.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(100x)}{x^2+20x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(100x)}{x^2+20x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(100\,x)}{100\,x}\dfrac{100\,x}{x(x+20)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{100}{(x+20)}=5.$

Ответ. 5.

Задача 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x+3}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}}$.

Решение. Здесь сначала заметим, что основание стремится к 7/7 = 1. А степень к бесконечности. То есть, неопределённость типа 1^{∞} и можно использовать 2-й замечательный предел. Сначала выделяем целую часть дроби, то есть 1. Прибавим и отнимем 1, но ту, которую отняли, представим в таком виде, чтобы она объединилась с дробью.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x+3}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x+3}{4x-1}-1\right)^{\frac{14}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x+3}{4x-1}-\frac{4x-1}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x+3)-(4x-1)}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x+3)-(4x-1)}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$$

$= \lim\limits_{x\to 2}\left(1+\frac{4-2x}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$ теперь после 1 следует бесокнечно-малая, которая обращается в 0 при $x\to 2$, ведь там числитель $4-2x$. Далее, в степени домножаем обратную к этой дроби, но при этом и её саму тоже, чтобы ничего не изменилось.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2(2-x)}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2(2-x)}\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\left(1+\frac{2(2-x)}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2(2-x)}}\right)^{\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(e)^{\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$$

использовали тот факт, что $\lim\limits_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}} = e$.

Далее, получаем $\exp\left(\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}\right) =$

$$\exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{-2}{4x-1}\frac{14}{(x+2)}\right) = \exp\left(\frac{-28}{7\cdot 4}\right) = e^{-1}.$$

Ответ. e^{-1}.

Контрольная работа № 4.
13. Производные функции одной переменной.
14. Частные производные, градиент.
15. Уравнение касательной.
16. Экстремумы.

Вариант для самостоятельного решения:
13) Найти производную (какая-нибудь функция f(x)).
14) Найти градиент функции $f = x^3 yz$ в точке $M(1,1,1)$ и производную по направлению $a = (1,1,0)$.

15) Найти уравнение касательной для $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ в точке $x_0 = 1$ и высоту касательной при x=0.

16) Найти экстремумы для $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2$.

Аналогичные задачи из практических занятий:

Задача 13. Найти 1 и 2 производную от $f(x) = \frac{x+1}{x+4}$.

Решение. $\left(\frac{x+1}{x+4}\right)' = \frac{(x+1)'(x+4) - (x+4)'(x+1)}{(x+4)^2} =$

$\frac{(x+4)-(x+1)}{(x+4)^2} = \frac{3}{(x+4)^2}$, что можно записать в виде $3(x+4)^{-2}$.

Вторая производная: $\left(3(x+4)^{-2}\right)' = -6(x+4)^{-3} = \frac{-6}{(x+4)^3}$.

Ответ. $f' = \frac{(x+4)-(x+1)}{(x+4)^2}$, $f'' = \frac{-6}{(x+4)^3}$.

Задача 14. Найти градиент функции $f = x^4 y$ в точке (1,1) и производную по направлению (1,3).

Решение. $\left(x^4y\right)_x' = 4x^3y$, $\left(x^4y\right)_y' = x^4$.

Градиент в произвольной точке: $\nabla f(x,y) = (4x^3y, x^4)$

Градиент в конкретной точке: $\nabla f(1{,}1) = (4{,}1)$

Нормируем вектор (1,3). $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Скалярно умножим $(4{,}1)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. $\frac{4}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$.

Ответ. $\nabla f(1{,}1) = (4{,}1)$, $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{7}{\sqrt{10}}$.

Задача 15. Найти уравнение касательной к кривой $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Значение в точке: $f(2) = y_0 = 16 + 12 + 2 = 30$.

Производная: $f'(x) = 6x^2 + 6x$.

Производная в точке: $f'(2) = 24 + 12 = 36$.

Уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ принимает вид $y - 30 = 36(x - 2)$, что преобразуется к виду $y = 36x - 42$.

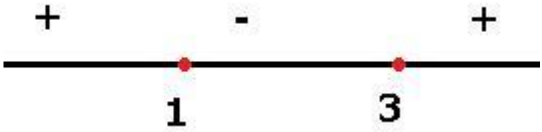
Ответ. $y = 36x - 42$.

Задача 16. Найти экстремумы функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

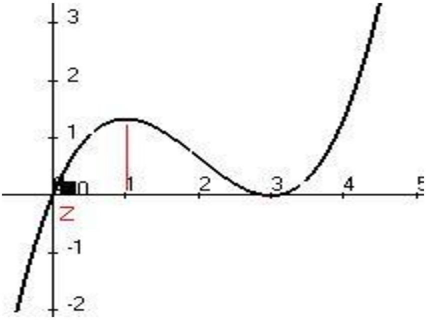
Решение. Найдём $f' = x^2 - 4x + 3$. Корни 1 и 3. Выясним знак производной на каждом из интервалов $(-\infty,1)$, $(1{,}3)$ и $(3,+\infty)$. Для этого надо вычислить знак f' в какой-нибудь точке на каждом из этих интервалов. Желательно для удобства вычислений взять целое число как представителя интервала.

Например, $0 \in (-\infty,1)$, $2 \in (1{,}3)$ и $4 \in (3,+\infty)$.

$f'(0) = 3 > 0$. $f'(2) = 4 - 8 + 3 = -1 < 0$. $f'(4) = 16 - 16 + 3 = 3 > 0$.



Таким образом, в точке $x=1$ рост сменяется убыванием, $x=1$ точка максимума.
В точке $x=3$ убыванием сменяется ростом, $x=3$ точка минимума.
Можно вычислить и ординаты, чтобы более подробно нарисовать график. Точки экстремума (1, 4/3) и (3, 0) . Для сведения, вот её график:



<u>2 семестр</u>

Контрольная работа № 1.

1. Подведение под знак дифференциала, преобразования.
2. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных дробей.
4. Интегрирование иррациональностей и тригонометрических функций.

Варианты для самостоятельного решения:

Вариант 1. Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{x+5}{x^2+4}dx$ 2. $\int x\sin 2x dx$ 3. $\int \frac{2x^2-10x+13}{(x-2)(x-3)^2}dx$ 4. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

Вариант 2. Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{4x+6}{x^2+9}dx$ 2). $\int x\cos 3x dx$ 3. $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x+4)(x-1)^2}dx$ 4. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$

Аналогичные задачи из практических занятий:

Задача 1.1. Вычислить $\int x\cos(x^2)dx$.

Решение. $\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)(2xdx) = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)d(x^2) =$

$= \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.

Ответ. $\frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.

Задача 1.2. Вычислить $\int \frac{1}{x^2+4x+20}dx$.

Решение. Дискриминант знаменателя отрицательный, поэтому здесь невозможно сделать как в прошлой задаче, так как нет корней знаменателя и дробь невозможно свести к виду $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$.

Но при D < 0 можно выделить полный квадрат:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+20}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+16}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4^2}dx.$$

С помощью замены $t = x+2$ сводится к интегралу:

$\int \dfrac{1}{t^2+4^2}dt = \dfrac{1}{4}arctg\left(\dfrac{t}{4}\right)+C$, и далее с помощью обратной замены получаем ответ: $\dfrac{1}{4}arctg\left(\dfrac{x+2}{4}\right)+C$.

Ответ. $\dfrac{1}{4}arctg\left(\dfrac{x+2}{4}\right)+C$.

Задача 2.1. Вычислить $\int xe^{3x}dx$.

Решение. Пусть $u = x$, так надо, чтобы понизилась степень на следующем шаге. Составим таблицу:

$u = x$	$v = \frac{1}{3}e^{3x}$
$u' = 1$	$v' = e^{3x}$

Тогда $\int xe^{3x}dx = \dfrac{1}{3}xe^{3x} - \dfrac{1}{3}\int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}xe^{3x} - \dfrac{1}{9}e^{3x} + C$.

Ответ. $\dfrac{1}{3}xe^{3x} - \dfrac{1}{9}e^{3x} + C$.

Задача 2.2. Вычислить $\int x\cos 5x dx$.

Решение.

$u = x$	$v = \frac{1}{5}\sin 5x$
$u' = 1$	$v' = \cos 5x$

$$\int x\cos 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C.$$

Ответ. $\frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение. Как видим, здесь корень 1 имеет кратность 2. Разложение на простейшие дроби нельзя проводить так, как будто бы здесь три независимых множителя $(x-1)$, $(x-1)$, $(x+2)$, т.е. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$, иначе получится противоречие, ведь общий знаменатель будет содержать всего лишь 1-ю степень $(x-1)$ но никак не вторую. Надо степени знаменателя учитывать по возрастающей, до кратности корня, а именно, так: $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$.

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Числитель этой дроби равен числителю исходной, той, которая была в интеграле:

$$A(x^2+x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1)=x^2+x+3.$$

$(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)=x^2+x+3$, система:

$\begin{cases} A \quad +C=1 \\ A+B-2C=1 \\ -2A+2B+C=3 \end{cases}$. Построим расширенную матрицу и решим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Система приведена к виду: $\begin{cases} A \quad + C = 1 \\ B - 3C = 0 \\ \quad 3B = 5 \end{cases}$

Тогда $B = \frac{5}{3}$, $C = \frac{5}{9}$, $A = \frac{4}{9}$. И теперь интеграл распадается на сумму трёх интегралов: $\frac{4}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{5}{9}\int \frac{1}{x+2}dx$.

В 1 и 3 слагаемых - как раньше, а вот во 2-м логарифм в ответе не получится, ведь тут уже 2-я а не 1-я степень в знаменателе.

Полезно вспомнить, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

То есть, интеграл от -2 степени будет содержать -1 степень, и меняется знак.

Ответ. $\frac{4}{9}\ln|x-1| - \frac{5}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{9}\ln|x+2| + C$.

Задача 4.1. Вычислить интеграл $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Здесь есть корни порядка 2 и 3. Наименьшее общее кратное, НОК(2,3) = 6. Поэтому замена $t = \sqrt[6]{x+1}$. При этом,

$x+1 = t^6$, $x = t^6 - 1$, $dx = 6t^5 dt$,

$\sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3} = (x+1)^{2/6} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2 = t^2$,

$\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2} = (x+1)^{3/6} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 = t^3$.

Тогда $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{t^6 - 1 + t^3}{t^2} 6t^5 dt = 6\int (t^6 - 1 + t^3) t^3 dt =$

$6\int (t^9 - t^3 + t^6) dt = \frac{6}{10}t^{10} - \frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{7}t^7 + C$.

Сделаем обратную замену и получим ответ:

Ответ. $\frac{6}{10}\sqrt[6]{x+1}^{10} - \frac{6}{4}\sqrt[6]{x+1}^{4} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x+1}^{7} + C$.

Задача 4.2. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx$.

Решение. Здесь тоже суммарная степень чётная, замена $t = tgx$.

$dx = \frac{1}{t^2+1} dt$. $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx = \int \frac{1}{\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^5}} \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{\sqrt{1+t^2}^8}{t^3} \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\int \frac{\left(t^2+1\right)^4}{t^3} \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{\left(t^2+1\right)^3}{t^3} dt = \int \frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t^3} dt$$

здесь мы воспользовались формулой $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$$\int \left(t^3+3t+3\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+3\ln|t|-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+C .$$

После обратной замены получаем ответ:

Ответ. $\frac{1}{4}tg^4 x+\frac{3}{2}tg^2 x+3\ln|tgx|-\frac{1}{2}ctg^2 x+C$.

Контрольная работа № 2.

1. Определённый интеграл и его приложения.
2. Несобственный интеграл.
3. Двойной интеграл.
4. Дифф. уравнения 1 порядка с разделяющимися переменными.

Варианты для самостоятельного решения:

Вариант 1.

1.Вычислить площадь области, ограниченной кривыми:

$y = x^3$, $y = -x$, $x = 1$.

2. Найти несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

3. Найти двойной интеграл $\iint_D (x+y)dxdy$, где D - треугольник с вершинами (0,0), (1,1), (1,3).

4. Решить дифф. уравнение $y' = 4x^3 y$.

Вариант 2.

1.Вычислить площадь области, ограниченной кривыми:
$y = x^2$, $y = -2x$, $x = 1$.

2. Найти несобственный интеграл $\int_0^{\infty} e^{-6x} dx$.

3. Вычислить в полярных координатах интеграл от функции $f = x^3 y$ по 1-й четверти круга радиуса 1.

4. Дифф. уравнение 1 порядка $y' = 3x^2 y$.

Аналогичные задачи из практических занятий:

Задача 1.1. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

Решение. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}$

здесь мы можем заменить $\sin x$ на t, но тогда нужно сделать пересчёт верхнего и нижнего пределов. Если $x \in [0, \pi/2]$ то $t \in [\sin(0), \sin(\pi/2)]$, т.е. $t \in [0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t)\Big|_0^1 = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

А можно было сначала вычислять интеграл как неопределённый, тогда надо было бы вернуться к исходной переменной x (то есть сделать обратную замену), но пределы можно не пересчитывать.

$$\int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t)+C = arctg(\sin x)+C$$

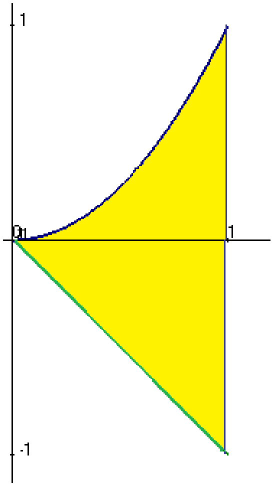
$$arctg(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = arctg\left(\sin \pi/2\right) - arctg\left(\sin 0\right) = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

Задача 1.2. Найти площадь области, ограниченной линиями $\{y = x^2, y = -x, x = 1\}$

Решение.

$$\int_0^1 \left(x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 + x\right)dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$



Ответ. $\frac{5}{6}$.

Задача 2. Найти несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)\Bigg|_0^\infty =$

$$\frac{1}{2}\left(arctg(\infty)-arctg(1)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

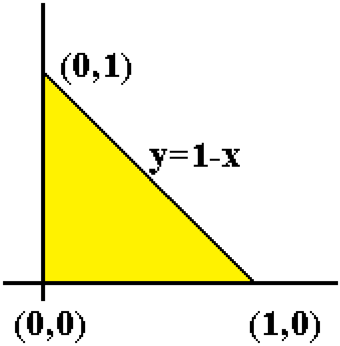
Здесь под символом $arctg(\infty)$ понимается предел $\lim\limits_{t\to\infty} arctg(t)$.

Ответ. $\frac{\pi}{8}$.

Задача 3.1. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ по треугольнику D, вершины которого: $(0,0),(1,0),(0,1)$.

Решение. Строение треугольника понятно (см. чертёж).

Наклонная линия задаётся уравнением $y = 1 - x$.



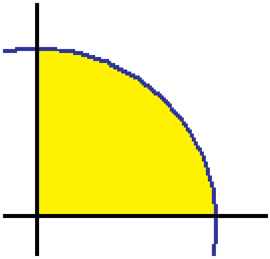
Вычисление: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(xy\Big|_0^{1-x} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} \right) dx =$

$\int\limits_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x - x^2 + \frac{1-2x+x^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$

$\frac{x}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. **Ответ.** $\frac{1}{3}$.

Задача 3.2. Вычислить $\iint\limits_D x^9 y dxdy$, где D - четверть круга радиуса 1 (в первой координатной четверти).

Решение. Заменим $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а также умножим на якобиан ρ.



$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 (\rho\cos\varphi)^9(\rho\sin\varphi)\rho\ d\rho\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho^{11}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\rho\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(\cos^9\varphi\sin\varphi\left.\frac{\rho^{12}}{12}\right|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\varphi$$

Дальше остаётся интеграл от одной переменной, там можно применять обычный способ, подведение под знак дифференциала.

$$\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\varphi = -\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi(-\sin\varphi\ d\varphi) =$$

$$-\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\ d(\cos\varphi) = -\frac{1}{12}\frac{1}{10}\cos^{10}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{120}(0-1) = \frac{1}{120}.$$

Ответ. $\frac{1}{120}$.

Задача 4. Решить уравнение $y' = xy$.

Решение. $y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow |y| = e^{C_1}e^{x^2/2} \Rightarrow y = Ce^{x^2/2}.$$

Ответ. $y = Ce^{x^2/2}$.

Проверка. Если $y = Ce^{x^2/2}$, то $y' = Cxe^{x^2/2}$, действительно, производная имеет лишний множитель x по сравнению с исходной функцией, и подходит в качестве решения уравнения $y' = xy$.

Контрольная работа № 3.
1. Линейные дифф. уравнения 2 порядка с задачей Коши.
2. Действия с комплексными числами.
3. Формула Муавра.
4. Числовые ряды.

Вариант для самостоятельного решения:
1. Решить линейное однородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$, найти частное решение при $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

2. Поделить $\dfrac{1+5i}{1+7i}$.

3. Вычислить в показательной форме: $(-\sqrt{3} + i)^9$
ответ дать в виде a+bi.

4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$

Аналогичные задачи из практических занятий:
Задача 1. Найти частное решение дифф. уравнения $y'' - 10y' + 9y = 0$ при условиях Коши: $y(0) = -1, y'(0) = 7$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 - 10r + 9 = 0$, его корни: $r_1 = 1$, $r_2 = 9$. Тогда ФСР состоит из e^x и e^{9x}, общее решение такое: $y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$.

Теперь найдём решение задачи Коши. Сначала запишем функцию и её производную:
$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$ и $y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}$.

Кроме того, у нас есть информация: $y(0) = -1, y'(0) = 7$.

Тогда $C_1 + C_2 = -1$, $C_1 + 9C_2 = 7$. Получается система уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ C_1 + 9C_2 = 7 \end{cases}$$ вычитая 1-е уравнение из 2-го, находим, $8C_2 = 8$, т.е.

$C_2 = 1$, тогда $C_1 = -2$. Тогда частное решение: $y = -2e^x + e^{9x}$.

Ответ. $y = -2e^x + e^{9x}$.

Задача 2. Разделить $\dfrac{-2+2i}{1+i}$ двумя способами:

1) с помощью умножения на сопряжённое число.

2) в показательной форме.

Решение. 1) $\dfrac{-2+2i}{1+i} = \dfrac{(-2+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{4i}{2} = 2i$.

2) $$\frac{-2+2i}{1+i} = \frac{2\sqrt{2}\cdot e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = 2\cdot e^{i\left(3\pi/4 - \pi/4\right)} = 2\cdot e^{\pi i/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

Ответ. $2i$.

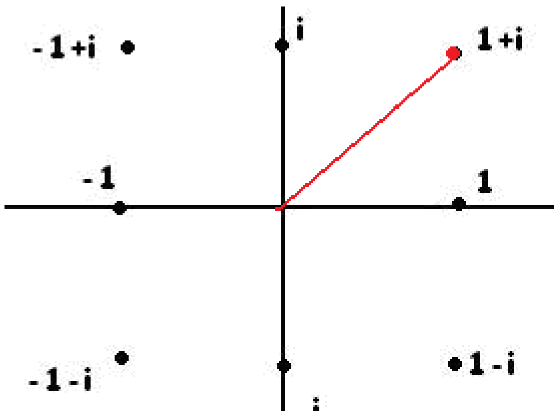
Задача 3. Возвести в степень в алгебраической и показательной форме: $(1+i)^4$.

Решение. Перейдём к показательной форме, для этого сначала найдём модуль и аргумент числа $(1+i)$ с помощью чертежа. Число в 1-й четверти, угол 45 градусов.

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. По формуле Муавра, $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 =$

$$\left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{\pi}{4}4} = 2^2 e^{i\frac{\pi}{4}4} = 4e^{i\pi} = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4(-1+0i) = -4.$$

Чертёж, показывающий, расположение $(1+i)$ на плоскости, это число выделено красным цветом:



Задача 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n n!}$

Решение. Запишем предел отношения модуля (n+1) члена ряда к модулю n-го. При этом мы отбрасываем знакочередование.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!} : \frac{(n+1)}{2^n n!} \right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{2^n n!}{(n+1)} \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 1\cdot 0 = 0.$$

Итак, $q = 0 < 1$, ряд сходится (абсолютно).

Контрольная работа № 4.

1. Функциональные ряды.
2. Ряды Тейлора
3. Ряды Лорана.
4. Ряды Фурье.

Вариант для самостоятельного решения:

1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$.

2. Функцию $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ разложить в ряд Тейлора по степеням z.

3. Функцию $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ разложить в ряд Лорана по степеням z.

4. Найти ряд Фурье для $f(x) = x + 2$ на интервале $(-1,1)$.

Аналогичные задачи из практических занятий:

Задача 1.1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+3x+2)^n}{2^n}$.

Решение. По признаку Даламбера, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|x^2+3x+2\right|^n}{2^n}} =$

$\frac{\left|x^2+3x+2\right|}{2} < 1$, тогда $\left|x^2+3x+2\right| < 2$, что равносильно выполнению одновременно двух неравенств: $-2 < x^2+3x+2 < 2$.

Для правого неравенства, получаем $x^2+3x < 0$, корни $0,-3$, оно верно для $x \in (-3,0)$.

Для левого неравенства, $x^2+3x+4 > 0$, но это выполняется на всей числовой прямой, т.к. корней нет, а ветви этой параболы направлены вверх. Верно для $x \in (-\infty,\infty)$. Пересечением этих двух множеств является интервал $(-3,0)$.

Также легко заметить, что в граничных точках ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, расходится.

Ответ. абсолютно сходится в $(-3,0)$.

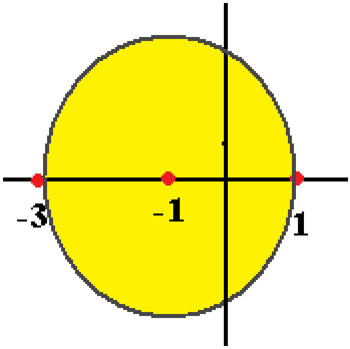
Задача 1.2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(x-2)^n}$.

Решение. По признаку Коши, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{|x-2|^n}} = \frac{3}{|x-2|} < 1$, т.е. $|x-2| > 3$, что равносильно $x > 5$ или $x < -1$. Для граничных точек получаются

числовые ряды, для которых нет сходимости (по необходимому признаку).
Ответ. абсолютно сходится в $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$.

Задача 2. Разложить в ряд Тейлора: $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+3)}$ по степеням $z+1$.

Решение. Разложение на простейшие сначала производится точно так же, как в задаче 8: $\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z+3}$. Но здесь центр круга не в 0, а в точке -1 потому что $z+1=z-(-1)$. Точки разрыва $z=1$ и $z=-3$. Поэтому расстояние до ближайшей точки разрыва равно 2, и круг здесь имеет вид $|z+1|<2$. Он показан на чертеже:



В выражении $\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z+3}$ сначала надо прибавить и отнять константы, чтобы в знаменателе явно был выделен блок $z+1$.

$\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z+3}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(z+1)-2}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(z+1)+2}$ теперь скобку вида $(z+1)$ мы не будем раскрывать вплоть до ответа, можно даже переобозначить её через w (но не обязательно).
Выносим за скобку константу 2 в каждой из дробей.

$-\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{3}{8}\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}$. В круге $|z+1|<2$ получается, что верно $\frac{|z+1|}{2}<1$ то есть там как раз получается такое $q<1$, как и надо для сходящейся геометрической прогрессии. Тогда далее

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{3}{8}\frac{1}{1-\left(-\frac{z+1}{2}\right)} = -\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n+\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n .$$

Здесь в 2 частях индексы меняются синхронно, т.е. можно объединить

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+3(-1)^n}{2^{n+3}}(z+1)^n .$$

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+3(-1)^n}{2^{n+3}}(z+1)^n$.

Задача 3. Разложить в ряд Лорана $f(z)=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+4}$ по степеням z

Решение. Точки разрыва $z=3$ и $z=-4$, центр кольца в 0, значит, кольцо определяется условием $3<|z|<4$.

$$f(z)=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+4} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n =$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}$. Можно ещё произвести сдвиг индекса в главной части, чтобы не был индекс 0 в двух частях сразу:

Ответ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}$.

Задача 4. Разложить $f(x)=2x+3$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале (-1,1).

Решение. Заметим, что функция $f(x)-3=2x$ нечётная. То есть, f это сумма нечётной и константы. Таким образом, коэффициенты a_n здесь тоже окажутся равны 0. Надо вычислить a_0 и b_n.

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2x+3)dx = (x^2+3x)\Big|_{-1}^{1} = (1+3)-(1-3) = 4-(-2) = 6\,,\ \frac{a_0}{2} = 3\,.$$

$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2x+3)\sin n\pi x dx$. Вычисляем интеграл по частям.

$u = 2x+3$, $u' = 2$, $v' = \sin n\pi x$, $v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$b_n = -\frac{2x+3}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx =$$

$$-\frac{5}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}(0-0) = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{4(-1)^n}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\,.$$

Ответ. Ряд Фурье: $3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Список литературы

I. Пособия кафедры.

1. Л.И.Магазинников, А.Л. Магазинникова. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Учебное пособие http://edu.tusur.ru/publications/2244

2. Л.И.Магазинников, А.Л.Магазинников. Дифференциальное исчисление. Учебное пособие http://edu.tusur.ru/publications/2246

3. А.А.Ельцов, Т.А.Ельцова. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения http://edu.tusur.ru/publications/2259

4. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования http://edu.tusur.ru/publications/2258

II. Учебные пособия для 446 групп.

1. Приходовский М.А. Математика (курс лекций, семестр 2, часть 1): Учебное пособие для специальности 09.03.03 «Прикладная информатика в экономике» — Томск: ТУСУР, 2016. — 90 с. http://edu.tusur.ru/publications/6051

2. Приходовский М.А. Математика (курс практических занятий, семестр 2, часть 1): Учебно-методическое пособие для специальности 09.03.03 - Прикладная информатика в экономике — Томск: ТУСУР, 2016. — 78 с. http://edu.tusur.ru/publications/6044

3. Приходовский М.А. Математика (курс лекций, семестр 2 часть 2): Учебное пособие для специальности 09.03.03 - Прикладная информатика в экономике — Томск: ТУСУР, 2016. — 64 с. http://edu.tusur.ru/publications/6077

4. Приходовский М.А. Математика (курс практических занятий, семестр 2, часть 2): Учебно-методическое пособие для специальности 09.03.03 - Прикладная информатика в экономике — Томск: ТУСУР, 2016. — 34 с. http://edu.tusur.ru/publications/6078

5. Приходовский М.А. Математика (курс лекций, семестр 1, часть 1) учебное пособие для специальности 09.03.03 "прикладная информатика в экономике" — Томск: ТУСУР, 2016. — 84 с. http://edu.tusur.ru/publications/6308

6. Приходовский М.А. Математика (курс практических занятий, семестр 1, часть 1) учебное пособие для специальности 09.03.03 "прикладная информатика в экономике" — Томск: ТУСУР, 2016. — 102 с. http://edu.tusur.ru/publications/6307

7. Приходовский, М. А. Математика: Курс лекций. Семестр 1, Часть 2 [Электронный ресурс] / Приходовский М. А. — Томск: ТУСУР, 2017. — 90 с.
http://edu.tusur.ru/publications/6633

8. Приходовский, М. А. Математика: Курс практических занятий. Семестр 1, Часть 2 [Электронный ресурс] / Приходовский М. А. — Томск: ТУСУР, 2017. — 90 с.
http://edu.tusur.ru/publications/6634