

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)
КАФЕДРА ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ (ЭП)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УР ТУСУР
_____ П.Е. Троян
« ____ » _____ 2017 года

Давыдов В.Н.

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОНДЕНСАТОРНОГО ЭЛЕМЕНТА
НА ОСНОВЕ АНИЗОТРОПИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ
ПРОНИЦАЕМОСТИ КРИСТАЛЛОВ**

Методическое пособие к лабораторной работе
по курсу «Элементы электронной техники»
для студентов направления
11.03.04 – Электроника и наноэлектроника

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	3
2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	3
2.1. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах.....	3
2.2. Оптическая индикатриса.....	8
2.3. Эллипсоид Френеля.....	14
3. РАСЧЕТНАЯ ЧАСТЬ.....	18
3.1. Задание к лабораторной работе.....	18
3.2. Схема расчета фазовых скоростей и векторов поляризации оптических волн в кристаллах.....	19
4. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА.....	21
5. ЛИТЕРАТУРА.....	21

1. ВВЕДЕНИЕ

Для создания элементов электронной техники широко используют электро-технические материалы, находящиеся в различных состояниях: аморфные, поликристаллические, сплавы, кристаллы и т.д. Среди этих состояний кристаллические материалы, как правило, используют для изготовления прецизионной аппаратуры, высокочувствительных резисторов, конденсаторов и других элементов. Применение в качестве рабочего вещества элемента электронной техники кристаллов позволяет получать элементы, в которых в нужной пропорции сочетаются различные физические свойства выбранного кристалла, что позволяет создавать элементы с принципиально новыми функциональными свойствами.

В этой связи необходимо студентам должны знать основные электрические свойства и методы их измерения у кристаллов различной точечной симметрии, в том числе емкостные свойства при наличии анизотропии диэлектрической проницаемости кристалла. Диэлектрическую проницаемость кристалла измеряют с помощью оптических методов.

Целью данной лабораторной работы является изучение студентами основных закономерностей распространения оптического излучения в кристалле ниобата лития, широко используемом в электронике и наноэлектронике.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах

Распространение электромагнитных волн в прозрачном немагнитном кристалле описывается уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} & \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{D} &= 0 & \operatorname{div} \bar{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и материальным уравнением: $\bar{E} = \hat{\eta} \cdot \bar{D}$; $E_j = \eta_{jk} \cdot D_k$. Здесь \bar{E} и \bar{H} векторы

напряженности электрического и магнитного поля, \bar{D} - вектор электрической индукции, c - скорость света. Слагаемые, соответствующие электрическому току и свободным зарядам, отсутствуют в виду того, что рассматриваемый кристалл не имеет свободных носителей заряда, т.е. он диэлектрический.

Пусть переменное электромагнитное поле распространяется в кристалле в виде плоских электромагнитных волн. Тогда зависимость полевых векторов \bar{E} , \bar{D} , \bar{H} от пространственных координат \bar{r} и времени t может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}, t) &= \bar{E}_0 \cdot \exp(-i\omega t + i\bar{k}\bar{r}) \\ \bar{D}(\bar{r}, t) &= \bar{D}_0 \cdot \exp(-i\omega t + i\bar{k}\bar{r}) \\ \bar{H}(\bar{r}, t) &= \bar{H}_0 \cdot \exp(-i\omega t + i\bar{k}\bar{r}).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь ω - циклическая частота, \bar{k} - волновой вектор. Он перпендикулярен к плоскости волнового фронта и равен:

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \bar{m} = \frac{\omega}{v} \cdot \bar{m} = \frac{\omega}{c} \cdot n \cdot \bar{m}, \quad \left(\lambda = v \cdot t = \frac{v}{f} \right)$$

где \bar{m} - единичный вектор нормали к волновому фронту, λ - длина волны, v - ее фазовая скорость в рассматриваемой среде, c - скорость в вакууме, n - показатель преломления среды.

Для анизотропных сред пространственные соотношения между векторами \bar{E} , \bar{D} , \bar{H} оказываются сложнее, чем в изотропной. Их можно найти, подставив выражения (2) в уравнения Максвелла в форме (1). При этом следует иметь в виду, что дифференцирование выражений по времени приводит к умножению дифференцируемой функции на $i\omega$, а дифференцирование по координате - на $i\bar{k}$ (2). Поэтому, заменяя операцию «rot» на векторное произведение, а «div» - а скалярное, получим:

$$[\bar{k} \times \bar{H}] = -\frac{\omega}{c} \cdot \bar{D}, \quad [\bar{k} \times \bar{E}] = -\frac{\omega}{c} \cdot \bar{H},\tag{3}$$

$$(\bar{k} \cdot \bar{H}) = 0, \quad (\bar{k} \cdot \bar{D}) = 0.\tag{4}$$

Уравнения (4) показывают, что вектора \bar{D} и \bar{H} перпендикулярны вектору \bar{k} . Но

этот же вывод следует из (3) – результат векторного произведения перпендикулярен перемножаемым векторам. Поэтому в дальнейшем уравнения (4) можно не рассматривать. Из уравнений (3) следует, что вектора \bar{D} и \bar{H} перпендикулярны вектору \bar{k} , а значит, они лежат в плоскости волнового фронта - к этому сводится поперечность электромагнитных волн в анизотропных средах. Кроме того, из уравнений (3) также следует взаимная перпендикулярность векторов \bar{H} и \bar{D} , \bar{H} и \bar{E} . Таким образом, в анизотропной среде сохраняется ортогональность векторов \bar{H} и \bar{E} , а также векторов \bar{H} и \bar{D} , но не сохраняется параллельность векторов \bar{E} и \bar{D} , имеющая место в изотропных средах. Разделив обе части уравнений (3) на $\frac{\omega}{c}$, получим:

$$n \cdot [\bar{m} \times \bar{H}] = -\bar{D}, \quad n \cdot [\bar{m} \times \bar{E}] = \bar{H}.$$

Подставив второе уравнение в первое и тем самым исключив из рассмотрения напряженность магнитного поля \bar{H} , получим уравнение для связи \bar{E} и \bar{D} в анизотропной среде:

$$n \cdot [\bar{m} \times \bar{H}] = -\bar{D}, \quad n^2 \cdot [\bar{m} \times [\bar{m} \times \bar{E}]] = -\bar{D}.$$

Последнее уравнение после элементарных преобразований двойного векторного произведения по правилу «bac-cab» дает следующее:

$$\bar{E} - \bar{m}\bar{m} \cdot \bar{E} = \frac{1}{n^2} \cdot \bar{D}, \quad \text{т.к.} \quad [\bar{a} \times [\bar{b} \times \bar{c}]] = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

Левая часть этого уравнения есть составляющая вектора \bar{E} , лежащая в плоскости волнового фронта. Она параллельна вектору \bar{D} , а отношение ее длины к длине вектора \bar{D} - есть квадрат отношения скорости волны в этой среде к скорости света в вакууме. С помощью материального уравнения исключим \bar{E} из этого уравнения:

$\bar{E} = \hat{\eta} \bar{D}$. Тогда

$$(\hat{\eta} - \bar{m}\bar{m} \cdot \hat{\eta}) \cdot \bar{D} = \frac{1}{n^2} \cdot \bar{D} \quad \text{или}$$

$$(\eta_{ik} - m_i m_j \cdot \eta_{jk}) \cdot D_k = \frac{1}{n^2} \cdot D_k. \quad (5)$$

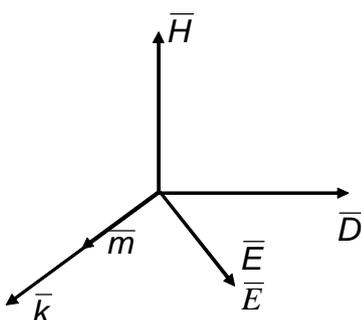


Рис.1

Это уравнение определяет величину фазовой скорости и поляризацию распространяющейся через кристалл в направлении \bar{m} электромагнитной волны. Для его исследования введем новые декартовы координаты x'_1, x'_2, x'_3 : ось x'_3 новой системы направим по нормали к волне $\bar{e}'_3 \parallel \bar{m}$, $\bar{e}'_3 = \bar{m}$, а на взаимно перпендикулярные оси x'_1 и x'_2 никаких ограничений не накладываем кроме условия их перпендикулярности плоскости волнового фронта. Электромагнитная волна по определению является поперечной. Это означает, что вектор электрической индукции в волне всегда перпендикулярен волновому вектору. Значит, в новой системе координат $D_3=0$. Поэтому для дальнейшего рассмотрения необходимо уравнение (5) переписать в новой системе координат. Будем обозначать все измеренные в этой системе величины верхним штрихом. Отметим, что в новой системе координат неизвестными являются только две компоненты вектора электрической индукции (D'_1, D'_2). Для их вычисления достаточно только двух уравнений из (5), возьмем первое и второе уравнения из системы (5):

$$\begin{cases} \eta'_{11}D'_1 + \eta'_{12}D'_2 = n^{-2}D'_1 \\ \eta'_{12}D'_1 + \eta'_{22}D'_2 = n^{-2}D'_2 \end{cases}, \quad (6)$$

В системе (6) компоненты тензора диэлектрической непроницаемости η'_{ij} переписаны в новую систему координат x'_1, x'_2, x'_3 . Для этого необходимо использовать выражение:

$$\eta'_{ij} = C_{ik}C_{jl}\eta_{kl}, \quad (7)$$

где η_{kl} - компоненты тензора в исходной системе координат x_1, x_2, x_3 . В качестве этой системы выступает, как правило, кристаллофизическая система координат. В ней компоненты тензора диэлектрической непроницаемости являются табличными величинами, т.е. известны. Далее, в выражении (7) C_{ik}, C_{jl} - компоненты матрицы преобразования системы координат x_1, x_2, x_3 в систему координат x'_1, x'_2, x'_3 . Они задаются ориентацией вектора волновой нормали относительно

кристаллофизической системы координат. Следовательно, в выражении (7) правая часть известна и вычисление компонент тензора диэлектрической непроницаемости в новой системе координат может быть выполнено.

Система (6) показывает, что n^{-2} - это собственные значения тензора

$$\left\| \begin{array}{cc} \eta'_{11} & \eta'_{12} \\ \eta'_{12} & \eta'_{22} \end{array} \right\|,$$

а \bar{D}' - его собственный вектор. Поэтому данный тензор естественно назвать **проекцией тензора диэлектрической непроницаемости $\hat{\eta}$** на плоскость волнового фронта. У него два собственных значения, определяемых из квадратного уравнения:

$$\left| \begin{array}{cc} \eta'_{11} - n^{-2} & \eta'_{12} \\ \eta'_{12} & \eta'_{22} - n^{-2} \end{array} \right| = 0,$$

откуда находим:

$$(n^{-2})_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left[(\eta'_{11} + \eta'_{22}) \pm \sqrt{(\eta'_{11} - \eta'_{22})^2 + (2\eta'_{12})^2} \right]. \quad (8)$$

Таким образом, скорость электромагнитной волны, распространяющейся через кристалл в направлении $\bar{e}'_3 \parallel \bar{m}$, равна $\nu(1) = c/n(1)$, $\nu(2) = c/n(2)$. Это означает, что вместо вошедшей в кристалл плоской электромагнитной волны в ней распространяются две волны с разными скоростями. Далее, известно, что каждому собственному значению $n_{(i)}^{-2}$ соответствует свой собственный вектор $\bar{D}'^{(1)}(D_1^{(1)}, D_2^{(1)})$, $\bar{D}'^{(2)}(D_1^{(2)}, D_2^{(2)})$. Это означает, что две волны в кристалле имеют не только разные фазовые скорости, но разные направления векторов поляризации. Направление вектора $\bar{D}'^{(1)}$ в волне, распространяющейся со скоростью $\nu(1)$, определяется из двух следующих уравнений:

$$\left(\eta'_{11} - n_{(1)}^{-2} \right) D_1^{(1)} + \eta'_{12} D_2^{(1)} = 0 \quad (9)$$

$$\eta'_{12} D_1^{(1)} + (\eta'_{22} - n_{(1)}^{-2}) D_2^{(1)} = 0 .$$

Направление вектора $\bar{D}^{(2)}$ находится аналогично, но он обязательно перпендикулярен $\bar{D}^{(1)}$, т.к. собственные векторы взаимно перпендикулярны.

Итак, в анизотропных кристаллах имеет место двулучепреломление света: монохроматическая электромагнитная волна, вошедшая в кристалл, через расстояние порядка несколько длин волн превращается в две линейно-поляризованные волны с разными скоростями распространения фазы: $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$ и взаимно перпендикулярными векторами \bar{D} . Заметим, что оптические свойства кристаллов описываются тензором второго ранга, который имеет три собственных числа и три собственных вектора. В рассмотренной ситуации их оказалось только два, описывающие поведение двух волн. Значит, в общем случае мы должны были ожидать преобразование одной плоской волны в три волны (так оно и имеет место для упругих волн). Уменьшение числа волн в данном случае обусловлено поперечностью электромагнитных волн: именно по этой причине тензор второго ранга превратился в его проекцию на плоскость волнового фронта, что повлекло уменьшение числа собственных векторов и собственных значений тензора, описывающего оптические свойства кристалла.

2.2. Оптическая индикатриса

Вычисления, проведенные в предыдущем параграфе, иллюстрируются простым геометрическим построением на характеристической поверхности тензора диэлектрической непроницаемости. Уравнение для определения характеристической поверхности тензора $\hat{\eta}$ в заданной системе координат имеет вид:

$$\left(\hat{r} \cdot \hat{\eta} \hat{r} \right) = 1, \quad \eta_{ik} X_j X_k = 1 \quad (10)$$

и в общем случае представляет собой эллипсоид общего вида с центром в начале координат. Эту поверхность называют **оптической индикатрисой** кристалла. Если оси X_1 и X_2 направить по собственным векторам двумерного тензора

$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix}$, то, поскольку в этих координатах тензор примет диагональный вид с

собственными значениями $\eta_{(1)}^{-2}$ и $\eta_{(2)}^{-2}$ на диагонали. В этом случае уравнение оптической индикатрисы примет наиболее простой вид:

$$\eta_{11}x_1^2 + (\eta_{12} + \eta_{21})x_1x_2 + \eta_{22}x_2^2 = 1$$

Пусть исходной системой координат является система, связанная с направлением волнового вектора электромагнитной волны. В предыдущем параграфе она отмечена штрихом вверху. Для упрощения записи опустим этот штрих в обозначения, имея в виду, что характеристическая поверхность в новой системе координат. В этой системе компоненты тензора диэлектрической непроницаемости рассчитаны по выражению (7) и известным табличным значениям диэлектрической проницаемости кристалла.

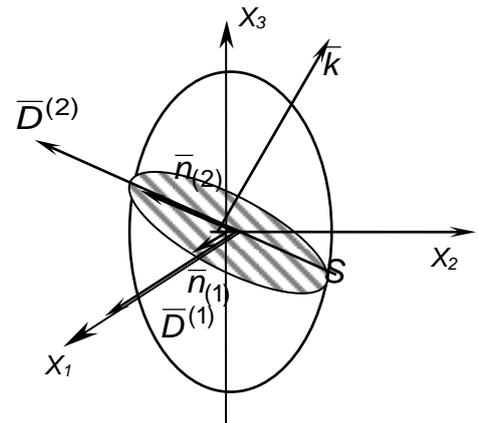


Рис. 3

Рассмотрим сечение оптической индикатрисы плоскостью волнового фронта. В сечении получим эллипс, все точки которого удовлетворяют уравнению (9) и уравнению плоскости волнового фронта, проходящего через начало координат: $x_3 = 0$. Для этого в (10) обратим в нуль третью координату:

$$\eta_{11}x_1^2 + 2\eta_{12}x_1x_2 + \eta_{22}x_2^2 = 1. \quad (11)$$

Вспомним, что при выборе новой системы координат положение осей x_1 и x_2 ограничено только условием перпендикулярности к волновому вектору. Поэтому можно конкретизировать положение этих осей в плоскости x_1Ox_2 , направив их по собственным векторам двумерного тензора

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix}.$$

В направлении собственных векторов тензор, описывающий какое-либо физическое свойство (диэлектрическая непроницаемость) принимает диагональный вид со значениями на диагонали, равным собственным. Поэтому в уравнении

оптической индикатрисы (11) компонента η_{12} обратится в ноль. Поэтому уравнение сечения характеристической поверхности (11) примет вид:

$$\left(\frac{x_1}{n(1)}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{n(2)}\right)^2 = 1.$$

Отсюда ясно, что $n(1)$ и $n(2)$ - это длины главных полуосей эллипса. По этим полуосям направлены вектора диэлектрической индукции $\bar{D}^{(1)}$ и $\bar{D}^{(2)}$.

Таким образом, чтобы выяснить скорости и поляризации электромагнитных волн, распространяющихся в кристалле в произвольном направлении, достаточно рассмотреть центральное сечение оптической индикатрисы плоскостью волнового фронта, т.е. плоскостью, перпендикулярной к \bar{k} . Направления главных полуосей этого сечения совпадут с направлениями векторов \bar{D} , а длины полуосей будут равны показателям преломления (см. рис.2). Здесь S - центральное сечение, нормальное к направлению распространения волны, \bar{m} - вектор волновой нормали. Полуоси эллипса равны $n(1)$ и $n(2)$. Ясно, что форма эллипса полностью определяется симметрией тензора $\hat{\eta}$ или, что то же самое, точечной симметрией кристалла. Рассмотрим его вид в кристаллах различной симметрии.

I. В кристаллах высшей категории оптическая индикатриса - это сфера радиусом $n(1) = n(2) = 1/\sqrt{\eta_0}$, поскольку их тензор диэлектрической непроницаемости является шаровым с элементами $\eta_{ii} = \eta_0$ и потому уравнение (10) примет вид:

$$\eta_0 \cdot x_i^2 = \eta_0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1,$$

что представляет собой уравнение сферы указанного выше радиуса. Все центральные сечения такой оптической индикатрисы - круговые, что означает равенство показателей преломления во всех направлениях и, следовательно, отсутствие двулучепреломления. Таким образом, в отношении оптических свойств кристаллы высшей категории изотропны.

II. У кристаллов средней и низшей категории проходящий в любом

направлении монохроматический свет в общем случае распадается на две плоско поляризованные волны. Однако в этих кристаллах есть особенные направления - **оптические оси (бинормали)**. Эти кристаллографические направления характеризуются тем, что нормальные к ним сечения оптической индикатрисы являются окружностями. При любом выборе осей X_1 и X_2 в плоскости волнового фронта, перпендикулярной к оптической оси, проекция тензора $\hat{\eta}$ на эту плоскость имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & 0 \\ 0 & \eta_{11} \end{vmatrix}$$

так что оба корня уравнения по определению собственных значений совпадут: $n_{(1)}^{-2} = n_{(2)}^{-2} = \eta_{11}$. В этом случае любой вектор, лежащий в плоскости волнового фронта, для данного тензора является собственным. Поэтому вдоль оптической оси может распространяться свет любой поляризации.

У кристаллов средней категории оптическая индикатриса представляет собой эллипсоид вращения:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{n_{(1)}^2} + \frac{X_3^2}{n_{(2)}^2} = 1.$$

Ось вращения эллипсоида совпадает с главной осью симметрии кристалла и является его единственной оптической осью (рис.3). Кристаллы средней категории являются оптически одноосными, т.е. у них имеется одна оптическая ось. Ориентация оптической оси в них задана положением главной ось симметрии кристалла, которая всегда направлена по X_3 . Из этого следует, что в кристаллах средней категории уравнение оптической индикатрисы можно записать в следующем виде:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{n_0^2} + \frac{X_3^2}{n_e^2} = 1,$$

откуда следует, что в оптически одноосных кристаллах один показатель пре-

ломления - $n_{(1)} = n_0$ не зависит от направления вектора электрической индукции в плоскости $X_1O X_2$, а другой - $n_{(2)} = n_e$ учитывает изменение показателя преломления, если вектор электрической индукции в волне будет содержать компоненту по оси X_3 - главной оси симметрии кристалла. Первый из них и называют **обыкновенным**, а второй - **необыкновенным**. Происхождение этих названий связано с «обыкновенным» поведением электромагнитной волны, вектор электрической индукции которой лежит в плоскости $X_1O X_2$ - фазовая скорость этой волны не зависит от ориентации вектора \bar{D} . У «необыкновенной» волны фазовая скорость зависит от ориентации ее вектора электрической индукции, что необычно для поведения волн в обычных условиях – изотропных средах. В зависимости от направления распространения волны \bar{m} значение показателя преломления изменяется от n_0 до n_e .

Величина двулучепреломления кристалла измеряется **оптической анизотропией**, равной $\Delta n = n_e - n_0$. Если $\Delta n > 0$, то одноосные кристаллы считаются **оптически положительными** (оптическая индикатриса имеет вид эллипсоида, вытянутого вдоль оптической оси - оси симметрии наивысшего порядка). Если же $\Delta n < 0$, то форма оптической индикатрисы - сплюснутый эллипсоид, а кристаллы считаются **оптически отрицательными**.

III. У кристаллов низшей категории оптическая индикатриса - эллипсоид общего вида. В системе координат, построенной на собственных векторах тензора $\hat{\eta}$ и ее уравнение будет иметь вид:

$$\frac{X_1^2}{n_{(1)}^2} + \frac{X_2^2}{n_{(2)}^2} + \frac{X_3^2}{n_{(3)}^2} = 1$$

где $n_{(i)}$ - главные полуоси эллипсоида. Эти индикатрисы имеют два круговых сечения и, соответственно, две оптические оси: \bar{P}_1, \bar{P}_2 , т.е. эти кристаллы оптически двухосны (рис.4): S_1 и S_2 - это круговые сечения, а нормали к ним - \bar{P}_1, \bar{P}_2 . В кристаллах этой категории оба показателя преломления необыкновен-

ны, т.е. их величины зависят от направления вектора поляризации в волне. Эти кристаллы оптически двуосны, линия пересечения круговых сечений - средняя главная ось оптической индикатрисы. Она перпендикулярна к плоскости оптических осей. Симметрия их оптической индикатрисы - mmm . Далее:

- в ромбических кристаллах главные оси оптической индикатрисы совпадают с кристаллографическими осями, т.е. с осями симметрии порядка 2 или нормальными к плоскостям симметрии;

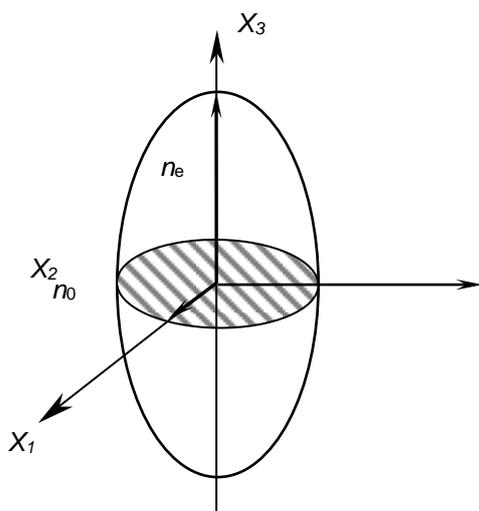


Рис.3

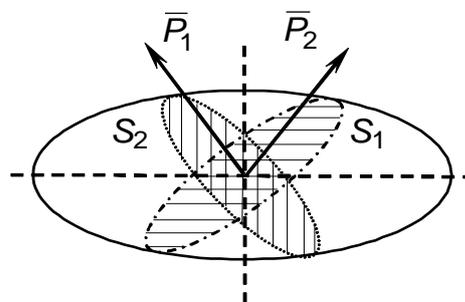


Рис. 4

- в моноклинных кристаллах одна из осей индикатрисы всегда проходит вдоль оси симметрии порядка 2 или нормальными к m , т.е. совпадает с осью X_2 , а направление двух других осей не зависит от симметрии кристалла;
- в триклинных кристаллах в общем случае ориентация индикатрисы никак не связана с симметрией кристалла и ее приходится определять для каждого кристалла этой сингонии отдельно.

Для обозначения показателей преломления кристаллов низшей категории, соответствующих полуосям оптической индикатрисы, используют следующие обозначения: N_g - наибольший показатель преломления, N_m - средний показатель и N_p - наименьший. В таких обозначениях для одноосных кристаллов величина двулучепреломления равна $\Delta N = N_g - N_p$, а для двуосного - $\Delta N = N_g - N_p$.

2.3. Эллипсоид Френеля

При распространении в кристалле плоской электромагнитной волны переносится не только фаза волны, но, что самое важное, ее энергия. Если перенос фазы волны предыдущем параграфе рассмотрен, то с переносом энергии вопрос остается открытым: не известна скорость переноса энергии, ее направление в кристалле, а также влияние точечной симметрии кристалла на эти параметры. Для выяснения поставленных вопросов обратимся к следующему мысленному эксперименту.

Как известно из теории электромагнитных волн, перенос энергии в ней описывается вектором потока энергии (вектор Умова-Пойтинга) электромагнитной волны, который равен:

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot [\bar{E} \times \bar{H}].$$

Здесь c – скорость света в вакууме. Единичный вектор этого направления $\bar{s} = \bar{S}/|\bar{S}|$ называется **лучевым вектором**. Происхождение этого названия связано со следующим обстоятельством. Если на пути плоской электромагнитной



Рис.5

волны в прозрачном кристалле поместить непрозрачную диафрагму, то направление прошедшего луча будет определяться именно вектором \bar{S} (рис. 5).

В изотропной среде для волны, идущей от точечного источника, волновой фронт имеет вид сферы. Направление луча здесь совпадает с нормалью к фронту

волны, т.е. оно перпендикулярно плоскости, касательной к волновой поверхности. В изотропной среде фазовая и групповая скорости могут различаться по величине, но всегда совпадают по направлению. Напомним, что фазовая скорость – это скорость распространения волнового фронта (фазы), направленная по нормали к фронту волны. Групповая скорость (или лучевая скорость) – это скорость

луча, т.е. скорость переноса энергии, параллельная вектору Пойтинга. Фазовую скорость обозначим как \bar{v} , а групповую как \bar{U} . В общем случае в анизотропной среде вектора \bar{v} и \bar{U} могут быть не параллельны друг другу. В анизотропной среде направления векторов \bar{E} и \bar{D} в электромагнитной волне не совпадают. Тогда различны по направлению на тот же угол вектора \bar{v} и \bar{U} или, в обозначениях единичных векторов, \bar{s} и \bar{m} . Действительно, из определения вектора Пойтинга следует, что векторы \bar{E} , \bar{H} и \bar{S} (также как векторы \bar{D} , \bar{H} , \bar{m}) составляют правую тройку векторов. Но если \bar{E} и \bar{D} не параллельны друг другу, то луч \bar{s} и нормаль \bar{m} также не параллельны (см. рис. 5). Из этих рассуждений следует, что если в анизотропном кристалле распространяется световой луч, например, от лазера, то испытав двулучепреломление (этот эффект будет иметь место и в случае плоской волны, т.к. определяется анизотропией кристалла), будет распространяться в кристалле по направлениям, которые не совпадают с направлениями распространения преобразованной (расщепленной на две) плоской волны. Значит, для определения направлений распространения преобразованных световых лучей и векторов поляризации (векторов \bar{E}) в них нельзя пользоваться оптической индикатрисой.

Для решения поставленных вопросов отметим, что если в плоской световой волне определяющую роль играет вектор электрической индукции \bar{D} , то для светового луча эта роль принадлежит вектору электрического поля \bar{E} , связь между которыми устанавливает тензор диэлектрической проницаемости $\hat{g} = 1/\hat{\eta}$. Поэтому ту роль, которую для световых волн играет оптическая индикатриса, для световых лучей выполняет эллипсоид Френеля. Он представляет собой характеристическую поверхность тензора диэлектрической проницаемости кристалла и определяется следующим образом:

$$\left(\bar{r} \cdot \hat{g} \bar{r} \right) = 1 \quad \text{или} \quad g_{ij} X_j X_j = 1.$$

Как и оптическая индикатриса, эллипсоид Френеля в общем случае представляет собой эллипсоид общего вида. В зависимости от точечной симметрии кристалла он может изменяться. Рассмотрим вид этой поверхности в кристаллах различных категорий.

I. У изотропных тел и кристаллов высшей категории тензор диэлектрической проницаемости имеет диагональный вид с компонентами $\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}_{22} = \mathcal{D}_{33} = \mathcal{D}_0$. Поэтому эллипсоид Френеля у этих кристаллов представляет собой сферу радиуса $R = 1/\sqrt{\mathcal{D}_0}$. Для него сечение любой плоскостью дает круговое сечение и, значит, распространяясь в любом направлении, световой луч не расщепляется.

II. У кристаллов средней категории (одноосных кристаллов) эллипсоид Френеля - это эллипсоид вращения. В кристаллофизической системе координат его уравнение следующее:

$$n_0^2(x_1^2 + x_2^2) + n_e^2 x_3^2 = 1.$$

Эллипсоид вращения имеет одно круговое сечение перпендикулярное к главной оси симметрии кристалла - к оптической оси. Для одноосных оптически положительных кристаллов эллипсоид Френеля сплюснутый, а для отрицательных -

вытянутый (см. рис.6):

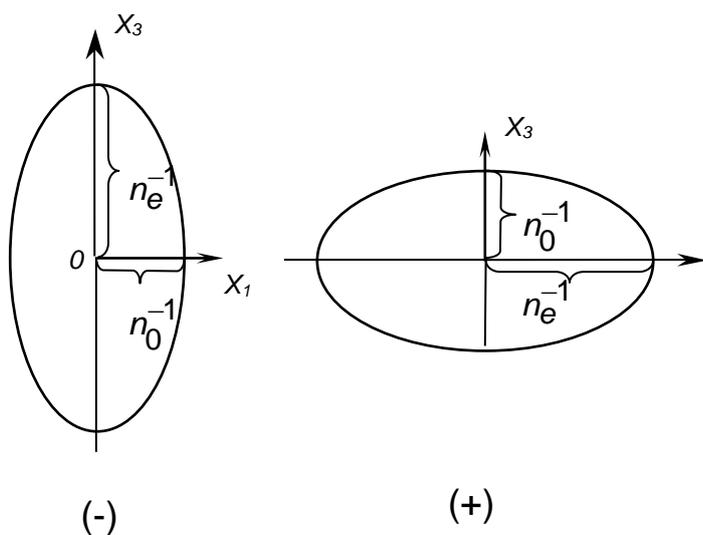


Рис.6

III. У кристаллов низшей категории (двухосных кристаллов) - это эллипсоид общего вида, имеющий два круговых сечения. В системе координат, построенной на собственных векторах диэлектрических тензоров, его уравнение принимает вид

$$n_1^2 x_1^2 + n_2^2 x_2^2 + n_3^2 x_3^2 = 1.$$

Главные оси оптической индикатрисы и эллипсоида Френеля для света одной и той же частоты совпадают, потому что у взаимно обратных тензоров собственные векторы одни и те же.

Чтобы выяснить скорости и поляризации лучей, распространяющихся в кристалле в направлении вектора \vec{S} , необходимо произвести сечение эллипсоида Френеля данного кристалла плоскостью, перпендикулярной вектору \vec{S} и проходящей через центр эллипсоида. Тогда получившийся в сечении эллипсоид будет характеризовать направления распространения преломленных лучей и величины их скоростей. Длины главных полуосей эллипса: $q(1)$ и $q(2)$ пропорциональны групповым скоростям лучей:

$$U(1) = q(1) \cdot c$$

$$U(2) = q(2) \cdot c \quad ,$$

а направления главных полуосей совпадают с направлениями поляризации векторов $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$. Если же направление вектора \vec{S} оказывается перпендикулярным к круговому сечению эллипсоида Френеля, то в этом направлении может распространяться луч света произвольной поляризации со скоростью U , определяемой радиусом q этого кругового сечения: $U = q \cdot c$. У изотропных тел и кубических кристаллов $q = 1/n_0$. Направления, перпендикулярные к круговым сечениям эллипсоида Френеля, называются **лучевыми оптическими осями (бирадиалами)**. У одноосных кристаллов бирадиали совпадают с бинормальными, а у двухосных - нет, но лежат в плоскости оптических осей.

Практически для подсчета скоростей и поляризаций лучей удобно пользоваться системой координат с осью X_3 , направленной вдоль луча, и осями X_1 , X_2 , перпендикулярными к лучу. Вычислив компоненты тензора диэлектрической проницаемости \hat{g} в этой системе координат, из уравнения:

$$\begin{vmatrix} g_{11} - q^{-2} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} - q^{-2} \end{vmatrix} = 0$$

можно найти $q_{(1)}$ и $q_{(2)}$, а затем по формуле $U=q \cdot c$ определить групповые скорости - $U_{(1)}, U_{(2)}$. Направление вектора $\vec{E}^{(1)}$ определится из решения системы:

$$\begin{cases} (\vartheta_{11} - q_{(1)}^2) E_1^{(1)} + \vartheta_{12} E_2^{(1)} = 0 \\ \vartheta_{12} E_1^{(1)} + (\vartheta_{22} - q_{(1)}^2) E_2^{(1)} = 0 \end{cases},$$

а вектор $\vec{E}^{(2)}$ будет ему перпендикулярен.

3. РАСЧЕТНАЯ ЧАСТЬ

3.1. Задание к лабораторной работе

3.1.1. Составьте схему расчета фазовых скоростей и векторов поляризации плоской электромагнитной волны, распространяющейся в плоскости $X_2O X_3$ кристалла с симметрией $3m$. Вектор нормали к волновому фронту составляет угол θ с осью симметрии Z (ось X_3).

3.1.2. Составьте программу расчета зависимостей фазовых скоростей обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн в кристалле симметрии $3m$ от значения угла. Угол θ изменяется от 0 до π с шагом 0.1 радиана. Наличием пьезоэффекта в кристалле пренебречь. Необходимые численные значения параметров кристалла ниобата лития и вид тензора диэлектрической проницаемости в кристаллофизической системе координат взять в виде (в Ф/м):

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 3.89 \cdot 10^{-10}, \quad \vartheta_{33} = 2.57 \cdot 10^{-10}.$$

3.1.3. Построить зависимости ориентации векторов поляризации обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн в кристалле симметрии $3m$ от значения угла θ . Модули векторов считать равными единице.

3.1.4. Объяснить ход зависимостей фазовых скоростей и ориентации векторов поляризации, используя представления о симметричности физических свойств в кристаллах, а также об оптической индикатрисе кристалла.

3.1.5. Составьте отчет о проделанной работе.

3.2. Схема расчета фазовых скоростей и векторов поляризаций

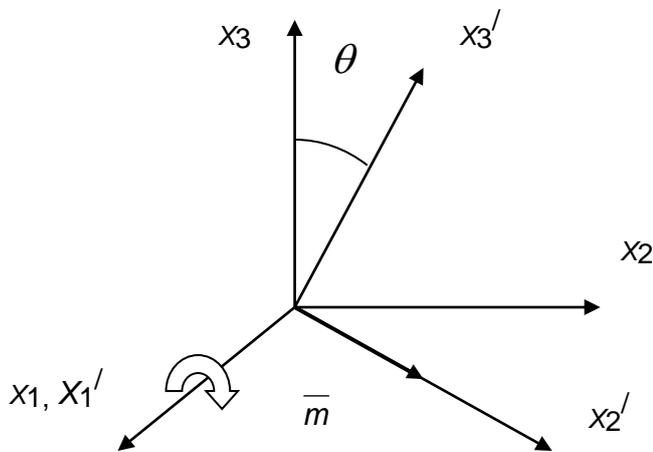


Рис.7

3.2.1. Используя матрицу преобразования кристаллофизических координат в систему, связанную с распространением оптического излучения, записать тензор диэлектрической непроницаемости в новой системе координат. На рис. 7 показано положение системы координат X_1', X_2', X_3' , связанной с направлением распространения оптического излучения, относительно кристаллофизической системы X_1, X_2, X_3 .

Матрица преобразования системы координат строится путем проецирования новой системы координат на старую. В ее первой строке записываются косинусы углов оси X_1' на оси X_1, X_2, X_3 , во второй и третьей – для осей X_2' и X_3' соответственно. В этом случае матрица преобразования будет иметь вид:

$$\|C_{i'k}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

3.2.2. Тензор диэлектрической непроницаемости в кристаллофизической системе координат в общем случае надо вычислять как матрицу, обратную заданной матрице диэлектрических проницаемостей. Однако, ввиду того, что исходная матрица диагональна, компоненты тензора диэлектрической непроницаемости находят из выражения:

$$\eta_{ij} = \frac{g_0}{g_{ij}}.$$

3.2.3. Для перевода тензора диэлектрической непроницаемости в новую (связанную с распространением оптического излучения) систему координат, используют выражение:

$$\eta'_{ik} = C_{ij}C_{kl}\eta_{jl},$$

где индексы i, j, k, l меняются от 1 до 3. Если учесть, что тензор $\hat{\eta}$ имеет диагональный вид, то, например, для случая $i = k = 1$ η'_{11} будет рассчитываться по формуле

$$\eta'_{11} = C_{11}^2\eta_{11} + C_{12}^2\eta_{22} + C_{13}^2\eta_{33} = C_{11}^2\eta_{11}.$$

Аналогично вычисляют остальные компоненты тензора диэлектрической непроницаемости. Так как новая система координат связана с направлением распространения оптического излучения, то в решении задачи будет участвовать только проекция тензора диэлектрической непроницаемости на плоскость волнового фронта. Это означает, что компоненты тензора по оси X_3' участия в вычислениях не принимают, что существенно упрощает задачу.

3.2.4. Вычисленные значения компонент тензора диэлектрической непроницаемости подставляют в выражение (8) и рассчитывают значения показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн для различных значений угла вхождения электромагнитной волны в кристалл, вычисляют их фазовые скорости и строят графики зависимости этих скоростей.

3.2.5. Последовательно подставляя найденные численные значения показателей преломления в систему (9), находим компоненты векторов поляризации обеих волн.

4. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

1. Отчет по лабораторной работе в обязательном порядке должен содержать следующие разделы:

- цель лабораторной работы,

- теоретическая часть,
 - описание расчетной части лабораторной работы,
 - конкретные данные на выполнение лабораторной работы,
 - полученные расчетные результаты в виде графиков зависимостей фазовых скоростей волн и их векторов поляризаций,
 - объяснение полученных результатов на основе симметрии кристалла.
2. Отчет должен быть набран в редакторе Word и представлен в скрепленном виде. Схемы и графики выполнены в графическом редакторе и вставлены в текст отчета. Рекомендуемые параметры для набора текста: шрифт Arial – 12, поля со всех сторон по 2 см, одиночный интервал между строк.
 3. В случае выполнения работы несколькими студентами в конце отчета должно быть указано конкретное участие каждого в выполнении работы.
 4. В соответствии с рейтинговой системой качество выполнения лабораторной работы и оформления отчета оценивается в баллах, которые суммируются с баллами по контрольным работам.

5. ЛИТЕРАТУРА

1. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М: Наука, 1979. - 640с.
2. Най Дж. Физические свойства кристаллов. - М.: Мир, - 1967. - 388с.
3. Давыдов В.Н. Материалы электронной техники и методы их анализа. Томск, ТМЦ ДО, 2013. - 132 с.