**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
(ТУСУР)**

Кафедра промышленной электроники (ПрЭ)

Ю.М. Лебедев

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное методическое пособие для студентов направления 11.03.04

Томск 2017

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРОГРАММА ЛЕКЦИОННОГО КУРСА

Предмет дисциплины и ее значение для электроники. Классификация систем автоматического управления (САУ). Принципы управления по отклонению и возмущению. Функциональные схемы САУ и их элементы.

Математическое описание линейных непрерывных САУ. Статические характеристики элементов и систем. Описание САУ и их элементов дифференциальными уравнениями. Понятие передаточной функции. Частотные функции и характеристики САУ и их элементов. Временные характеристики. Взаимосвязь различных форм математического описания.

Типовые динамические звенья САУ (пропорциональное, интегрирующее дифференцирующее, форсирующее, апериодическое, апериодическое второго порядка, колебательное, консервативное) и их характеристики. Минимально- и неминимально фазовые звенья. Звено чистого запаздывания и его свойства и характеристики.

Понятие структурной схемы САУ. Элементы структурных схем. Правила преобразования структурных схем. Передаточные функции и частотные характеристики разомкнутых и замкнутых САУ. Построение асимптотических логарифмических частотных характеристик.

Устойчивость линейных САУ. Физическое понятие устойчивости. Определение устойчивости по корням характеристического уравнения. Критерии устойчивости. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица. Частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста. Устойчивость по логарифмическим частотным характеристикам.

Понятие критического (граничного) значения варьируемого параметра. Расчет критического (граничного) значения варьируемого параметра. Построение границы устойчивости САУ в пространстве двух варьируемых параметров с помощью критериев устойчивости. D - разбиения. Понятие запасов устойчивости. Обеспечение заданных запасов устойчивости.

Показатели качества регулирования: точность в установившемся режиме, длительность (время) переходного процесса, перерегулирование, колебательность. Статические и астатические САУ, порядок астатизма. Оценка качества регулирования по частотным характеристикам САУ. Методы построения переходной характеристики. Построение переходной характеристики путем непосредственного перехода от изображения к оригиналу через обратное преобразование Лапласа. Применение интегрированной системы (пакета) программирования MathCAD для расчета и анализа характеристик САУ.

Коррекция динамических характеристик САУ. Постановка задач стабилизации и коррекции. Последовательная и параллельная коррекция. Типовые последовательные корректирующие звенья. Гибкие и жесткие корректирующие обратные связи.

Синтез последовательных корректирующих устройств по логарифмическим частотным характеристикам. Построение желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристики (ЛАЧХ) по номограммам Солодовникова. Понятие технического оптимума (ТО) и настройка одноконтурных САУ на минимальные время переходного процесса и перерегулирование.

Дискретные системы и их классификация. Типы модуляции. Линейные и нелинейные дискретные системы.

Математическое описания систем с амплитудной импульсной модуляцией (АИМ). Понятие решетчатой функции, разности решетчатых функций. Дискретное преобразование Лапласа и Z – преобразование, их основные свойства.

Типовая структура разомкнутой САУ с АИМ. Формирующий элемент. Понятие передаточной функции системы с АИМ, ее связь с импульсной переходной характеристикой и передаточной функцией приведенной непрерывной части. Особенности передаточных функций разомкнутых систем с АИМ.

Основные правила преобразования структурных схем систем с АИМ. Получение передаточных функций замкнутых САУ с АИМ. Частотные характеристики систем с АИМ и их основные свойства.

Необходимое и достаточное условие устойчивости систем с АИМ при различных формах математического описания. Критерии устойчивости. W-преобразование. Аналоги критериев устойчивости Гурвица, Михайлова, Найквиста, их особенности и возможности применения. Запасы устойчивости.

Переходные и установившиеся процессы в системах с АИМ. Расчет переходных характеристик путем применения обратного дискретного преобразования Лапласа. Квазиустановившийся режим работы. Ошибки в системах с АИМ в установившемся режиме и оценка точности таких систем. Астатические САУ с АИМ. Прямые и косвенные оценки качества управления в динамическом режиме работы.

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЭТАПЫ И МАКСИМАЛЬНЫЙ РЕЙТИНГ

№	Наим. работы	Содержание работы	Макс. рейтинг (баллов)
1	2	3	4
1	Контрольная работа №1	Вывод дифференциального уравнения и передаточной функции для пассивного четырехполюсника, построение асимптотической ЛАЧХ	8
2	Контрольная работа №2	Определение устойчивости и статической точности, построение логарифмических частотных характеристик	8
3	Контрольная работа №3	Коррекция динамических свойств САУ, синтез корректирующего устройства	7
4	Индивидуальное задание №1	Определение передаточных функций САУ по структурной схеме, исследование САУ на устойчивость, определение граничного значения коэффициента передачи, построение границ области устойчивости, расчет статических характеристик	14

1	2	3	4
5	Индивидуальное задание № 2	Построение частотных характеристик и оценка по ним качества переходного процесса, расчет переходных характеристик	15
6	Индивидуальное задание №3	Синтез последовательного корректирующего устройства, расчет характеристик и электронное моделирование скорректированной САУ	12
7	Лабораторная работа №1	Исследование характеристик типовых динамических звеньев	8
8	Лабораторная работа №2	Исследование характеристик статических и астатических САУ	9
9	Лабораторная работа №3	Параллельная коррекция САУ	9
10	Лабораторная работа №4	Последовательная коррекция САУ	8
11	Собеседование		12
12	Решение задач на лекциях		10
Итого			120

Предельные сроки выполнения и защиты индивидуальных заданий (после этих сроков рейтинг за выполнение заданий снижается) устанавливаются преподавателем.

Контрольные работы проводятся по расписанию или в заранее назначенные дни.

Лабораторные работы проводятся только в дни, отведенные для этого по расписанию. Время проведения всех лабораторных работ ограничено четырьмя академическими часами, Допускается самостоятельное выполнение лабораторных работ в свободное от занятий время. Допуск к выполнению последующей работы студент получает только после сдачи отчета по предыдущей работе и его защиты.

Собеседование по теоретическому курсу проводится по окончании этого курса и в нем принимают участие только студенты, имеющие итоговый рейтинг не менее 70-ти баллов.

Студенты на экзамене могут поднять рейтинг и оценку по дисциплине в результате собеседования и решения типовых задач на экзамене. Студенты, набравшие предварительный рейтинг менее 50 или не выполнившие программу дисциплины, к экзамену не допускаются.

Для получения итоговой оценки по дисциплине по текущему рейтингу необходимо посетить не менее двух третей обязательных занятий (лекционных и практических аудиторных). При большем числе пропусков обязательна сдача экзамена.

3. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

3.1. Коновалов Б.И., Лебедев Ю.М. Теория автоматического управления. Учебное пособие. Томский ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003 – 205с.

3.2. Лебедев Ю.М. Применение системы MathCAD в практических расчетах. Томск: Ротапринт ТУСУР, 1997. – 78с.

3.3. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1989. – 304с.

3.4. Теория автоматического управления.Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков и др.; Под ред. А.А. Воронова.- М.: Высшая школа, 1986. –367с.

3.5. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – М.: Энергия, 1975. – 416с.

3.6. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы: Справочник.- М.: Машиностроение, 1982. –502с.

3.7. Бесекерский В.А. и др. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1978. –512 с.

3.8. Топчеев Ю. И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. Учеб. пособие для втузов. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

4.1. Контрольная работа № 1

Каждому студенту предлагается электрическая схема на пассивных элементах (резисторах, конденсаторах, индуктивностях). Накопителей электрической энергии в любой схеме два.

В контрольной работе требуется:

1) составить систему дифференциальных уравнений, описывающих равновесие в электрической цепи;
2) определить передаточную функцию схемы;
3) построить асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Пример рассчитываемой схемы приведен на рис.4.1.

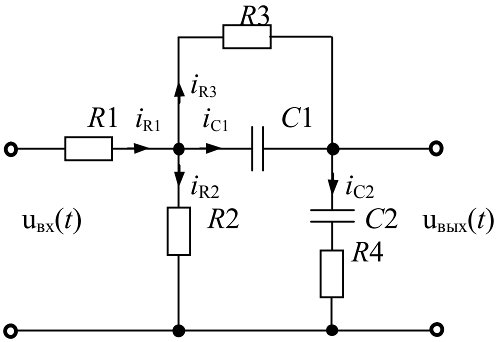


Рис. 4.1. Электрическая схема пассивного четырехполюсника

По законам Кирхгофа составим исходную систему уравнений, описывающих данную схему:

$$\begin{cases} i_{R1}(t) - i_{R2}(t) - i_{R3}(t) - i_{C1}(t) = 0, \\ i_{R3}(t) + i_{C1}(t) - i_{C2}(t) = 0, \\ R_3 \cdot i_{R3}(t) - u_{C1}(t) = 0, \\ R_2 \cdot i_{R2}(t) - u_{C1}(t) - R_4 \cdot i_{C2}(t) - u_{C2}(t) = 0, \\ R_1 \cdot i_{R1}(t) + u_{C1}(t) + R_4 \cdot i_{C2}(t) + u_{C2}(t) = u_{\text{вх}}(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

Дополним систему уравнений (4.1) уравнением относительно $u_{\text{вых}}(t)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = R_4 \cdot i_{C2}(t) + u_{C2}(t). \tag{4.2}$$

Учитывая, что $i_{C1}(t) = C_1 \dfrac{du_{C1}(t)}{dt}$ и $i_{C2}(t) = C_2 \dfrac{du_{C2}(t)}{dt}$, исключим переменные $i_{C1}(t)$ и $i_{C2}(t)$ из системы уравнений (4.1). После подстановки получим:

$$\begin{cases} i_{R1}(t) - i_{R2}(t) - i_{R3}(t) - C_1 \dfrac{du_{C1}(t)}{dt} = 0, \\ i_{R3}(t) + C_1 \dfrac{du_{C1}(t)}{dt} - C_2 \dfrac{du_{C2}(t)}{dt} = 0, \\ R_3 \cdot i_{R3}(t) - u_{C1}(t) = 0, \\ R_2 \cdot i_{R2}(t) - u_{C1}(t) - R_4 \cdot C_2 \dfrac{du_{C2}(t)}{dt} - u_{C2}(t) = 0, \\ R_1 \cdot i_{R1}(t) + u_{C1}(t) + R_4 \cdot C_2 \dfrac{du_{C2}(t)}{dt} + u_{C2}(t) = u_{\text{вх}}(t). \end{cases} \tag{4.3}$$

Для вывода передаточной функции подвергнем систему уравнений (4.3) преобразованию Лапласа при нулевых начальных условиях. Вводя обозначения

$$i_{R1}(t) \Leftrightarrow I_{R1}(p),\ i_{R2}(t) \Leftrightarrow I_{R2}(p),\ i_{R3}(t) \Leftrightarrow I_{R3}(p),\ u_{C1}(t) \Leftrightarrow U_{C1}(p),$$

$$u_{C2}(t) \Leftrightarrow U_{C2}(p),\ \ \frac{du_{C1}(t)}{dt} \Leftrightarrow pU_{C1}(p),\ \ \frac{du_{C2}(t)}{dt} \Leftrightarrow pU_{C2}(p),$$

$$u_{\text{вх}}(t) \leftrightarrow U_{\text{вх}}(p), \quad u_{\text{вых}}(t) \leftrightarrow U_{\text{вых}}(p).$$

получим:

$$\begin{cases} I_{R1}(p) - I_{R2}(p) - I_{R3}(p) - C_1 p U_{C1}(p) = 0, \\ I_{R3}(p) + C_1 p U_{C1}(p) - C_2 p U_{C2}(p) = 0, \\ R_3 \cdot I_{R3}(p) - U_{C1}(p) = 0, \\ R_2 \cdot I_{R2}(p) - U_{C1}(p) - (R_4 C_2 p + 1) U_{C2}(p) = 0, \\ R_1 \cdot I_{R1}(p) + R_2 \cdot I_{R2}(p) = U_{\text{вх}}(p), \end{cases} \tag{4.4}$$

$$U_{\text{вых}}(p) = (R_4 C_2 p + 1) U_{C2}(p). \tag{4.5}$$

Из уравнения (4.5) легко видеть, что для более быстрого получения передаточной функции систему уравнений (4.4) удобнее всего разрешить относительно переменной $U_{C2}(p)$. Для этого выразим из третьего уравнения системы (4.4) переменную $U_{C1}(p)$, подставим ее во второе уравнение и найдем переменную $I_{R3}(p)$:

$$U_{C1}(p) = R_3 \cdot I_{R3}(p),$$

$$I_{R3}(p) + C_1 R_3 p \cdot I_{R3}(p) - C_2 p U_{C2}(p) = 0,$$

$$I_{R3}(p) = \frac{C_2 p}{C_1 R_3 p + 1} U_{C2}(p), \tag{4.6}$$

$$U_{C1}(p) = \frac{R_3 C_2 p}{C_1 R_3 p + 1} U_{C2}(p). \tag{4.7}$$

Подставим выражение (4.7) в четвертое уравнение и определим из получившегося соотношения переменную $I_{R2}(p)$:

$$R_2 \cdot I_{R2}(p) - \frac{R_3 C_2 p}{C_1 R_3 p + 1} U_{C2}(p) - (R_4 C_2 p + 1) U_{C2}(p) = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} I_{R2}(p) &= \frac{\dfrac{R_3 C_2 p}{R_3 C_1 p + 1} + R_4 C_2 p + 1}{R_2} U_{C2}(p) = \\ &= \frac{R_3 R_4 C_1 C_2 p^2 + [R_3 (C_1 + C_2) + R_4 C_2] p + 1}{R_2 (R_3 C_1 p + 1)} U_{C2}(p). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Подставив выражения (4.6) – (4.8) в первое уравнение системы (4.4), получим выражение для определения переменной $I_{R1}(p)$:

$$I_{R1}(p)-\frac{R_3R_4C_1C_2p^2+\left[R_3\left(C_1+C_2\right)+R_4C_2\right]p+1}{R_2\left(R_3C_1p+1\right)}U_{C2}(p)-$$

$$-\frac{C_2p}{R_3C_1p+1}U_{C2}(p)-\frac{R_3C_1C_2p^2}{R_3C_1p+1}U_{C2}(p)=0,$$

отсюда

$$I_{R1}(p)=\frac{R_3\left(R_2+R_4\right)C_1C_2p^2+\left[R_3\left(C_1+C_2\right)+R_4C_2+R_2C_2\right]p+1}{R_2\left(R_3C_1p+1\right)}U_{C2}(p). \quad (4.9)$$

Подставив выражения (4.6) , (4.9) в пятое уравнение системы (4.4), выразим $U_{\text{вх}}(p)$ через переменную $U_{C2}(p)$:

$$U_{\text{вх}}(p)=R_1\cdot\left\{\frac{R_3\left(R_2+R_4\right)C_1C_2p^2+\left[R_3\left(C_1+C_2\right)+R_4C_2+R_2C_2\right]p+1}{R_2\left(R_3C_1p+1\right)}+\right.$$

$$\left.+R_2\cdot\frac{R_3R_4C_1C_2p^2+\left[R_3\left(C_1+C_2\right)+R_4C_2\right]p+1}{R_2\left(R_3C_1p+1\right)}\right\}U_{C2}(p)=$$

$$=\frac{R_1+R_2}{R_2}\cdot\left\{\frac{\dfrac{\left[R_1R_3\left(R_2+R_4\right)+R_2R_3R_4\right]C_1C_2}{R_1+R_2}}{R_3C_1p+1}p^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\dfrac{\left(R_1+R_2\right)R_3C_1+\left[R_1\left(R_3+R_4\right)+R_2\left(R_1+R_3+R_4\right)\right]C_2}{R_1+R_2}p+1}{R_3C_1p+1}\right\}U_{C2}(p).$$

Поделив уравнение (4.5) на полученное выражение, получим передаточную функцию заданного пассивного четырехполюсника:

$$W(p)=\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}=\frac{k\left(\tau_1p+1\right)\left(\tau_1p+1\right)}{T_1^2p^2+T_2p+1}, \quad (4.10)$$

где

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad \tau_1 = R_3 C_1, \qquad \tau_2 = R_4 C_2,$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{\left[R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_3 R_4\right] C_1 C_2}{R_1 + R_2}},$$

$$T_2 = \frac{(R_1 + R_2) R_3 C_1 + \left[R_1 (R_3 + R_4) + R_2 (R_1 + R_3 + R_4)\right] C_2}{R_1 + R_2}$$

Таким образом, заданный четырехполюсник может быть представлен последовательным соединением пропорционального звена с коэффициентом передачи k, двух форсирующих звеньев с постоянными времени τ_1, τ_2 и звена второго порядка. Последнее может быть только апериодическим, поскольку реализовано на одинаковых накопительных элементах (конденсаторах). Апериодическое звено второго порядка, в свою очередь, может быть представлено последовательным соединением двух апериодических звеньев первого порядка с постоянными времени T_3 и T_4, определяемым по соотношению

$$T_{3,4} = \frac{T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2} = T_1\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \;\; \xi = \frac{T_2}{2T_1},$$

а передаточная функция может быть представлена формулой

$$W(p) = \frac{k(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}. \qquad (4.11)$$

Для построения частотных характеристик зададим численные значения параметров элементов схемы. Примем

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 100\,\text{Ом},, \quad C_1 = 1000\,\text{мкФ}, \quad C_2 = 2000\,\text{мкФ},$$

тогда, в соответствии с приведёнными выше формулами, получим

$$k = 0{,}5, \quad \tau_1 = 0{,}1\,\text{с}, \quad \tau_2 = 0{,}2\,\text{с}, \quad T_3 = 0{,}545\,\text{с}, \quad T_4 = 0{,}055\,\text{с}.$$

Рассчитаем частоты сопряжения и их десятичные логарифмы:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} = 10 \text{ рад/с}; \qquad \lg(\omega_{c1}) = 1 \text{ дек};$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2} = 5 \text{ рад/с}; \qquad \lg(\omega_{c2}) = 0,7 \text{ дек};$$

$$\omega_{c3} = \frac{1}{T_3} = 1,835 \text{ рад/с}; \qquad \lg(\omega_{c3}) = 0,264 \text{ дек};$$

$$\omega_{c4} = \frac{1}{T_4} = 18,2 \text{ рад/с}; \qquad \lg(\omega_{c4}) = 1,26 \text{ дек}.$$

Асимптотическая ЛАЧХ, построенная по передаточной функции (4.11), представлена на рис.4.2.

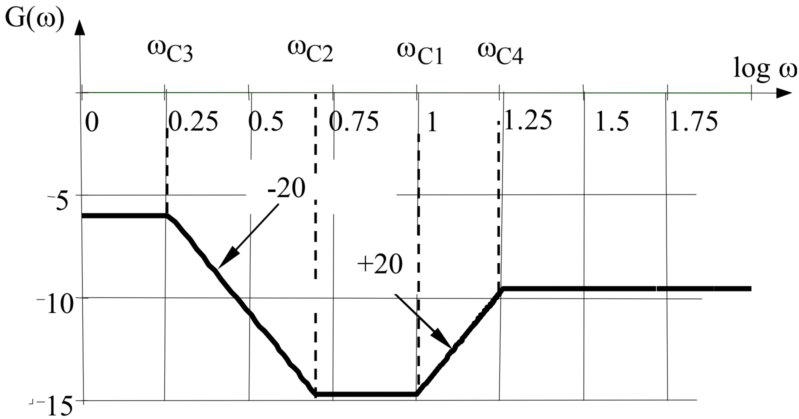


Рис. 4.2. Асимптотическая ЛАЧХ пассивного четырехполюсника

П р и м е ч а н и е. Кроме описанного способа, для нахождения передаточной функции система (4.5) может быть решена любым другим способом, например, путем решения матричного уравнения вида **AX = B** , где

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} I_{R1}(p)\\ I_{R2}(p)\\ I_{R3}(p)\\ U_{C1}(p)\\ U_{C2}(p)\end{bmatrix}$$ – вектор переменных,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -C_1\text{p} & 0\\ 0 & 0 & 1 & C_1\text{p} & -C_2\text{p}\\ 0 & 0 & R_3 & -1 & 0\\ 0 & R_2 & 0 & -1 & -\left(R_4C_2\text{p}+1\right)\\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ – матрица коэффициентов при переменных,

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ U_{\text{ВХ}}(p)\end{bmatrix}$$ – вектор правых частей системы (4.5) .

В этом случае решение удобно искать по формуле $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, где $\mathbf{A}^{-1}$ – обратная матрица и, например, для пятой компоненты вектора $\mathbf{X}$ оно будет иметь вид:

$$U_{C2}(p)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\left\{\frac{R_3C_1p+1}{\frac{\left[R_1R_3\left(R_2+R_4\right)+R_2R_3R_4\right]C_1C_2}{R_1+R_2}p^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(R_3C_1p+1\right)}{\frac{\left(R_1+R_2\right)R_3C+\left[R_1\left(R_3+R_4\right)+R_2\left(R_1+R_3+R_4\right)\right]C_2}{R_1+R_2}p+1}\right\}U_{\text{ВХ}}(p).$$

Теперь для получения передаточной функции требуется умножить полученное выражение на R_4C_2p+1 и поделить его на $U_{\text{ВХ}}(p)$. Легко видеть, что результаты совпадут.

Описанный подход удобен при использовании системы MathCAD.

4.2. Контрольная работа № 2

В работе предлагается структурная схема замкнутой САУ третьего порядка, указываются величины задающего и возмущающего воздействий.

В работе необходимо сделать следующее:

1) определить устойчивость и граничное значение коэффициента передачи, применив один из заданных критериев (Гурвица, Михайлова или Найквиста);
2) определить статическую точность;
3) построить асимптотическую ЛАЧХ.

Рассмотрим пример, воспользовавшись структурной схемой, приведенной на рис. 4.3. Здесь звенья имеют следующие передаточные функции:

$$W_1(p)=\frac{k_1}{T_1^2p^2+T_2p+1},\ W_2(p)=\frac{k_2(\tau_2p+1)}{p},\ W_3(p)=k_3,$$

$$W_{\text{ос}}(p)=k_{\text{ос}},$$

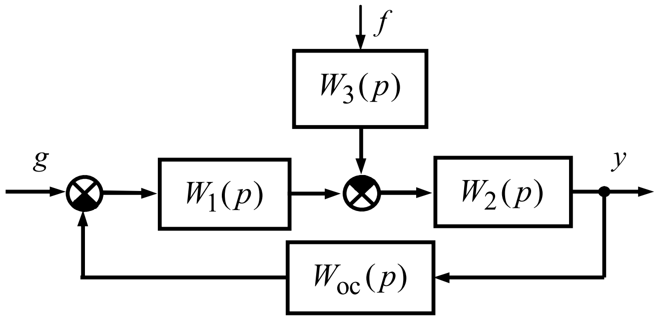


Рис. 4.3. Структурная схема САУ

где

$$k_1=20;\ T_1^2=0{,}04\ \text{с}^2;\quad T_2=0{,}3\ \text{с};\quad k_2=1\ \text{с}^{-1};\quad \tau_2=0{,}05\ \text{с};$$

$$k_3=k_{\text{ос}}=0{,}5;\qquad g=2;\qquad f_{\max}=5.$$

Получим передаточные функции САУ:

- передаточная функция разомкнутой системы по задающему воздействию:

$$W_{\text{pg}}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{k_1 k_2 (\tau_2 p + 1)}{p(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)};$$

- передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию:

$$W_{\text{pf}}(p) = W_2(p) \cdot W_3(p) = \frac{k_2 k_3 (\tau_2 p + 1)}{p};$$

- передаточная функция разомкнутой цепи:

$$W_{\text{рц}}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{\text{oc}}(p) = \frac{k_1 k_2 k_{\text{oc}} (\tau_2 p + 1)}{p(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)} =$$

$$= \frac{K_{\text{p}} (\tau_2 p + 1)}{p(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)},$$

где $K_{\text{p}} = k_1 k_2 k_{\text{oc}} = 10$ - коэффициент передачи разомкнутой цепи;

- передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию:

$$W_{\text{зg}}(p) = \frac{W_{\text{pg}}(p)}{1 + W_{\text{рц}}(p)} \cdot = \frac{K_{\text{p}}}{k_{\text{oc}}} \cdot \frac{(\tau_2 p + 1)}{p(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) + K_{\text{p}} (\tau_2 p + 1)};$$

- передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию:

$$W_{\text{зf}}(p) = \frac{W_{\text{pf}}(p)}{1 + W_{\text{рц}}(p)} = \frac{k_2 k_3 (\tau_2 p + 1)(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)}{p(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) + K_{\text{p}} (\tau_2 p + 1)}.$$

Характеристический полином САУ

$$A(p) = p(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) + K_{\text{p}} (\tau_2 p + 1) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

где $a_0 = K_{\text{p}}$, $\quad a_1 = K_{\text{p}} \tau_2 + 1$, $\quad a_2 = T_2$, $\quad \text{a}_3 = T_1^2$.

Определим устойчивость САУ и ее граничный коэффициент передачи по различным критериям устойчивости.

Критерий устойчивости Гурвица

Вычислим главный минор определителя Гурвица:

$$\Delta_{n-1} = a_1\, a_2 - a_3 a_0 = (10 \cdot 0{,}05 + 1) \cdot 0{,}3 - 0.04 \cdot 10 = 0{,}05\,.$$

Т.к. $\Delta_{n-1} > 0$, САУ устойчива.

Рассчитаем граничный коэффициент передачи, решив уравнение $\Delta_{n-1} > 0$, т.е.:

$$(K_{\text{гр}} \cdot \tau_2 + 1)T_2 - T_1^{\,2} \cdot K_{\text{гр}} = 0\,,$$

отсюда

$$K_{\text{гр}} = \frac{T_2}{T_1^{\,2} - T_2 \tau_2} = \frac{0{,}3}{0{,}04 - 0{,}3 \cdot 0{,}05} = 12\,.$$

Устойчивость САУ подтверждается тем, что $K_{\text{р}} = 10 < K_{\text{гр}} = 12$.

Критерий устойчивости Михайлова

Произведем в полиноме $A(p) = p(T_1^{\,2} p^2 + T_2 p + 1) + {}$ $+ K_{\text{р}}(\tau_2 p + 1)$ замену оператора Лапласа p на переменную $j\omega$. Получим:

$$A(j\omega) = K_{\text{р}} - \omega^2 T_2 + j\omega(K_{\text{р}}\tau_2 - \omega^2 T_1^{\,2})\,,$$

т.е. $\mathrm{Re}[A(j\omega)] = K_{\text{р}} - \omega^2 T_2,\qquad \mathrm{Im}[A(j\omega)] = \omega(K_{\text{р}}\tau_2 - \omega^2 T_1^{\,2})$.

Определим частоты, при которых мнимая и вещественная части функции $A(j\omega)$ обращаются в нуль. Мнимая часть $A(j\omega)$ равна нулю при частотах $\omega_0 = 0$ и $\omega_2 = \dfrac{\sqrt{K_{\text{р}}\tau_2}}{T_1} = \dfrac{\sqrt{10 \cdot 0{,}05}}{0{,}2} = 6{,}124$ рад/с. Действительная часть равна нулю при частоте $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{K_{\text{р}}}{T_2}} = \sqrt{\dfrac{10}{0{,}3}} = 5{,}774$ рад/с.

Поскольку $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$, при изменении ω от нуля до бесконечности годограф Михайлова проходит последовательно в положительном направлении три квадранта комплексной плоскости. Следовательно, согласно критерию Михайлова, заданная САУ устойчива.

Расчет граничного коэффициента передачи производится по тем же выражениям, что и в критерии Гурвица.

Критерий устойчивости Найквиста

Произведем в передаточной функции разомкнутой цепи $W_{\text{рц}}(p) = \dfrac{K_{\text{р}}(\tau_2 p + 1)}{p(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)}$ замену оператора Лапласа p на переменную $j\omega$, преобразовав ее тем самым в выражение вида

$$W(j\omega) = \frac{K_{\text{р}}(\tau_2 j\omega + 1)}{j\omega(-T_1^2\omega^2 + T_2 j\omega + 1)} = \frac{K_{\text{р}}(\tau_2 j\omega + 1)}{-T_2\omega^2 + j\omega(1 - T_1^2\omega^2)}.$$

Произведем разделение мнимой и действительной частей в этой частотной передаточной функции, умножив ее числитель и знаменатель на функцию, сопряженной функции, расположенной в знаменателе. После преобразований получим следующие выражения:

$$\operatorname{Re}[W(j\omega)] = \frac{K_{\text{р}}(\tau_2 - T_2 - \tau_2 T_1^2\omega^2)}{T_1^4\omega^4 + (T_2^2 - 2T_1^2)\cdot\omega^2 + 1};$$

$$\operatorname{Im}[W(j\omega)] = \frac{K_{\text{р}}}{\omega}\cdot\frac{(T_1^2 - \tau_2 T_2)\cdot\omega^2 - 1}{T_1^4\omega^4 + (T_2^2 - 2T_1^2)\cdot\omega^2 + 1}.$$

Для определения устойчивости САУ приравняем мнимую часть частотной передаточной функции к нулю и вычислим значение квадрата частоты переворота фазы:

$$(T_1^2 - \tau_2 T_2)\cdot\omega_\pi^2 - 1 = 0,$$

$$\omega_\pi^2 = \frac{1}{T_1^2 - \tau_2 T_2} = \frac{1}{0{,}04 - 0{,}05\cdot 0.3} = 40.$$

Вычислим значение действительной части частотной передаточной функции на частоте переворота фазы:

$$\mathrm{Re}\left[W(j\omega_\pi)\right]=\frac{K_\text{р}(\tau_2-T_2-\tau_2 T_1^{\,2}\omega_\pi^{\,2})}{T_1^{\,4}\omega_\pi^{\,4}+(T_2^{\,2}-2T_1^{\,2})\cdot\omega_\pi^{\,2}+1}=$$

$$=\frac{10\cdot\left(0{,}05-0{,}03-0{,}05\cdot 0{,}04\cdot 40\right)}{(0{,}04)^2\cdot(40)^2+\left(0{,}3^2-2\cdot 0{,}04\right)\cdot 40+1}=-0{,}833.$$

Поскольку $\left|\mathrm{Re}\left[W(j\omega_\pi)\right]\right|<1$, годограф Найквиста при изменении частоты от нуля до бесконечности не охватывает точку с координатами (-1, j0), САУ устойчива.

Граничный коэффициент передачи определиться из соотношения

$$\mathrm{Re}\left[W(j\omega_\pi)\right]=\frac{K_\text{гр}(\tau_2-T_2-\tau_2 T_1^{\,2}\omega_\pi^{\,2})}{T_1^{\,4}\omega_\pi^{\,4}+(T_2^{\,2}-2T_1^{\,2})\cdot\omega_\pi^{\,2}+1}=-1\,\text{,}$$

откуда

$$K_\text{гр}=\frac{T_1^{\,4}\omega_\pi^{\,4}+(T_2^{\,2}-2T_1^{\,2})\cdot\omega_\pi^{\,2}+1}{\tau_2(T_1^{\,2}\omega_\pi^{\,2}-1)+T_2}=$$

$$=\frac{(0{,}04)^2\cdot(40)^2+\left(0{,}3^2-2\cdot 0{,}04\right)\cdot 40+1}{0{,}05\cdot\left(0{,}04\cdot 40-1\right)+0{,}03}=12.$$

Результат расчета совпадает с ранее полученным.

Для расчета статической точности определим коэффициенты передачи замкнутой САУ по задающему $K_\text{з}$ и возмущающему $K_\text{в}$ воздействиям:

$$K_\text{з}=W_{\text{з}g}(0)=\frac{1}{k_\text{ос}}=\frac{1}{0{,}5}=2\;;$$

$$K_\text{в}=W_{\text{з}f}(0)=\frac{k_2k_3}{K_\text{р}}=\frac{k_3}{k_1k_\text{ос}}=\frac{0{,}5}{20\cdot 0{,}5}=0{,}05\,.$$

Значение выходной величины на холостом ходу (при $f=0$):

$$y_0=g\cdot K_\text{з}=2\cdot 2=4\,.$$

Максимальное отклонение выходной величины (при $f = f_{\max}$):

$$\Delta y = f_{\max} \cdot K_{\text{в}} = 5 \cdot 0{,}05 = 0{,}25\,.$$

Статизм внешней характеристики САУ:

$$S = \frac{\Delta y}{y_0} \cdot 100 = \frac{0{,}25}{4} \cdot 100 = 6{,}25\ \%.$$

На рис. 4.4 приведен график внешней статической характеристики САУ при изменении возмущающего воздействия от нуля до $f = f_{\max}$.

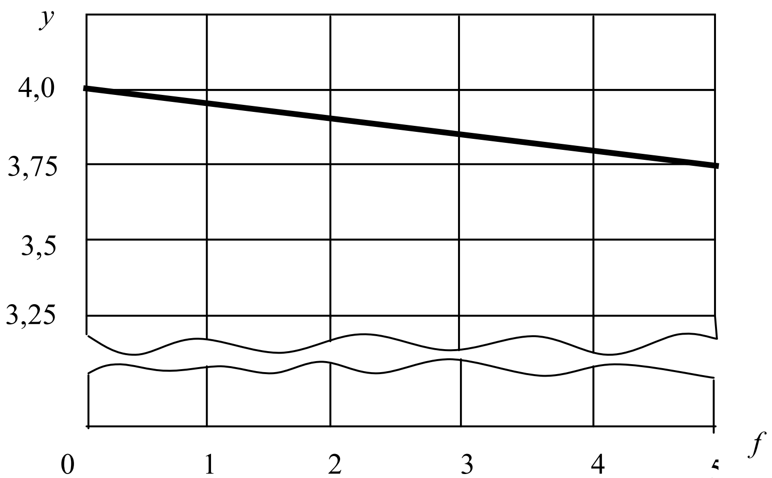


Рис. 4.4. Внешняя статическая характеристика САУ

Для построения асимптотической ЛАЧХ необходимо выяснить тип динамического звена второго порядка, то есть определить коэффициент демпфирования.

Знаменатель передаточной функции звеньев второго порядка принято записывать в следующей форме:

$$A(p) = T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1\,.$$

Отсюда и определяется коэффициент демпфирования:

$$\xi = \frac{T_2}{2T_1} = \frac{0,3}{2 \cdot \sqrt{0,04}} = 0,75\,.$$

Так как $\xi < 1$, то исследуемое звено колебательное.

Исходя из заданных постоянных времени и коэффициента передачи САУ $K_р$, произведем предварительные расчеты для построения асимптотической ЛАЧХ:

$$20\lg K_р = 20\lg 10 = 20\,;$$

$$\omega_{c1} = \lg\frac{1}{T_1} = \lg\frac{1}{\sqrt{0,04}} \approx 0,7\,; \qquad \omega_{c2} = \lg\frac{1}{\tau_2} = \lg\frac{1}{0,05} \approx 1,3\,.$$

На рис. 4.5 приведена ЛАЧХ САУ.

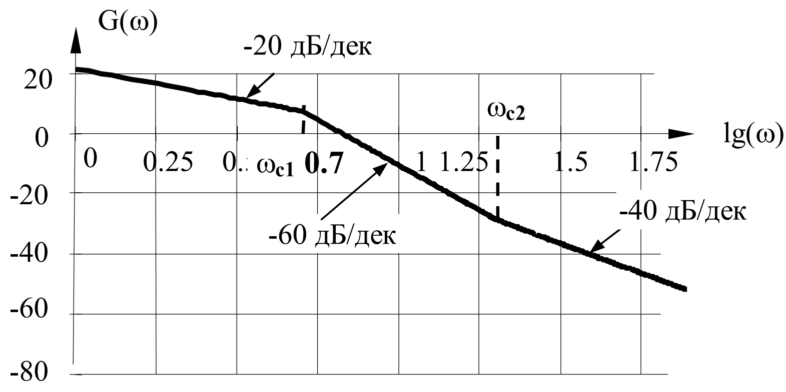


Рис. 4.5. Асимптотическая ЛАЧХ САУ

4.3. Контрольная работа № 3

Задается структурная схема САУ третьего порядка. Требуется определить передаточную функцию последовательного корректирующего устройства, обеспечивающего для этой САУ заданные значения времени переходного процесса $t_{пп}$ и перерегулирование σ, разработать схему его реализации на операционных усилителях (ОУ) и определить параметры элементов схемы.

Пусть для САУ, структурная схема которой изображена на рис. 4.6, путем последовательной коррекции требуется обеспечить $t_{пп} \le 0{,}15$ с и $\sigma \le 25\%$. Передаточные функции САУ имеют следующие параметры:

$$k_1 = 5;\ \tau_1 = 0{,}005\,\text{с};\ T_1 = 0{,}04\,\text{с};\ k_2 = 8;\ T_2 = 0{,}4\,\text{с};\ k_{\text{ос}} = 0{,}5;\ T_{\text{ос}} = 0{,}01\,\text{с}.$$

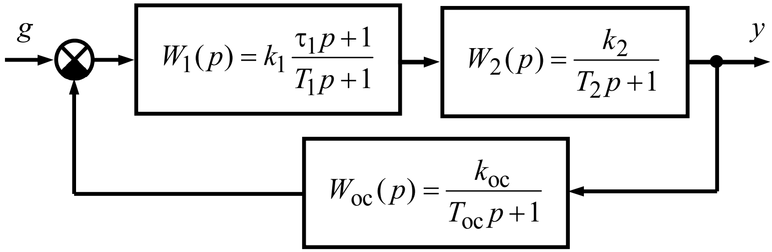


Рис. 4.6. Структурная схема нескорректированной САУ

Порядок решения поставленной задачи следующий:

- определяется передаточная функция разомкнутой цепи для нескорректированной САУ $G_{\text{нс}}(\omega)$:

$$W_{\text{нс}}(p) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_{\text{ос}} \cdot (\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{ос}} p + 1)} = \frac{K_{\text{р}} \cdot (\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{ос}} p + 1)},$$

где

$$K_{\text{р}} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_{\text{ос}} = 20;$$

- рассчитываются начальное значение $G_0 = 20 \lg K_{\text{р}} \approx 26$ дБ, частоты сопряжения $\omega_1 = \lg \dfrac{1}{T_1} \approx 0{,}4$ дек, $\omega_2 = \lg \dfrac{1}{T_2} \approx 1{,}4$ дек, $\omega_3 = \lg \dfrac{1}{T_{\text{ос}}} = 2$ дек, $\omega_4 = \lg \dfrac{1}{\tau_1} \approx 2{,}3$ дек и строится ЛАЧХ нескорректированной САУ $G_{\text{нс}}(\omega)$ (рис. 4.7, *а*);

- по номограмме, приведенной на рис. 4.8, *а*, определяются коэффициент $\lambda \approx 3{,}1$ и величина $P_{max} \approx 1{,}2$, соответствующие заданному значению $\sigma = 25$ %, затем по номограмме, приведенной на рис. 4.8, *б*, находится вспомогательный параметр

$L_g \approx 15$ дБ и далее рассчитывается частота среза для скорректированной САУ

$$\omega_{ср} \approx \frac{\lambda\pi}{t_{пп}} = \frac{3{,}1\pi}{0{,}15} = 98 \text{ рад/с, т. е. } \lg\omega_{ср} \approx 2 \text{ дек;}$$

- через частоту среза $\lg\omega_{ср} \approx 2$ дек до пересечения с прямой Lg проводится отрезок желаемой ЛАЧХ, имеющий наклон -20 дБ/дек. Определяется частота ω_0, соответствующая точке пересечения этого отрезка и прямой Lg, а также симметричная ей относительно $\omega_{ср}$ частота ω_{01}:

$$\lg\omega_0 \approx 1{,}24 \text{ дек, т. е. } \omega_0 \approx 10^{1,24} \approx 17{,}4 \text{ рад/с};$$

$$\lg\omega_{01} \approx 3{,}24 \text{ дек, т. е. } \omega_{01} \approx 10^{3,24} \approx 1740 \text{ рад/с};$$

- построенный отрезок желаемой ЛАЧХ продолжается в низкочастотную область до пересечения с уровнем G_0, соответствующим ЛАЧХ нескорректированной САУ, и из графика для точки их пересечения определяется частота ω_5:

$$\lg\omega_5 \approx 0{,}7 \text{ дек, т. е. } \omega_5 \approx 10^{0,7} \approx 5 \text{ рад/с};$$

- на участке $\omega_{ср} < \omega < \omega_{01}$ задаются частоты ω_6 и ω_7, через которые проводятся отрезки с наклонами –40 дБ/дек и –60 дБ/дек, соответствующие высокочастотному участку желаемой ЛАЧХ :

$$\log\omega_6 \approx 2{,}4 \text{ дек, т. е. } \omega_6 = 10^{2,4} \approx 250 \text{ рад/с},$$

$$\log\omega_7 \approx 2{,}6 \text{ дек, т. е. } \omega_7 = 10^{2,6} \approx 400 \text{ рад/с};$$

- ЛАЧХ корректирующего устройства $G_к(\omega)$ получается графически по формуле:

$$G_к(\omega) = G_ж(\omega) - G_{нс}(\omega);$$

- по наклонам $G_к(\omega)$ и частотам ее сопряжения синтезируется корректирующее устройство:

$$W_{к1}(p) = \frac{(\tau_{k1}p+1)(\tau_{k2}p+1)(\tau_{k3}p+1)}{(T_{k1}p+1)(T_{k2}p+1)(T_{k3}p+1)(T_{k4}p+1)},$$

где

$$\tau_{k1} = T_1, \quad \tau_{k2} = T_2, \quad \tau_{k3} = T_{ос}, \quad T_{k1} = \tau_1,$$

$$T_{k2} = \frac{1}{\omega_5} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ с}, \; T_{k3} = \frac{1}{\omega_6} = \frac{1}{250} = 0{,}004 \text{ с},$$

$$T_{k4} = \frac{1}{\omega_7} = \frac{1}{400} = 0{,}0025 \text{ с}.$$

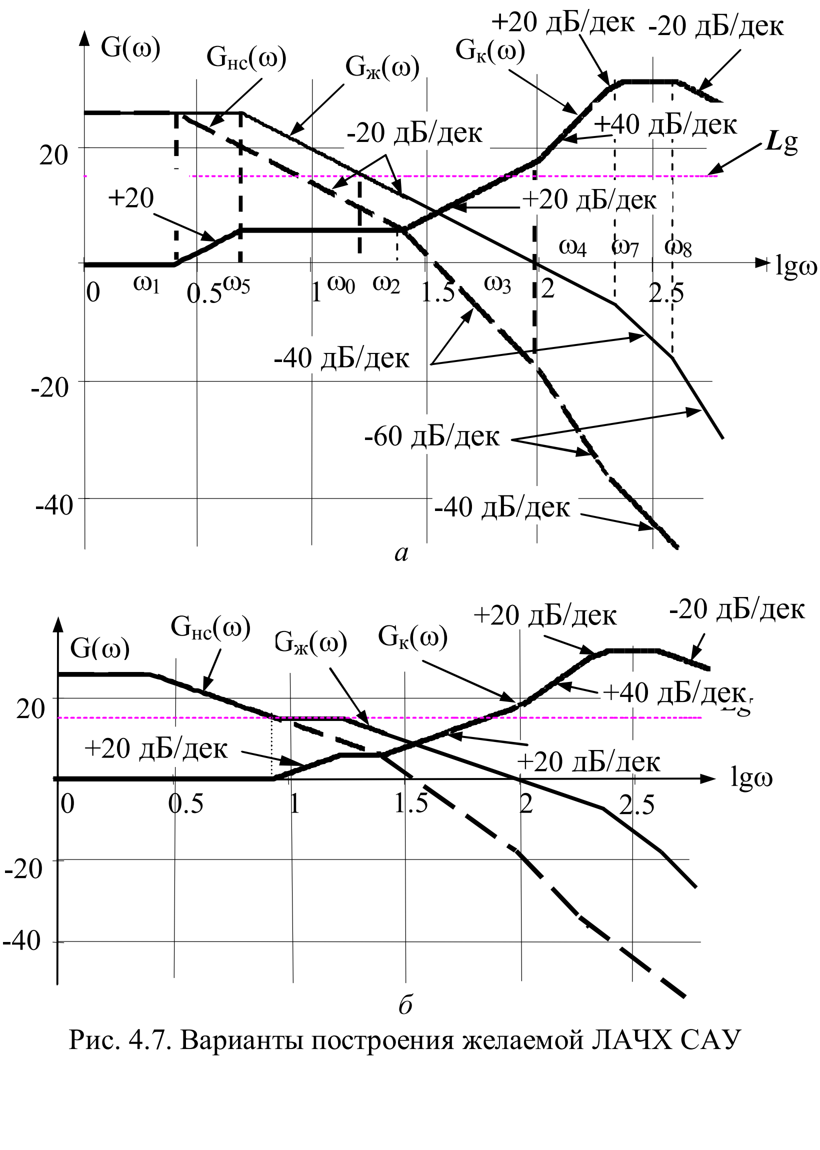


Рис. 4.7. Варианты построения желаемой ЛАЧХ САУ

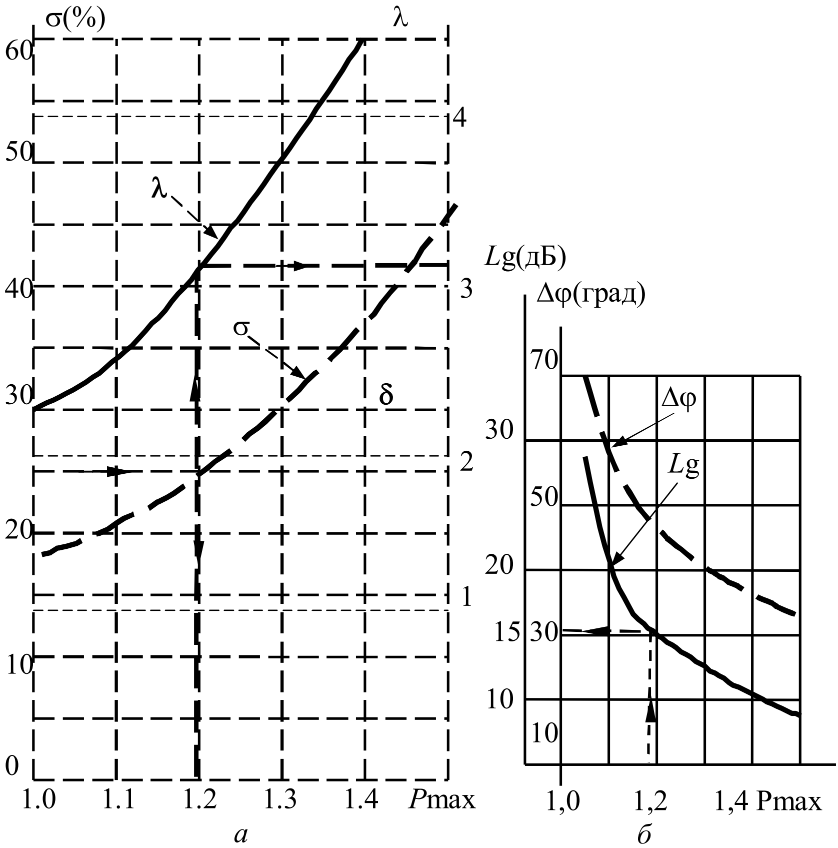


Рис. 4.8. Номограммы Солодовникова

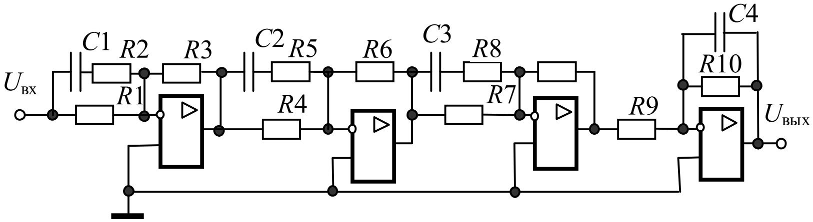


Рис. 4.9. Электрическая схема последовательного корректирующего устройства

Полученное корректирующее устройство представляет собой четырехзвенный фильтр, содержащий три инерционных форсирующих звена и одно инерционное, причем постоянные времени форсирующих звеньев больше, чем инерционных. Электрическая схема такого устройства приведена на рис. 4.9. Номиналы элементов этого устройства могут быть рассчитаны из следующих соотношений:

$$\begin{cases} R_1 = R_3, \\ (R_1 + R_2)C_1 = T_2 = 0{,}4, \\ R_2C_1 = T_{к2} = 0{,}2, \end{cases} \qquad \begin{cases} R_4 = R_6, \\ (R_4 + R_5)C_2 = T_1 = 0{,}04, \\ R_5C_2 = T_{к3} = 0{,}004, \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_7 = R_9, \\ (R_7 + R_8)C_3 = T_{ос} = 0{,}01, \\ R_8C_3 = T_{к4} = 0{,}0025, \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{10} = R_{11}, \\ R_{11}C_4 = \tau_{к4} = 0{,}005. \end{cases}$$

Рассчитаем эти номиналы. Примем

$$R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = R_7 = R_9 = R_{10} = R_{11} = 100 \text{ кОм},$$

тогда

$R_2 = \dfrac{0{,}2}{C_1}$; $\quad R_1C_1 + 0{,}2 = 0{,}4$; $\quad R_1C_1 = 0{,}2$, отсюда $C_1 = \dfrac{0{,}2}{R_1} = 2$ мкФ, $R_2 = R_1 = 100$ кОм.

Производя аналогичные вычисления, получим:

$$C_2 = 0{,}36 \text{ мкФ}, \quad R_5 \approx 11 \text{ кОм}, \quad C_3 = 0{,}075 \text{ мкФ}, \quad R_8 \approx 33 \text{ кОм},$$

$$C_4 = 0{,}05 \text{ мкФ}.$$

Рассмотрим другой вариант формирования желаемой ЛАЧХ. Оставим ее высокочастотную часть без изменения, а низкочастотную образуем путем стыковки участка с наклоном – 20 дБ/дек с ЛАЧХ нескорректированной САУ по прямой Lg (рис. 4.7, *б*). Корректирующее устройство получается аналогичным по отношению к предыдущему варианту. Отличие заключается лишь в том, что отсутствует постоянная времени $\tau_{k2} = T_2$, а вместо нее введена постоянная времени $\tau_{k4} = \dfrac{1}{\omega_8}$, где ω_8 определяется из графика, причем $\lg\omega_8 \approx 0{,}95$ дек, $\omega_8 \approx 8{,}9$ рад/с.

Сравним оба варианта скорректированной САУ, для чего определим для каждого из них передаточную функцию разомкнутой цепи.

Для первого варианта:

$$W_{\text{с}1}(p) = W_{\text{нс}}(p)\cdot W_{\text{к}1}(p) =$$

$$= \frac{K_{\text{р}}\cdot(\tau_1 p+1)}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_{\text{ос}} p+1)}\cdot\frac{(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_{\text{ос}} p+1)}{(\tau_1 p+1)(T_{k2} p+1)(T_{k3} p+1)(T_{k4} p+1)} =$$

$$= \frac{K_{\text{р}}}{(T_{k2} p+1)(T_{k3} p+1)(T_{k4} p+1)}.$$

Для второго варианта:

$$W_{\text{с}2}(p) = W_{\text{нс}}(p)\cdot W_{\text{к}2}(p) =$$

$$= \frac{K_{\text{р}}\cdot(\tau_1 p+1)}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_{\text{ос}} p+1)}\cdot\frac{(\tau_{k4} p+1)(T_2 p+1)(T_{\text{ос}} p+1)}{(\tau_1 p+1)(T_{k2} p+1)(T_{k3} p+1)(T_{k4} p+1)} =$$

$$= \frac{K_{\text{р}}(\tau_{k4} p+1)}{(T_1 p+1)(T_{k2} p+1)(T_{k3} p+1)(T_{k4} p+1)}.$$

Сравнивая эти передаточные функции между собой, легко видеть, что в первом варианте корректирующее устройство компенсирует все постоянные времени нескорректированной САУ, а сама скорректированная САУ имеет третий порядок. Во втором варианте происходит компенсация только постоянных времени T_1, $T_{\text{ос}}$ и порядок скорректированной САУ – четвертый. Какой из этих вариантов лучший, можно определить только после расчета переходных характеристик.

Примечание. Для удобства и единообразия при выполнении контрольной работы и расчете индивидуального задания №3, для различного перерегулирования рекомендуется принимать значения λ и Lg, приведенные в табл. 4.2.

Таблица 4.2

σ, %	λ	Lg	σ, %	λ	Lg
20	2,5	20	35	4,1	12
25	3,1	15	40	4,5	10
30	3,6	13	45	5,2	8

5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

5.1. Индивидуальное задание № 1. Устойчивость САУ

5.1.1. Вариант № 1

5.1.1.1. Определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой САУ по задающему и возмущающему воздействиям, передаточную функцию разомкнутой цепи САУ, характеристический полином замкнутой САУ.

5.1.1.2. По критерию устойчивости Гурвица определить устойчивость замкнутой САУ и граничное значение коэффициента передачи разомкнутой цепи.

5.1.1.3. Используя критерий устойчивости Гурвица, построить область устойчивости замкнутой САУ в пространстве варьируемых параметров x_1 и x_2.

5.1.1.4. Определить значение коэффициента передачи разомкнутой цепи, обеспечивающее в замкнутой САУ заданный запас устойчивости по амплитуде ΔG. Построить статические регулировочные и внешние характеристики замкнутой САУ.

5.1.2. Вариант № 2

5.1.2.1. Определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой САУ по задающему и возмущающему воздействиям, передаточную функцию разомкнутой цепи САУ, характеристический полином замкнутой САУ.

5.1.2.2. По критерию устойчивости Михайлова определить устойчивость замкнутой САУ (построив годограф Михайлова) и граничное значение коэффициента передачи разомкнутой цепи.

5.1.2.3. Используя метод D-разбиений, построить область устойчивости замкнутой САУ в пространстве варьируемых параметров x_1 и x_2.

5.1.2.4. Определить значение коэффициента передачи разомкнутой цепи, обеспечивающее в замкнутой САУ заданный запас устойчивости по амплитуде ΔG. Построить статические регулировочные и внешние характеристики замкнутой САУ.

5.1.3. Вариант № 3

5.1.3.1. Определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой САУ по задающему и возмущающему воздействиям, передаточную функцию разомкнутой цепи САУ, характеристический полином замкнутой САУ.

5.1.3.2. По критерию устойчивости Найквиста определить устойчивость замкнутой САУ и граничное значение коэффициента передачи разомкнутой цепи.

5.1.3.3. Используя критерий устойчивости Найквиста, построить область устойчивости замкнутой САУ в пространстве варьируемых параметров x_1 и x_2.

5.1.3.4. Определить значение коэффициента передачи разомкнутой цепи, обеспечивающее в замкнутой САУ заданный запас устойчивости по амплитуде ΔG. Построить статические регулировочные и внешние характеристики замкнутой САУ.

5.2. Индивидуальное задание № 2. Частотные и переходные характеристики САУ

Внимание! Все пункты индивидуального задания №2 выполняются для значения коэффициента передачи разомкнутой цепи САУ, обеспечивающего заданный запас устойчивости по амплитуде ΔG.

5.2.1. Рассчитать для разомкнутой цепи САУ амплитудно-фазовую частотную характеристику, логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ – асимптотическую и точную), логарифмическую фазовую частотную характеристику (ЛФЧХ). Определить по указанным характеристикам запасы устойчивости по фазе и амплитуде.

5.2.2. Рассчитать для замкнутой САУ амплитудную и вещественную частотные характеристики. По полученным характеристикам с использованием частотных критериев качества дать приближенную оценку качества переходного процесса.

5.2.3. Рассчитать переходные характеристики замкнутой САУ по задающему и возмущающему воздействиям. Сопоставить результаты оценки качества переходного процесса по частотным критериям качества с переходной характеристикой.

5.3. Индивидуальное задание № 3. Последовательная коррекция динамических свойств САУ

5.3.1. Синтезировать последовательное корректирующее устройство, которое обеспечило бы заданное время переходного процесса $t_{\text{пп}}$ и заданное перерегулирование σ.

5.3.2. Получить передаточную функцию замкнутой скорректированной САУ.

5.3.3. Построить переходную характеристику скорректированной САУ и проверить обеспечение заданных показателей качества.

5.3.4. Рассчитать частотные характеристики и произвести по ним оценку качества переходного процесса.

5.3.5. Разработать электронную модель скорректированной САУ по полученной передаточной функции замкнутой скорректированной САУ и корням характеристического уравнения.

5.3.6. На электронной модели получить переходную характеристику скорректированной САУ и сравнить ее с расчетной (по основным показателям качества регулирования).

6. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

6.1. Исходные данные для заданий

На рис. 67.1 приведена структурная схема заданной САУ, а на рис. 6.2 – принципиальная схема звена с передаточной функцией $W_3(p)$, где $R1 = 10$ кОм, $R2 = R5 = R6 = 100$ кОм, $R3 = 25$ кОм, $R4 = 4$ кОм, $C1 = C2 = 1$ мкФ.

Передаточные функции остальных звеньев САУ:

$$W_1(p) = k_1 \frac{\tau_1 p + 1}{T_1 p + 1}; \; W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \; W_{\text{ос}}(p) = k_{\text{ос}}.$$

Параметры звеньев приведены в табл. 6.1.

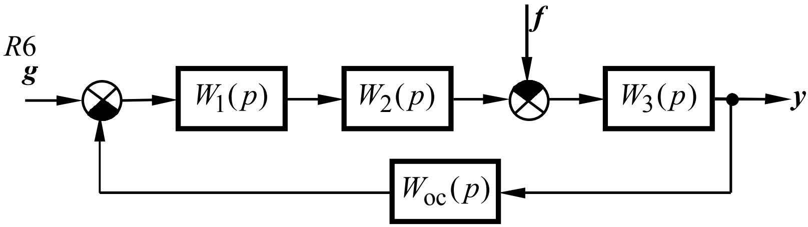


Рис. 6.1. Структурная схема заданной САУ

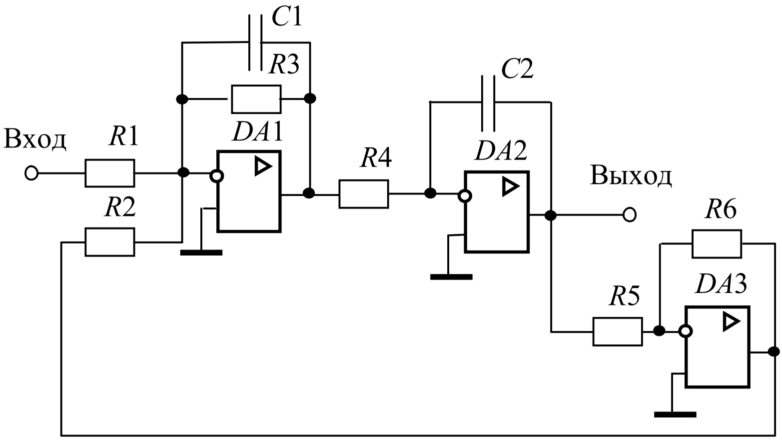


Рис. 6.2. Схема заданного звена

Таблица 6.1

k_1	k_2	$k_{ос}$	T_1, с	τ_1, с	T_2, с	g_m	f_m	ΔG, дБ
5	5	0,5	0,8	0,05	0,2	20	30	5

В табл. 7.1 приняты следующие обозначения:

g_m, f_m – максимальные значения задающего и возмущающего воздействий соответственно;

ΔG – запас устойчивости по амплитуде.

Дополнительные данные

Варьируемые параметры: $x_1 = T_1$, $x_2 = k_1$.

Параметры для коррекции:

$t_{пп} = 0{,}05$ с – время переходного процесса;

$\sigma = 20$ % – перерегулирование в скорректированной САУ.

6.2. Индивидуальное задание № 1. Устойчивость САУ

6.2.1. Вывод передаточных функций САУ

На рис. 6.3 приведена структурная схема, соответствующая схеме активного четырехполюсника, изображенного на рис. 6.2. Здесь звенья, обозначенные цифрами 1, 2, соответствуют сумматору $DA1$, выполненному на инерционном звене, звено, обозначенное цифрой 3 – интегратору, выполненному на усилителе $DA2$. На усилителе $DA3$ реализовано пропорциональное звено 4.

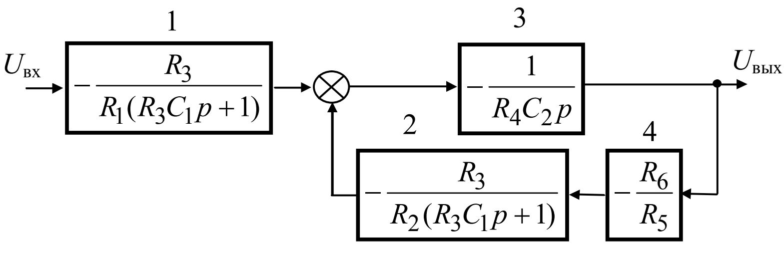


Рис. 6.3. Структурная схема заданного звена

В соответствии с правилами преобразования структурных схем, получим:

$$W_1(p) = \frac{\left[-\frac{R_3}{R_1\left(R_3C_1p+1\right)}\right]\left(-\frac{1}{R_4C_2p}\right)}{1-\left(-\frac{R_3}{R_2\left(R_3C_1p+1\right)}\right)\cdot\left(-\frac{1}{R_4C_2p}\right)\cdot\left(-\frac{R_6}{R_5}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{R_3}{R_1\left(R_3C_1p+1\right)} R_2R_5\left(R_3C_1p+1\right)}{R_3R_6\left(\dfrac{R_2R_4R_5C_1C_2}{R_6}p^2+\dfrac{R_2R_4R_5C_2}{R_3R_6}p+1\right)} =$$

$$= \frac{R_2R_5}{R_1R_6}\cdot\frac{1}{\dfrac{R_2R_4R_5C_1C_2}{R_6}p^2+\dfrac{R_2R_4R_5C_2}{R_3R_6}p+1} = \frac{k_1}{T_1^2p^2+2\xi T_1p+1},$$

где

$$k_1=\frac{R_2R_5}{R_1R_6}=10\,,\quad T_1=\sqrt{\frac{R_2R_4R_5C_1C_2}{R_6}}=0{,}02\ \text{с},$$

$$\xi=\frac{1}{2R_3}\sqrt{\frac{R_2R_4R_5C_1}{R_6C_2}}=0{,}4\,.$$

Обозначим

$K_{\text{р}}=k_1k_2k_3k_{\text{ос}}=125$ – коэффициент передачи разомкнутой цепи САУ.

Передаточная функция разомкнутой САУ по задающему воздействию

$$W_{\text{pg}}(p)=W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)=$$

$$=\frac{k_1k_2k_3\left(\tau_1p+1\right)}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)}=$$

$$=\frac{K_{\text{р}}}{k_{\text{ос}}}\cdot\frac{\tau_1p+1}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)}.$$

Передаточная функция разомкнутой САУ по возмущающему воздействию (знак минус учитывает уменьшение выходной величины при приложении возмущения)

$$W_{\text{pf}}(p)=W_3(p)=\frac{k_3}{T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1}\,.$$

Передаточная функция разомкнутой цепи САУ

$$W_{pg}(p) = W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)\cdot W_{oc}(p) =$$

$$= \frac{K_p(\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой САУ по задающему воздействию

$$W_{zg}(p) = \frac{W_{pg}(p)}{1 + W_{pz}(p)} = \frac{\dfrac{K_p}{k_{oc}}\cdot\dfrac{\tau_1 p + 1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1)}}{1 + \dfrac{K_p(\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1)}} =$$

$$= \frac{K_p}{k_{oc}}\cdot\frac{\tau_1 p + 1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1) + K_p(\tau_1 p + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой САУ по возмущающему воздействию

$$W_{zf}(p) = -\frac{W_{pf}(p)}{1 + W_{pz}(p)} = -\frac{\dfrac{k_3}{T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1}}{1 + \dfrac{K_p(\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1)}} =$$

$$= -\frac{k_3(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1) + K_p(\tau_1 p + 1)}.$$

Характеристический полином САУ

$$A(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1) + K_p(\tau_1 p + 1) =$$

$$= a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

где коэффициенты характеристического полинома $a_0 - a_4$ рассчитываются по выражениям

$$a_0 = K_p + 1,\ \ a_1 = T_1 + T_2 + 2\xi T_3 + \cdot K_p\tau_1,$$

$$a_2 = T_1 T_2 + 2\xi T_3(T_1 + T_2) + T_3^2,\ \ a_3 = (T_1 + T_2)T_3{}^2 + 2\xi T_1 T_2 T_3,$$

$$a_4 = T_1 T_2 T_3^2.$$

6.2.2. Анализ устойчивости САУ различными критериями устойчивости

Анализ устойчивости САУ и все дальнейшие расчеты проводятся в среде MathCAD с применением символьных вычислений.

7.2.2.1. Анализ устойчивости САУ по критерию Гурвица

Исходные данные

$k1 := 5 \quad k2 := 5 \quad k3 := 10 \quad koc := 0.5 \quad T1 := 0.8 \quad T2 := 0.2$

$T3 := 0.02 \quad \xi := 0.4 \quad \tau 1 := 0.05 \quad gm := 20 \quad fm := 30 \quad \Delta G := 5$

$Kp := k1 \cdot k2 \cdot k3 \cdot koc \qquad Kp = 125$

Вектор коэффициентов характеристического полинома замкнутой САУ и сам полином

$$a := \begin{pmatrix} 1 + Kp \\ T1 + T2 + 2 \cdot \xi \cdot T3 + \tau 1 \cdot Kp \\ T1 \cdot T2 + 2 \cdot T1 \cdot \xi \cdot T3 + 2 \cdot T2 \cdot \xi \cdot T3 + T3^2 \\ 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \xi \cdot T3 + T1 \cdot T3^2 + T2 \cdot T3^2 \\ T1 \cdot T2 \cdot T3^2 \end{pmatrix}$$

$$A(p) := a_4 \cdot p^4 + a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0$$

Главный минор определителя Гурвица (в раскрытом виде)

$$a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot (a_3)^2 - a_4 \cdot (a_1)^2 = -6.889 \times 10^{-4}$$

Т.к. главный минор определителя Гурвица меньше нуля, САУ **неустойчива**

Построение границы устойчивости САУ в области параметров $x1 = T1$, $x2 = k1$ и определение граничного коэффициента передачи

Введем обозначения $\quad x1 := T1 \quad x2 := k1 \quad x3 = Kgr$

$Tc1 := T2 + 2\cdot\xi\cdot T3 \qquad Tc2 := 2\cdot T2\cdot\xi\cdot T3 + T3^2 \qquad Tc3 := T2\cdot T3^2$

Вектор коэффициентов характеристического полинома замкнутой САУ в функции от параметров x1 и x3

$$a(x1, x3) := \begin{pmatrix} 1 + x3 \\ \tau1\cdot x3 + x1 + Tc1 \\ Tc1\cdot x1 + Tc2 \\ Tc2\cdot x1 + Tc3 \\ x1\cdot Tc3 \end{pmatrix}$$

Главный минор определителя в функции от параметров x1 и x3

$$\left|\begin{pmatrix} Tc2\cdot x1 + Tc3 & \tau1\cdot x3 + x1 + Tc1 & 0 \\ x1\cdot Tc3 & Tc1\cdot x1 + Tc2 & 1 + x3 \\ 0 & Tc2\cdot x1 + Tc3 & \tau1\cdot x3 + x1 + Tc1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Коэффициенты уравнения $\Delta_{n-1}(x1, x3) = 0$, расположенные перед переменной x3 (получены путем применения операции **Evaluate Symbolically** к уравнению, показанному выше, и операции **Polynomial Coefficients** относительно переменной x3 к результату предыдущей операции). Для упрощения полученного выражения введены следующие обозначения (коэффициенты при переменной x1)

$c00 := Tc3\cdot(Tc2\cdot Tc1 - Tc3) \qquad c01 := Tc2\cdot(Tc2\cdot Tc1 - Tc3)$

$c02 := Tc1\cdot(Tc2\cdot Tc1 - Tc3) \qquad c03 := Tc2\cdot Tc1 - Tc3$

$c10 := Tc3\cdot(Tc2\cdot\tau1 - Tc3)$

$c11 := \left(Tc2^2 - Tc1\cdot Tc3\right)\cdot\tau1 - 2\cdot Tc2\cdot Tc3$

$c12 := Tc2\cdot Tc1\cdot\tau1 - Tc2^2 - 2\cdot Tc3\cdot\tau1 \qquad c21 := -Tc3\cdot\tau1^2$

$$c(x1) := \begin{pmatrix} c03 \cdot x1^3 + c02 \cdot x1^2 + c01 \cdot x1 - Tc3^2 + c00 \\ c12 \cdot x1^2 + c11 \cdot x1 + c10 \\ c21 \cdot x1 \end{pmatrix}$$

Решения уравнения $\quad c(x1)_2 \cdot x3^2 + c(x1)_1 \cdot x3 + c(x1)_0 = 0$

с помощью символьного процессора относительно переменной x3 и их значения при $x1 = T1$

$$x3(x1) := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2 \cdot c(x1)_2} \cdot \left[-c(x1)_1 + \sqrt{\left[\left(c(x1)_1\right)^2 - 4 \cdot c(x1)_2 \cdot c(x1)_0\right]}\right] \\ \dfrac{1}{2 \cdot c(x1)_2} \cdot \left[-c(x1)_1 - \sqrt{\left[\left(c(x1)_1\right)^2 - 4 \cdot c(x1)_2 \cdot c(x1)_0\right]}\right] \end{bmatrix}$$

$$x3(T1) = \begin{pmatrix} -29.33 \\ 97.1 \end{pmatrix}$$

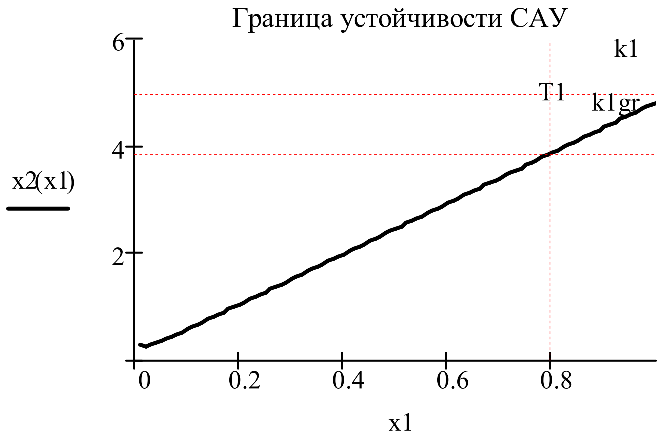
Граничный коэффииент передачи САУ $\quad Kgr := x3(x1)_1$

$$\boxed{Kgr = 97.1}$$

Граничное значения параметра $x2 = k1$

$$x2(x1) := \frac{x3(x1)_1}{k2 \cdot k3 \cdot koc} \qquad k1gr := x2(T1) \qquad \boxed{k1gr = 3.884}$$

$$x1 := 0.01, 0.02 .. 1$$



Область устойчивости САУ располагается ниже построенной границы. Применение на графике маркеров по осям наглядно демонстрирует этот факт, поскольку при заданном значении коэффициента передачи k_1 система неустойчива, а точка с координатами (T_1, k_1) расположена выше границы устойчивости.

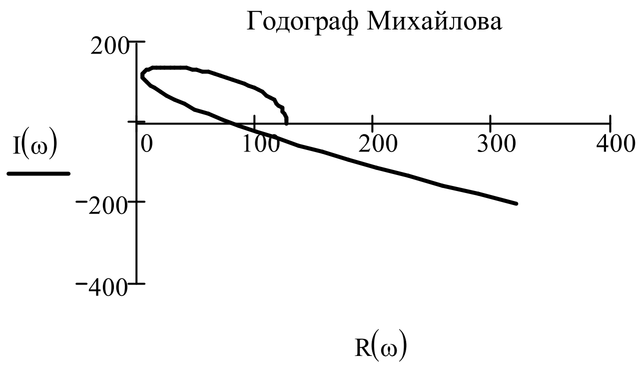
6.2.2.2. Анализ устойчивости САУ по критерию Михайлова. Проведение D-разбиений

$$a := \begin{pmatrix} 1 + Kp \\ T1 + T2 + 2\cdot\xi\cdot T3 + \tau 1\cdot Kp \\ T1\cdot T2 + 2\cdot T1\cdot\xi\cdot T3 + 2\cdot T2\cdot\xi\cdot T3 + T3^2 \\ 2\cdot T1\cdot T2\cdot\xi\cdot T3 + T1\cdot T3^2 + T2\cdot T3^2 \\ T1\cdot T2\cdot T3^2 \end{pmatrix}$$

$R(\omega) := a_0 - a_2\cdot\omega^2 + a_4\cdot\omega^4$ - вещественная часть $A(i\cdot\omega)$

$I(\omega) := \omega\cdot\left(a_1 - a_3\cdot\omega^2\right)$ - мнимая часть $A(i\cdot\omega)$

$\omega := 0 .. 60$



Т.к. годограф Мхайлова проходит только в первом и четвертом квадрантах, САУ **неустойчива**

Проведение D-разбиений

Условия нахождения САУ на границе устойчивости

$$R(\omega) = a(x3)_0 - a(x1)_2\cdot\omega^2 + a(x1)_4\cdot\omega^4 = 0$$

$$I(\omega) = a(x1, x3)_1 - a(x1)_3\cdot\omega^2 = 0$$

или

$$(1 + x3) - (Tc1\cdot x1 + Tc2)\cdot\omega^2 + x1\cdot Tc3\cdot\omega^4 = 0$$

$$\tau1\cdot x3 + x1 + Tc1 - (Tc2\cdot x1 + Tc3)\cdot\omega^2 = 0$$

иначе

$$\left(-Tc1\cdot\omega^2 + Tc3\cdot\omega^4\right)\cdot x1 + x3 = Tc2\cdot\omega^2 - 1 \qquad (1)$$

$$\left(1 - Tc2\cdot\omega^2\right)\cdot x1 + \tau1\cdot x3 = Tc3\cdot\omega^2 - Tc1 \qquad (2)$$

Первый способ решения системы уравнений (1) и (2) - с помощью линейной алгебры $X = M^{-1}\cdot V$, где

$$M(\omega) := \begin{pmatrix} -Tc1\cdot\omega^2 + Tc3\cdot\omega^4 & 1 \\ 1 - Tc2\cdot\omega^2 & \tau1 \end{pmatrix} \qquad V(\omega) := \begin{pmatrix} Tc2\cdot\omega^2 - 1 \\ Tc3\cdot\omega^2 - Tc1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -Tc1\cdot\omega^2 + Tc3\cdot\omega^4 & 1 \\ 1 - Tc2\cdot\omega^2 & \tau1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} Tc2\cdot\omega^2 - 1 \\ Tc3\cdot\omega^2 - Tc1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(-\tau1\cdot Tc2 + Tc3)\cdot\omega^2 + \tau1 - Tc1}{-\tau1\cdot Tc3\cdot\omega^4 + (\tau1\cdot Tc1 - Tc2)\cdot\omega^2 + 1} \\ \dfrac{-\omega^6\cdot Tc3^2 + \left(-Tc2^2 + 2\cdot Tc1\cdot Tc3\right)\cdot\omega^4 + \left(2\cdot Tc2 - Tc1^2\right)\cdot\omega^2 - 1}{-\tau1\cdot Tc3\cdot\omega^4 + (\tau1\cdot Tc1 - Tc2)\cdot\omega^2 + 1} \end{bmatrix}$$

Результат получен путем применения операций Evaluate Symbolicalli, Simplify и Collect относительно ω символьного процессора (**Symbolics**).

Таким образом

$$x1(\omega) := \frac{(-\tau 1 \cdot Tc2 + Tc3) \cdot \omega^2 + \tau 1 - Tc1}{-\tau 1 \cdot Tc3 \cdot \omega^4 + (\tau 1 \cdot Tc1 - Tc2) \cdot \omega^2 + 1}$$

$$x3(\omega) := \frac{-\omega^6 \cdot Tc3^2 + \left(-Tc2^2 + 2 \cdot Tc1 \cdot Tc3\right) \cdot \omega^4 + \left(2 \cdot Tc2 - Tc1^2\right) \cdot \omega^2 - 1}{-\tau 1 \cdot Tc3 \cdot \omega^4 + (\tau 1 \cdot Tc1 - Tc2) \cdot \omega^2 + 1}$$

Способ удобно применять, если уравнения (1) и (2) - линейные

Второй способ решения указанной системы уравнений - из уравнения (1) выражается переменная x3 и ее выражение подсталяется в уравнение (2) и определяется x1, затем проводится обратная подстановка выражения для x1 в выражение для x3. Здесь удобно применить команды Variable - Solve и Variable- Substitute символьного процессора. Способ удобно прменять, если уравнения (1) и (2) - нелинейные

Из уравнения (1)

$$\left(Tc1 \cdot \omega^2 - Tc3 \cdot \omega^4\right) \cdot x1 + Tc2 \cdot \omega^2 - 1$$

Подстановка в уравнение (2) и его решение относительно x1

$$\left[1 - Tc2 \cdot \omega^2 + \tau 1 \cdot \left(Tc1 \cdot \omega^2 - Tc3 \cdot \omega^4\right)\right] \cdot x1 + \tau 1 \cdot \left(Tc2 \cdot \omega^2 - 1\right) = Tc3 \cdot \omega^2 - Tc$$

$$x1(\omega) := \frac{(-\tau 1 \cdot Tc2 + Tc3) \cdot \omega^2 + \tau 1 - Tc1}{-\tau 1 \cdot Tc3 \cdot \omega^4 + (-Tc2 + \tau 1 \cdot Tc1) \cdot \omega^2 + 1}$$

Обратная подстановка $x1(\omega)$ в $x3(x1, \omega)$

$$\left(Tc1 \cdot \omega^2 - Tc3 \cdot \omega^4\right) \cdot \frac{(-\tau 1 \cdot Tc2 + Tc3) \cdot \omega^2 + \tau 1 - Tc1}{-\tau 1 \cdot Tc3 \cdot \omega^4 + (-Tc2 + \tau 1 \cdot Tc1) \cdot \omega^2 + 1} + Tc2 \cdot \omega^2 - 1$$

$$x3(\omega) := \frac{-\omega^6 \cdot Tc3^2 + \left(2 \cdot Tc1 \cdot Tc3 - Tc2^2\right) \cdot \omega^4 + \left(2 \cdot Tc2 - Tc1^2\right) \cdot \omega^2 - 1}{-\tau1 \cdot Tc3 \cdot \omega^4 + \left(-Tc2 + \tau1 \cdot Tc1\right) \cdot \omega^2 + 1}$$

Критическая частота (ее положительное значение) следует из решения уравнения $-\tau1 \cdot Tc3 \cdot \omega^4 + \left(-Tc2 + \tau1 \cdot Tc1\right) \cdot \omega^2 + 1 = 0$ или

$$-\tau1 \cdot Tc3 \cdot \Omega^2 + \left(-Tc2 + \tau1 \cdot Tc1\right) \cdot \Omega + 1 = 0$$

Дискриминант

$$D := \sqrt{Tc2^2 - 2 \cdot Tc2 \cdot \tau1 \cdot Tc1 + \tau1^2 \cdot Tc1^2 + 4 \cdot \tau1 \cdot Tc3}$$

$$\Omega k := \frac{1}{2 \cdot \tau1 \cdot Tc3} \cdot \left(-Tc2 + \tau1 \cdot Tc1 + D\right) \quad \omega k := \sqrt{\Omega k} \quad \omega k = 43.927$$

Определение частоты, соответствующей постоянной времени T1 и граничных коэффицентов передачи

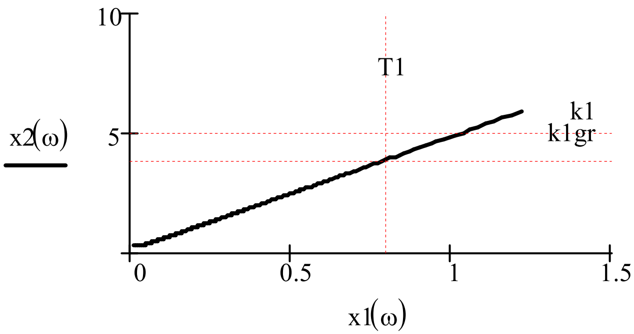
$$\omega := 50 \quad \text{Given} \quad x1(\omega) = T1 \quad \omega 1 := \text{Find}(\omega) \quad \omega 1 = 44.536$$

$$Kgr := x3(\omega 1) \quad \boxed{Kgr = 97.1} \quad x2(\omega) := \frac{x3(\omega)}{k2 \cdot k3 \cdot koc}$$

$$k1gr := x2(\omega 1) \quad \boxed{k1gr = 3.884}$$

Построение границы устойчивости САУ

$$\omega := 44.33, 44.34 .. 70$$



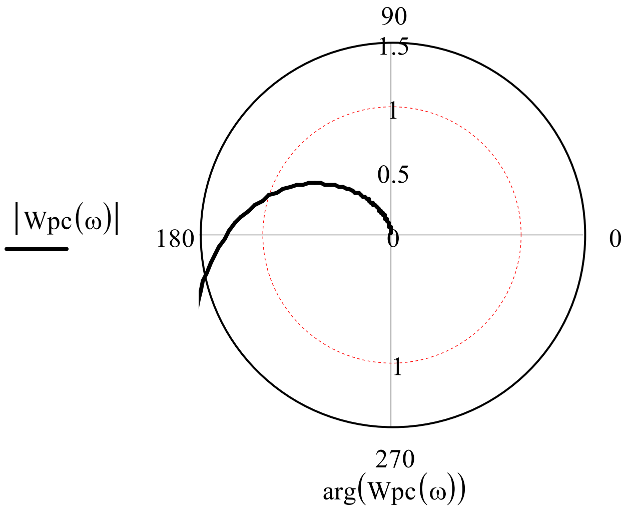
6.2.2.3. Анализ устойчивости САУ по критерию Найквиста

Частотная передаточная функция разомкнутой цепи

$$Wpc(\omega) := \frac{Kp\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot\tau 1)}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2)\cdot\left(1 - T3^{2}\cdot\omega^{2} + 2i\cdot\xi\cdot T3\cdot\omega\right)}$$

Годограф Найквиста

$\omega := 0 .. 200$



Т.к. годограф Найквиста охватывает точку с координатами (-1, i0) то система **неустойчива**

Пусть

$Tc1 := T2 + 2\cdot\xi\cdot T3$ $\quad$ $Tc2 := 2\cdot T2\cdot\xi\cdot T3 + T3^{2}$ $\quad$ $Tc3 := T2\cdot T3^{2}$

тогда правая часть частотной передаточной функции разомкнутой цепи запишется в виде

$$\frac{x3\cdot(1+1i\cdot\omega\cdot\tau1)}{x1\cdot Tc3\cdot\omega^{4}-(Tc2+x1\cdot Tc1)\cdot\omega^{2}+1+1i\cdot\omega\cdot\left[(Tc1+x1)-(Tc3+x1\cdot Tc2)\cdot\omega^{2}\right]}$$

Применяя последовательно операции Evaluete - Complex, Simplify, Evaluete - Complex символьного процессора частотная передаточная функция разомкнутой цепи разделяется на вещественную и мнимую части. Выполнив раздельно для каждой из частей операцию Collect относительно частотыω и заменив вручную ω^{2} на Ω и введя указанные ниже обозначения (подобные действия проводятся из-за громозкости полученных выражений), получим :

$$b1(x1) := (Tc1-\tau1)\cdot x1-\tau1\cdot Tc1+Tc2$$

$$b2(x1) := \tau1\cdot Tc3+(\tau1\cdot Tc2-Tc3)\cdot x1$$

$$c0(x1) := \tau1-x1-Tc1$$

$$c1(x1) := Tc3-Tc2\cdot\tau1+x1\cdot(Tc2-Tc1\cdot\tau1)$$

$$c2(x1) := \tau1\cdot Tc3\cdot x1$$

$$d1(x1) := x1^{2}+Tc1^{2}-2\cdot Tc2$$

$$d2(x1) := (Tc1^{2}-2\cdot Tc2)\cdot x1^{2}+Tc2^{2}-2\cdot Tc1\cdot Tc3$$

$$d3(x1) := (Tc2^{2}-2\cdot Tc3\cdot Tc1)\cdot x1^{2}+Tc3^{2}$$

$$d4(x1) := x1^{2}\cdot Tc3^{2}$$

Вещественная часть

$$R(x1) = \frac{-x3\cdot\left(b2(x1)\cdot\Omega(x1)^{2}+b1(x1)\cdot\Omega(x1)-1\right)}{d4(x1)\cdot\Omega(x1)^{4}+d3(x1)\cdot\Omega(x1)^{3}+d2(x1)\cdot\Omega(x1)^{2}+d1(x1)\cdot\Omega(x1)+1}$$

Мнимая часть

$$I(x1) = \frac{x3\cdot\left(c2(x1)\cdot\Omega(x1)^{2}+c1(x1)\cdot\Omega(x1)+c0(x1)\right)}{d4(x1)\cdot\Omega(x1)^{4}+d3(x1)\cdot\Omega(x1)^{3}+d2(x1)\cdot\Omega(x1)^{2}+d1(x1)\cdot\Omega(x1)+1}$$

Приравнивая мнимую часть к нулю (числитель выражения I(x1)) с помощью команды **Variable - Solve**, определим квадрат частоты переворота фазы Ω(x1), предварительно заменив выражение Ω(x1) на переменную X, и выберем положительное решение

$$c2(x1)\cdot X^2 + c1(x1)\cdot X + c0(x1) = 0$$

$$\Omega(x1) := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\cdot c2(x1)}\cdot\left[-c1(x1) + \left(c1(x1)^2 - 4\cdot c2(x1)\cdot c0(x1)\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \dfrac{1}{2\cdot c2(x1)}\cdot\left[-c1(x1) - \left(c1(x1)^2 - 4\cdot c2(x1)\cdot c0(x1)\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

$$\Omega(T1) = \begin{pmatrix} 1.983\times 10^3 \\ -152.197 \end{pmatrix}$$

$$\Omega(x1) := \frac{1}{2\cdot c2(x1)}\cdot\left[-c1(x1) + \left(c1(x1)^2 - 4\cdot c2(x1)\cdot c0(x1)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Решая уравнение R(x1)=1, определим переменную x3(x1), для этого достаточно поменять местами числитель и знаменатель в правой части R(x1), а также заменить знак минус на плюс

$$x3(x1) := \frac{d4(x1)\cdot\Omega(x1)^4 + d3(x1)\cdot\Omega(x1)^3 + d2(x1)\cdot\Omega(x1)^2 + d1(x1)\cdot\Omega(x1) + 1}{\left(b2(x1)\cdot\Omega(x1)^2 + b1(x1)\cdot\Omega(x1) - 1\right)}$$

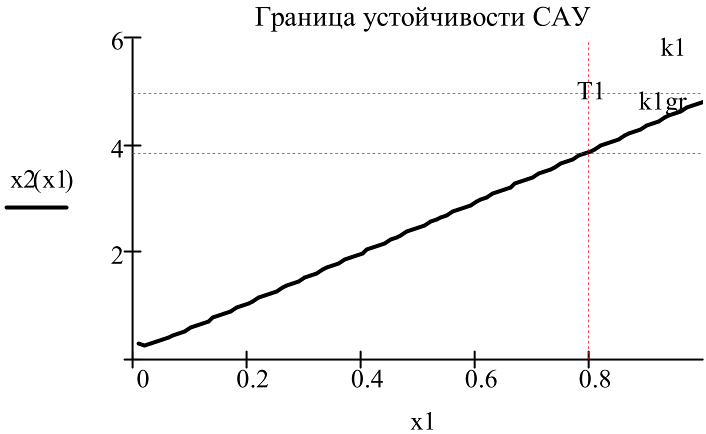
Граничный коэффициент передачи САУ

$Kgr := x3(T1)$ $\boxed{Kgr = 97.1}$

$x2(x1) := \dfrac{x3(x1)}{k2\cdot k3\cdot koc}$ $k1gr := x2(T1)$ $\boxed{k1gr = 3.884}$

Граничное значения коэффициента передачи k1

$x1 := 0.01, 0.02 .. 1$



6.2.3. Расчет статических характеристик САУ

Задание новых значений Kp и k1, исходя из заданного запаса устойчивости ΔG

$$Kp := \frac{Kgr}{10^{\frac{\Delta G}{20}}} \qquad Kp = 54.603 \qquad k1 := \frac{Kp}{k2 \cdot k3 \cdot koc} \qquad k1 = 2.184$$

Передаточные функции замкнутой системы:
по задающему воздействию

$$Wzg(p) := \frac{\frac{Kp}{koc} \cdot (\tau 1 \cdot p + 1)}{(T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1) \cdot \left(T3^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T3 \cdot p + 1\right) + Kp(\tau 1 \cdot p + 1)}$$

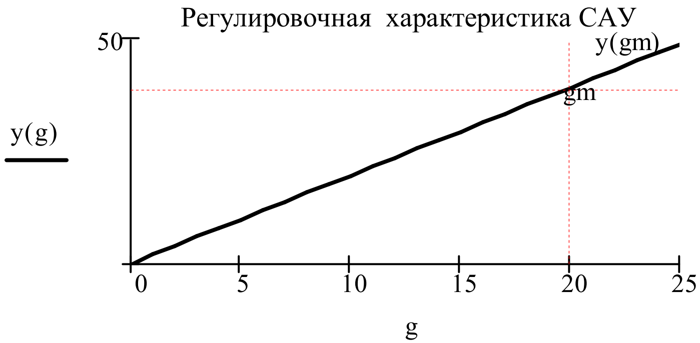
по возмущающему воздействию

$$Wzf(p) := \frac{k3 \cdot (T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1)}{(T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1) \cdot \left(T3^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T3 \cdot p + 1\right) + Kp(\tau 1 \cdot p + 1)}$$

Уравнение регулировочной характеристики САУ при $f = 0$

$y(g) := g \cdot Wzg(0)$ $\quad gm := 20$

$g := 0 .. 25$

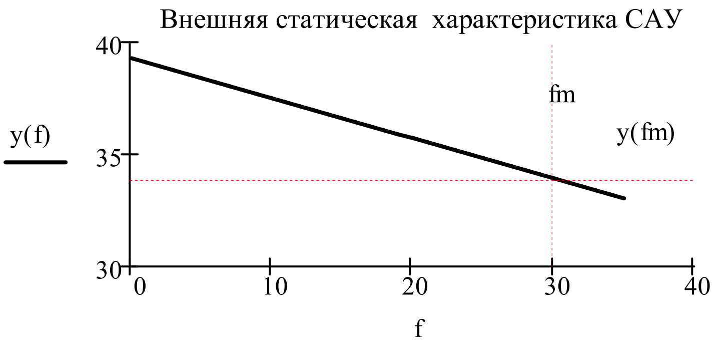


$y(gm) = 39.281$ - значение выходной величины при $g = gm$

Уравнение внешней характеристики САУ при $g = gm$

$g := 20$ $\quad y(f) := g \cdot Wzg(0) - f \cdot Wzf(0)$

$f := 0 .. 35$ $\quad fm := 30$



Значения выходной величины на холостом ходу (при $f = 0$)
и при максимальном возмущении ($f = fm = 30$)

$y(0) = 39.281$ $\qquad y(fm) = 33.885$

Абсолютная статическая ошибка и статизм внешних характеристик САУ

$$\Delta y := y(0) - y(fm) \quad \Delta y = 5.395 \qquad S := \frac{\Delta y}{y(0)} \cdot 100 \quad S = 13.735$$

6.3. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2. РАСЧЕТ ЧАСТОТНЫХ И ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК САУ

6.3.1. Расчет и построение логарифмических частотных характеристик САУ

Передаточная функция разомкнутой цепи

$$Wpc(p) := \frac{Kp \cdot (\tau 1 \cdot p + 1)}{(T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1) \cdot \left(T3^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T3 \cdot p + 1\right)}$$

$G(\omega) := 20 \cdot \log(|Wpc(i \cdot \omega)|)$ - расчетная формула для точной ЛАЧХ

$G0 := 20 \cdot \log(Kp)$ - ЛАЧХ пропорционального звена

$G1(\omega) := \mathrm{if}\left(\omega < \dfrac{1}{\tau 1}, 0, 20 \cdot \log(\omega \cdot \tau 1)\right)$ - асимптотическая ЛАЧХ форсирующего звена

$G2(\omega) := \mathrm{if}\left(\omega < \dfrac{1}{T1}, 0, -20 \cdot \log(\omega \cdot T1)\right)$ - асимптотическая ЛАЧХ первого инерционного звена

$G3(\omega) := \mathrm{if}\left(\omega < \dfrac{1}{T2}, 0, -20 \cdot \log(\omega \cdot T2)\right)$ - асимптотическая ЛАЧХ второго инерционного звена

$G4(\omega) := \mathrm{if}\left(\omega < \dfrac{1}{T3}, 0, -40 \cdot \log(\omega \cdot T3)\right)$ - асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена

Расчетная формула для асимптотической ЛАЧХ САУ

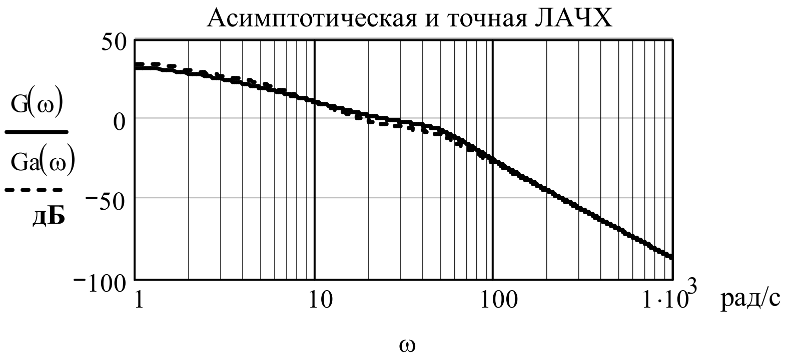
$$Ga(\omega) := G0 + G1(\omega) + G2(\omega) + G3(\omega) + G4(\omega)$$

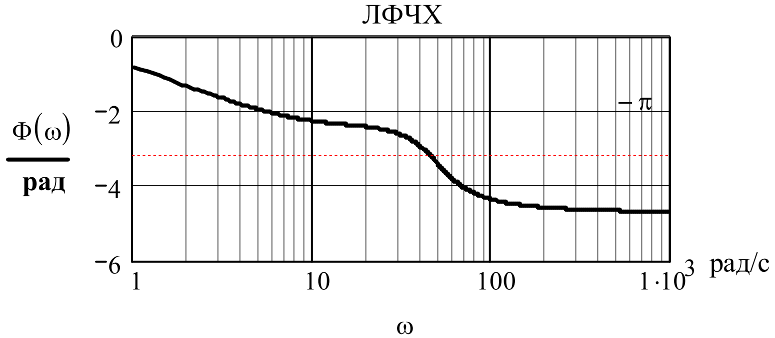
$$\Phi1(\omega) := \arg\left[\frac{1}{(T1 \cdot i \cdot \omega + 1)\cdot(T2 \cdot i \cdot \omega + 1)}\right]$$ - ЛФЧХ инерционных звеньев

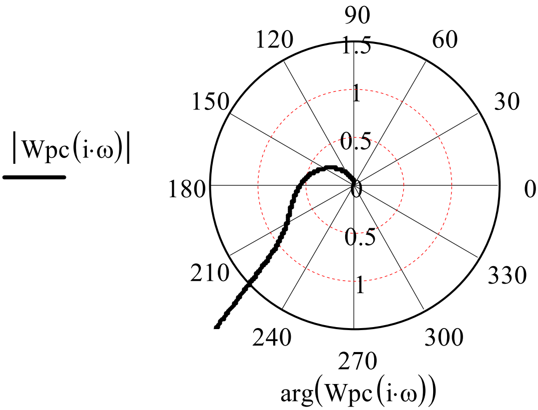
$$\Phi2(\omega) := \arg\left[\frac{\tau1 \cdot i \cdot \omega + 1}{T3^2 \cdot (i \cdot \omega)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T3 \cdot i \cdot \omega + 1}\right]$$ - ЛФЧХ форсирующего и колебательного звеньев

$$\Phi(\omega) := \Phi1(\omega) + \Phi2(\omega)$$ - расчетная формула для ЛФЧХ

$\omega := 1, 1.1 .. 1000$







Расчет частот среза, переворота фазы и запасов устойчивости

$\omega := 20$ Given $G(\omega) = 0$ $\omega cp := \mathrm{Find}(\omega)$

$\omega cp = 25.169$ рад/с

$\omega := 40$ Given $\Phi(\omega) = -\pi$ $\omega\pi := \mathrm{Find}(\omega)$

$\omega\pi = 44.536$ рад/с

$\Delta G := |G(\omega\pi)|$ $\Delta G = 5$ - запас устойчивости по амплитуде (в дБ, совпадает с заданным)

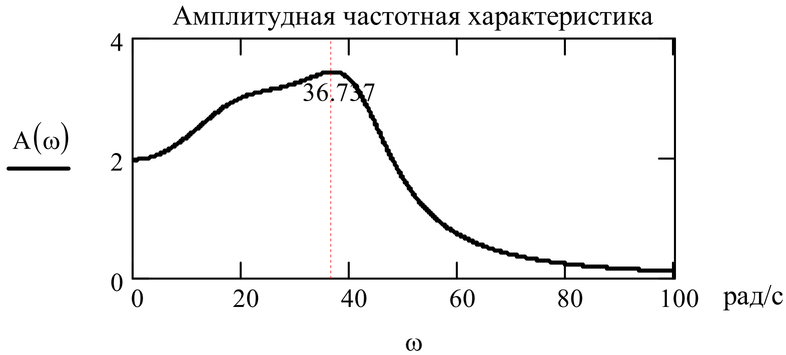
$\Delta\Phi := (\pi + \Phi(\omega cp))\cdot\frac{180}{\pi}$ $\Delta\Phi = 37.266$ - запас устойчивости по фазе (в градусах)

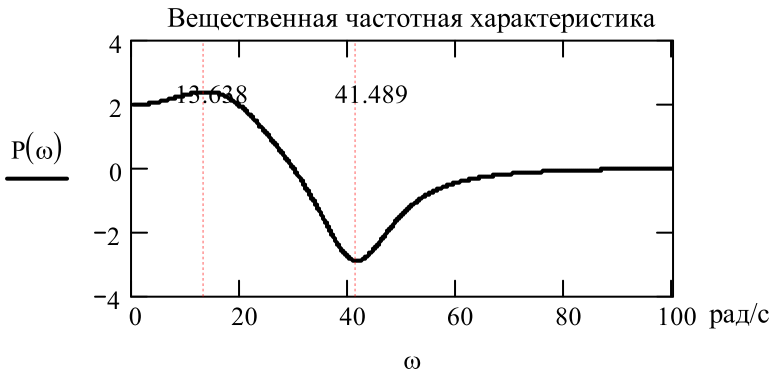
7.3.2. Расчет и построение частотных характеристик замкнутой САУ. Оценка качества регулирования

Расчетные формулы для АЧХ и ВЧХ замкнутой САУ

$A(\omega) := |Wzg(i\cdot\omega)|$ $P(\omega) := \mathrm{Re}(Wzg(i\cdot\omega))$

$\omega := 0, 0.1 .. 100$





Определение угловой частоты и периода собственных колебаний переходных характеристик замкнутой САУ

Частота

$\omega := 40$ Given $\frac{d}{d\omega}A(\omega) = 0$ $\omega k := Find(\omega)$ $\omega k = 36.737$ рад/с

Период $Tk := \frac{2\cdot\pi}{\omega k}$ $Tk = 0.171$ **с**

$Amax := A(\omega k)$ $Amax = 3.433$ - максимум АЧХ

Показатель колебательности переходной характеристики САУ по задающему воздействию

$M := \frac{Amax}{A(0)}$ $M = 1.748$

Определение частот, соответствующих максимуму и минимуму ВЧХ

$\omega := 18$ Given $\frac{d}{d\omega}P(\omega) = 0$ $\omega max := Find(\omega)$

$\omega max = 13.639$ рад/с

$\omega := 40$ Given $\frac{d}{d\omega}P(\omega) = 0$ $\omega min := Find(\omega)$

$\omega min = 41.489$ рад/с

$Pmax := P(\omega max)$ $Pmin := P(\omega min)$ - максимум и минимум ВЧХ

Максимальное перерегулирование, возможное в системе

$$\sigma max := \frac{1.18 \cdot Pmax + 0.277 \cdot |Pmin| - P(0)}{P(0)} \cdot 100$$

$\sigma max = 83.292$ %

6.3.3. Расчет и построение переходных характеристик замкнутой САУ. Определение показателей качества регулирования

Вектор коэффициентов характеристического полинома замкнутой САУ

$$a := \begin{pmatrix} 1 + Kp \\ T1 + T2 + 2 \cdot \xi \cdot T3 + \tau1 \cdot Kp \\ T1 \cdot T2 + 2 \cdot T1 \cdot \xi \cdot T3 + 2 \cdot T2 \cdot \xi \cdot T3 + T3^2 \\ 2 \cdot T1 \cdot T2 \cdot \xi \cdot T3 + T1 \cdot T3^2 + T2 \cdot T3^2 \\ T1 \cdot T2 \cdot T3^2 \end{pmatrix}$$

Характеристический полином замкнутой САУ

$$A(p) := a_4 \cdot p^4 + a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0$$

Числители передаточных функций замкнутой САУ по задающему и возмущающему воздействиям, производная от характеристического полинома

$$B(p) := \frac{Kp}{koc}\cdot(\tau 1\cdot p + 1) \qquad C(p) := k3\cdot(T1\cdot p + 1)\cdot(T2\cdot p + 1)$$

$$Q(p) := \frac{d}{dp}A(p)$$

Корни характеристического уравнения замкнутой САУ

$$p := \text{polyroots}(a) \qquad p = \begin{pmatrix} -14.162 + 17.178i \\ -14.162 - 17.178i \\ -8.963 - 40.897i \\ -8.963 + 40.897i \end{pmatrix}$$

$$y0g := gm\cdot\frac{B(0)}{A(0)} \qquad y0g = 39.281$$

- установившееся значение выходной величины при подаче задающего воздействия

$$y0f := y0g - fm\cdot\frac{C(0)}{A(0)} \qquad y0f = 33.885$$

- установившееся значение выходной величины при подаче возмущающего воздействия

Переходная функция САУ по задающему воздействию

$$yg(t) := y0g + gm\cdot\text{Re}\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{B(p_k)\cdot\exp(p_k\cdot t)}{p_k\cdot Q(p_k)}\right)$$

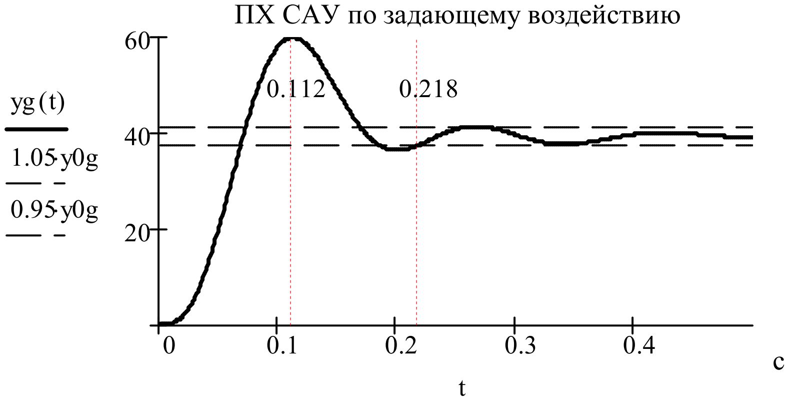
$t0 := 0.1$ с - момент подачи возмущающего воздействия

Переходная функция САУ по возмущающему воздействию

$$yf(t) := y0f - fm\cdot\text{Re}\left[\sum_{k=0}^{3}\frac{C(p_k)\cdot\exp[p_k\cdot(t - t0)]}{p_k\cdot Q(p_k)}\right]$$

$$yf(t) := \text{if}(t < t0, y0g, yf(t))$$

$t := 0, 0.001 .. 0.5$



<u>Показатели качества регулирования по задающему воздействию</u>

Время, соответствующее первому и второму максимумам переходной характеристики (с)

$t := 0.12 \quad \text{Given} \quad \frac{d}{dt}yg(t) = 0 \quad tm1 := \text{Find}(t) \quad tm1 = 0.112$

$t := 0.27 \quad \text{Given} \quad \frac{d}{dt}yg(t) = 0 \quad tm2 := \text{Find}(t) \quad tm2 = 0.266$

Значения первого и второго максимумов переходной характеристики

$ygm1 := yg(tm1) \qquad ygm1 = 59.754$

$ygm2 := yg(tm2) \qquad ygm2 = 41.237$

Значения перерегулирования (в %) и колебательности переходной характеристики по задающему воздействию

$\sigma z := \frac{ygm1 - y0g}{y0g} \cdot 100 \quad \sigma z = 52.12 \qquad \mu := \frac{ygm1}{ygm2} \quad \mu = 1.449$

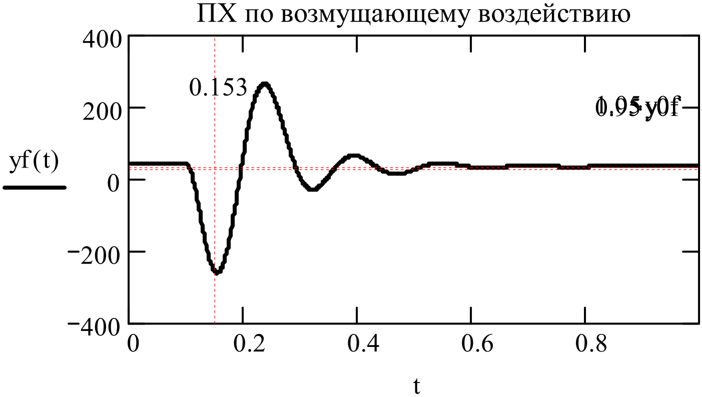
Время переходного процесса по задающему воздействию (с)

$t := 0.25 \quad \text{Given} \quad yg(t) = 0.95 \cdot y0g \quad tpz := \text{Find}(t) \quad tpz = 0.218$

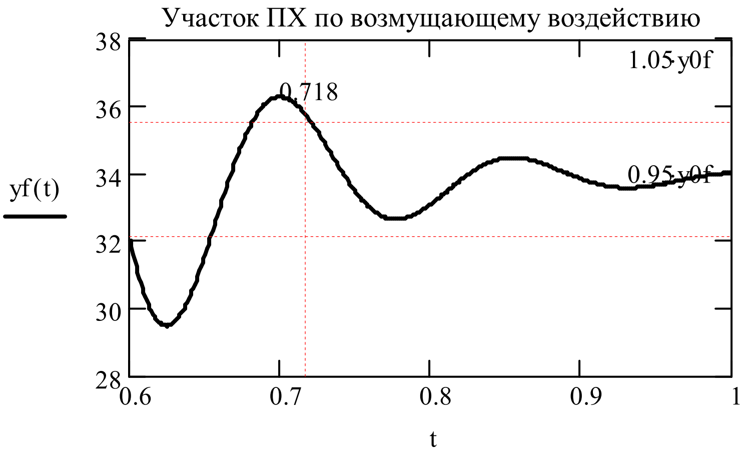
Период и частота собственных колебаний переходных характеристик САУ (с и рад/с)

$Tk := tm2 - tm1 \qquad Tk = 0.154 \qquad \omega k := \frac{2 \cdot \pi}{Tk} \qquad \omega k = 40.901$

$t := 0, 0.001 .. 1$



$t := 0.6, 0.601 .. 1$



Показатели качества регулирования по возмущающему воздействию

Время окончания переходного процесса по возмущающему воздействию (с)

$t := 0.72 \quad \text{Given} \quad yf(t) = 1.05 \cdot y0f \quad tpv := \text{Find}(t)$

$tpv := tpv - t0 \qquad tpv = 0.62$

Время, соответствующее минимуму переходной характеристики САУ по возмущающему воздействию (с)

$t := 0.15 \quad \text{Given} \quad \frac{d}{dt} yf(t) = 0 \qquad tmin := \text{Find}(t) \quad tmin = 0.153$

Минимум и перерегулирование переходной характеристики САУ по возмущающему воздействию (%)

$yfm := yf(tmin) \qquad yfm = -261.607$

$\sigma v := \frac{y0f - yfm}{y0f} \cdot 100 \qquad \sigma v = 872.038$

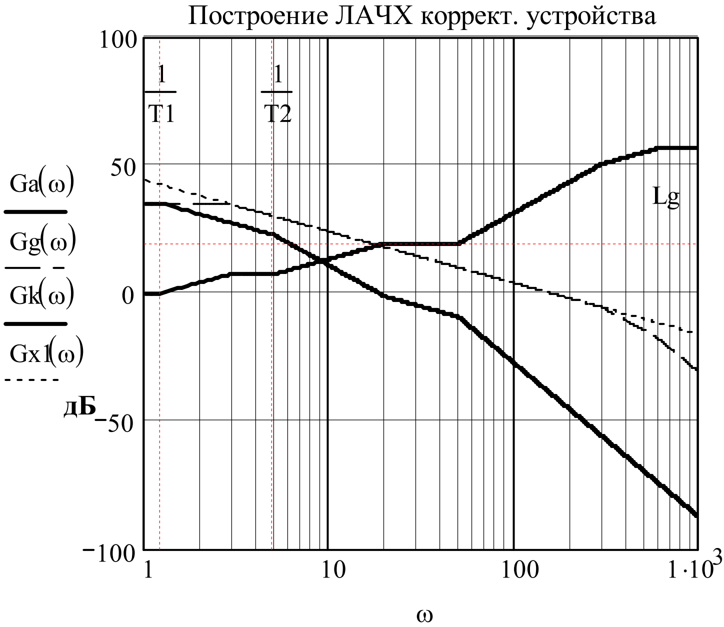
6.4. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ САУ

6.4.1. Построение желаемой ЛАЧХ САУ, ЛАЧХ корректирующего устройства

$\lambda := 2.5 \qquad Lg := 20$ - параметры, взятые из табл. 4.2 для $\sigma = 20\,\%$

$tnn := 0.05 \quad \omega cp := \frac{\lambda \cdot \pi}{tnn} \quad \omega cp = 157.08$ - частота среза для желаемой ЛАЧХ

$Gx1(\omega) := 20 \cdot \log\left(\frac{\omega cp}{\omega}\right)$ - прямая, проходящая через частоту среза с наклоном -20 дБ/дек ω := 1 , 1.1 .. 1000



6.4.2. Синтез передаточной функции корректирующего устройства. Определение передаточных функций скорректированной системы

ЛАЧХ корректирующего устройства имеет следующие наклоны:

- 0 при $1 < \omega < \dfrac{1}{T_1}$, это соответствует единичному коэффициенту передачи корректирующего устройства;
- +20 дБ/дек при $\dfrac{1}{T_1} < \omega < \omega_3$, это соответствует форсирующему звену с постоянной времени $\tau_{k1} = T_1$;

- 0 при $\omega_3 < \omega < \dfrac{1}{T_2}$, это соответствует инерционному звену с постоянной времени $T_{k1} = \dfrac{1}{\omega_3}$;
- +20 дБ/дек при $\dfrac{1}{T_2} < \omega < \dfrac{1}{\tau_1}$, это соответствует форсирующему звену с постоянной времени $\tau_{k2} = T_2$;
- 0 при $\dfrac{1}{\tau_1} < \omega < \dfrac{1}{T_3}$ это соответствует инерционному звену с постоянной времени $T_{k1} = \tau_1$;
- +40 дБ/дек, это соответствует двум последовательно включенным форсирующим звеньям с постоянной времени $\tau_{k3} = T_3$;
- +20 дБ/дек при $\dfrac{1}{T_3} < \omega < \omega_1$, это соответствует инерционному звену с постоянной времени $T_{k2} = \dfrac{1}{\omega_1}$;
- 0 при $\omega_1 < \omega < \omega_2$, это соответствует инерционному звену с постоянной времени $T_{k3} = \dfrac{1}{\omega_2}$.

Таким образом, корректирующее устройство представляет собой трехзвенный фильтр с передаточной функцией

$$W_{\text{к}}(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)^2}{(\tau_1 p + 1)(T_{\text{к}1} p + 1)(T_{\text{к}2} p + 1)(T_{\text{к}3} p + 1)}.$$

Выведем передаточные функции скорректированной САУ относительно задающего воздействия:

- передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{pg,c}}(p)=W_{\text{к}}(p)\cdot W_{\text{pg}}(p)=\frac{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)^2}{(\tau_1p+1)(T_{\text{к}1}p+1)(T_{\text{к}2}p+1)(T_{\text{к}3}p+1)}\times$$

$$\times\frac{\dfrac{K_p}{k_{oc}}(\tau_1p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)}=$$

$$=\frac{K_p}{k_{oc}}\cdot\frac{(T_3p+1)^2}{(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)(T_{\text{к}1}p+1)(T_{\text{к}2}p+1)(T_{\text{к}3}p+1)};$$

- передаточная функция разомкнутой цепи

$$W_{\text{рц,,c}}(p)=W_{\text{pg,c}}(p)\cdot W_{\text{oc}}(p)=W_{\text{pg,c}}(p)\cdot k_{\text{oc}}=$$

$$=\frac{K_p(T_3p+1)^2}{(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)(T_{\text{к}1}p+1)(T_{\text{к}2}p+1)(T_{\text{к}3}p+1)};$$

- передаточная функция замкнутой скорректированной САУ

$$W_{\text{зg,,c}}(p)=\frac{W_{\text{pg,c}}(p)}{1+W_{\text{pg,c}}(p)}\cdot=$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{K_p}{k_{\text{oc}}}(T_3p+1)^2}{(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)(T_{\text{к}1}p+1)(T_{\text{к}2}p+1)(T_{\text{к}3}p+1)}}{1+\dfrac{K_p(T_3p+1)^2}{(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)(T_{\text{к}1}p+1)(T_{\text{к}2}p+1)(T_{\text{к}3}p+1)}}= \qquad (*)$$

$$=\frac{\dfrac{K_p}{k_{\text{oc}}}(T_3p+1)^2}{(T_3{}^2p^2+2\xi T_3p+1)(T_{\text{к}1}p+1)(T_{\text{к}2}p+1)(T_{\text{к}3}p+1)+K_p(T_3p+1)^2}.$$

В скорректированной САУ произошла компенсация (сокращение) постоянных времени T_1, T_2 и τ_1, скорректированная система стала иметь пятый порядок.

6.4.3. Расчет переходной характеристики скорректированной САУ. Настройка системы на заданное перерегулирование

Расчет переходной характеристики скорректированной САУ проводится аналогично расчету переходной характеристики нескорректированной САУ. Ввиду громоздкости выражений коэффициентов характеристического полинома скорректированной системы некоторые из них представлены в виде сумм отдельных составляющих. В общем случае они могут быть получены с помощью команды **Polynomial Coefficients** символьного процессора.

$$Tk1 := \frac{1}{\omega 3} \quad Tk2 := \frac{1}{\omega 1} \quad Tk3 := \frac{1}{\omega 2}$$

- новые постоянные времени инерционных звеньев, входящих в корретирующее устройство

$$Bc(p) := \frac{Kp}{koc}\cdot(T3\cdot p + 1)^2$$

$$ac_0 := 1 + Kp \qquad ac_1 := (2\cdot\xi + 2\cdot Kp)\cdot T3 + Tk3 + Tk1 + Tk2$$

$$ac1_2 := (1 + Kp)\cdot T3^2 + (2\cdot\xi\cdot Tk1 + 2\cdot\xi\cdot Tk3 + 2\cdot\xi\cdot Tk2)\cdot T3$$

$$ac2_2 := (Tk2 + Tk3)\cdot Tk1 + Tk2\cdot Tk3 \quad ac1_3 := (Tk3 + Tk1 + Tk2)\cdot T3^2$$

$$ac2_3 := [(2\cdot\xi\cdot Tk2 + 2\cdot\xi\cdot Tk3)\cdot Tk1 + 2\cdot\xi\cdot Tk2\cdot Tk3]\cdot T3$$

$$ac3_3 := Tk2\cdot Tk3\cdot Tk1$$

$$ac := \begin{bmatrix} 1 + Kp \\ (2\cdot\xi + 2\cdot Kp)\cdot T3 + Tk3 + Tk1 + Tk2 \\ ac1_2 + ac2_2 \\ ac1_3 + ac2_3 + ac3_3 \\ [(Tk2 + Tk3)\cdot Tk1 + Tk2\cdot Tk3]\cdot T3^2 + 2\cdot\xi\cdot Tk2\cdot Tk3\cdot Tk1\cdot T3 \\ T3^2\cdot Tk1\cdot Tk2\cdot Tk3 \end{bmatrix}$$

$$Ac(p) := ac_5 \cdot p^5 + ac_4 \cdot p^4 + ac_3 \cdot p^3 + ac_2 \cdot p^2 + ac_1 \cdot p + ac_0$$

$$Sc(p) := \frac{d}{dp} Ac(p)$$

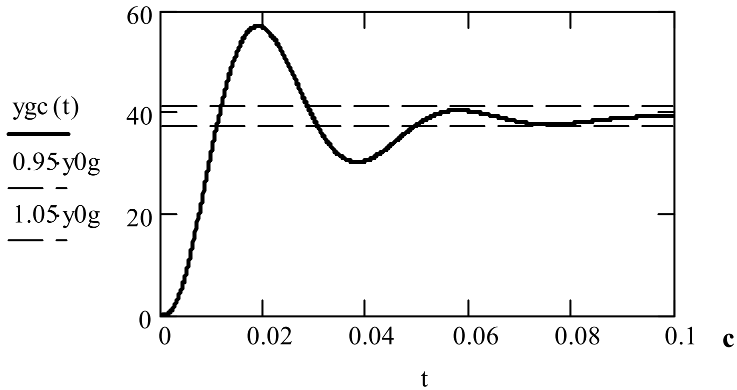
Корни характеристического уравнения скорректированной САУ

$$pc := \text{polyroots}(ac) \qquad pc = \begin{pmatrix} -694.265 \\ -109.956 \\ -53.605 - 164.653i \\ -53.605 + 164.653i \\ -31.447 \end{pmatrix}$$

Переходная функция для скорректированной САУ по задающему воздействию

$$ygc(t) := y0g + gm \cdot \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{4} \frac{Bc(pc_k) \cdot \exp(pc_k \cdot t)}{pc_k \cdot Sc(pc_k)} \right)$$

$$t := 0, 0.0001 .. 0.1$$



Время, соответствующее максимуму $ygc(t)$ (c)

$$t := 0.02 \quad \text{Given} \quad \frac{d}{dt}ygc(t) = 0 \quad tmax := \text{Find}(t) \quad tmax = 0.019$$

Перерегулирование для скорректированной САУ (%)

$$ymax := ygc(tmax) \qquad ymax = 57.003 \qquad \sigma c := \frac{ymax - y0g}{y0g} \cdot 100$$

$$\sigma c = 45.117$$

Время переходного процесса по задающему воздействию для скорректированной САУ (с)

$$t := 0.05 \quad \text{Given} \quad ygc(t) = 0.95 \cdot y0g \quad tpc := \text{Find}(t) \quad tpc = 0.049$$

Перерегулирование в скорректированной САУ получилось больше заданного значения (20 %), поэтому нужно увеличить частоты ω_1 и ω_2 и пересчитать переходную характеристику. Подбор частот ω_1 и ω_2 производится до тех пор, пока не будет получено значение $\sigma_c \approx 20$ %. Экспериментально установлены, что например, эти частоты (в рад/с) могут быть равны

$$\omega 1 := 800 \quad \omega 2 := 945$$

Расчет переходной характеристики САУ, удовлетворяющей заданному перерегулированию, показан ниже.

$$Tk1 := \frac{1}{\omega 3} \qquad Tk2 := \frac{1}{\omega 1} \qquad Tk3 := \frac{1}{\omega 2}$$

$$ac_0 := 1 + Kp \qquad ac_1 := (2 \cdot \xi + 2 \cdot Kp) \cdot T3 + Tk3 + Tk1 + Tk2$$

$$ac1_2 := (1 + Kp) \cdot T3^2 + (2 \cdot \xi \cdot Tk1 + 2 \cdot \xi \cdot Tk3 + 2 \cdot \xi \cdot Tk2) \cdot T3$$

$$ac2_2 := (Tk2 + Tk3) \cdot Tk1 + Tk2 \cdot Tk3 \quad ac1_3 := (Tk3 + Tk1 + Tk2) \cdot T3^2$$

$$ac2_3 := [(2 \cdot \xi \cdot Tk2 + 2 \cdot \xi \cdot Tk3) \cdot Tk1 + 2 \cdot \xi \cdot Tk2 \cdot Tk3] \cdot T3$$

$$ac3_3 := Tk2 \cdot Tk3 \cdot Tk1$$

$$ac := \begin{bmatrix} 1 + Kp \\ (2\cdot\xi + 2\cdot Kp)\cdot T3 + Tk3 + Tk1 + Tk2 \\ ac1_2 + ac2_2 \\ ac1_3 + ac2_3 + ac3_3 \\ [(Tk2 + Tk3)\cdot Tk1 + Tk2\cdot Tk3]\cdot T3^2 + 2\cdot\xi\cdot Tk2\cdot Tk3\cdot Tk1\cdot T3 \\ T3^2\cdot Tk1\cdot Tk2\cdot Tk3 \end{bmatrix}$$

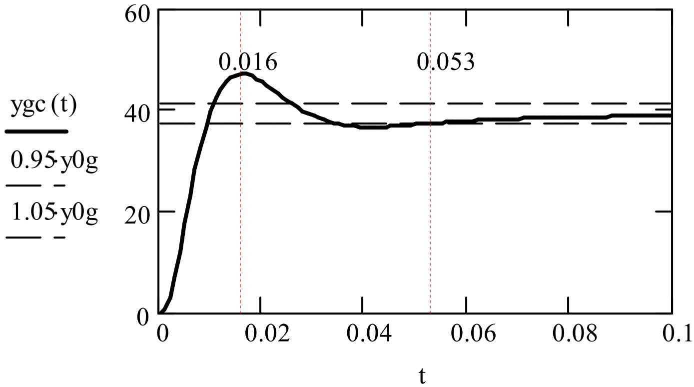
$$Ac(p) := ac_5\cdot p^5 + ac_4\cdot p^4 + ac_3\cdot p^3 + ac_2\cdot p^2 + ac_1\cdot p + ac_0$$

$$Qc(p) := \frac{d}{dp}Ac(p)$$

$$pc := \mathrm{polyroots}(ac) \qquad pc = \begin{pmatrix} -1.189\times 10^3 \\ -328.236 \\ -119.912 + 103.634i \\ -119.912 - 103.634i \\ -30.839 \end{pmatrix}$$

$$ygc(t) := y0g + gm\cdot \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{4} \frac{Bc(pc_k)\cdot \exp(pc_k\cdot t)}{pc_k\cdot Qc(pc_k)}\right)$$

$$t := 0, 0.001 .. 0.1$$



Время, соответствующее максимуму $ygc(t)$ **(с)**

$$t := 0.02 \quad \text{Given} \quad \frac{d}{dt} ygc(t) = 0 \quad tmax := \text{Find}(t) \quad tmax = 0.016$$

Перерегулирование для скорректированной САУ (%)

$$ymax := ygc(tmax) \qquad ymax = 47.13 \qquad \sigma c := \frac{ymax - y0g}{y0g} \cdot 100$$

$$\sigma c = 19.982$$

Время переходного процесса по задающему воздействию для скорректированной САУ (с)

$$t := 0.05 \quad \text{Given} \quad ygc(t) = 0.95 \cdot y0g \quad tpc := \text{Find}(t) \quad tpc = 0.053$$

Таким образом, в результате последовательной коррекции систему удалось настроить на заданное перерегулирование (около 20 %) при обеспечении практически заданного быстродействия ($t_{\text{пп}} = 0{,}05$ с).

Примечание 1. Рассмотренный вариант построения желаемой ЛАЧХ и синтеза по ней корректирующего устройства является не единственно возможным. Так, например, стыковку прямой $G_{x1}(\omega)$ с ЛАЧХ нескорректированной системе можно произвести на уровне, соответствующем частоте сопряжения $\frac{1}{T_2}$, т.е. частота ω_3 определится из решения уравнения $G_{x1}(\omega) = G_{\text{a}}\left(\frac{1}{T_2}\right)$. В этом случае корректирующее устройство не будет содержать форсирующего звена с постоянной времени T_1 и скорректированная система будет иметь шестой порядок. Возможна также стыковка ЛАЧХ нескорректированной САУ с прямой $G_{x1}(\omega)$ по уровню Lg, но в этом случае скорректированная система еще более усложнится. Таким образом, рассмотренный вариант последовательной коррекции заданной системы является оптимальным.

Примечание 2. Если нескорректированная САУ содержит интегрирующее звено и прямая $G_{x1}(\omega)$ не совпадает с

ЛАЧХ нескорректированной САУ ни на одной из частот сопряжения, то стыковка этой прямой с $G_{\text{а}}(\omega)$ может быть осуществлена на какой-либо из частот сопряжения ω_{ci}, меньшей частоты среза, рассчитанной для желаемой ЛАЧХ.

Примечание 3. Если ЛАЧХ нескорректированной САУ совпадает на частоте сопряжения ω_{c} с прямой $G_{x1}(\omega)$, то стыковку ЛАЧХ нескорректированной САУ с прямой $G_{x1}(\omega)$ нужно производить именно на этой частоте.

Примечание 4. Рассмотренная методика осуществления последовательной коррекции справедлива при безынерционных обратных связях. Если же в обратной связи содержится инерционное звено с постоянной времени $T_{\text{ос}}$, то методика действует только тогда, когда выполняется неравенство $\omega_{\text{ср}} \le \dfrac{1}{T_{\text{ос}}}$. При $\omega_{\text{ср}} > \dfrac{1}{T_{\text{ос}}}$ в скорректированной САУ будет иметь место повышенное перерегулирование, обусловленное форсирующим действием инерционной обратной связи, систему нужно настраивать на заданное время переходного процесса $t_{\text{пп}}$ и только затем оценить величину полученного перерегулирования.

6.4.4. Синтез корректирующего устройства и расчет его параметров

По передаточной функции корректирующего устройства

$$W_{\text{к}}(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)^2}{(\tau_1 p + 1)(T_{\text{к}1} p + 1)(T_{\text{к}2} p + 1)(T_{\text{к}3} p + 1)}$$

необходимо реализовать это устройство на операционных усилителях. Легко видеть, что оно должно содержать четыре инерционных форсирующих, причем постоянные времени форсирующих звеньев больше постоянных времени инерционных звеньев. Одна из возможных реализаций решения этой задачи показана на рис. 7.4, здесь инерционные форсирующие звенья выполнены на усилителях $DA1$ – DA4.

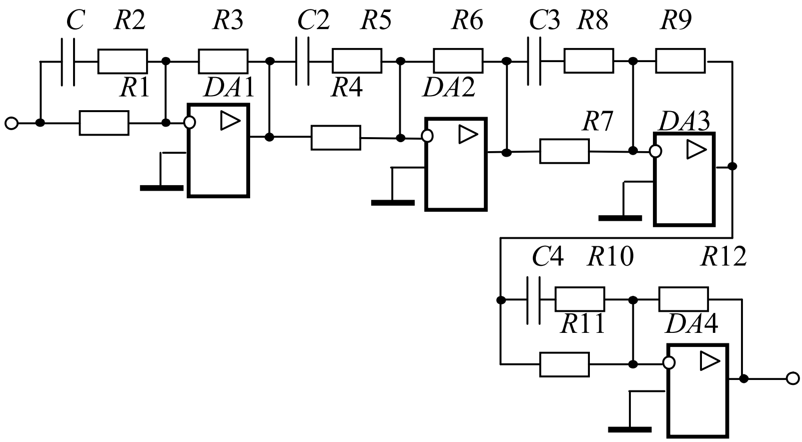


Рис. 7.4

Рассчитаем параметры элементов для этой схемы. Пусть на усилителе DA1 собрано звено с передаточной функцией $W_{к1}(p)=\dfrac{T_1 p+1}{T_{к1}p+1}$, на усилителе DA2 – звено с $W_{к2}(p)=\dfrac{T_2 p+1}{\tau_1 p+1}$, на усилителе DA3 – звено с $W_{к3}(p)=\dfrac{T_3 p+1}{T_{к2}p+1}$ и на усилителе DA4 – звено с $W_{к4}(p)=\dfrac{T_3 p+1}{T_{к3}p+1}$. При этом

$$T_{к1}=\frac{1}{\omega_3}=0{,}348\text{ с},\ T_{к2}=\frac{1}{\omega_1}=1{,}25\cdot10^{-3}\text{ с},\ T_{к3}=\frac{1}{\omega_2}=1{,}06\cdot10^{-3}\text{ с}.$$

Коэффициенты передачи всех звеньев равны единице.

Примем $R_2=R_5=R_8=R_{10}=100$ кОм. Тогда для первого инерционного форсирующего звена $T_{к1}=R_2C_1$, отсюда $C_1=\dfrac{T_{к1}}{R_2}=\dfrac{0{,}348}{10^5}\approx3{,}5$ мкФ; $T_1=T_{к1}+R_1C_1$, отсюда

$$R_1=\frac{T_1-T_{к1}}{C_1}=\frac{0{,}8-0{,}348}{3{,}5\cdot10^{-6}}\approx130\text{ кОм};\ R_3=R_1=130\text{ кОм}.$$

Аналогично рассчитываются и элементы для остальных инерционных форсирующих звеньев:

$$C_2 = \frac{\tau_1}{R_5} = 0{,}5 \text{ мкФ}; \quad R_4 = \frac{T_2 - \tau_1}{C_2} = 300 \text{ кОм}; \quad R_6 = R_4 = 300 \text{ кОм},$$

$$C_3 = \frac{T_{к2}}{R_8} = 12{,}5 \text{ нФ}; \quad R_7 = \frac{T_3 - T_{к2}}{C_3} \approx 1{,}3 \text{ МОм}; \quad R_9 = R_7 = 1{,}3 \text{ Мом},$$

$$C_4 = \frac{T_{к3}}{R_{10}} \approx 12{,}5 \text{ нФ}; R_{11} = \frac{T_3 - T_{к3}}{C_4} \approx 1{,}5 \text{ МОм}; \quad R_9 = R_7 = 1{,}5 \text{ Мом}.$$

6.4.5. Электронное моделирование скорректированной САУ

Разработаем электронную модель этого контура, эквивалентируя его разомкнутой системой. При этом воспользуемся передаточной функцией (*), для которой известны числитель $B_с(p)$ и знаменатель $A_с(p)$, причем

$$B_с(p) = \frac{K_р}{k_{ос}}(T_3 p + 1),$$

$$A_с(p) = (T_3{}^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1)(T_{к1} p + 1)(T_{к2} p + 1)(T_{к3} p + 1) + K_p (T_3 p + 1)^2.$$

Кроме этого, известны корни характеристического уравнения

$$pc = \begin{pmatrix} -1.189 \times 10^3 \\ -328.236 \\ -119.912 + 103.634i \\ -119.912 - 103.634i \\ -30.839 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что замкнутую систему можно представить эквивалентной ей разомкнутой системой, содержащей 3 инерционных и одно колебательное звено, соединенных последовательно с общим коэффициентом передачи $K_з = \dfrac{B_з(0)}{A_з(0)}$. При этом i-го $(i = 1, 2, 3)$ инерционного звена постоянная времени $T_{ин_i} = \left| \dfrac{1}{p_i} \right|$, т.е. определяется i-тым вещественным корнем. Параметры колебательного звена определяются так:

$$T_{\text{кол}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \; \xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

где а – модули вещественной и мнимых частей комплексных сопряженных корней характеристического уравнения $A_{\text{c}}(p) = 0$.

Помимо указанных звеньев, модель нужно дополнить двумя форсирующими звеньями с постоянной времени T_3 (см. числитель передаточной функции (*)).

Таким образом, электронная модель скорректированной САУ будет состоять из последовательно соединенных колебательного звена, для которого

$$\text{Tkol} := \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad \text{Tkol} = 6.31 \times 10^{-3} \;\; \text{c}$$

$$\xi := \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad \xi = 0.757$$

инерционных форсирующих звеньев с постоянными времени (с)

$$\text{Tif1} := \left|\frac{1}{\text{pc}_1}\right| \quad \text{Tif1} = 3.047 \times 10^{-3} \quad \text{Tif2} := \left|\frac{1}{\text{pc}_4}\right| \qquad \text{Tif2} = 0.032$$

$$\tau\text{if1} := \text{T3} \qquad \tau\text{if2} := \text{T3}$$

и инерционного звена с постоянной времени (с)

$$\text{Ti} := \left|\frac{1}{\text{pc}_0}\right| \qquad \text{Ti} = 8.411 \times 10^{-4}$$

и коэффициентом передачи

$$\text{K} := \frac{\text{Bc}(0)}{\text{Ac}(0)} \qquad \text{K} = 1.964$$

Для того чтобы между входом и выходом модели располагалось четное количество усилителей, в схеме нужно предусмотреть инвертор.

На рис. 7.5 приведена схема электронной модели колебательного звена, выполненная на усилителях $DA1 - DA3$. В ней $R1 = R2 = R5 = R6 = 100$ кОм, $C1 = C2 = 1$ мкФ, параметры других элементов следующие:

$R4 := Tkol^2 \cdot 10^7$ $\quad R4 = 398.107$ Ом $\quad R4 = 400$ Ом

$R3 := \dfrac{\sqrt{R2 \cdot R4}}{2 \cdot \xi}$ $\quad R3 = 4.17 \times 10^3$ Ом $\quad R3 = 4.2$ кОм

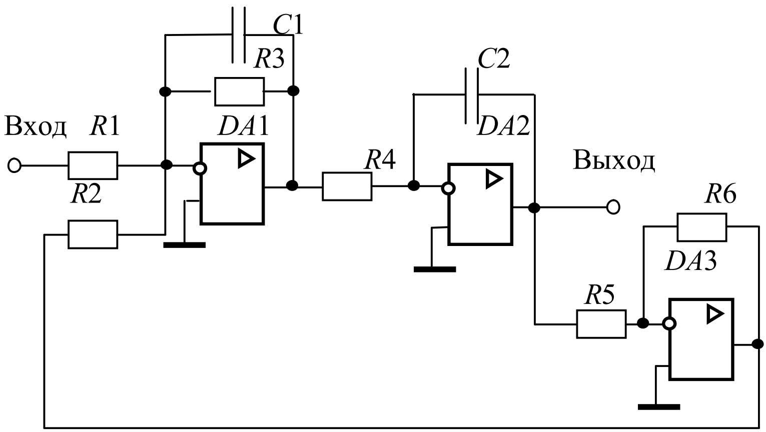


Рис. 6.5.

На рис. 6.6 приведена реализация на операционных усилителях последовательного соединения двух инерционных форсирующих звеньев, у которых постоянная времени форсирующего звена больше, чем у инерционного и наоборот. Параметры элементов моделей следующие: $R8 = R12 = 100$ кОм,

$C3 := \dfrac{Tif1}{R8}$ $\quad C3 = 3.047 \times 10^{-8}$ Ф $\quad C3 = 0.03$ мкФ

$R7 := \dfrac{T3 - Tif1}{C3}$ $\quad R7 = 5.565 \times 10^5$ Ом $\quad R7 = 556$ кОм

$R9 = R7 = 556$ кОм

$C4 := \dfrac{T3}{R11}$ $C4 = 2 \times 10^{-7}$ Ф $C3 = 0.2$ мкФ

$R11 := \dfrac{Tif2 - T3}{C4}$ $R11 = 6.213 \times 10^{4}$ Ом $R11 = 62$ кОм

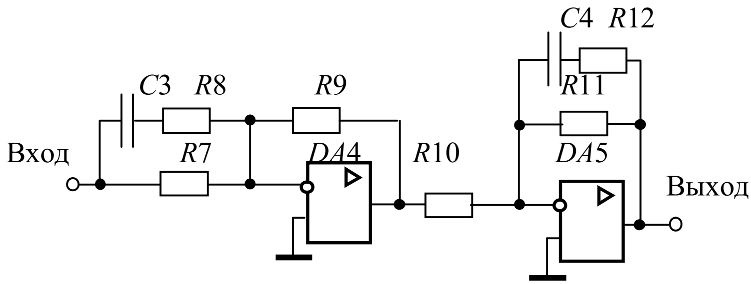


Рис. 6.6. Инерционные форсирующие звенья

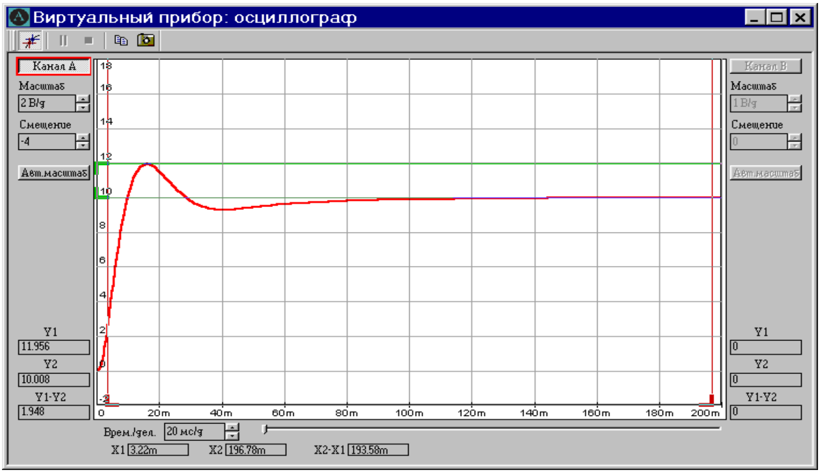
На рис. 6.7 изображена электронная модель инерционного звена, последовательно с которым включен инвертор сигнала, обеспечивающий четное количество операционных усилителей, включенных между входом и выходом модели контура. Здесь приняты следующие номиналы элементов: $R13 = R15 = R16 = 100$ кОм,

$R14 := K \cdot R13$ $R14 = 1.964 \times 10^{5}$ Ом $R14 = 196$ кОм

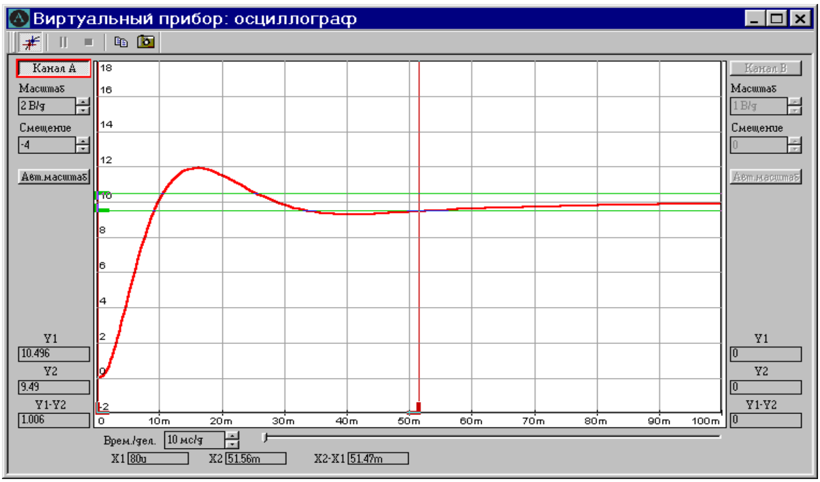
$C5 := \dfrac{Ti}{R14}$ $C5 = 4.282 \times 10^{-9}$ $C5 = 0.004$ мкФ

На рис. 7.8 изображена функциональная схема электронной модели синтезированного контура регулирования скорости двигателя, состоящая из последовательно соединенных моделей, показанных на рис. 7.5– 7.7. Ко входу этой модели подключается источник постоянного напряжения, а к ее выходу – осциллограф.

Рис. 6.7. Функциональная схема модели синтезированного контура регулирования скорости



а



б

Рис. 6.8

На рис. 6.8 приведена осциллограмма выходного напряжения модели скорректированной САУ (ее переходная характеристика по задающему воздействию) при подаче на вход модели напряжения $U_{\text{вх}} = \dfrac{10}{K} \approx 5{,}1$ В. При этом максимальное значение выходного напряжения модели $U_{\text{вых,max}} = 11{,}956$ В, его установившееся значение $U_{\text{вых,уст}} = 10$ (см. рис. 7.9, *а*), тогда значение перерегулирования, полученного при эксперименте $\sigma_{\text{э}} = 19{,}56$ %. Время переходного процесса, измеренное при $U_{\text{вых}} = 0{,}95 U_{\text{вых,уст}} = 9{,}5$ В (см. рис. 7.9, *б*), составило $t_{пп,\text{э}} = 0{,}051$ с.

Относительная погрешность моделирования по перерегулированию по отношению к расчетному значению $\sigma_{\text{с}} = 19{,}982$ % равна $\delta_{\sigma} = \dfrac{\sigma_{\text{с}} - \sigma_{\text{э}}}{\sigma_{\text{с}}} \cdot 100 = \dfrac{19{,}982 - 19{,}56}{19.982} \cdot 100 \approx 2$ %. Относительная погрешность моделирования по времени переходного процесса относительно расчетного значения $\delta_t = \dfrac{t_{\text{пп,с}} - t_{\text{пп,э}}}{t_{\text{пп,с}}} \cdot 100 = \dfrac{0{,}053 - 0{,}051}{0{,}053} \cdot 100 \approx 4$ %. Общая погрешность моделирования не превышает 5 %, что является вполне допустимым.

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К СОБЕСЕДОВАНИЮ

7.1. Поясните принципы управления по отклонению и по возмущению.

7.2. Понятие передаточной функции САУ.

7.3. Переходная и импульсная переходная характеристиками и связь между ними.

7.4. Частотные характеристики САУ и связь между ними.

7.5. Классификация типовых динамических звеньев САУ.

7.6. Инерционное и форсирующее звенья и их характеристики.

7.7. Идеальное дифференцирующее и интегрирующее звенья и их характеристики.

7.8. Инерционное форсирующее звено и влияние его параметров на реализацию и характеристики.

7.9. Особые динамические звенья САУ и их отличия от минимально-фазовых звеньев.

7.10. Возможно ли по асимптотической ЛАЧХ САУ восстановить её передаточную функцию?

7.11. Параллельное и последовательное соединение звеньев.

7.12. Необходимое и достаточное условие устойчивости линейных непрерывных САУ.

7.13. Критерии устойчивости, их классификация и применение.

7.14. Запасы устойчивости и их связь с динамическими характеристиками САУ.

7.15. Особенности исследования устойчивости систем, содержащих звено чистого запаздывания.

7.16. Статические и астатические САУ. Порядок астатизма, его влияние на устойчивость и качество регулирования в САУ.

7.17. Частотные и корневые критерии качества регулирования и их связь с основными динамическими характеристиками САУ.

7.18. Способы коррекции САУ.

7.19. Параллельная коррекция САУ. Жесткие и гибкие обратные связи, их реализация и режимы работы.

7.20. Комбинированное управление. Понятие инвариантности и способы ее достижения.

7.21. Оптимальные характеристики САУ. Настройка систем на технический и симметричный оптимумы.

7.22. Классификация дискретных САУ по способам квантования сигналов и модуляции.

7.23. Понятие решетчатой функции. Смещенные решетчатые функции и их назначение. Разности решетчатых функций и разностные уравнения.

7.24. Дискретное преобразование Лапласа. Область существования изображений. Основные свойства дискретного преобразования Лапласа.

7.25. Z-преобразование и его связь с дискретным преобразованием Лапласа. Модифицированное z-преобразование.

7.26. Типовая структура разомкнутой САУ с АИМ, ее состав и передаточная функция.

7.27. Передаточные функции замкнутых САУ с АИМ. Частотные характеристики систем с АИМ и их свойства.

7.28. Необходимые и достаточные условия устойчивости систем с АИМ при их различном математическом описании. Понятие w-преобразования.

7.29. Особенности применения известных критериев устойчивости в системах с АИМ.

7.30. Косвенные оценки качества переходных процессов в системах с АИМ.