Кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры

Методы оптимального управления в автоматизированных системах управления воздушным движением (АС УВД)

Томск 2017

Кобрин Юрий Павлович
Методы оптимального управления в автоматизированных системах управления воздушным движением (АС УВД). Методические указания к лабораторной работе и по организации самостоятельной работы по дисциплине «Автоматизированные системы управления воздушным движением» для студентов очного и заочного обучения по специальности 162107.65 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» (специалитет). - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), кафедра КИПР, 2017. – 24 с.

Методические указания посвящены изучению возможностей математического моделирования и решения оптимизационных задач в автоматизированных системах (АС) управления воздушным движением (УВД) на основе методов линейного программирования.

Предназначены для помощи в подготовке бакалавров и магистрантов по специальности 162107.65 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» (специалитет).

СОДЕРЖАНИЕ

1 Цель работы 3
2 Порядок выполнения работы и отчётность 3
3 Задачи оптимального управления в АС УВД 3
3.1 Введение 3
3.2 Общая постановка задачи о принятии решения 6
3.3 Примеры задач оптимального управления в АС УВД, решаемых с помощью методов линейного программирования 8
3.3.1 Задача об оптимальной загрузке самолёта несколькими типами грузов 8
3.3.2 Расчёт оптимального плана перевозок (транспортная задача) 8
3.3.3 Задача распределения неоднородных ресурсов 9
3.3.4 Загрузка самолёта контейнерами 11
3.3.5 Распределение экипажей самолётов по рейсам (задача о назначениях.) 11
3.4 Основные понятия линейного программирования 12
3.4.1 Математическая формулировка оптимизационных задач 12
3.4.2 Решение оптимизационных задач в пакете MathCAD 15
3.4.3 Пример графического решения задачи линейного программирования в Mathcad 17
3.4.4 Этапы численного решения оптимизационных задач 18
3.4.5 Пример решения задачи распределения неоднородных ресурсов 18
4 Варианты заданий 20
4.1 Расчёт оптимального плана перевозок 20
4.2 Варианты задания «Оптимальная загрузка самолёта» 22
5 Контрольные вопросы 23
6 Список литературы 24

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование возможностей математического моделирования и решения оптимизационных задач в автоматизированных системах (АС) управления воздушным движением (УВД).

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ОТЧЁТНОСТЬ

1) Перед выполнением этой работы следует ознакомиться с краткими теоретическими сведениями.
2) Оформить отчёт в соответствии с [1], который должен содержать следующие разделы:
   a) Цель работы.
   b) Условия индивидуального задания.
   c) Расчёты в соответствии с индивидуальным заданием.
   d) Ответы на контрольные вопросы.
   e) Выводы.
3) Для получения зачёта по лабораторной работе в ходе защиты отчёта студент должен:
   a) Представить результаты расчётов, причём от студента требуется не только формально правильный результат расчёта, но и его осмысленное понимание;
   b) уметь отвечать на контрольные вопросы.

3 ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В АС УВД

3.1 Введение

Процесс управления любой организацией состоит в принятии тех или иных решений. При том ограниченном объёме информации, который был доступен на ранних этапах развития общества, принималось оптимальное в некотором смысле решение на основании интуиции и опыта, а затем, с возрастанием объёма информации об изучаемом явлении, – с помощью ряда прямых расчётов. Так происходило, например, создание календарных планов работы промышленных предприятий.

В современных условиях в связи с переходом к рыночным отношениям особенно остро повысилась управленческая роль руководителя, когда объем входной информации столь велик, что его обработка с целью принятия большинства решений в большинстве случаев невозможна без применения современных компьютеров.

Эффективность управления заключается в обоснованности и оптимальности принимаемых решений. В процессе управленческой деятельности часто приходится оперативно решать следующие задачи: как повысить эффективность работы? Как улучшить транспортные издержки? Как распределить ресурсы? Какова снизить затраты? Как оптимизировать кадровый состав и т.д. Руководителю часто приходится решать оптимизационные задачи, в которых ищется наилучшее в определённом смысле решение проблемы из множества возможных при ограничениях (финансовых, временных, материальных, сырьевых, и т.д.). В связи с этим умение находить оптимальные управленческие решения − один из признаков, по которому оцениваются профессионализм и опытность специалиста.

Оптимальное решение – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение.

Основным средством решения задач оптимизации решений и экономического анализа являются **математические модели**, ценность которых состоит в том, что они позволяют получить чёткое представление об исследуемом объекте, охарактеризовать и количественно описать его внутреннюю структуру и внешние связи.

Математические модели оптимизации позволяют существенно поднять качество планирования и управления при реализации различных экономических проектов. Так, если установлено (например, методами математической статистики), что рассматриваемые характеристики зависят друг от друга линейно, причём область допустимых решений задаётся линейными функциями-ограничениями, то для решения таких задач могут быть использованы **линейные математические модели**. Это могут быть задачи о планировании перевозок, о распределении ресурсов, распределении работ, расстановке кадров и многие другие.

Оптимизация - это выбор наилучшего варианта из множества возможных. Если критерий выбора известен и вариантов немного, то решение может быть найдено путём перебора и сравнения всех вариантов. Однако часто бывает так, что число возможных вариантов настолько велико, что полный перебор практически невозможен даже для современных суперкомпьютеров. В таких случаях приходится формулировать задачу на языке математики и применять специальные методы поиска оптимального решения, т.е. методы оптимизации.

Все задачи оптимизации делятся на два больших класса:

1) задачи математического программирования (статические задачи);

2) задачи оптимального управления (динамические задачи).

Различие между этими классами задач состоит в том, что в задаче математического программирования необходимо найти оптимальное число (в общем случае вектор), а в задаче оптимального управления - оптимальную функцию. С формально-математической точки зрения, это различие существенное, но в прикладном плане оно зачастую оказывается весьма условным.

Математическое программирование[1] позволяет широко использовать в процессе принятия решений компьютеры, что является жизненной необходимостью в процессе технико-экономического обоснования и определения экономической эффективности инвестиционных проектов. Теоретической основой и практическим инструментом анализа и прогнозирования решений в экономике и бизнесе являются экономико-математические модели и проводимые по ним расчёты. Необходимость применения персональных компьютеров в процессе принятия управленческих решений в наше время стала особенно актуальна.

К математическому программированию относится:

1) **Линейное программирование**: состоит в нахождении экстремального значения линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, связывающих эти переменные.

---

[1] Слово программирование в данном случае означает «планирование».

2) **Нелинейное программирование**: целевая функция и ограничения могут быть нелинейными функциями.

3) **Целочисленное программирование:** на оптимальные решения в задачах линейного и нелинейного программирования накладывается условие целочисленности.

4) **Динамическое программирование:** для отыскания оптимального решения планируемая операция разбивается на ряд шагов (этапов) и планирование осуществляется последовательно от этапа к этапу. Однако выбор метода решения на каждом этапе производится с учётом интересов операции в целом.

Развитие компьютерной техники, совершенствование информационных технологий, распространение пакетов прикладных программ позволили сделать доступными и наглядными современные методы решения математических задач широкому кругу пользователей, освободив от проведения трудоёмких расчётов. Оптимизационную задачу формализуют и рассматривают как математическую. Для решения таких задач используют различные численные методы, которые реализуются на персональных компьютерах с помощью языков программирования высокого уровня или специализированного программного обеспечения:

– Электронных таблиц, позволяющих проводить вычисления с данными, представленными в виде двумерных массивов, имитирующих бумажные таблицы (например, *Microsoft Excel* [2]);

– *Matlab* [3,4] **-** пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений;

– Популярной системы компьютерной алгебры *Mathcad* [3,5,6,7,8], ориентированной на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличающейся лёгкостью использования;

– Программный пакет *Maple* [4] - систему компьютерной алгебры, ориентированную на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование;

– *Mathematica* [9] - система компьютерной алгебры, ведущий программный продукт для обработки числовых, символьных и графических данных, используемым профессионалами практически в каждой ветви научных и технических вычислений.

К сожалению, значительное число руководителей-управленцев не владеют даже простым и доступным непрофессиональным программистам средством решения задач математического программирования - математическим пакетом MathCAD.

Далее мы будем рассматривать задачи математического программирования. Во-первых, потому, что именно к ним сводится большинство реальных задач планирования и управления в экономике; а во-вторых, потому, что многие задачи оптимального управления могут быть сформулированы при условии, что временная характеристика дискретна, и сведены таким образом к задачам математического программирования.

В случае линейности модели применяют **методы линейного программирования**. Особенность линейного программирования заключается в том, что связь между факторами, влияющими на оптимизируемую характеристику, линейна. Кроме того, используемые в задаче функции-ограничения, определяющие область изменения допустимых значений рассматриваемой величины, должны быть заданы только линейными зависимостями.

Таким образом, линейное программирование решает задачи нахождения оптимальных значений переменных для линейной целевой функции и системы её ограничений, заданных линейными алгебраическими уравнениями или неравенствами.

Рассмотрим постановку некоторых распространённых задач, встречающихся в управлении воздушным движением [10], сводящихся к задачам линейного программирования.

3.2 Общая постановка задачи о принятии решения

Процессы принятия решений лежат в основе любой целенаправленной деятельности:

1) В экономике они обеспечивают оптимальное функционирование и взаимодействие производственных и хозяйственных организаций.

2) В научных исследованиях – позволяют выделить важнейшие научные проблемы, найти способы их изучения, предопределяют развитие экспериментальной базы и теоретического аппарата.

3) При создании новой техники – составляют важный этап в проектировании устройств, приборов, комплексов, зданий, в разработке технологии их построения и эксплуатации.

4) В социальной сфере – используются для организации функционирования и развития социальных процессов, их координации с хозяйственными и экономическими процессами.

Оптимальные (эффективные) решения позволяют достигать цели при минимальных затратах трудовых, материальных и сырьевых ресурсов.

В классической математике методы поиска оптимальных решений рассматривают в разделах классической математики, связанных с изучением экстремумов функций, в математическом программировании.

Математическое программирование является одним из разделов исследования операций – прикладного направления кибернетики, используемого для решения практических организационных задач. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий).

Под принятием решений в исследовании операций понимают сложный процесс, в котором можно выделить следующие основные этапы:

1-й этап. Построение качественной модели рассматриваемой проблемы, т.е. выделение факторов, которые представляются наиболее важными, и установление закономерностей, которым они подчиняются. Обычно этот этап выходит за пределы математики.

2-й этап. Построение математической модели рассматриваемой проблемы, т.е. запись в математических терминах качественной модели. Таким образом, математическая модель – это записанная в математических символах абстракция реального явления, так конструируемая, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношения между совокупностью переменных – параметрами управления явлением. Этот этап включает также построение целевой функции переменных, т.е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимающего решения.

В результате этих двух этапов формируется соответствующая математическая задача. Причём, второй этап уже требует привлечения математических знаний.

3-й этап. Исследование влияния переменных на значение целевой функции. Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических, задач, возникающих на втором этапе процесса принятия, решения.

Широкий класс задач управления составляют такие экстремальные задачи, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами. Теория и методы решения этих задач как раз и составляют содержание математического программирования. На третьем этапе, пользуясь математическим аппаратом, находят решение соответствующих экстремальных задач. Обратим внимание на то, что задачи математического программирования, связанные с решением практических вопросов, как правило, имеют большое число переменных и ограничений. Объем вычислительных работ для нахождения соответствующих решений столь велик, что весь процесс не мыслится без применения современных компьютеров, а значит, требует либо создания программ для компьютеров, реализующих те или иные алгоритмы, либо использования уже имеющихся стандартных программ.

4-й этап. Сопоставление результатов вычислений, полученных на 3-м этапе, с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов (критерий практики). Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации. Здесь возможны два случая:

1) Если результаты сопоставления неудовлетворительны (обычная ситуация на начальной стадии процесса моделирования), то переходят ко второму циклу процесса. При этом уточняется входная информация о моделируемом объекте и в случае необходимости уточняется постановка задачи (1-й этап), уточняется или строится заново математическая модель (2-й этап), решается соответствующая математическая задача (3-й этап) и, наконец, снова проводится сопоставление (4-й этап).

2) Если результаты сопоставления удовлетворительны, то модель принимается. Когда речь идёт о неоднократном использовании на практике результатов вычислений, возникает задача подготовки модели к эксплуатации. Предположим, например, что целью моделирования является создание календарных планов производственной деятельности предприятия. Тогда эксплуатация модели включает в себя сбор и обработку информации, ввод обработанной информации в компьютере, расчёты на основе разработанных программ календарных планов и, наконец, выдачу результатов вычислений (в удобном для пользователей виде) для их использования в сфере производственной деятельности.

В математическом программировании можно выделить два направления.

К первому, уже вполне сложившемуся направлению – собственно математическому программированию – относятся детерминированные задачи, предполагающие, что вся исходная информация является полностью определённой.

Ко второму направлению – так называемому стохастическому программированию – относятся задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределённости, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками. Так, планирование производственной деятельности зачастую производится в условиях неполной информации о реальной ситуации, в которой будет выполняться план. Или, скажем, когда экстремальная задача моделирует работу автоматических устройств, которая сопровождается случайными помехами. Заметим, что одна из главных трудностей стохастического программирования состоит в самой постановке задач, главным образом из-за сложности анализа исходной информации.

3.3 Примеры задач оптимального управления в АС УВД, решаемых с помощью методов линейного программирования

3.3.1 Задача об оптимальной загрузке самолёта несколькими типами грузов

Авиакомпания занимается перевозкой двух типов грузов. Возможности на перевозку связаны ограничениями по весу и габаритам. Вес ограничен 150 единицами. Единица веса груза второго типа занимает в 3 раза меньший объем, чем первого. Объем загрузки ограничен 300 условными единицами по габаритам (для которых плотность второго груза принимается за единицу). Требуется найти количества грузов (x1 - единиц веса груза первого типа и x2 - второго), если известно, что перевозка груза первого типа приносит вдвое большую прибыль, чем второго (по весу).

Пример.

Ограничения задачи записываются:

$$\begin{cases} 3 \cdot x1 + x2 \leq 300 \\ x1 + x2 \leq 150 \end{cases}$$

Целевая функция

$$f = 2 \cdot x1 + x2$$

Требуется среди $x1, x2 \geq 0$ найти такие, которые сообщают функции f максимальное значение.

3.3.2 Расчёт оптимального плана перевозок (транспортная задача)

Классическая транспортная задача — это задача об оптимальном плане перевозок однородного продукта из однородных пунктов наличия в однородные пункты потребления на однородных транспортных средствах со статичными данными (это основные условия задачи). Под поставщиками и потребителями понимаются различные предприятия, аэропорты, склады, магазины и т. д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т. п. Целью транспортной задачи является обеспечение доставки продукции потребителю в нужное время и место при минимально возможных совокупных затратах трудовых, материальных, финансовых ресурсов. Цель считается достигнутой при выполнении шести условий: 1. нужный товар… 2. необходимого качества…

3. в необходимом количестве доставлен… 4. в нужное время… 5. в нужное место… 6. с минимальными затратами.

Пример.

Для планирования использования воздушных судов показателем эффективности может служить *показатель суммарных затрат*, необходимых для обеспечения перевозки пассажиров. Очевидно, что этот показатель должен быть как можно меньше. Рассмотрим типичную ситуацию, при которой необходимо оптимальное планирование и принятие эффективного решения.

В аэропорту для перевозки пассажиров по n маршрутам может быть использовано m типов самолётов. Вместимость самолёта i-го типа равна A_i человек, количество пассажиров, перевозимых по j-му маршруту за сезон, составляет B_j человек. Затраты, связанные с использованием самолёта i-го типа на j-м маршруте, составляют S_{ij}. Определить, сколько рейсов X_{ij} необходимо выполнить самолётами типа i на каждом из маршрутов j, чтобы удовлетворить потребности в перевозках.

С точки зрения лётного состава самым справедливым будет план, разработанный по принципу равного распределения рейсов на каждом маршруте, при котором $X_{11} = X_{21}$, $X_{12} = X_{22}$, $X_{13} = X_{23}$ и т.д. Однако этот план, назовём его первоначальным, будет чрезмерно затратным. В каждом варианте лабораторной работы заданы общие затраты F_1 - затраты по первоначальному плану. С этими затратами надо будет сравнить затраты F, рассчитанные с помощью математической модели.

3.3.3 Задача распределения неоднородных ресурсов

Пусть некоторое предприятие обладает ресурсами $S_1, S_2, \dots, S_n$ в количествах соответственно $b_1, b_2, \dots, b_n$единиц. Используя данные ресурсы предприятие может изготовить изделия$И_1, И_2, \dots, И_m$, при этом известны величины a_{ij}, – количество i-го ресурса, идущего на изготовление одного изделия j-го вида ($i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots, m$). Кроме того, известны величины c_j – прибыль, получаемая предприятием от реализации одного изделия j-го вида.

Требуется составить план выпуска изделий, при котором достигается максимальная суммарная прибыль (прибыль от реализации всех изделий).

Для решения поставленной задачи сформулируем её математическую модель, первоначально сведя исходные данные в следующую таблицу:

Вид ресурса	Запас ресурса	$И_1$	$И_2$	…	$И_m$
S_1	b_1	A_{11}	A_{11}	…	A_{1m}
S_2	b_2	A_{21}	A_{21}	…	A_{2m}
…	…	…	…	…	…
S_n	b_n	A_{n1}	A_{n1}	…	A_{nm}

Прибыль от реализации одного изделия	c_1	c_{12}	…	c_m

Математическая модель задачи распределения неоднородных ресурсов.

Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Введём следующие обозначения: пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$– количество изделий $И_1$, $И_2, \dots, И_m$, которые может производить предприятие. Поэтому количество рассматриваемых переменных – m штук.

2. Запишем целевую функцию, зависящую от $x_1, x_2, \dots, x_m$ и что с ней необходимо сделать (максимизировать или минимизировать).

В данной задаче целевая функция – суммарная прибыль, получаемая предприятием от реализации всех произведённых изделий, может быть записана в виде:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_m \cdot x_m = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot x_j \to max$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения по запасам сырья. Зная количество сырья каждого вида, идущее на изготовление одной единицы изделия, и запасы сырья можно составить следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} \text{Ресурс } \mathrm{S_1}: a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m \le b_1 \\ \text{Ресурс } \mathrm{S_2}: a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m \le b_2 \\ \dots \\ \text{Ресурс } \mathrm{S_n}: a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_m \le b_n \end{cases}$$

Полученная система устанавливает, что количество сырья, расходуемое на изготовление всех изделий, не может превысить имеющихся на предприятии запасов сырья.

3.2.Условие неотрицательности переменных. Исходя из физического смысла, на переменные налагаются дополнительные условия, требующие неотрицательности их значений:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0; \\ \dots \\ x_n \ge 0. \end{cases}$$

При этом равенство нулю соответствующей переменной означает, что данное изделие не выпускается.

3.3 Условие целочисленности переменных. На переменные можно накладывать дополнительное условие целочисленности, которое “запрещает” выпуск не целых изделий:

$$\begin{cases} x_1 - \text{целое}; \\ x_2 - \text{целое}; \\ \dots \\ x_n - \text{целое}. \end{cases}$$

Таким образом, целевая функция и ограничения образуют математическую модель задачи распределения неоднородных ресурсов.

3.3.4 Загрузка самолёта контейнерами

Данная задача относится к классу задач целочисленного программирования. Искомые неизвестные в ней должны быть представлены целыми числами. Простое округление результата (или выделение целой части) в тех случаях, когда числа небольшие, приводит далеко к неоптимальному решению. Для пояснения разберём следующий пример, рассмотренный в [8].

Пусть имеется набор контейнеров, все в единственном числе: $П_1$, $П_2$, ..., $П_6$. Их веса и стоимости указаны в табл. 5.1.

Зная ограничения на загрузку самолёта Q=35 ед., требуется определить такой набор контейнеров, чтобы их суммарная стоимость (прибыль) была максимальная.

3.3.5 Распределение экипажей самолётов по рейсам (задача о назначениях.)

Распределить технические бригады, чтобы время обслуживания самолётов было минимальным; так разместить оборудование, чтобы производительность работ была максимальной; так распределить экипажи по рейсам, чтобы затраты, связанные с распределением, были минимальными и т.д.

Особенность задачи о назначениях заключается в том, что каждый ресурс используется ровно один раз и каждому объекту будет приписан ровно один ресурс.

Решение задачи записывается в виде квадратной матрицы

$$X = \left\| x_{ij} \right\|;\ i,j\ = 1,2,\dots,m.$$

Искомая переменная x_{ij} в задаче о распределении экипажей имеет смысл 1, если i-й экипаж закрепляется за j-м рейсом

$$x_v = \begin{cases} 0, \text{ если } i - \text{й экипаж закрепляется за } j - \text{м рейсом} \\ \qquad\qquad 1, \text{в противном случае} \end{cases}$$

В задаче требуется минимизировать общую стоимость назначений:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij \to min}$$

где c_{ij}- элементы квадратной матрицы стоимости назначений C. Ограничениями задачи являются:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \text{ , для всех } i \text{ и } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \text{ для всех } j$$

Их смысл: каждый рейс выполняется по разу и каждый экипаж выполняет по одному полёту. Решение должно быть целочисленно *(x* либо 0, либо 1).

3.4 Основные понятия линейного программирования

3.4.1 Математическая формулировка оптимизационных задач

В рассмотренных выше примерах задач линейного программирования требовалось найти максимум или минимум линейной функции при условии, что ее переменные принимали неотрицательные значения и удовлетворяли некоторой системе линейных уравнений или линейных неравенств либо системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения. Каждая из этих задач является частным случаем общей задачи линейного программирования.

Определение 1.

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \left(i = \overline{1, k}\right) \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{k+1, m}\right) \tag{3.3}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, \iota}, i \leq m) \tag{3.4}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины и $k \leq m$.

Определение 2.

Функция (3.1) называется целевой функцией (или линейной формой) задачи (3.1) – (3.4), а условия (3.2) – (3.4) – ограничениями данной задачи.

Определение 3.

Стандартной (или симметричной} задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (3.1) при выполнении условий (3.2) и (3.4), где $k = m$ и $i = n$.

Определение 4.

Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (3.1) при выполнении условий (3.3) и (3.4), где $k = 0$ и $i = n$.

Определение 5.

Совокупность чисел

$$X = (x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n),$$

удовлетворяющих ограничениям задачи (3.2) – (3.4), называется *допустимым решением* (или *планом*).

Определение 6.

План

$$X^* = (x_1^*,\, x_2^*,\, \dots,\, x_n^*),$$

при котором целевая функция задачи (3.1) принимает своё максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

Значение целевой функции (3.1) при плане X будем обозначать через $F(X)$. Следовательно, X^* – оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) \leq F(X^*)$ или, соответственно, $F(X) \geq F(X^*)$.

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определён оптимальный план любой из трёх задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно уметь, *во-первых*, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации; *во-вторых*, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот; *в-третьих*, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда требуется найти минимум функции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

можно перейти к нахождению максимума функции

$$F_1 = -F = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n,$$

поскольку

$$\min F = -\max(-F).$$

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид «≤», можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида «≥» – в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0), \qquad (3.5)$$

а ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

– в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0). \tag{3.6}$$

В то же время каждое уравнение системы ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i. \end{cases} \tag{3.7}$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определённый экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражается расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в форме основной, равно объёму неиспользуемого соответствующего ресурса.

Пример 3.1.

Записать в форме основной (канонической) задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Решение. В данной задаче требуется найти максимум функции, а система ограничений содержит четыре неравенства. Следовательно, чтобы записать ее в форме основной задачи, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Так как число неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырём, то этот переход может быть осуществлён введением четырёх дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого из неравенств вида «≤» соответствующая дополнительная переменная прибавляется, а из левых частей каждого из неравенств вида «≥» вычитается. В результате ограничения принимают вид уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$
$$x_1,\ \ldots,\ x_9 \geq 0.$$

Следовательно, данная задача может быть записана в форме основной задачи таким образом: максимизировать функцию $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$
$$x_1, \ldots, x_9 \ge 0.$$

Пример 3.2.

Записать в форме стандартной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F = 6.5x_1 - 7.5x_3 + 23.5x_1 - 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \end{cases}$$
$$x_1, \ldots, x_5 \ge 0.$$

Решение. Методом последовательного исключения неизвестных сведём данную задачу к следующей: найти максимум функции $F = 6.5x_1 - 7.5x_3 + 23.5x_1 - 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 26, \\ x_1 + x_3 + 11x_4 = 20, \end{cases}$$
$$x_1, \ldots\ldots, x_5 \ge 0.$$

Последняя задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F = x_3 + 2x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \le 26, \\ x_3 + 11x_4 \le 20, \end{cases}$$
$$x_3, x_4 \ge 0.$$

Целевая функция задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_1и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений задачи.

3.4.2 Решение оптимизационных задач в пакете MathCAD

Оптимизационные задачи можно разделить на два класса:

– ***задачи безусловной оптимизации*** (или *оптимизация без ограничений*).
– ***задачи условной оптимизации*** (*оптимизация с ограничениями*).

Вторая задача отличается от первой тем, что решение ищется только ***среди допустимых значений*** или, иначе, на ***допустимом множестве*** значений переменных задачи, которые удовлетворяют ***заданным ограничениям.***

Решение оптимизационных задач без ограничений

Для этого используются две функции MathCAD:

- ***Maximize**(**f**,<список параметров>)* – вычисление точки максимума;

- ***Minimize*(*f*,<список параметров>)** – вычисление точки минимума, где *f* – имя минимизируемого функционала, определённого до обращения к функции; <список параметров> – содержит перечисление (через запятую) имён параметров, относительно которых решается оптимизационная задача.

Внимание! Перед обращением к функциям *Maximize, Minimize* (имена которых начинаются прописными буквами) следует обязательно задать начальное значение параметров оптимизации.

3.4.3 Пример графического решения задачи линейного программирования в Mathcad

Задана целевая функция $F(x1, x2) = 3x1 + 4x2 -> max$

Ограничения:

$$\begin{cases} x1 + x2 <= 520 \\ 2x1 + 3x2 <= 1100 \\ 18x1 + 30x2 <= 10200 \\ x1, x2 >= 0 \end{cases}$$

Реализация задачи в Mathcad:

$$f2(x1) := 2x1 + 3x2 = 1100 \text{ solve}, x2 \rightarrow \frac{1100}{3} - \frac{2 \cdot x1}{3}$$

$$f3(x1) := 18x1 + 30x2 = 10200 \text{ solve}, x2 \rightarrow 340 - \frac{3 \cdot x1}{5}$$

$$F(x1, x2) := 3x1 + 4x2$$

$$c1 := \frac{d}{dx1} F(x1, x2) \rightarrow 3$$

$$c2 := \frac{d}{dx2} F(x1, x2) \rightarrow 4$$

$$Gradient(x1) := \frac{c2}{c1} \cdot x1$$

Given

$$x2 = f1(x1)$$

$$x2 = f2(x1)$$

$$\begin{pmatrix} x11 \\ x21 \end{pmatrix} := Find(x1, x2) \rightarrow \begin{pmatrix} 460 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Given

$$x2 = f1(x1)$$

$$x2 = f3(x1)$$

$$\begin{pmatrix} x12 \\ x22 \end{pmatrix} := Find(x1, x2) \rightarrow \begin{pmatrix} 450 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Given

$$x2 = f2(x1)$$

$$x2 = f3(x1)$$

$$\begin{pmatrix} x13 \\ x23 \end{pmatrix} := Find(x1, x2) \rightarrow \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}$$

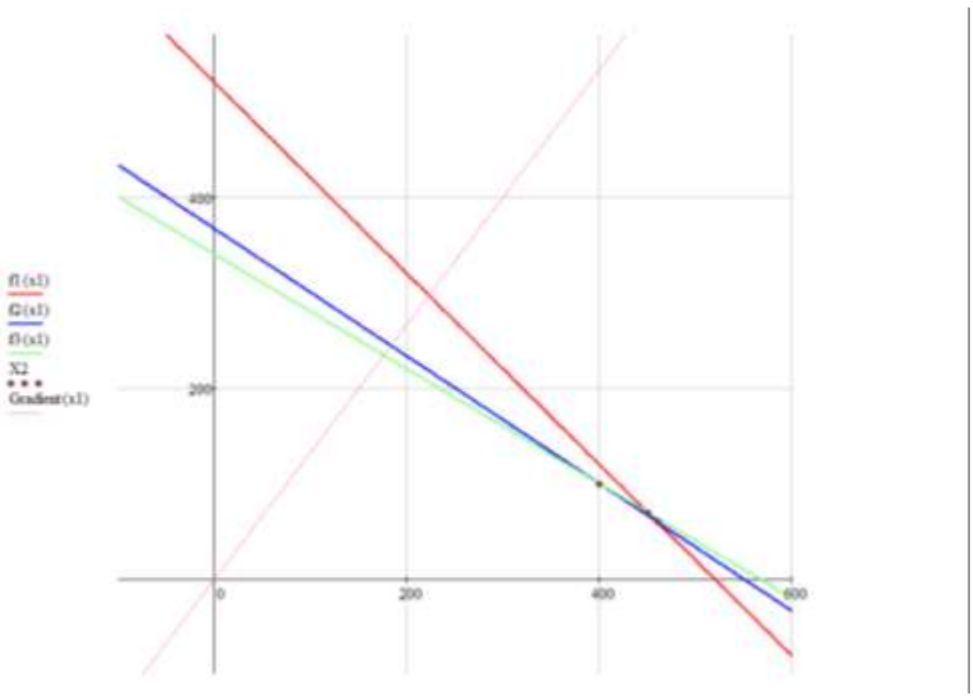
$$L1(x1) := x21 - \frac{c1}{c2} \cdot (x1 - x11)$$

$$L2(x1) := x22 - \frac{c1}{c2} \cdot (x1 - x12)$$

$$L3(x1) := x23 - \frac{c1}{c2} \cdot (x1 - x13)$$

$$X1 := stack(x11, x12, x13) \qquad X1^T = (460 \quad 450 \quad 400)$$

$$X2 := stack(x21, x22, x23) \qquad X2^T = (60 \quad 70 \quad 100)$$



3.4.4 Этапы численного решения оптимизационных задач

1) **Запуск приложения Mathcad.** Выполнить двойной щелчок мышкой на пиктограмме **Mathcad** рабочего стола Windows.

2) **Ввод поясняющего текста и комментариев.** Разместить курсор **(красный крестик)** в месте ввода текста. Выбрать пункт меню **Insert (Вставка).** В появившемся падающем меню выбрать пункт **Text Region (Текстовая область)** или в месте расположения курсора нажать клавишу с двойной кавычкой (команда для ввода текста). Ввести в появившийся шаблон поясняющий текст или комментарии (название оптимизационной задачи, экономический смысл ограничений и т.д.). По окончании ввода текста вывести курсор за пределы текстовой области.

3) **Ввод целевой функции (критерия оптимизации).** Разместить курсор в месте ввода математического выражения. Ввести имя критерия оптимизации с аргументами, записанными через запятые и заключёнными в скобки. Ввести знак присваивания $:=$ выбрав из математического меню **Calculator (Калькулятор)** или нажав комбинацию клавиш **Shift+:.** Ввести все выражение целевой функции.

4) **Ввод начальных приближений для переменных.** Вводятся аналогично целевой функции. Начальные значения переменных выбираются студентом самостоятельно.

5) **Начало ввода блока Given...Maximize(Minimize). Ввести ключевое слово Given, используя клавиатуру.**

6) **Ввод ограничений.** При вводе ограничений использовать жирный знак равенства, выбрав его с помощью меню **Boolean (Отношения)** или комбинации клавиш **Ctrl-=.**

7) **Окончание блока Given...Maximize(Minimize).** Ввести вектор- столбец переменных, выбрав мышкой математическую палитру **Matrix (Матрица)** или нажав комбинацию клавиш **Ctrl+=.** В появившемся диалоговом окне **Insert Matrix** в поле **Rows** (строки) ввести число строк, а в поле **Columns** (Столбцы) -1. Ввести знак присваивания, а затем функцию maximize для максимизации целевой функции или minimize для минимизации.

8) **Вывод результатов решения.** Ввести вектор-столбец переменных и знак «равно».

3.4.5 Пример решения задачи распределения неоднородных ресурсов

Пусть предприятие располагает запасами компонентов трёх видов – микросхемы, транзисторы и конденсаторы в количествах b1=18, b2=120 и b3=42 условных единиц соответственно. Из этого сырья может быть изготовлено два вида изделий – **Изделие 1** и **Изделие 2**. Известны так же значения a_{ij} – количество единиц i-го вида сырья, идущего на изготовление единицы j-го изделия и c_j – доход, получаемый от реализации одной единицы изделия каждого вида ($i = 1,2,3;\ j = 1,2$). Все указанные величины представлены в следующей таблице.

Таблица 3.1 - Данные к задаче об использовании компонентов

Вид компонентов	Запас сырья (усл. единиц)	Расход сырья на единицу продукции (усл. единиц)	
		Изделие 1	**Изделие 2**
Микросхемы	b1 = 18	a11 = 3	a12 =1
Транзисторы	b2 = 120	a21 = 25	a22 = 3
Конденсаторы	b3 = 42	a31 = 0	a32 = 3
Прибыль от продажи единицы изделия (усл. ден. единиц)		c1= 3	c2 = 2

Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором суммарная прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы максимальной.

Для решения сформулированной задачи составим математическую модель **задачи распределения неоднородных ресурсов:**

1. Определим неизвестные и их количество.

Введём следующие обозначения: x1 – **Изделий 1**, x2 – количество **Изделий 2**, которые может выпускать предприятие.

2. Запишем целевую функцию.

Суммарная прибыль, получаемая предприятием от реализации x1 единиц **Изделий 1** и x2 единиц **Изделий 2**, может быть записана в виде

$$F(\mathrm{x}1, \mathrm{x}2\,) \;=\; 3 \cdot x1 \;+\; 2 \cdot x2 \;\rightarrow\; max.$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения по запасам компонентов. Зная количество компонентов каждого вида, идущее на изготовление одной единицы изделия, и запасы компонентов можно составить следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} 3 * x_1 + 1 * x_2 \le 18; \\ 25 * x_1 + 3 * x_2 \le 120; \\ 0 * x_1 + 3 * x_2 \le 42. \end{cases}$$

Полученная система устанавливает, что количество каждого компонента, расходуемое на изготовление изделий, не может превысить имеющихся на предприятии запасов компонентов.

3.2. Условие неотрицательности переменных. Исходя из физического смысла, на переменные налагаются дополнительные условия, требующие неотрицательности их значений:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,1$$

(x_1 и x_2 будут равны нулю, если соответствующий вид изделия не выпускается).

3.3 Условие целочисленности переменных. На переменные x_1 и x_2 можно накладывать дополнительное условие целочисленности, которое «запрещает» выпуск не целых изделий: x_1 и x_2 – целые.

Решение в MathCAD

1. Зададим запасы сырья и рецептуру изделий в условных единицах:

$b1 := 18 \quad b2 := 120 \quad b3 := 42 \quad a11 := 3 \quad a12 := 1$

$a21 := 25 \quad a22 := 3$

$a31 := 0 \quad a32 := 3$

2. Определим прибыль от продажи одного изделия каждого вида (в условных единицах) и целевую функцию двух переменных F(x1,x2)- суммарную прибыль предприятия: $c1 := 3 \quad c2 := 2 \quad F(x1,x2) := c1 \cdot x1 + c2 \cdot x2$

3. Присвоим переменным x1 и x2 начальные (нулевые) значения: $x1 := 0 \quad x2 := 0$

4. Введем служебное слово Given: Given

5. Запишем систему ограничений и граничных условий:

$a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 \le b1$

$a21 \cdot x1 + a22 \cdot x2 \le b2$

$a31 \cdot x1 + a32 \cdot x2 \le b3$

$x1 \ge 0$

$x2 \ge 0$

6. Найдем оптимальное решение: $\begin{pmatrix} x1opt \\ x2opt \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(F, x1, x2) \qquad x1opt = 1.333 \qquad x2opt = 14$

7. Найдем экстремальное значение целевой функции (максимальную прибыль):

$Fmax := F(x1opt, x2opt) \qquad Fmax = 32$

8. Найдем фактический расход и остаток каждого вида сырья после выполнения оптимального плана выпуска продукции:

израсходовано сырья S1:	$a11 \cdot x1opt + a12 \cdot x2opt = 18$	остаток:	$b1 - (a11 \cdot x1opt + a12 \cdot x2opt) = 0$
израсходовано сырья S2:	$a21 \cdot x1opt + a22 \cdot x2opt = 75.333$	остаток:	$b2 - (a21 \cdot x1opt + a22 \cdot x2opt) = 44.667$
израсходовано сырья S3:	$a31 \cdot x1opt + a32 \cdot x2opt = 42$	остаток:	$b3 - (a31 \cdot x1opt + a32 \cdot x2opt) = 0$

4 Варианты заданий

4.1 Расчёт оптимального плана перевозок

Для всех вариантов количество маршрутов n = 3. используемых типов самолётов m = 2. Вместимость самолёта i-го типа равна A_i человек, количество пассажиров, перевозимых по j-му маршруту за сезон, составляет B_j человек. Затраты, связанные с использованием самолёта i-го типа на j-м маршруте, составляют S_{ij} рублей. Заданные в каждом варианте общие затраты F_1 - это затраты по первоначальному плану.

С точки зрения лётного состава самым справедливым будет план, разработанный по принципу равного распределения рейсов на каждом маршруте. Расчёты должны позволить произвести выбор между оптимальным планом, рациональными планами и первоначальным планом.

В аэропорту для перевозки пассажиров по n маршрутам может быть использовано m типов самолётов. Определить, сколько рейсов X_{ij} необходимо выполнить самолётами типа i на каждом из маршрутов j, чтобы удовлетворить потребности в перевозках.

С точки зрения лётного состава самым справедливым будет план, разработанный по принципу равного распределения рейсов на каждом маршруте, при котором $X_{11} = X_{21}$, $X_{12} = X_{22}$, $X_{13} = X_{23}$ и т.д. Однако этот план, назовём его первоначальным, будет чрезмерно затратным. В каждом варианте лабораторной работы заданы общие затраты F_1 - затраты по первоначальному плану. С этими затратами надо будет сравнить затраты F, рассчитанные с помощью математической модели.

Занесите в Таблицу 5.1 исходные данные по своему варианту из Таблиц 5.2 – 5.4.

Примечание. Общие затраты S_{ij} указаны в условных единицах.

Таблица 4.1 - Исходные данные

Вместимость самолёта:	1 типа (A_1)	
	2 типа (A_2)	
Количество пассажиров, перевозимых за сезон:	по 1 маршруту (B_1)-	
	по 2 маршруту (B_2)	
	по 3 маршруту (B_3)	
	для самолёта 1 типа на 1 маршруте (S_{11})	
	для самолёта 1 типа на 2 маршруте (S_{12})	
	для самолёта 1 типа на 3 маршруте (S_{13})	
	для самолёта 2 типа на 1 маршруте (S_{21})	
	для самолёта 2 типа на 2 маршруте (S_{22})	
	для самолёта 2 типа на 3 маршруте (S_{23})	
Общие затраты:	на всех маршрутах по первоначальному плану (F_1)	

Таблица 4.2 - Варианты 01 - 10

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
A_1	17	32	48	12	17	15	76	48	32	120
A_2	32	48	12	17	15	19	32	15	12	76
B_1	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000
B_2	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000	3250
B_3	2000	2300	2600	2900	3200	3500	3800	4100	4400	4700
S_{11}	138	328	398	126	145	161	661	528	285	1350
S_{12}	274	648	782	246	281	311	1269	1008	541	2550
S_{13}	410	968	1166	366	417	461	1877	1488	797	3750
S_{21}	324	394	125	143	159	163	348	132	134	684
S_{22}	644	778	245	279	309	315	668	252	254	1292
S_{23}	964	1162	365	415	459	467	988	372	374	1900
F_1	107816	119618	131243	156160	176725	194132	206370	249381	242725	282212

Таблица 4.3 - Варианты 21 - 20

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	10
A_1	76	164	12	12	15	17	18	19	20	26	120
A_2	48	120	15	18	20	26	27	32	34	36	76
B_1	8500	9000	6000	9200	8800	8400	7600	7200	6800	6400	8000

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	10
B_2	3500	3750	3900	4300	4700	5100	5900	6300	7100	7900	3250
B_3	5000	5300	5400	5700	5500	6100	3700	3600	6200	4600	4700
S_{11}	616	1681	100	126	128	183	157	209	178	293	1350
S_{12}	1224	3321	196	246	248	353	301	399	338	553	2550
S_{13}	1832	4961	292	366	368	523	445	589	498	813	3750
S_{21}	486	984	156	151	213	224	294	282	378	324	684
S_{22}	966	1944	306	295	413	432	564	538	718	612	1292
S_{23}	1446	2904	456	439	613	640	834	794	1058	900	1900
F_1	269532	300751	279000	315440	328657	337595	294742	282688	387511	339228	282212

Таблица 4.4 - Варианты 21 - 30

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A_1	27	32	34	36	39	42	48	50	76	96
A_2	39	42	48	49	50	52	60	76	80	100
B_1	5600	5200	4800	4400	3600	3200	2800	2400	1800	1400
B_2	8200	8600	8300	9200	8400	9600	8500	9800	8800	9900
B_3	3950	4150	4300	4450	4600	4900	5350	5600	5700	5900
S_{11}	219	328	282	378	332	452	418	550	676	1080
S_{12}	435	648	554	738	644	872	802	1050	1284	2040
S_{13}	651	968	826	1098	956	1292	1186	1550	1892	3000
S_{21}	395	344	498	412	531	447	653	669	890	900
S_{22}	785	680	978	804	1031	863	1253	1277	1690	1700
S_{23}	1175	1016	1458	1196	1531	1279	1853	1885	2490	2500
F_1	312956	312822	320498	327891	321539	378305	340046	356875	345945	368612

4.2 Варианты задания «Оптимальная загрузка самолёта»

№ п/п	Целевая функция	Ограничения
1.	$f = x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow min$,	$x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 100$; $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 100$; $x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 - x_5 = 300$.
2.	$f = 4x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5 \rightarrow min$	$-x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 500$; $-x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 900$; $-3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 600$.
3.	$f = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \rightarrow max$	$x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 300$; $-x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 100$; $-x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 100$
4.	$f = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 \rightarrow max$	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 100$; $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 70$; $x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 10$.
5.	$f = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \rightarrow min$	$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 100$; $2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 700$; $x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 600$.

№ п/п	Целевая функция	Ограничения
6.	$f = 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow min$	$x_3 - x_4 + x_5 = 100;$ $x_2 + 2x_4 - x_5 = 100;$ $x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 400$
7.		

№	A11	A12	A21	A22	A31	A32	B1	B2	B3	C1	C2
1.	1	2	3	2	2	1	70	100	45	2	3
2.	1	2	2	1	2	1	75	105	50	2	1
3.	1	2	1	2	2	1	80	110	55	1	2
4.	1	2	3	4	2	1	85	115	60	3	2
5.	1	2	4	3	2	1	90	120	65	2	1
6.	1	2	3	2	2	1	85	125	70	4	3
7.	1	2	2	1	2	1	80	130	75	3	4
8.	1	2	3	1	2	1	75	135	80	2	3
9.	1	2	3	2	2	1	70	140	55	2	1
10.	1	2	2	1	2	1	70	145	60	1	2
11.	1	2	1	2	2	1	75	150	65	3	2
12.	1	2	3	4	2	1	80	155	70	2	1
13.	1	2	4	3	2	1	85	160	75	4	3
14.	1	2	3	2	2	1	90	165	55	3	4
15.	1	2	2	1	2	1	85	175	60	2	3
16.	1	2	3	2	2	1	80	180	65	2	1
17.	1	2	3	1	2	1	75	175	70	1	2
18.	1	2	2	1	2	1	70	165	75	3	2
19.	1	2	1	2	2	1	70	160	80	2	1
20.	1	2	3	4	2	1	75	155	55	4	3
21.	1	2	4	3	2	1	80	150	60	3	4
22.	1	2	3	2	2	1	85	145	65	2	3
23.	1	2	2	1	2	1	90	140	70	2	1
24.	1	2	3	1	2	1	85	135	75	1	2
25.	1	2	3	2	2	1	80	130	80	3	2
26.	1	2	2	1	2	1	75	125	55	2	1
27.	1	2	1	2	2	1	70	100	55	4	3
28.	1	2	3	4	2	1	70	120	60	3	4
29.	1	2	4	3	2	1	75	115	65	2	3
30.	1	2	3	2	2	1	80	110	70	2	1

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Ответьте на следующие контрольные вопросы:

1) Постановка задачи нахождения оптимального решения.
2) Назовите типы оптимизационных задач.
3) Сформулируйте задачи, приводящие к линейному программированию.
4) В чём состоит графический метод решения задач линейного программирования?
5) Опишите симплекс-метод.

6) В чем суть задач целочисленного программирования?
7) Дайте определение экстремума функции.
8) Сформулируйте условия транспортной задачи.

6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОС ТУСУР 01-2013 (СТО 02069326.1.01-2013). Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления. - Томск: ТУСУР, 2013. – 57 с.

Леонтьев А. Ваш ноутбук. Работаем в Windows 8 и Office 2013. - СПб.: Питер, 2014. — 240 с.

Дьяконов. VisSim+Mathcad+MATLAB. Визуальное математическое моделирование. - М.: СОЛОН-Пресс, 2004. — 384 с.

Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9/Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. :. - М.: НТ Пресс, 2006. - 496 с.

Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+MathCAD. - М.: Горячая линия, 2001. - 416 с.

Макаров Е. Инженерные расчёты в Mathcad 15: Учебный курс. - СПб.: Питер, 2011. - 400 с.

Кобрин Ю.П. Применение системы автоматизации научно-технических расчетов MathCAD при проектировании РЭС. - Томск: ТУСУР, 2012. - 19 с.

Павлов О.В. Решение оптимизационных задач в математическом пакете Mathcad: Методические указания к курсовой работе. - Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2000. - 27 с.

Дьяконов. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 576 с.

Хорошавцев Ю.Е. Задачи АСУ, решаемые на персональных компьютерах: Методические указания к выполнению лабораторных работ. - СПб.: Университет ГА, 2007. - 25 с.