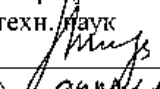
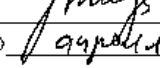



Министерство образования и науки  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)  
Кафедра радиоэлектронных технологий и экологического мониторинга  
(РЭТЭМ)

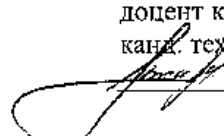
Утверждаю  
Зав. кафедрой РЭТЭМ  
д-р техн. наук  
 В.И. Туев  
«24»  2017 г

Учебное пособие  
«Теплообмен в радиоэлектронных средствах»  
для студентов, обучающихся по направлению подготовки  
бакалавра 11.03.03 (211000.62)  
«Конструирование и технология электронных средств»

Согласовано

Нормоконтролер  
Ст. преп. каф. РЭТЭМ  
 Г.А. Воронина

Разработчик

доцент каф. РЭТЭМ  
канд. техн. наук  
 А.С. Апкарьян

Томск 2017

Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)  
Кафедра радиоэлектронных технологий и экологического мониторинга  
(РЭТЭМ)

Утверждаю  
Зав. кафедрой РЭТЭМ  
д-р техн. наук

\_\_\_\_\_ В.И. Туев  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 г

Учебное пособие  
«Теплообмен в радиоэлектронных средствах»  
для студентов, обучающихся по направлению подготовки  
бакалавра 11.03.03 (211000.62)  
«Конструирование и технология электронных средств»

Согласовано

Нормоконтролер  
Ст. преп. каф. РЭТЭМ  
\_\_\_\_\_ Г.А. Воронина

Разработчик

доцент каф. РЭТЭМ  
канд. техн. наук  
\_\_\_\_\_ А.С. Апкарьян

Томск 2017

Введение	
Глава 1 Теплопроводность	
1.1 Основные понятия	5
1.2 Математическая формулировка задач теплопроводности	7
1.3 Теплопроводность плоской стенки без внутренних источников тепла	9
1.3.1 Теплопроводность плоской однослойной стенки без внутренних источников тепла	9
1.3.2 Теплопроводность плоской многослойной стенки без внутренних источников тепла	11
1.3.3 Передача тепла при граничных условиях третьего рода (теплопередача). Коэффициент теплопередачи. Термическое сопротивление теплопроводности, теплоотдачи, теплопередачи	11
1.3.4 Граничные условия второго и третьего рода	13
1.4 Теплопроводность плоской стенки при наличии внутренних источников тепла	14
1.4.1 Плотность объёмного тепловыделения	14
1.4.2 Температурное поле в плоской стенке при наличии тепловыделений	14
1.4.3 Симметричные условия отвода теплоты от пластины	14
1.4.4 Пластина с одной теплоизолированной поверхностью	15
1.4.5 Пластина с разными (постоянными) температурами поверхностей. Критерий Померанцева	16
1.4.6 Несимметричные условия отвода теплоты от пластины	17
1.5 Теплопроводность цилиндрической стенки без внутренних источников тепла	
1.5.1 Теплопроводность через однослойную цилиндрическую стенку	18
1.5.2 Теплопроводность через многослойную цилиндрическую стенку	19
1.5.3 Теплопроводность через шаровую стенку	20
1.6 Теплопроводность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников тепла	
1.6.1 Теплопроводность однородного цилиндрического стержня при наличии тепловыделений	21
1.6.2 Теплопроводность цилиндрической стенки с внутренними источниками тепла	22
1.7 Интенсификация теплопередачи	
1.7.1 Упрощённый расчёт через ребристую стенку	25
1.7.2 Интенсификация теплопередачи за счёт ребрения поверхности. Виды ребристых поверхностей	26
1.8 Теплопроводность при нестационарном режиме	
1.8.1 Общие закономерности нестационарных процессов	27
1.8.2 Охлаждение неограниченной пластины при нестационарном режиме	29
1.8.3 Частные случаи распределения температурного поля внутри неограниченной пластины	31
Глава 2 Конвективный теплообмен	
2.1 Основные понятия	33
2.2 Понятие о пограничном слое	36
2.3 Уравнение Ньютона-Рихмана. Коэффициент теплоотдачи	37
2.4 Дифференциальное уравнение теплоотдачи	38
2.5 Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена	39
2.6 Основы теории подобия	
2.6.1 Три вида подобия	41
2.6.2 Критерии подобия	41

2.6.3 Теоремы подобия	41
2.6.4 Основы метода анализа размерностей	44
2.6.5 Критериальное уравнение конвективного теплообмена в общем виде	45
2.7 Частные случаи конвективного теплообмена	
2.7.1 Теплоотдача при ламинарном движении жидкости в трубах	45
2.7.2 Теплоотдача при турбулентном движении жидкости	46
2.7.3 Теплоотдача при продольном обтекании пластины	47
2.7.4 Теплоотдача при поперечном обтекании одиночного цилиндра	48
2.7.5 Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб	53
2.7.6 Теплоотдача при свободной конвекции	54
2.7.7 Теплоотдача при свободной конвекции в ограниченном пространстве	55
Глава 3 Теплообмен излучением	
3.1 Основные понятия	56
3.2 Законы лучистого теплообмена	57
3.3 Лучистый теплообмен между твердыми телами	
3.3.1 Лучистый теплообмен между двумя параллельными пластинами	60
3.3.2 Лучистый теплообмен между поверхностями, находящимися одна внутри другой	62
3.3.3 Влияние экранов на лучистый теплообмен	63
Список использованных источников	64

Предметом исследования теории теплообмена (теплопередачи) являются закономерности переноса теплоты и их количественные характеристики. Согласно второму закону термодинамики процесс переноса теплоты в пространстве возникает под действием разности температур и направлен в сторону уменьшения температуры.

В теории теплопередачи рассматривается два основных вопроса:

- 1 Определение количества тепла, которое передаётся от одного тела к другому или переходит из одной части тела в другую при заданных условиях
- 2 Определение температуры в разных участках тела, участвующего в процессе теплообмена.

Тепло передаётся тремя способами: теплопроводностью, конвекцией и излучением.

*Теплопроводность* – процесс распространения тепловой энергии в твёрдом теле при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела, имеющих различные температуры. Во всех веществах теплота передается теплопроводностью за счет переноса энергии микрочастицами. Молекулы, атомы, электроны и другие микрочастицы, из которых состоит вещество, движутся со скоростями, пропорциональными их температуре. За счет взаимодействия друг с другом быстро движущиеся микрочастицы отдают свою энергию более медленным, перенося теплоту из зоны с высокой в зону с более низкой температурой.

*Конвекция.* В жидкостях перенос теплоты осуществляется еще и за счет перемешивания. При этом уже не отдельные молекулы, а большие, макроскопические объемы горячей жидкости перемещаются в зоны с низкими температурами, а холодная жидкость попадает в зоны с высокими температурами. Перенос теплоты вместе с макроскопическими объемами вещества носит название конвективного теплопереноса, или конвекции.

Следует иметь в виду, что одновременно с конвекцией всегда сосуществует и теплопроводность, однако конвективный перенос в жидкостях обычно является определяющим, поскольку он значительно интенсивнее теплопроводности. В твердых монолитных телах перемещение макроскопических объемов относительно друг друга невозможно, поэтому теплота переносится в них только теплопроводностью. Однако при нагреве сыпучих материалов (нагрев песка, сушка зернистых материалов и т.д.) организуют перемешивание. Процесс теплопереноса при этом резко интенсифицируется и физически становится похожим на конвективный теплоперенос в жидкостях.

*Излучение (лучистый теплообмен)* – процесс передачи энергии электромагнитными волнами. Представляет собой двойное преобразование энергии: более нагретое тело излучает энергию в виде электромагнитных колебаний, другое менее нагретое тело поглощает энергию и нагревается.

Излучением теплота передается через все лучепрозрачные среды, в том числе и через вакуум, например в космосе, где это единственно возможный способ получения теплоты от Солнца и потери ее в межзвездное пространство. Носителями энергии при теплообмене излучением являются фотоны, излучаемые и поглощаемые телами, участвующими в теплообмене.

Обычно теплообмен между телами совершается всеми тремя способами одновременно. Сочетание может быть разнообразным и один способ преобладать над другим.

Процессы теплообмена могут протекать как при установившемся (стационарном) режиме, так и при неустановившемся (нестационарном) режиме. При стационарном режиме температура в любой точке не зависит от времени. Стационарному режиму всегда предшествует нестационарный.

## **Глава 1 Теплопроводность**

### **1.1 Основные понятия**

Теплопроводность – вид теплообмена, при котором перенос тепловой энергии в неравномерно нагретой среде происходит в отсутствие макроскопического движения среды. В газах передача теплоты теплопроводностью осуществляется хаотически движущимися молекулами; в металлах – в основном электронами, в диэлектриках – вследствие колебаний атомов (или молекул), образующих кристаллическую решётку. Теплопроводность в основном осуществляется в твёрдых телах как внутри одного, так и между телами при их соприкосновении друг с другом. Теплопроводность может осуществляться также и через слой жидкости или газа. Однако жидкости и газы являются плохими проводниками тепла теплопроводностью.

*Температурное поле.* Процесс теплообмена теплопроводностью, так же как и другие виды теплообмена, осуществляется только при условии, что в различных точках тела температура неодинакова. Совокупность значений температуры во всех точках рассматриваемого пространства в данный момент времени называют температурным полем. Математически температурное поле выражается как

$$t = f(x, y, z)$$

Температурное поле может быть функцией трёх, двух и одной координаты.

$t = f(x, y, z)$  – трёхмерное температурное поле;

$t = f(x, y)$  - двухмерное температурное поле;

$t = f(x)$  - одномерное температурное поле.

*Температурный градиент.* Поверхность, во всех точках которой температура одинакова, называют изотермической. Если пересечь ряд изотермических поверхностей плоскостью, то на ней будет получено семейство изотерм. Они так же, как и изотермические поверхности не пересекаются между собой, не обрываются внутри тела, а оканчиваются на поверхности тела или замыкаются внутри него. Температура тела изменяется лишь в направлениях, пересекающих изотермические поверхности (рис.1.1) При этом наибольшее изменение температуры на единицу длины получается в направлении нормали  $n$  к изотермической поверхности.

Предел отношения изменения температуры  $\Delta t$  к расстоянию между изотермами по нормали  $\Delta n$  называют градиентом температур (рис.1.1)

$$\lim(\Delta t / \Delta n)_{n \rightarrow 0} = dt/dn = \text{grad } t. \quad (1.1)$$

Градиент температуры – вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности. Его положительным направлением считается направление в сторону увеличения температуры. Единица измерения градиента – градус на метр ( $^{\circ}\text{C}/\text{м}$ ).

*Тепловым потоком* (мощностью теплового потока)  $\Phi$  называют количество тепла, проходящее в единицу времени через произвольную поверхность. Вектор теплового потока всегда направлен в сторону уменьшения температуры. Единица теплового потока – ватт (вт).

*Плотность теплового потока* характеризует интенсивность теплового потока и равна

$$q = \Phi / A. \quad (1.2)$$

Единица измерения плотности – ватт на квадратный метр ( $\text{вт}/\text{м}^2$ ).

Так как тепло передаётся от более нагретого тела к менее нагретому, то вектор плотности теплового потока всегда направлен в сторону уменьшения температуры.

Зависимость плотности потока от градиента температур выражается через формулу

$$q = - \lambda dt/dn = - \lambda \text{ grad } t. \quad (1.3)$$

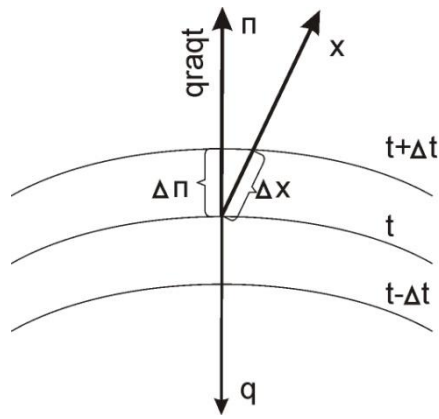


Рисунок 1.1 - Расположение изотерм и температурного градиента

Соотношение (1.3) выражает основной закон теплопроводности и называется законом Фурье. Знак минус в правой части соотношения, означает, что векторы теплового потока и градиента температур направлены в разные стороны.

Коэффициент  $\lambda$  называется коэффициентом теплопроводности и характеризует способность вещества проводить тепло. Единица измерения коэффициента теплопроводности – Вт/(м·К) или Вт/(м·°С).

Теплопроводность равна плотности теплового потока через однослойную стенку при разности температур 1 °С.

Значение теплопроводности для каждого тела находят экспериментально и сводят в таблицы, которыми пользуются при расчётах. Табличные данные получены в результате измерения теплового потока и градиента температуры в заданном веществе из определения коэффициента теплопроводности:

$$\lambda \equiv \frac{|\bar{q}|}{|\text{grad } t|}.$$

Перенос тепла теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии теплового движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. С изменением давления коэффициент теплопроводности меняется незначительно, а с ростом температуры он увеличивается. Исключением является водяной пар, теплопроводность которого падает с ростом температуры, для которого к тому же проявляется значительная зависимость от давления.

Для смесей газов коэффициент теплопроводности определяется опытным путем. Для газов значение коэффициента теплопроводности лежит в диапазоне 0,005–0,5 Вт/(м·К). Самые высокие значения коэффициента теплопроводности имеют водород и гелий.

Механизм распространения тепла в капельных жидкостях осуществляется переносом энергии путем нестройных упругих колебаний. С повышением температуры убывает плотность жидкости и коэффициент теплопроводности (за исключением воды и глицерина), с повышением давления – увеличивается. Для жидкостей коэффициент теплопроводности не превышает 1 Вт/(м·К) и лежит примерно в диапазоне 0,07–0,7 Вт/(м·К).

В металлах переносчиками тепла являются электроны. Свободные электроны движутся во всех направлениях – как из более нагретых областей в холодные, так и в обратном направлении. В первом случае они отдают энергию атомам, а во втором – отбирают. При повышении температуры вследствие усиления тепловых неоднородностей рассеивание электронов усиливается. Это влечет за собой уменьшение коэффициентов теплопроводности и электропроводности чистых металлов. Примеси значительно снижают коэффициент теплопроводности, так как структурные неоднородности сильно

рассеивают электроны. Например, у чистой меди  $\lambda = 395$  Вт/(м·К), а у меди с примесями мышьяка  $\lambda = 142$  Вт/(м·К). Для сплавов, в отличие от чистых металлов, коэффициент теплопроводности увеличивается с ростом температуры. В целом коэффициент теплопроводности убывает с уменьшением плотности. Наибольшим коэффициентом теплопроводности обладают чистые серебро и медь (около 400 Вт/(м·К)), затем идут золото (300 Вт/(м·К)) и алюминий (210 Вт/(м·К)). В среднем коэффициент теплопроводности металлов лежит в диапазоне 20–400 Вт/(м·К).

В неметаллических твердых телах коэффициент теплопроводности растет с увеличением температуры, а также с ростом плотности вещества. Здесь на величину коэффициента теплопроводности оказывают влияние структура, пористость и влажность материала. Многие материалы являются пористыми, а применение закона Фурье к пористым материалам условно. Его следует понимать следующим образом: такой коэффициент теплопроводности имело бы сплошное тело таких же форм и размеров, а также температурах на границе при прохождении через него такого же количества тепла.

Для порошкообразных и пористых тел коэффициент теплопроводности сильно зависит от их объемной плотности – растет с ее увеличением, так как теплопроводность заполняющего поры воздуха существенно меньше теплопроводности твердых компонентов пористого материала. С ростом влажности коэффициент теплопроводности пористых материалов увеличивается в первую очередь за счет конвективного переноса тепла из-за капиллярного движения воды. Для неметаллических твердых материалов коэффициент теплопроводности обычно ниже 10 Вт/(м·К), для строительных и теплоизоляционных материалов составляет 0,02–3,0 Вт/(м·К).

## 1.2 Математическая формулировка задач теплопроводности

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии: количество тепла  $dQ$ , введенное в элементарный объем извне за время  $dt$  вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников тепла, равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в этом объеме:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ,$$

где  $dQ_1$  – количество тепла, введенное в элементарный объем  $dv$  путем теплопроводности за время  $dt$ ;

$dQ_2$  – количество тепла, которое за время  $dt$  выделилось в элементарном объеме  $dv$  за счет внутренних источников тепла;

$dQ$  – изменение внутренней энергии вещества, содержащегося в элементарном объеме  $dv$  за время  $dt$ . Тогда

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \cdot dv \cdot dt + q_v \cdot dv \cdot dt = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot dv \cdot dt.$$

Выразим частную производную от температуры по времени:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (1.4)$$

Плотность теплового потока в соответствии с законом Фурье равна  $q = -\lambda \text{ grad } t$ . Проекция вектора плотности теплового потока на соответствующие координатные оси определим как  $q_x = -\lambda dt/dx$ ,  $q_y = -\lambda dt/dy$ ,  $q_z = -\lambda dt/dz$ . Подставим эти выражения в (1.4) и получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (1.5)$$



Если обозначить через оператор Лапласа  $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$  и  $a = \lambda / (c \cdot \rho)$  – коэффициент температуропроводности, то дифференциальное уравнение теплопроводности (1.5) можно записать как

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho}.$$

Коэффициент температуропроводности характеризует скорость изменения температуры в нестационарных процессах и является мерой теплоинерционных свойств тела. Скорость изменения температуры будет тем выше, чем больше коэффициент температуропроводности, т.е. при прочих равных условиях выравнивание температуры будет происходить быстрее. Также коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества: для металлов больше, чем для жидкостей и газов.

В цилиндрической системе координат выражение  $\nabla^2 t$  имеет вид

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности (1.5) выведено на основе общих законов физики и описывает процесс теплопроводности в самом общем виде. Для полного математического описания конкретного процесса теплопроводности необходимы условия однозначности или краевые условия, которые включают [1]:

- 1) геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- 2) физические условия, характеризующие физические свойства тела (теплопроводность, теплоемкость, плотность, мощность внутренних источников тепла и т.д.);
- 3) временные или начальные условия, характеризующие распределение температуры в изучаемом теле в начальный момент времени: при  $\tau = 0 \quad t = f(x, y, z)$ ;
- 4) граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой.

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

*Граничные условия первого рода*, в которых задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:  $t_c = f(x, y, z, \tau)$ ; частный случай  $t_c = const$ .

*Граничные условия второго рода*, в которых задается величина теплового потока для каждой точки поверхности тела и для любого момента времени:  $q_c = f(x, y, z, \tau)$ ; частный случай  $q_c = const$ . Например, нагревание металлических изделий в высокотемпературных печах.

*Граничные условия третьего рода*, в которых задается температура окружающей среды  $t_{жс}$  и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания. Для его описания используется закон Ньютона – Рихмана: плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела  $t_c$  и окружающей среды  $t_{жс}$ :

$$q = \alpha (t_c - t_{жс}).$$

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно равен количеству тепла, отдаваемому (воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в один градус.

По закону сохранения энергии количество тепла, отводимое с единицы поверхности вследствие теплоотдачи, должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, тогда

$$\alpha \cdot (t_c - t_{\text{ж}}) = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c$$

или

$$\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_c - t_{\text{ж}}).$$

Граничные условия четвертого рода характеризуют теплообмен системы тел или тела с окружающей средой по закону теплопроводности (идеальный контакт):

$$\lambda_1 \cdot \left( \frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_c = \lambda_2 \cdot \left( \frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_c.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение совместно с условиями однозначности дают полную математическую формулировку конкретной задачи теплопроводности, которая может быть решена аналитически, численно, экспериментально.

### 1.3 Теплопроводность плоской стенки без внутренних источников тепла

#### 1.3.1 Теплопроводность плоской однослойной стенки без внутренних источников тепла

На рис. 1.2 показана плоская однослойная стенка толщиной  $\delta$  из однородного материала. Примем, что теплопроводность материала  $\lambda$  не зависит от температуры.

Граничные условия в данной задаче зададим следующим образом:

при  $x = 0$   $t = t_{c1}$ ; при  $x = \delta$   $t = t_{c2}$ . На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянные температуры  $t_{c1} > t_{c2}$ ; температура изменяется только в направлении оси  $x$ , перпендикулярно плоскости стенки, т.е. температурное поле одномерно, а градиент температуры равен  $dt/dx$ .

Уравнение Фурье для этого слоя имеет вид

$$q = -\lambda dt/dx,$$

или

$$dt = - (q / \lambda) dx. \quad (1.6)$$

Закон распределения температуры по толщине стенки найдем, дважды проинтегрировав уравнение 1.6 и найдя константы интегрирования исходя из граничных условий.

$$t = t_{c1} - \frac{(t_{c1} - t_{c2})}{\delta} x \quad (1.7)$$

Если в уравнение ввести  $x_{c2} - x_{c1} = \delta$  - толщина стенки, получим

$$q = \lambda / \delta (t_{c1} - t_{c2}) = (\lambda / \delta) \Delta t$$

или

$$q = (t_1 - t_2) / (\delta / \lambda). \quad (1.8)$$

Из уравнения (1.8) следует, что количество тепла, проходящее через единицу поверхности в единицу времени прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности и температурному напору и обратно пропорционально толщине стенки.

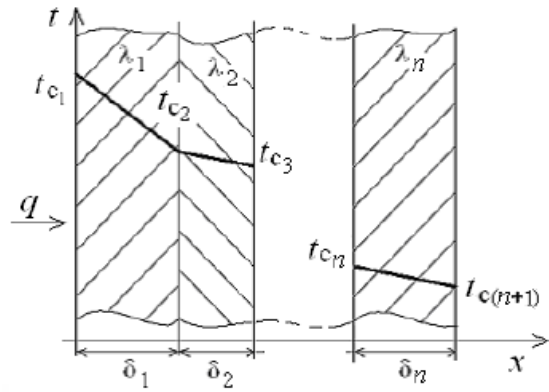
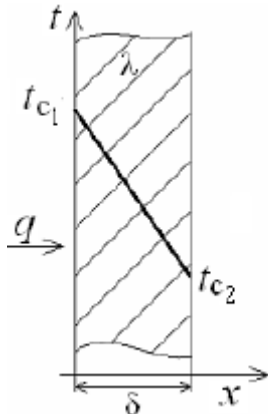


Рисунок 1.2 - Плоская однослойная стенка

Рисунок 1.3 - Плоская многослойная стенка

Отношение  $\lambda\delta$  называется тепловой проводимостью стенки, а обратная величина  $\delta/\lambda$  – тепловым или термическим сопротивлением стенки, которая представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока. Зная удельный тепловой поток, можно вычислить общее количество тепла, которое передается через поверхность стенки величиной  $F$  за промежуток времени  $\tau$ :

$$Q = q F \tau = \lambda \delta (t_{c1} - t_{c2}) F \tau \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.9) найдем величину перепада температуры на длину стенки

$$\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} = \frac{q}{\lambda}$$

и подставим ее в уравнение (1.7):

$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} \cdot x. \quad (1.10)$$

Из уравнения (1.10) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока.

Обозначим:

$\Delta t = (t - t_{c2})$  – текущий температурный напор или избыточная температура;

$\Delta t_0 = (t_{c1} - t_{c2})$  – полный температурный напор или наибольшая избыточная температура.

После введения этих обозначений уравнение (1.5) запишется как

$$\Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{\delta} \cdot x \quad \text{или} \quad \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{\delta}. \quad (1.11)$$

Уравнение температурного поля (1.11) является универсальным, так как распределение температуры в стенке можно представить единой прямой для любых заданных значений температур стенки  $t_{c1}$ ,  $t_{c2}$  и ее толщины  $\delta$ .

Выражения (1.6) и (1.11) получены при условии, что коэффициент теплопроводности – величина постоянная. В действительности коэффициент теплопроводности зависит только от температуры, которая для многих материалов близка к линейной  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ ,

где  $\lambda_0$  значение коэффициента теплопроводности при  $0^\circ\text{C}$ .

Тогда плотность теплового потока на поверхности пластины

$$q = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}),$$

где  $\lambda_{\text{ср}} = \lambda_0 \cdot \left(1 + b \frac{t_{c1} + t_{c2}}{2}\right)$  – коэффициент теплопроводности при среднеарифметическом значении температуры в стенке.

В этом случае выражение для температурного поля

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2 \cdot q \cdot x}{\lambda_0 \cdot b}} - \frac{1}{b}. \quad (1.12)$$

Из этого уравнения следует, что температура в стенке изменяется не линейно, а по кривой. Характер температурной кривой определяется знаком и численным значением коэффициента  $b$ .

### 1.3.2 Теплопроводность плоской многослойной стенки без внутренних источников тепла

В практике большое значение имеет процесс передачи тепла через плоскую стенку, состоящую из нескольких слоёв материала с различной теплопроводностью.

Рассмотрим передачу тепла теплопроводностью через плоскую многослойную стенку, состоящую из  $n$  однородных слоев (рис.1.3.). Все слои такой стенки плотно прилегают друг к другу. Толщины слоёв обозначены  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots \delta_n$ . Теплопроводность каждого материала  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_{n+1}$  соответственно. Известны температуры наружных поверхностей  $t_1$  и  $t_n$ . Рассматриваем стационарный режим. Поэтому плотность теплового потока  $q$ , проходящего через каждый слой стенки, по значению постоянна и для всех слоёв одинакова, но на своём пути она преодолевает местное термическое сопротивление  $(\delta/\lambda)$ . При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки  $dq/dx = 0$ .

$$q = (t_{c1} - t_{c2})/(\delta_1/\lambda_1); \quad q = (t_{c2} - t_{c3})/(\delta_2/\lambda_2); \quad \dots \dots \quad q = (t_{cn} - t_{cn+1})/(\delta_n/\lambda_n).$$

Сложив левые и правые части уравнений, получим:

$$(t_{c1} - t_{cn+1}) = q(\delta_1/\lambda_1 + \delta_2/\lambda_2 + \dots \delta_n/\lambda_n).$$

Отсюда плотность теплового потока:

$$q = \frac{t_{c1} - t_{cn+1}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{c1} - t_{cn+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (1.13)$$

$\sum_{i=1}^n \delta_i/\lambda_i$  - называется полным тепловым или термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

По формуле (1.13) можно определить температуру на границе соприкосновения двух соседних слоев:

$$\begin{aligned} t_{c2} &= t_{c1} - q \cdot \delta_1/\lambda_1, \\ t_{c3} &= t_{c2} - q \cdot \delta_2/\lambda_2, \\ &\dots \dots \dots \\ t_{cn+1} &= t_{cn} - q \cdot \delta_n/\lambda_n. \end{aligned} \quad (1.14)$$

### 1.3.3 Передача тепла при граничных условиях третьего рода (теплопередача). Коэффициент теплопередачи. Термическое сопротивление теплопроводности, теплоотдачи, теплопередачи

Передача тепла от одной жидкой или газообразной среды к другой через разделяющую их однородную или многослойную стенку любой формы называется теплопередачей.

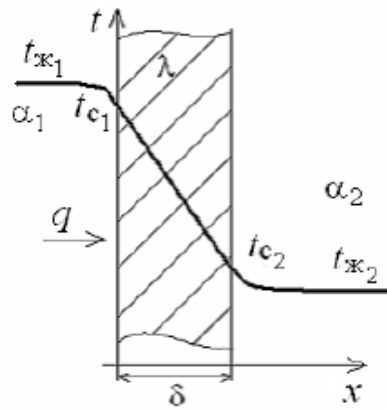


Рисунок 1.4 - Передача тепла при граничных условиях третьего рода

Плоская однородная стенка имеет толщину  $\delta$  (рис. 1.4). Коэффициент теплопроводности  $\lambda$ . Температуры окружающей среды  $t_{ж1}$  и  $t_{ж2}$ . Коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Считаем, что  $t_{ж1}$ ,  $t_{ж2}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  постоянны и не меняются вдоль поверхности. Определим тепловой поток от горячей жидкости к холодной, и температуры на поверхностях стенки.

Удельный тепловой поток от горячей жидкости к стенке определяется из закона Ньютона – Рихмана уравнением

$$q = \alpha_1(t_{ж1} - t_{c1}). \quad (1.15)$$

Через твердую стенку тепловой поток определяется как

$$q = \lambda / \delta (t_{c1} - t_{c2}). \quad (1.16)$$

Этот же тепловой поток передается от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счет теплоотдачи )

$$q = \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2}). \quad (1.17)$$

Сложим правые и левые части формул 1.15 – 1.17 тогда

$$t_{ж1} - t_{ж2} = q \cdot \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

Откуда плотность потока:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \cdot (t_{ж1} - t_{ж2})$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

– коэффициент теплопередачи, характеризующий интенсивность передачи тепла от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку, имеет ту же размерность, что и коэффициент теплоотдачи, численно равен количеству тепла, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени при разности температур между жидкостями в один градус.

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

- величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным термическим сопротивлением теплопередачи.

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1}$$

- термическое сопротивление теплоотдачи от горячей жидкости к поверхности стенки.

$$R_c = \frac{\delta}{\lambda}$$

- термическое сопротивление теплопроводности стенки.

$R_2 = \frac{1}{\alpha_2}$  – термическое сопротивление теплоотдачи от поверхности стенки к холодной жидкости.

Полное термическое сопротивление теплопередачи через многослойную стенку равно

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2},$$

а коэффициент теплопередачи многослойной стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Удельный тепловой поток через многослойную стенку, состоящую из  $n$  слоев,

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \cdot (t_{ж1} - t_{ж2}).$$

Тепловой поток через поверхность стенки:  $Q = q \cdot F = k \cdot \Delta t \cdot F$

Температуры поверхностей однородной стенки

$$t_{c1} = t_{ж1} - \frac{q}{\alpha_1},$$

$$t_{c2} = t_{ж1} - q \cdot \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right) = t_{ж2} + \frac{q}{\alpha_2}.$$

Для многослойной стенки температура на границе соприкосновения двух слоев  $i$  и  $i + 1$  при граничных условиях третьего рода определяется из уравнения:

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q \cdot \left( \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{j=1}^i \frac{\delta_j}{\lambda_j} \right)$$

### 1.3.4 Граничные условия второго и третьего рода

Рассмотрим передачу тепла через однородную и изотропную стенку. На одной ее поверхности заданы граничные условия второго рода в виде  $q_c = const$  при  $x = 0$ ; на другой ее поверхности заданы коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$  и температура окружающей среды  $t_{ж2}$ , то есть граничные условия третьего рода (рис. 1.5). Внутренние источники тепла в стенке отсутствуют. Такая задача сводится к нахождению распределения температуры в стенке и определению температур на ее поверхностях. В силу стационарности теплового режима можно записать следующую систему уравнений:

$$q = \lambda / \delta (t_{c1} - t_{c2}).$$

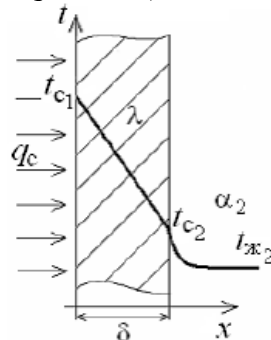


Рисунок 1.5 - Граничные условия второго и третьего рода

$$t_{c2} = t_{жс2} + q_c / \alpha_2$$

$$t_{c1} = t_{c2} + q_c \cdot \frac{\delta}{\lambda} = t_{жс2} + q_c \cdot \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right).$$

## 1.4 Теплопроводность плоской стенки при наличии внутренних источников тепла

### 1.4.1 Плотность объёмного тепловыделения

В ряде случаев внутри объектов исследования могут протекать процессы, в результате которых будет выделяться или поглощаться тепло, например, выделение джоулева тепла при протекании электрического тока; выделение тепла в ТВЭЛах атомных реакторов; выделение или поглощение тепла при протекании химических реакций [2].

Количественно интенсивность объёмного выделения (поглощения) тепла характеризуется плотностью объёмного тепловыделения  $q_v$  – тепловым потоком, выделившимся в единице объема. Величина  $q_v$  также имеет два названия: удельная производительность внутренних источников тепла или объёмная плотность теплового потока.

В зависимости от особенностей изменения величины  $q_v$  в пространстве различают точечные, линейные, поверхностные и объёмные источники тепла.

### 1.4.2 Температурное поле в плоской стенке при наличии тепловыделений

Для стационарного режима дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии источников тепла имеет вид:

$$\nabla^2 t + q_v / \lambda = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (1.19)$$

В одномерном случае (примером является плоская пластина, толщина которой много меньше двух других ее размеров) дифференциальное уравнение теплопроводности (1.18) упрощается и в декартовой системе координат имеет вид

После интегрирования уравнения (1.19) получим:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v x}{\lambda} + C_1; \quad (1.20)$$

или

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (1.21)$$

Постоянные интегрирования определяются в зависимости от условий охлаждения на поверхности пластины.

### 1.4.3 Симметричные условия отвода теплоты от пластины

Рассмотрим длинную пластину, толщина которой  $2\delta$  – величина малая по сравнению с двумя другими размерами (рис. 1.6). Источники равномерно распределены по всему объему и равны  $q_v = \text{const}$ . Заданы постоянные коэффициенты теплоотдачи  $\alpha = \text{const}$  и температура жидкости вдали от пластины  $t_{жс} = \text{const}$ . Благодаря симметричному отводу теплоты температуры обеих поверхностей пластины одинаковы. При указанных условиях температура пластины будет изменяться только вдоль оси  $x$ , направленной нормально к поверхности тела. Температуры на оси пластины  $t_0$  и на ее поверхности  $t_c$  неизвестны. Кроме этих температур, необходимо найти распределение температуры в пластине и количество тепла, отданного в окружающую среду.

Дифференциальное уравнение (1.19) и его решения (1.20, 1.21) и описывает распределение температуры в пластине. Граничные условия на поверхностях пластины при  $x = \pm \delta$  определяются из уравнения теплоотдачи

$$\alpha(t_c - t_{жс}) = \pm\lambda(dt/dx) \quad (1.22)$$

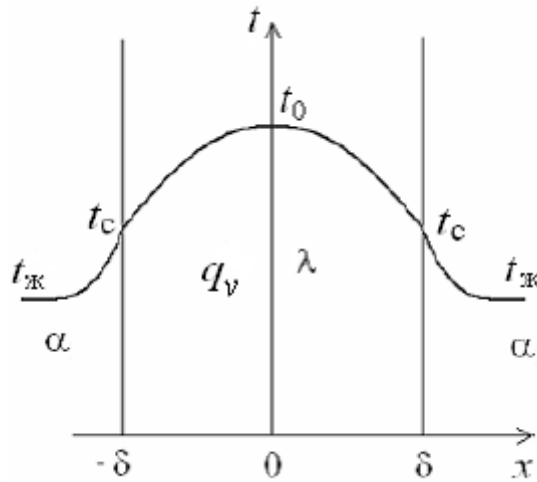


Рисунок 1.6 - Симметричные условия отвода теплоты от пластины

Граничные условия для обеих сторон пластины одинаковые, температурное поле внутри пластины должно быть симметричным относительно плоскости  $x = 0$ . В этой точке плотность теплового потока равна нулю.

Тепло с одинаковой интенсивностью отводится через левую и правую поверхности тела. Одинаково и тепловыделение в обеих половинах пластины. Это означает, что можно далее рассматривать лишь одну половину пластины, например, правую, и записать для нее граничные условия в следующем виде:

$$x = 0: (dt/dx)_{x=0} = 0; \quad x = \delta: -\lambda(dt/dx)_{x=\delta} = \alpha(t_c - t_{жс}) \quad (1.23)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий (1.19). В этом случае уравнение температурного поля определяется по формуле

$$t(x) = t_{жс} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2),$$

из которой следует, что температура в плоской стенке в случае симметричной задачи распределяется по параболическому закону.

В рассматриваемой задаче плотность теплового потока изменяется вдоль оси  $x$  по закону  $q(x) = q_v x$ .

Тепловой поток с единицы поверхности пластины (при  $x = \delta$ )  $q = \alpha(t_c - t_{жс}) = q_v \delta$ , и общее количество тепла, отданное всей поверхностью в единицу времени,

$$Q = qF = q_v \delta 2F_1.$$

Так как  $t_c = t(\delta) = t_{жс} + (q_v \delta)/\alpha$  то  $t(x) = t_c + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2)$ .  
Перепад температур между осью симметрии стенки и ее поверхностью :

$$t_0 - t_c = \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2 = \frac{q}{2\lambda} \delta.$$

Если коэффициент теплопроводности материала стенки является линейной функцией температуры  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ , то уравнение температурной кривой определяется выражением

$$t(x) = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 b}}.$$

#### 1.4.4 Пластина с одной теплоизолированной поверхностью



Одна из поверхностей пластины, теплоизолирована (рис. 1.7), а на другой ее поверхности заданы условия охлаждения: коэффициент теплоотдачи  $\alpha = const$  и температура жидкости вдали от пластины  $t_{ж} = const$ .

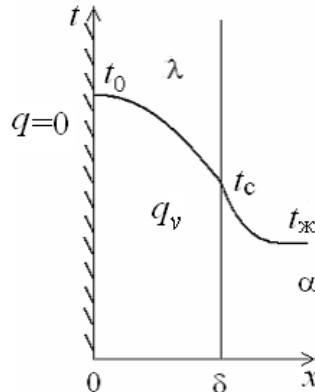


Рисунок 1.7 - Пластина с одной теплоизолированной поверхностью

Источники равномерно распределены по всему объему и равны  $q_v = const$ , толщина пластины  $\delta$ . Используем уравнения для симметрично охлаждаемой пластины. При использовании пластины с одной теплоизолированной поверхностью максимальное значение температуры пластины  $t_0$  будет соответствовать ее левой поверхности, через которую отсутствует поток тепла.

### 1.4.5 Пластина с разными (постоянными) температурами поверхностей.

#### Критерий Померанцева

Длинная пластина, толщина которой  $\delta$  – величина малая по сравнению с двумя другими размерами (рис. 1.8). Источники равномерно распределены по всему объёму и равны  $q_v = const$ . Температуры стенок поддерживаются постоянными: при  $x = 0$   $t = t_{c1}$ ; при  $x = \delta$   $t = t_{c2}$ . Температура пластины изменяется только вдоль оси  $x$ . Необходимо найти распределение температуры в пластине [3].

Используем уравнение 1.19 и его решение 1.21. Постоянные интегрирования находим из новых граничных условий: при  $x = 0$   $t = t_{c1}$ ; при  $x = \delta$   $t = t_{c2}$ . Тогда распределение температуры в пластине описывается уравнением

$$t(x) = t_{c1} + \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} x + \frac{q_v \delta}{2\lambda} x - \frac{q_v}{2\lambda} x^2. \quad (1.24)$$

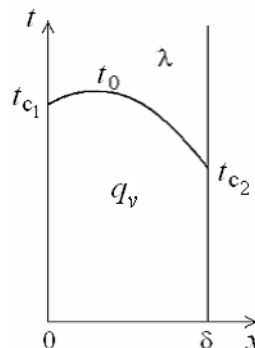


Рисунок 1.8 - Пластина с разными (постоянными) температурами поверхностей  
Преобразуем уравнение 1.24

$$t(x) = t_{c1} - \frac{x}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left( \frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right).$$

Отнимем с обеих частей  $t_{c2}$  получим:

$$t(x) - t_{c2} = t_{c1} - t_{c2} - \frac{x}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}) + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left( \frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right).$$

Разделим правую и левую части на  $(t_{c1} - t_{c2})$ :

$$\Theta = \frac{t(x) - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}} = 1 - \frac{x}{\delta} + \frac{Po}{2} \left( \frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right)$$

$$Po = \frac{q_v \delta^2}{\lambda(t_{c1} - t_{c2})}$$

- число Померанцева, характеризующее отношение мощности внутреннего источника теплоты  $q_v$ , к мощности теплового потока, переносимого в единице объема за счет теплопроводности при перепаде температур  $(t_{c1} - t_{c2})$ .

Обозначим  $X = x/\delta$  как безразмерную координату, тогда

$$1 - X + \frac{Po}{2}(X - X^2) = (1 - X) + X \frac{Po}{2}(1 - X) = (1 - X) \left( 1 + \frac{Po}{2} X \right).$$

Окончательно распределение температуры в безразмерном виде описывается выражением

$$\Theta = (1 - X) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} Po \cdot X \right).$$

В зависимости от величины числа Померанцева распределение температуры может иметь вид выпуклой или вогнутой кривой, причем максимальная температура может лежать либо внутри пластины, либо на одной из ее поверхностей. В случае отсутствия внутренних источников тепла ( $Po = 0$ ).

#### 1.4.6 Несимметричные условия отвода теплоты от пластины

Рассмотрим пластину толщиной  $\delta$  с равномерно распределенными внутренними источниками тепла, условия отвода теплоты от которой различны (рис. 1.9): с одной стороны пластины жидкость с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_1$  и температурой вдали от пластины  $t_{ж1}$ , а с другой стороны – жидкость с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2$  и температурой вдали от пластины  $t_{ж2}$ . Определить распределение температуры в пластине.

При несимметричных условиях отвода теплоты от пластины плоскость, через которую тепловой поток отсутствует, сместится из центра пластины к одной из ее поверхностей в некоторую точку  $x_0$ .

Применим уравнение 1.19 и её решение 1.21, в которых будут разными граничные условия и, следовательно, изменятся значения постоянных интегрирования.

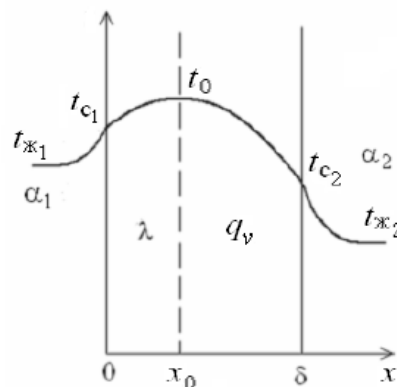


Рисунок 1.9 - Несимметричные условия отвода теплоты от пластины

Граничные условия для правой половины пластины: при  $x = x_0$  плотность теплового потока  $(dt/dx)_{x=x_0}$ ; на поверхности пластины при  $x = \delta$  из уравнения теплоотдачи  $-\lambda(dt/dx)_{x=\delta} = \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2})$

Подставляя значения постоянных интегрирования из таких граничных условий в уравнение (1.21) и выполнив группировку подобных членов, получим распределение температуры в правой части пластины для  $x \leq x_0 \leq \delta$ :

$$t^{\text{прав}}(x) = t_{\text{ж2}} + \frac{q_v}{\alpha_1}(\delta - x_0) - \frac{q_v x_0}{\lambda}(\delta - x) + \frac{q_v}{2\lambda}(\delta^2 - x^2). \quad (1.25)$$

Температура правой поверхности пластины

$$t_{c2} = t(x = \delta) = t_{\text{ж2}} + \frac{q_v}{\alpha_2}(\delta - x_0).$$

Граничные условия для левой половины пластины: при  $x = x_0$   $(dt/dx)_{x=x_0}$ ; на внешней границе при  $x = 0$  из уравнения теплоотдачи  $\lambda(dt/dx)_{x=0} = \alpha_1(t_{c1} - t_{\text{ж1}})$ .

Подставляя значения постоянных интегрирования из данных граничных условий в уравнение (1.21) и выполнив группировку подобных членов, получим распределение температуры в левой части пластины для  $0 \leq x \leq x_0$ :

$$t^{\text{лев}}(x) = t_{\text{ж1}} + \frac{q_v x_0}{\alpha_1} + \frac{q_v x_0}{\lambda}x - \frac{q_v}{2\lambda}x^2. \quad (1.26)$$

Температура левой поверхности пластины

$$t_{c1} = t(x = 0) = t_{\text{ж1}} + \frac{q_v x_0}{\alpha_1}.$$

Для определения координаты  $x_0$  необходимо приравнять решения для правой и левой частей пластины в этой точке  $t^{\text{лев}}(x_0) = t^{\text{прав}}(x_0)$ :

$$x_0 = \frac{\frac{t_{\text{ж2}} - t_{\text{ж1}}}{q_v} + \delta \cdot \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{2\lambda} \right)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Максимальное значение температуры  $t_0 = t(x_0)$  находим по формуле (1.25) или (1.26).

## 1.5 Теплопроводность цилиндрической стенки без внутренних источников тепла

### 1.5.1 Теплопроводность через однослойную цилиндрическую стенку

Рассмотрим однослойную цилиндрическую стенку длиной  $l$ , с внутренним радиусом  $r_1$  и наружным радиусом  $r_2$  (рис. 1.10). Поверхности трубы поддерживаются при постоянных температурах  $t_1$  и  $t_2$ . Температура меняется только в направлении радиуса. Выделим внутри стенки тонкий кольцевой слой радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ , и примем этот элементарный слой как плоскую стенку. По закону Фурье для плоской стенки можно записать следующее уравнение

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\lambda \frac{dt}{dr} 2\pi r l.$$

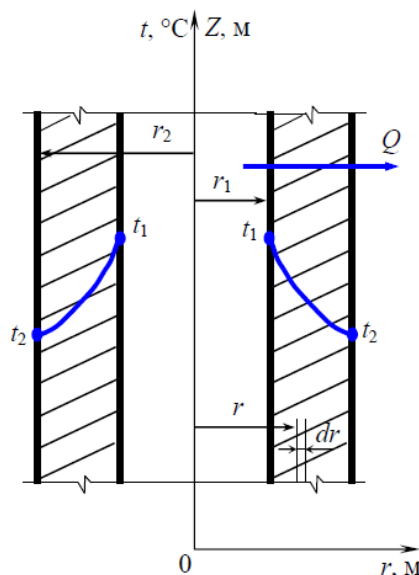


Рисунок 1.10 - Теплопроводность цилиндрической стенки без внутренних источников тепла

Разделяя переменные получим

$$dt = -\frac{Q}{2\pi\lambda l} \cdot \frac{dr}{r}$$

Интегрируя уравнение (1.25) в пределах от  $t_1$  до  $t_2$  и от  $r_1$  до  $r_2$  при  $\lambda = const$ , получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{Q}{2\pi\lambda l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$t_1 - t_2 = \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1.27)$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (1.28)$$

Из уравнения (1.27) следует, что внутри цилиндрической стенки температура изменяется по логарифмической кривой.

Поскольку  $r_1/r_2 = d_1/d_2$ , то уравнение (1.28) можно переписать в виде

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(t_1 - t_2)}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (1.29)$$

Уравнения (1.28) и (1.29) являются выражением закона Фурье для однослойной цилиндрической стенки.

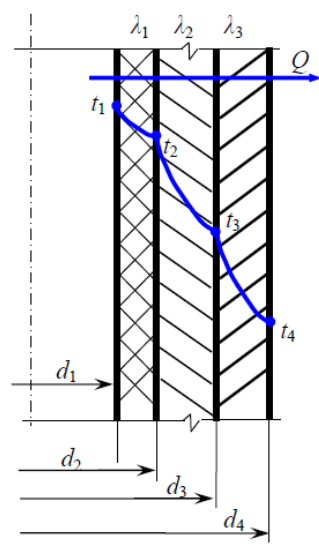
### 1.5.2 Теплопроводность через многослойную цилиндрическую стенку

Цилиндрическая стенка состоит из трех плотно прилегающих друг к другу слоев (рис. 1.11). Температура внутренней поверхности стенки  $t_1$ , а наружной  $t_4$ . Коэффициенты теплопроводности слоев стенки различны и равны  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Диаметры слоев равны соответственно  $d_1, d_2, d_3, d_4$ .

Температура каждого слоя изменяется по логарифмической кривой, а общее изменение температуры происходит по ломаной логарифмической кривой.

При стационарном температурном режиме тепловой поток  $Q$ , проходящий через все слои, одинаков. Значения удельных тепловых потоков изнутри  $q_{вн}$  и снаружи  $q_{н}$  будут

различны, т. к. внутренняя и внешняя поверхности трубы будут различны. Для каждого слоя полный тепловой поток будет равен:



$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{2\pi\lambda_1 l(t_1 - t_2)}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \\ Q = \frac{2\pi\lambda_2 l(t_2 - t_3)}{\ln \frac{d_3}{d_2}} \\ Q = \frac{2\pi\lambda_3 l(t_3 - t_4)}{\ln \frac{d_4}{d_3}} \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Рисунок 1.11 – Теплопроводность многослойной цилиндрической стенки

Рассуждая также как в случае с многослойной плоской стенкой, решаем эти уравнения относительно разности температур и почленно складываем. В результате получим

$$t_1 - t_4 = \frac{Q}{2\pi l} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right) \quad (1.31)$$

$$Q = \frac{2\pi l(t_1 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}} \quad (1.32)$$

Формула (1.32) представляет собой уравнение теплопроводности для трехслойной цилиндрической стенки.

Для многослойной цилиндрической стенки, имеющей  $n$  слоев, уравнение (1.33) можно записать в виде

$$Q = \frac{2\pi l(t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (1.33)$$

где  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя;  
 $d_i, d_{i+1}$  – внутренний и наружный диаметры  $i$ -го слоя.

### 1.5.3 Теплопроводность через шаровую стенку

Полый шар, внутренняя и внешняя поверхности имеют радиусы  $r_1$  и  $r_2$ , соответственно. Источник тепла находится внутри шара. Поверхности шара поддерживаются при постоянных температурах  $t_1$  и  $t_2$ . Температура изменяется только в направлении радиуса (рис. 1.12).

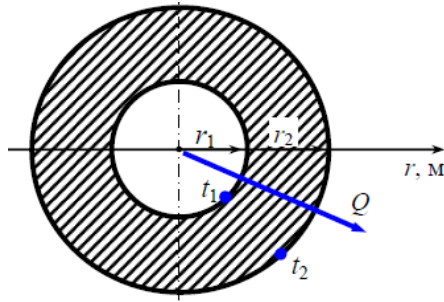


Рисунок 1.12 – Теплопроводность через шаровую стенку

Выделим внутри шара элементарный шаровой слой. Тепловой поток, проходящий через шаровой слой радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ , находим из уравнения Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\lambda \frac{dt}{dr} 4\pi r^2 \quad (1.34)$$

Разделяя переменные, получим:

$$dt = -\frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{dr}{r^2} \quad (1.35)$$

Интегрируя уравнение (1.35) по  $t$  и по  $r$ , постоянные интегрирования определяем из граничных условий: при  $r = r_1$   $t = t_1$ , а при  $r = r_2$   $t = t_2$ .

В результате получим выражение

$$Q = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda(t_1 - t_2)}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) является уравнением теплопроводности для однослойной шаровой стенки. Из этого уравнения видно, что температура в шаровом слое будет изменяться по гиперболической кривой.

## 1.6 Теплопроводность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников тепла

### 1.6.1 Теплопроводность однородного цилиндрического стержня при наличии тепловыделений

Дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат при изменении температуры только от радиуса имеет вид

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (1.37)$$

Это уравнение решается введением новой переменной

$$t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2 \quad (1.38)$$

Значения постоянных интегрирования, а соответственно, зависимость температуры от радиуса будут определяться граничными условиями конкретной задачи.

Рассмотрим круглый цилиндр (рис. 1.13), радиус которого  $r_0$  мал по сравнению с длиной цилиндра. При этих условиях температура будет изменяться только вдоль радиуса. Внутренние источники тепла  $q_v = \text{const}$  равномерно распределены по объему тела, коэффициент теплопроводности равен  $\lambda$ . Заданы постоянная температура окружающей среды  $t_{ж}$  и постоянный по всей поверхности коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ . При этих условиях температура на поверхности цилиндра одинаковая. Как и для пластины, задача

будет одномерной и симметричной. Температуры на оси цилиндрического стержня  $t_0$  и на его поверхности  $t_c$  неизвестны. Кроме этих температур, необходимо найти распределение температуры в стержне и количество тепла, отданного им в окружающую среду.

Граничные условия запишем в следующем виде:

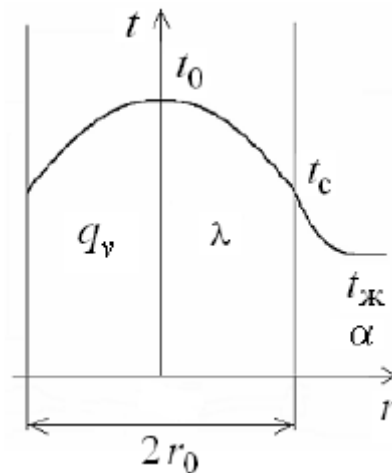


Рисунок 1.13 - Теплопроводность однородного цилиндрического стержня при наличии тепловыделений

Граничные условия запишем в следующем виде:

- а) условие симметрии в центре стержня: при  $r = 0 \quad dt/dr|_{r=0} = 0$ ;
- б) теплоотдача с поверхности: при  $r = r_0 \quad -\lambda(dt/dr)|_{r=r_0} = \alpha(t_c - t_{ж})$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  можно определить, если в уравнение (1.38) подставить граничные условия. Тогда получаем распределение температуры внутри цилиндрического стержня:

$$t(r) = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2).$$

Плотность теплового потока с поверхности цилиндрического стержня

$$q = \alpha \cdot (t_c - t_{ж}) = \frac{q_v r_0}{2}. \quad (1.39)$$

### 1.6.2 Теплопроводность цилиндрической стенки с внутренними источниками тепла

Однородная цилиндрическая стенка (труба) внутренним диаметром  $d_1$  и наружным диаметром  $d_2$  (рис. 1.14) с постоянным коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ . Внутренние источники тепла  $q_v = const$  равномерно распределены по объему тела. Заданы температуры подвижных сред  $t_{ж1}$  и  $t_{ж2}$ , а также постоянные значения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на внутренней и наружной поверхностях трубы. Необходимо определить температуры в цилиндрической стенке, температуры ее поверхностей  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$  и тепловой поток через нее.

Предположим, что длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тогда потерями тепла с торцов трубы можно пренебречь. Дифференциальное уравнение (1.37) и его решение (1.38) будут теми же. Граничные условия и, соответственно, постоянные интегрирования изменятся. Граничные условия будут различными для разных случаев отвода тепла.

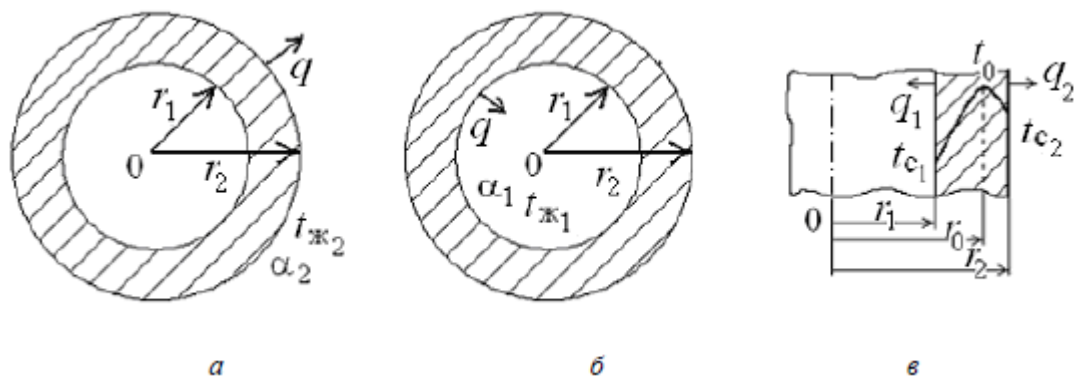


Рисунок 1.14 - Однородная цилиндрическая стенка (труба)

Если тепло отводится только через наружную поверхность (рис. 1.14,а), то граничные условия будут следующими:

при  $r = r_1$   $(dt/dr)_{r=r_1} = 0$        $r = r_2$   $-\lambda(dt/dr)_{r=r_2} = \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2})$ .

Из этих граничных условий определим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в уравнении (1.38) и получим распределение температуры в цилиндрической стенке:

$$t(r) = t_{ж2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2.$$

Температура наружной поверхности цилиндрической стенки

$$t_{c2} = t(r_2) = t_{ж2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].$$

Окончательно, с учетом температуры наружной поверхности

$$t(r) = t_{c2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2. \quad (1.39)$$

Температура внутренней поверхности цилиндрической стенки

$$t_{c1} = t(r_1) = t_{c2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2.$$

Падение температуры в стенке определим из выражения

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2.$$

Удельный тепловой поток с единицы теплоотдающей поверхности

$$q = \alpha_2 \cdot (t_{c2} - t_2) = \frac{q_v \cdot r_2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].$$

Если тепло отводится только через внутреннюю поверхность (рис. 1.14,б), то граничные условия запишем следующим образом:

при  $r = r_2$   $(dt/dr)_{r=r_2} = 0$        $r = r_1$   $\lambda(dt/dr)_{r=r_1} = \alpha_1(t_{c1} - t_{ж1})$ .

Аналогично предыдущему случаю из этих условий определяются соответствующие постоянные интегрирования, и после подстановки их в уравнение (1.38) получаем распределение температуры в цилиндрической стенке при отводе тепла только через внутреннюю поверхность:

$$t(r) = t_{ж1} + \frac{q_v \cdot r_1}{2\alpha_1} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right]$$



Температура внутренней поверхности

$$t_{c1} = t(r = r_1) = t_{ж1} + \frac{q_v \cdot r_1}{2\alpha_1} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]$$

Окончательно, с учетом температуры внутренней поверхности

$$t(r) = t_{c1} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right] \quad (1.40)$$

Тогда температура наружной поверхности будет определяться как

$$t_{c2} = t(r = r_2) = t_{c1} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Перепад температур в цилиндрической стенке

$$t_{c2} - t_{c1} = \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Удельный тепловой поток с единицы теплоотдающей поверхности

$$q = \alpha_1 \cdot (t_{c1} - t_{ж1}) = \frac{q_v \cdot r_1}{2} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right].$$

В случае, если тепло отдается окружающей среде как с внутренней, так и с внешней поверхностей, должен существовать максимум температур внутри стенки (рис. 1.14,в). Изотермическая поверхность с  $r = r_0$ , соответствующая максимальной температуре  $t_0$ , разделяет цилиндрическую стенку на два слоя. Максимальное значение температуры соответствует условию  $dt/dr = 0$  и, следовательно,  $q = 0$ . Таким образом, для решения данной задачи можно использовать уже полученные выше соотношения (1.39) и (1.40), в которых следует заменить на  $r_0$  внутренний и наружный радиусы соответственно:

$$t^{\text{внеш}}(r) = t_{c2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right], \quad (1.41)$$

$$t^{\text{внут}}(r) = t_{c1} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (1.42)$$

Максимальные перепады температур во внешнем и внутреннем слоях:

$$t_0 - t_{c2} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 - 2 \ln \frac{r_2}{r_0} - 1 \right], \quad (1.43)$$

$$t_0 - t_{c1} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_0}{r_1} - 1 \right]. \quad (1.44)$$

Вычитая, соответственно, левые и правые части двух последних уравнений, получаем выражение для перепада температур через цилиндрическую стенку, в котором единственной неизвестной величиной останется координата радиуса цилиндра, для которого тепловой поток равен нулю:

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 - \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_0}{r_2} - 2 \ln \frac{r_0}{r_1} \right].$$

Это уравнение необходимо решить относительно  $r_0$ :

$$r_0^2 = \frac{q_v (r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{q_v \cdot 2 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (1.45)$$

Подставив вычисленное из уравнения (1.45) значение  $r_0$  в выражение (1.43) или (1.44), найдем максимальную температуру  $t_0$  в рассматриваемой стенке. Для определения распределения температуры во внутреннем слое в уравнение (1.42) подставляются значения текущей координаты  $r_1 < r < r_0$ , а для нахождения распределения температуры во внешнем слое в уравнение (1.41) подставляются значения текущей координаты  $r_0 < r < r_2$ .

## 1.7 Интенсификация теплопередачи

### 1.7.1 Упрощённый расчёт через оребрённую стенку

Из уравнения теплопередачи следует, что  $Q = kF\Delta t$ . Поэтому при заданных размерах стенки и температурах жидкостей величиной, определяющей теплопередачу, является коэффициент теплопередачи  $k$ . Так как теплопередача – сложный процесс, то решение интенсификации можно найти только на основе анализа частных составляющих, характеризующих процесс [2,4].

Для тонкой плоской стенки с большим коэффициентом теплопроводности коэффициент теплопередачи обратно пропорционален сумме термических сопротивлений теплоотдачи от ее поверхностей:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \approx k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Из уравнения следует, что коэффициентом теплопроводности не может быть больше самого малого из коэффициентов теплоотдачи. Если значения коэффициентов теплоотдачи значительно отличаются друг от друга, то увеличение большего из них практически не дает увеличения коэффициента теплопередачи. Увеличение же меньшего из них в несколько раз приводит почти к такому же увеличению коэффициента теплопередачи. Пусть коэффициенты теплоотдачи равны  $\alpha_1 = 40 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$  и  $\alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , тогда коэффициент теплопередачи  $k = 39,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ . Увеличим в два раза значение большего коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2 = 10000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , тогда  $k = 39,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ . Увеличим в два раза значение меньшего коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , сохранив первоначальное значение большего коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , тогда  $k = 78,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ .

При передаче тепла через цилиндрическую стенку величина линейных термических сопротивлений теплоотдачи  $1/(\alpha_1 d_1)$  и  $1/(\alpha_2 d_2)$  определяется не только величиной коэффициентов теплоотдачи, но и размерами самих поверхностей. Отсюда следует, что если значение коэффициента теплоотдачи мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить путем увеличения соответствующей поверхности. Например, для плоской стенки одну из ее поверхностей можно увеличить путем оребрения. Последнее обстоятельство и положено в основу интенсификации теплопередачи за счет оребрения. При этом тепловые сопротивления станут обратно пропорциональны произведению коэффициента теплоотдачи на площадь поверхности  $1/(\alpha_1 F_1)$  и  $1/(\alpha_2 F_2)$ .

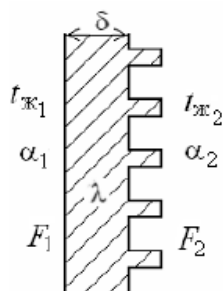


Рисунок 1.15 - Оребренная стенка

Если коэффициенты теплоотдачи различны, например,  $\alpha_1 \ll \alpha_2$ , то следует оребрять поверхность со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1$  до тех пор, пока  $\alpha_1 F_1$  не достигнет значения  $\alpha_2 F_2$ . Дальнейшее увеличение площади поверхности с этой стороны нецелесообразно. Рассмотрим следующий пример (рис. 1.15).

Дана плоская металлическая тонкая стенка, по разные стороны которой находятся жидкие среды с существенно различающимися коэффициентами теплоотдачи  $\alpha_1 = 1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$  и  $\alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ . Увеличим площадь одной из поверхностей за счет ее оребрения. Тогда коэффициент теплопередачи  $k$  через такую стенку будет

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{F_1}{F_2}} \approx \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{F_1}{F_2}}$$

Пусть  $F_1/F_2 = 1$  тогда  $k = 1/(0,001 + 0,1) = 9,9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ .

Пусть  $F_1/F_2 = 1/5$  тогда  $k = 1/(0,001 + 0,1 \cdot 0,2) = 48 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ .

Пусть  $F_1/F_2 = 5$  тогда  $k = 1/(0,001 + 0,1 \cdot 5) \approx 2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ .

В результате расчета получаем, что во втором случае коэффициент теплопередачи увеличился почти в пять раз по сравнению с гладкой стенкой, а в третьем случае – уменьшился.

## 1.7.2 Интенсификация теплопередачи за счет оребрения поверхности.

### Виды ребристых поверхностей

Из закона Фурье следует, что чем больше поверхность теплосъема, тем большее количество теплоты пройдет через нее и рассеется в окружающей среде. Этот факт часто используется при решении вопросов охлаждения двигателей внутреннего сгорания, в холодильных установках, радиоэлектронных устройствах и т. п.

Поверхность тела увеличивается с помощью ребер, например, прямых (рис 1.16, а) и кольцевых (рис. 1.16, б). В поперечном сечении ребра могут иметь профиль самой различной геометрической конфигурации (прямоугольник, круг, треугольник и другие фигуры, в том числе неправильной геометрической формы).

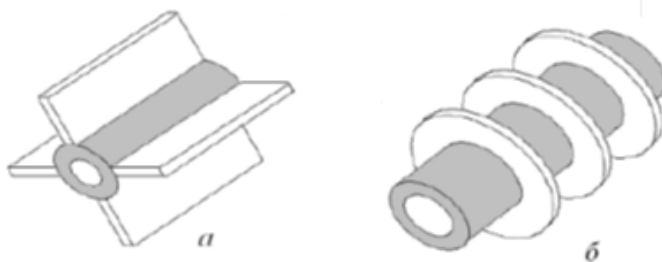


Рисунок 1.16 - Виды ребристых поверхностей

Ребристые поверхности изготавливаются в виде сплошных отливок или отдельных ребер, прикрепленных к поверхности. Как правило, наиболее эффективное оребрение определяется формой, размерами, стоимостью и т. п. Ребристые поверхности для каждой конкретной установки выбирается индивидуально.

Рассмотрим прямое ребро произвольного профиля (рис. 1.17). Считаем, что распределение температуры по толщине ребра равномерное, т. е. температура изменяется только по координате  $x$ . В этом случае количество теплоты, проходящее через сечение ребра, может быть подсчитано по закону Фурье

$$Q_1 = -2L\lambda f(x) dt/dx$$

где  $f(x)$  – половина толщины ребра в сечении  $a'b'c'd'$ .

При стационарном режиме такое же количество теплоты будет отдаваться в окружающую среду конвекцией. Если положить, что элементарная поверхность теплообмена равна  $2Ldx$ , то тепловые потери могут быть определены по закону Ньютона – Рихмана (1.12):

$$dQ_2 = 2L\alpha(t - t_0)dx ,$$

где  $t_0$  – температура окружающей ребро среды.

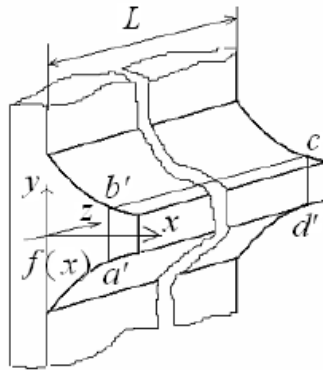


Рисунок 1.17 - Прямое ребро произвольного профиля

Дифференциальное уравнение, характеризующее теплообмен в прямом ребре произвольного профиля, запишем из равенства нулю суммы количеств теплоты  $dQ_1$  и  $dQ_2$ :

$$-2L\lambda \cdot \frac{d}{dx} \left[ f(x) \frac{dt}{dx} \right] \cdot dx + 2L\alpha(t - t_0) \cdot dx = 0,$$

$$f(x) \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} \frac{dt}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda} (t - t_0) = 0.$$

(1.46)

## 1.8 Теплопроводность при нестационарном режиме

### 1.8.1 Общие закономерности нестационарных процессов

Рассмотрим процессы переноса теплоты за счет теплопроводности при отсутствии внутренних источников теплоты, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени.

Такие процессы теплопроводности, когда поле температуры в теле изменяется не только в пространстве, но и во времени, называют нестационарными. Они имеют место при нагревании (охлаждении) различных изделий, производстве стекла, обжиге кирпича, вулканизации резины, пуске и остановки различных теплообменных устройств, энергетических агрегатов и т. д.

Среди практических задач нестационарной теплопроводности важнейшее значение имеют две группы процессов:

- а) тело стремится к тепловому равновесию;
- б) температура тела претерпевает периодические изменения.

К первой группе относятся процессы прогрева или охлаждения тел, помещенных в среду с заданным тепловым состоянием, например, прогрев болванки в печи, охлаждение металлических и неметаллических деталей и т. п.

Ко второй группе относятся процессы в периодически действующих подогревателях, например, тепловой процесс регенераторов, насадка которых то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом.

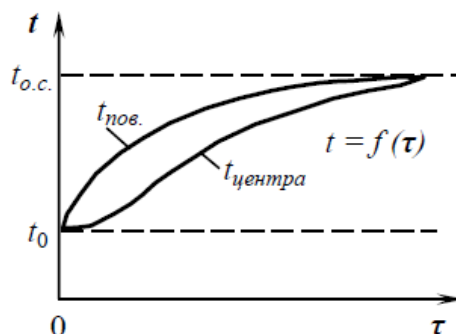


Рисунок 1.18 – Характер изменения температуры тела во времени

На рис. 1.18 показаны кривые, полученные при нагревании однородного твердого тела в среде с постоянной температурой  $t_{o.c.}$ . По мере нагрева температура в каждой точке асимптотически приближается к температуре нагревающей среды. Наиболее быстро изменяется температура точек, лежащих вблизи поверхности тела  $t_{нов.}$ . С увеличением времени прогрева эта разность будет уменьшаться, и теоретически через достаточно большой отрезок времени она будет равна нулю.

В условиях передачи теплоты через стенку при внезапном изменении температуры одного из теплоносителей не вся теплота будет передаваться через стенку: часть ее уйдет на изменение внутренней энергии самой стенки (ее температуры), и только при наступлении стационарного процесса вся теплота будет передаваться через стенку от одной жидкости к другой.

Приведенные примеры указывают на то, что нестационарные тепловые процессы всегда связаны с изменением внутренней энергии, или энтальпии, вещества. Передачу теплоты при нестационарном режиме можно определить, если найти закономерности изменения температурного поля и теплового потока в пространстве и во времени:

$$\begin{aligned} t &= f_1(x, y, z, \tau) \\ Q &= f_2(x, y, z, \tau) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Эти зависимости могут быть найдены из дифференциального уравнения теплопроводности

$$dt/d\tau = \alpha(d^2t/dx^2 + d^2t/dy^2 + d^2t/dz^2). \quad (1.48)$$

Уравнение (1.48) необходимо дополнить условиями однозначности в виде:

- 1 геометрических условий - задают форму и размеры рассматриваемого тела  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$ ;
- 2 физических условий – коэффициент теплопроводности стенки тела  $\lambda_{cm} = const$ , теплоемкость тела  $c = const$ , плотность  $\rho = const$ ;
- 3 начальных условий – температура рассматриваемого тела в начальный момент времени при  $\tau = 0$  распределена равномерно, т. е.  $t_0 = const$ .
4. Граничных условий III рода – задают закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой в виде следующего уравнения:

$$(dt/dn)_{нов.} = -\alpha/\lambda_{cm}(t_{нов.} - t_{o.c.}) \quad (1.49)$$

где  $(dt/dn)_{нов.}$  – температурный градиент по поверхности тела;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи между поверхностью тела и окружающей средой  
Вт/(м<sup>2</sup>°С);

-  $t_{нов.}$ ,  $t_{o.c.}$  – температуры поверхности тела и окружающей среды, °С;

Решение дифференциального уравнения теплопроводности (1.48) совместно с условиями однозначности дает уравнение температурного поля следующего вида:

$$t = f(\alpha, \lambda_{cm}, \tau, x, y, z, a, t_0, t_{o.c.}, l_0, l_1, l_2, \dots, l_n) \quad (1.50)$$

Из зависимости (1.50) видно, что температура зависит от большого числа переменных и постоянных параметров. При анализе уравнения (1.50) переменные можно сгруппировать в безразмерные комплексы:

$al/\lambda_{cm} = Bi$  – критерий Био (характеризует неравномерность температурного поля;

$a\tau/l^2 = Fo$  – критерий Фурье (характеризует нестационарность процессов);

$x/l$  – безразмерная координата;

$(t - t_{o.c})/(t_0 - t_{o.c}) = \Theta/\Theta_0$  – безразмерная температура;

$Q_\tau/Q_0$  – безразмерное количество теплоты ( $Q_\tau$  – количество теплоты, переданное телу или телом за время  $\tau$ ,  $Q_0$  – начальная внутренняя энергия тела).

Если ввести безразмерные комплексы в исходные зависимости (1.47), то получим

$$\begin{cases} \frac{\theta}{\theta_0} = f_1(Fo, Bi, \frac{x}{l}) \\ \frac{Q_\tau}{Q_0} = f_2(Fo, Bi) \end{cases} \quad (1.51)$$

Решение данных уравнений сложная математическая задача. Подробные решения трех задач нестационарной теплопроводности для неограниченной пластины, цилиндра бесконечной длины и шара приводятся в специальных курсах по теплообмену [5 - 8]. В пп. 1.7.1 настоящего пособия приведем расчетные зависимости для случая охлаждения неограниченной пластины. Изучив метод решения задачи для пластины, можно понять принцип решения задач и для тел другой геометрической конфигурации.

### 1.8.2 Охлаждение неограниченной пластины при нестационарном режиме

Рассмотрим охлаждение плоскопараллельной пластины толщиной  $2\delta$  (характерный размер  $l = \delta$ ). Размеры пластины в направлении осей  $Y$  и  $Z$  бесконечно велики (рис. 1.19). С обеих сторон пластина омывается жидкостью с температурой  $t_{o.c.}$ , причем коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  для обеих поверхностей имеет одинаковое и постоянное значение.

В начальный момент времени при  $\tau = 0$  пластина имеет во всех своих точках постоянную температуру  $t_0 = const$ , поэтому избыточная температура  $\theta_0 = t_0 - t_{o.c.}$  будет также постоянной для всех точек тела. Кроме того, заданы коэффициент теплопроводности  $\lambda_{ст}$ , плотность тела  $\rho$  и его теплоемкость  $C$ , величины которых задаём постоянными. Так как пластина безгранична как по высоте, так и по ширине, то дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (1.52)$$

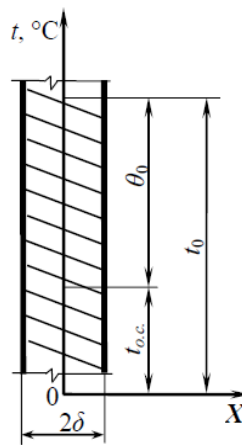


Рисунок 1.19 – Неограниченная пластина

Начальное условие при  $\tau = 0$   $\theta = \theta_0$ .

Граничное условие при  $x = \pm\delta$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=\pm \delta} = \pm \frac{\alpha \theta_n}{\lambda_{cm}}, \quad (1.53)$$

где  $\theta_n$  – избыточная температура поверхности пластины

Для аналитического решения уравнения (1.52) совместно с условиями однозначности используют метод разделения переменных. Решение ищется в виде произведения двух функций, из которых одна является функцией только  $\tau$ , а другая – только  $x$ :

$$\theta = \theta(x, \tau) = \varphi(\tau) \cdot \psi(x) \quad (1.54)$$

После подстановки выражения (1.54) в дифференциальное уравнение (1.52)

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \psi(x) = a \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \varphi(\tau) \quad \text{или} \quad \varphi'(\tau) \cdot \psi(x) = a \cdot \psi''(x) \cdot \varphi(\tau). \quad (1.55)$$

получим

В уравнении (1.55) разделим переменные и запишем:

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a \cdot \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}. \quad (1.56)$$

Решение дифференциального уравнения (1.56) может быть представлено в виде

$$\theta_{x,\tau} = \frac{\theta}{\theta_0} = \sum_{i=1}^n \frac{2 \sin \mu_i}{i \mu_i + \sin \mu_i \cos \mu_i} \cos\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) \cdot e^{-\mu_i^2 Fo},$$

где  $\mu_i$  – промежуточная переменная, которая находится из уравнения

$$ctg \mu - \frac{\mu}{Bi} = 0. \quad (1.57)$$

Из уравнения (1.57) следует, что при каждом значении числа  $Bi$  существует бесконечное множество решений. Наиболее просто уравнение (1.57) можно решить графическим способом.

Обозначим левую часть уравнения (1.57) через  $y_1 = ctg \mu$ , а правую - через  $y_2 = \mu / Bi$ . Пересечение котангенсоиды  $y_1$  с прямой  $y_2$  дает нам значение корней характеристического уравнения, т. е.  $\mu_i$  (рис. 1.20).

Из рис. 1.20 следует, что мы имеем бесконечное множество значений величины  $\mu_i$ , причем каждое последующее значение больше предыдущего  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_i < \dots$ .

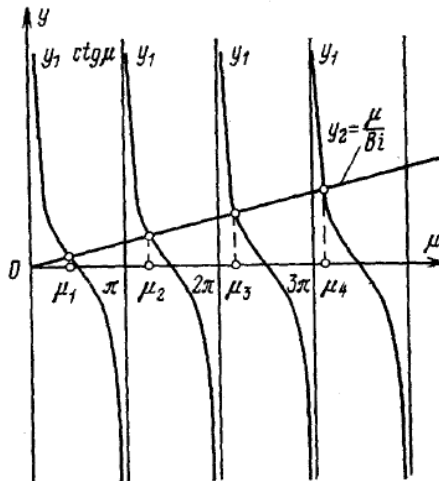


Рисунок 1.20 – Графики функций  $y_1$  и  $y_2$

Таким образом, уравнение температурного поля (1.56) удовлетворяет исходному уравнению теплопроводности (1.52) при любом значении  $\mu_i$ . С одной стороны, из физических соображений ясно, что температура не может иметь множество значений в определенной точке в данный момент времени. С другой стороны, не ясно, какое значение  $\mu_i$  нужно выбрать.

Известно, что если частные решения линейного дифференциального уравнения сложить, то полученная сумма также будет решением этого дифференциального уравнения.

Следовательно, значения  $\mu_i$  нужно использовать в совокупности, поэтому в формуле (1.56) присутствует знак суммы. В инженерных расчетах можно ограничиться первыми тремя-четырьмя значениями  $\mu_i$ .

Важно отметить, что каждому значению числа  $Bi$  отвечает своя совокупность корней уравнения (1.57). Первые четыре корня уравнения (1.57) приведены в табл. 1.1 для различных значений числа  $Bi$

При  $Bi \rightarrow \infty$  прямая  $y_2 = \mu/Bi$  совпадает с осью абсцисс, и корни уравнения будут равны:  $\mu_1 = \pi/2$ ;  $\mu_2 = (3/2)\pi$ ; ...,  $\mu_n = (2n-1)(\pi/2)$

При  $Bi \rightarrow 0$  прямая  $y_2 = \mu/Bi$  совпадает с осью ординат, и тангенс угла наклона прямой стремится к бесконечности, при этом корни уравнения (1.57) будут равны:  $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = \pi$ ;  $\mu_3 = 2\pi$ ; ...,  $\mu_n = (n-1)\pi$

В результате методика решения задачи теплопроводности при нестационарном режиме сводится к следующему. Сначала вычисляют значения критериев  $Bi$  и  $Fo$ , затем по табл. 1.1 определяют значения  $\mu_i$  и по формуле (1.56) рассчитывают отношение  $\Theta = \theta/\theta_0$ , из которого определяют искомую температуру  $t$ .

Таблица 1.1 - Значения  $\mu_i$  для неограниченной пластины

$Bi$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$Bi$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$
0	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832
0,6	0,7051	3,2304	6,3770	9,4879	60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	$\infty$	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956

### 1.8.3 Частные случаи распределения температурного поля внутри неограниченной пластины

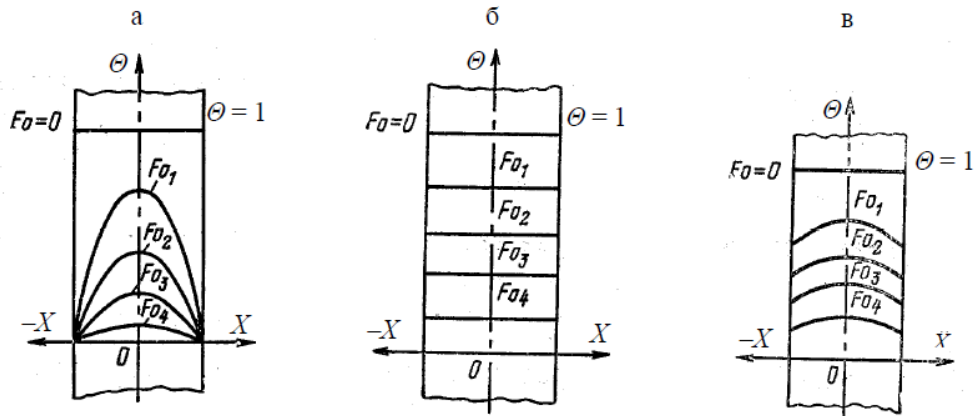
Рассмотрим частные случаи распределения температурного поля внутри неограниченной пластины.

1 Очень большие значения числа  $Bi$ . Если  $Bi \rightarrow \infty$ , то температура поверхности пластины сразу становится равной температуре окружающей среды, в которую помещена пластина (см. рис. 1.21,а). В этом случае при заданных физических параметрах и толщине пластины коэффициент теплоотдачи  $\alpha \rightarrow \infty$ , т. е. имеет место большая интенсивность



отвода теплоты от поверхности, поэтому процесс охлаждения определяется главным образом физическими свойствами и размерами тела.

2 Очень малые значения числа  $Bi$  ( $Bi < 0,1$ ). Малые значения числа  $Bi$  могут иметь место при малых размерах толщины пластины, при больших значениях коэффициента теплопроводности  $\lambda$  и малых значениях коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . При малых числах  $Bi$  температура на поверхности пластины незначительно отличается от температуры на оси. Это указывает на то, что температура по толщине пластины распределяется равномерно, и кривая температур остается почти параллельной оси  $X$  для любого момента времени (рис. 1.21,б). В рассматриваемом случае процесс нагрева и охлаждения тела определяется интенсивностью теплоотдачи на поверхности пластины. Иначе говоря, процесс выравнивания температуры в пластине происходит существенно интенсивнее, чем отвод теплоты с поверхности.



: а –  $Bi \rightarrow \infty$ , б –  $Bi < 0,1$ , в –  $0,1 \leq Bi < 100$ , для всех случаев  $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$

Рисунок 1.21 - Распределение температуры при охлаждении неограниченной пластины

3 Число  $Bi$  находится в пределах  $0,1 \leq Bi < 100$ . В рассматриваемом случае есть функция  $Bi$ , т. е. зависит от толщины пластины. Температурные кривые для любого момента времени будут выглядеть, как показано на рис. 1.21,в. В этом случае интенсивность процесса охлаждения определяется как внутренним, так и внешним термическим сопротивлением.

Для облегчения инженерных расчетов построены графические зависимости вида

$$\frac{\theta_{нов.}}{\theta_0} = \frac{t_{нов.} - t_{o.c.}}{t_0 - t_{o.c.}} = f_1\left(\frac{\alpha l}{\lambda_{cm}}; \frac{\alpha \tau}{l^2}\right) = f_1(Bi, Fo), \quad (1.58)$$

$$\frac{\theta_y}{\theta_0} = \frac{t_y - t_{o.c.}}{t_0 - t_{o.c.}} = f_2\left(\frac{\alpha l}{\lambda_{cm}}; \frac{\alpha \tau}{l^2}\right) = f_2(Bi, Fo), \quad (1.59)$$

$$\frac{Q_\tau}{Q_0} = f_3(Bi, Fo). \quad (1.60)$$

В формулах (1.58) – (1.60):  $t_{нов.}$  – температура поверхности пластины;  $t_y$  – температура центральной плоскости пластины;  $Q_\tau$  – количество теплоты, переданной в окружающую среду за время  $\tau$ . Эти зависимости приводятся в специальной литературе [5–8] в виде графиков или таблиц.

## Глава 2 Конвективный теплообмен

### 2.1 Основные понятия

Конвекцией называют процесс переноса тепла микрочастицами газа и жидкости. Поэтому конвекция возможна лишь в среде, частицы которой могут легко перемещаться. Конвективным называют теплообмен, обусловленный совместным действием конвективного и молекулярного переноса тепла. Конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью, которая отделяет её от другой среды (твёрдого тела жидкости или газа) называют теплоотдачей.

В качестве теплоносителей используются: вода, воздух, водяной пар, минеральные масла, нефть, органические жидкости, ртуть, расплавленные металлы. В зависимости от физических свойств теплоносителей процессы тепломассообмена протекают различно. Наиболее часто используется вода, поскольку она широко распространена, имеет стабильный химический состав, нетоксична, обладает хорошей теплоемкостью.

Большое влияние на теплообмен оказывают следующие физические свойства теплоносителей:

- коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , Вт/(м·°С);
- удельная теплоемкость  $c$ , кДж/(кг·К);
- плотность  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>;
- коэффициент температуропроводности,  $a$ , м<sup>2</sup>/с;
- коэффициенты динамической  $\mu$ , Па·с, и кинематической  $\nu$ , м<sup>2</sup>/с, вязкости.

Эти параметры для каждого вещества имеют определенные значения и являются функцией температуры, а некоторые из них – и давления.

В исследованиях конвективного теплообмена большое значение имеет вязкость жидкости.

Все реальные жидкости обладают вязкостью. Между частицами или слоями, движущимися с различными скоростями, всегда возникает сила внутреннего трения (касательное усилие), ускоряющая движение более медленного слоя и тормозящая движение более быстрого. Чем больше вязкость жидкости, тем меньше ее текучесть. Вязкость капельных жидкостей с увеличением температуры уменьшается и почти не зависит от давления. У газов с увеличением температуры и давления вязкость увеличивается. Вязкость идеальных газов не зависит от давления.

Конвективный теплообмен также зависит от движения жидкости, которое бывает свободным и вынужденным.

**Свободное движение жидкости.** Свободное тепловое движение возникает в неравномерно прогретой среде, точнее в жидкости, где имеются области с направленным вниз градиентом температур. В этом случае некоторые слои жидкости имеют более высокие температуры, чем слои, находящиеся над ними и поэтому вследствие теплового расширения возникает разность плотностей, что приводит к всплыванию более плотных элементов жидкости. Возникающее таким образом свободное движение называют естественной или тепловой конвекцией. Так, например, теплообмен между внутренним и внешним стёклами оконной рамы осуществляется естественной конвекцией.

**Вынужденное движение.** Вынужденное движение жидкости обусловлено действием посторонних возбудителей (вентиляторов, насосов и т. п.). С их помощью можно создавать большие скорости движения среды или изменять их в широких пределах и тем самым регулировать интенсивность теплообмена. Движение может быть ламинарным или турбулентным.

При ламинарном течении частицы жидкости движутся не перемешиваясь. Перенос тепла по нормали к направлению течения осуществляется теплопроводностью. Ввиду того, что теплопроводность жидкости весьма мала, интенсивность теплообмена при ламинарном течении невелика.

При турбулентном течении тепло внутри потока распространяется как теплопроводностью, так и перемешиванием почти всей массы жидкости, за исключением вязкого подслоя. Теплообмен при турбулентном течении отличается большей интенсивностью, чем при ламинарном течении.

Формы и размеры теплоотдающей поверхности существенно влияют на теплоотдачу. Из любых простых форм тела (трубы, плиты и т.д.) можно составить большое количество теплоотдающих поверхностей. Каждая поверхность создаёт свои специфические условия движения теплоносителя и теплоотдачи.

**Два режима течения жидкости.** Осборн Рейнольдс в конце XIX века методом окрашивания струй установил, что существуют два режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный.

Ламинарным (послойным) называется режим течения, когда силы вязкости соизмеримы с силами инерции и для которого характерно отсутствие обмена частиц между слоями (перемешивание жидкости по сечению потока), т.е. доля частицдвигающихся в поперечном направлении составляет не более 1...3% от общего числа частиц.

Турбулентным называется режим течения, когда силы инерции преобладают над силами вязкости и для которого характерен интенсивный обмен частиц между слоями (более 90% от общего числа).

Существует два вида движения жидкости напорное и безнапорное.

Напорным называется движение без свободной поверхности, т.е. когда жидкость занимает весь внутренний объём трубопровода или движение под действием перепада давления (например, движение воды в системе водоснабжения, движение теплоносителя в системах теплоснабжения).

Безнапорным называется движение со свободной поверхностью или движение под действием силы тяжести (например, движение воды в реке).

На рис.2.1,а приведена принципиальная схема опыта Рейнольдса. Резервуар 2 заполнен жидкостью, уровень которой поддерживается постоянным. К резервуару присоединена стеклянная трубка 3, снабжённая краном 4, регулирующим скорость движения жидкости. Для того чтобы наблюдать характер потока в трубке 3, в неё по трубке 1 вводят подкрашенную жидкость с теми же физическими свойствами, что и в сосуде. При этом скорость движения подкрашенной струйки должна быть близка к скорости потока в трубке 3.

При небольших скоростях потока в трубке 3 подкрашенная струйка движется. Не смешиваясь с основной массой жидкости, в виде отчётливо выражено тонкой нити (2.1,б). При этом поток устойчиво движется в трубке параллельными несмешивающимися струйками или слоями. Такое движение жидкости, при котором возможно существование стационарных траекторий её частиц, называют ламинарным или слоистым.

С увеличением скорости потока выше определённого значения течение жидкости в трубке скачкообразно меняет свой характер. При этом окрашенная струйка теряет форму прямой нити, принимает волнообразные очертания и, наконец, полностью размывается. Движение становится беспорядочным и поток всё время перемешивается (рис.2.1,в).

Движение жидкости с хаотично изменяющимися во времени траекториями частиц, при котором в потоке возникают нерегулярные пульсации скорости, давления и других параметров называют турбулентным движением.

Рейнольдс в своих опытах изменял не только скорость, но и диаметр трубопровода и вязкость жидкостей (путём её охлаждения или подогрева). При этом он установил, что ламинарный режим тем легче осуществить, чем:

- 1 Меньше скорость движения жидкости  $v$ ;
- 2 Меньше диаметр трубы  $d$  по которой течёт жидкость;
- 3 Больше динамическая вязкость жидкости  $\mu$ ;
- 4 Меньше её плотность  $\rho$ .

Турбулентному режиму соответствует:

- 1 Большие скорости движения жидкости;
- 2 Большие диаметры труб;
- 3 Большая плотность;

## 4 Малая вязкость.

Из перечисленных изменяемых величин Рейнольдс составил безразмерный комплекс

$$Re = vd\rho/\mu, \quad (2.1)$$

который является очень важной динамической характеристикой движения вязкой жидкости.

Величину  $Re$  называют числом Рейнольдса.

Если ввести кинематическую вязкость  $\nu = \mu/\rho$ , то формула (2.1) примет вид

$$Re = vd/\nu. \quad (2.2)$$

Выразив диаметр трубы  $d$  через гидравлический радиус ( $d=4R$ ) получим

$$Re = 4\nu R/\nu. \quad (2.3)$$

По формуле (2.3) можно вычислить число Рейнольдса для потока любого сечения. Режим течения определяется числом Рейнольдса и не зависит от величин  $\nu, d, \mu$ , и  $\rho$  в отдельности. Существуют значение числа Рейнольдса, которое называют критическим  $Re_{кр}$ . При  $Re < Re_{кр}$  течение ламинарное, а при  $Re > Re_{кр}$  – турбулентное. Точнее, в каждом конкретном случае существует некоторый узкий диапазон значений чисел Рейнольдса, которые можно рассматривать как критические. При критических значениях числа Рейнольдса и происходит смена режимов движения жидкости (эту смену можно считать скачкообразной, так как диапазон  $Re_{кр}$  узок). Опытами установлено, что для напорного движения жидкости в цилиндрических трубах круглого сечения  $Re_{кр} \approx 2300$ .

Однако на значение  $Re_{кр}$  оказывают влияние различные возмущения, возникающие в потоке на входе его в трубу, а также возмущения от различных запорных устройств, встречающихся на пути потока (клапанов, кранов, переходных камер и т.д.).

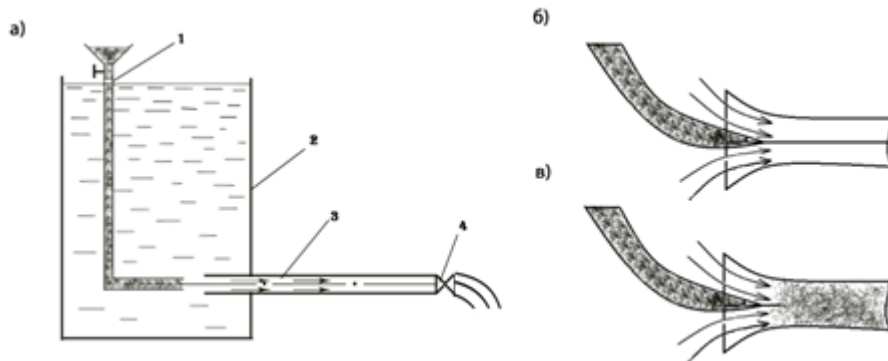


Рисунок 2.1 - Опыт Рейнольдса

Путём тщательного устранения источников возмущения при течении в круглых трубах удавалось значительно повысить  $Re_{кр}$ . При этом созданное ламинарное течение становится неустойчивым и при незначительных возмущениях переходило в турбулентное. Для условий, которые обычно наблюдаются на практике, поток в трубах турбулентный тогда, когда число  $Re$  превышает 2300.

Дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера) может быть получено из дифференциального уравнения равновесия той же жидкости, если, согласно принципу Д'Аламбера, к действующим силам присоединить силы инерции, т.е.

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp + \frac{\rho}{2} dv^2$$

где  $v$  – скорость движения частицы жидкости, м<sup>2</sup>/с.

Подставляя единицы отдельных величин в число  $Re$ , легко убедиться, что оно является величиной безразмерной.

При значениях  $Re < 2\ 300$  поток жидкости в трубе остается ламинарным, при значениях  $Re > 10\ 000$  поток жидкости становится турбулентным. Ламинарный поток является устойчивым только в докритической области (до  $Re < 2300$ ). При некоторых специальных мерах предосторожности ламинарное движение можно наблюдать при числах  $Re$ , значительно превышающих критическое. Однако при  $2300 \leq Re \leq 10\ 000$  режим движения является неустойчивым и при малейшем возмущении поток переходит из

ламинарного в турбулентный, такой неустойчивый режим еще называют переходным. Характер движения жидкости влияет на интенсивность передачи теплоты. При ламинарном режиме и отсутствии естественной конвекции теплота в перпендикулярном стенке направлении передается только теплопроводностью.

Количество этой теплоты зависит от физических свойств жидкости, геометрических размеров, формы поверхности канала и почти не зависит от скорости. При турбулентном движении жидкости перенос теплоты наряду с теплопроводностью осуществляется перпендикулярным поверхности канала перемещением частиц, т. е. конвекцией.

## 2.2 Понятие о пограничном слое

Теоретическое рассмотрение, задач конвективного теплообмена основывается на использовании теории пограничного слоя, созданной Л. Прандтлем в начале XX столетия (1904 г.). Рассмотрим процесс продольного омывания какого-либо тела безграничным потоком жидкости с постоянной скоростью течения  $w_0$  (рис. 2.2). Вследствие влияния сил трения в непосредственной близости от поверхности тела скорость течения должна очень быстро падать до нуля. Тонкий слой жидкости вблизи поверхности тела, в котором происходит изменение скорости жидкости от значения скорости невозмущенного потока вдали от стенки до нуля, непосредственно на стенке, называется гидродинамическим пограничным слоем (рис. 2.2). Толщина этого слоя  $\delta$  возрастает вдоль по потоку. С увеличением скорости потока толщина гидродинамического пограничного слоя уменьшается вследствие сдувания его потоком. Напротив, с увеличением вязкости толщина гидродинамического слоя увеличивается.

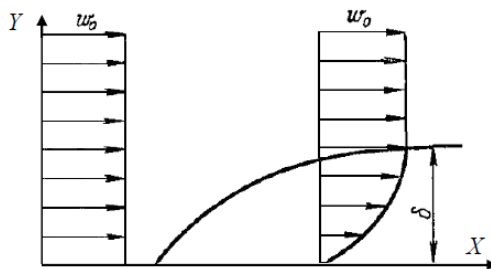


Рисунок 2.2 - Гидродинамический пограничный слой

Течение в гидродинамическом пограничном слое может быть как турбулентным 1, так и ламинарным 2 (рис. 2.3). В зависимости от характера течения жидкости гидродинамический пограничный слой также бывает ламинарным и турбулентным с соответствующей толщиной ( $\delta_l$  и  $\delta_{тур}$ ).

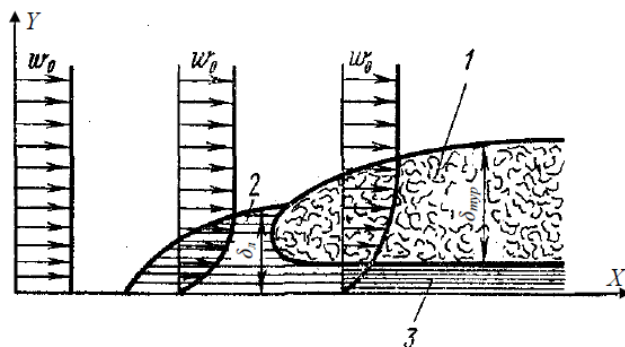


Рисунок 2.3 - Ламинарный и турбулентный пограничные слои

Необходимо отметить, что в случае турбулентного гидродинамического пограничного слоя непосредственно у стенки имеется очень тонкий слой жидкости, движение в котором имеет ламинарный характер. Этот слой называют ламинарным подслоем 3.

Если температуры стенки и жидкости неодинаковы, то вблизи стенки образуется тепловой пограничный слой, в котором происходит изменение температуры жидкости (рис.

2.4, а). Вне пограничного слоя температура жидкости постоянна и равна  $t_0$ . В общем случае толщины теплового и гидродинамического слоев могут не совпадать (рис. 2.4, б).

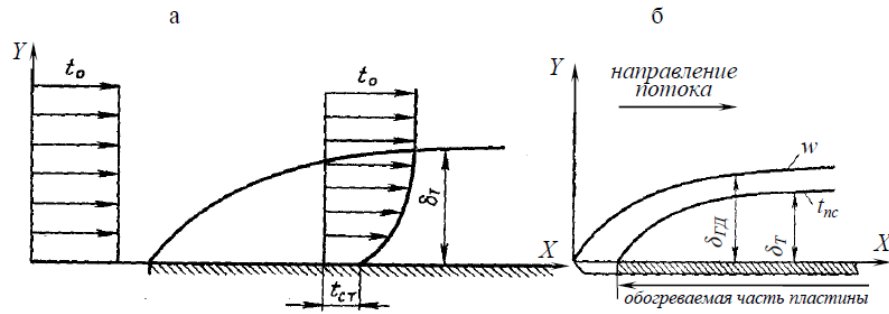


Рисунок 2.4 - Тепловой пограничный слой (а) и соотношение толщин теплового и гидродинамического пограничных слоев (б)

Соотношение толщин гидродинамического и теплового пограничных слоев различны. Например, для большинства жидкостей толщина гидродинамического пограничного слоя больше толщины теплового пограничного слоя ( $\delta_{гд} > \delta_t$ ). Для газов толщины слоев приблизительно одинаковы ( $\delta_{гд} = \delta_t$ ). Для жидких металлов тепловой пограничный слой проникает в область динамического невозмущенного потока ( $\delta_{гд} < \delta_t$ ).

Механизм и интенсивность переноса теплоты зависят от характера движения жидкости в пограничном слое. При распространении теплоты в направлении, перпендикулярном направлению движения потока жидкости, основные препятствия представляют ламинарный пограничный слой и ламинарный подслой, в которых теплообмен происходит главным образом за счет теплопроводности, т. е. медленно. Однако у внешней границы слоя, где температура по нормали к стенке меняется незначительно, преобладает перенос теплоты конвекцией вдоль стенки.

### 2.3 Уравнение Ньютона-Рихмана. Коэффициент теплоотдачи

Из многих видов конвективного теплообмена выделяют часто встречающийся случай, когда теплотой обмениваются поверхность твердого тела и жидкость, движущаяся у этой поверхности (рис. 2.5). Такой вид конвективного теплообмена называют теплоотдачей.

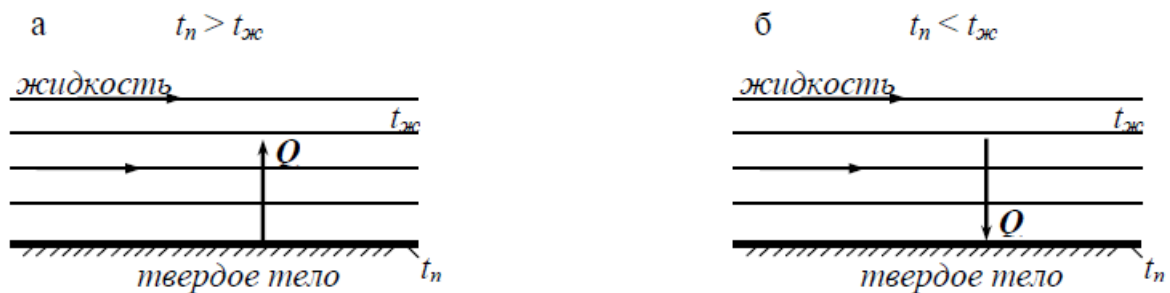


Рисунок 2.5 - Теплоотдача от поверхности тела к жидкости (а) и от жидкости к поверхности твердого тела (б)

Процесс теплоотдачи (рис. 2.5, а) описывается уравнением Ньютона-Рихмана, или уравнением теплоотдачи:

$$Q = \alpha(t_{нов.} - t_{ж})F \quad (2.4)$$

где  $Q$  – тепловой поток, Вт;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);

$t_n, t_{ж}$  – температуры поверхности твердого тела и жидкости, °С;

$F$  – площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>.

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и жидкостью. По физическому смыслу  $\alpha$  представляет собой тепловой

поток, проходящий через  $1 \text{ м}^2$  поверхности при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой в 1 градус.

В общем случае коэффициент теплоотдачи является функцией физических параметров жидкости, характера течения жидкости, скорости движения жидкости, формы и размеров тела и т. д. Математически эта зависимость может быть представлена в виде

$$\alpha = f(w, \lambda, \nu, \rho, C, X, t_n, t_{жс}, \Phi, l_1, l_2, l_3, \dots) \quad (2.5)$$

где  $w$  – скорость жидкости, м/с;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

$\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\rho$  – плотность жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$C$  – удельная теплоемкость,  $\text{кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ ;

$X$  – характер движения жидкости;

$\Phi$  – форма поверхности тела;

$l_1, l_2, l_3$  – размеры поверхности тела.

Зависимость (2.5) показывает, что коэффициент теплоотдачи – величина сложная и для ее определения невозможно дать общую формулу. Обычно для определения  $\alpha$  приходится прибегать к опытным исследованиям.

Опытным путем установлено, что в условиях свободной конвекции для воздуха  $\alpha = 5 \div 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , а для воды  $\alpha = 20 \div 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . В условиях вынужденной конвекции значения коэффициента теплоотдачи выше, например, для воздуха  $\alpha = 10 \div 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  и для воды  $\alpha = 50 \div 10000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Для кипящей воды  $\alpha = 3000 \div 100\,000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; для конденсирующего водяного пара  $\alpha = 5000 \div 100\,000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

## 2.4 Дифференциальное уравнение теплоотдачи

Особенности движения вязкой жидкости в непосредственной близости от стенки позволяют установить связь коэффициента теплоотдачи с температурным полем в жидкости. На рис. 2.6 показано температурное поле вблизи холодной стенки, вдоль которой течет нагретая жидкость.

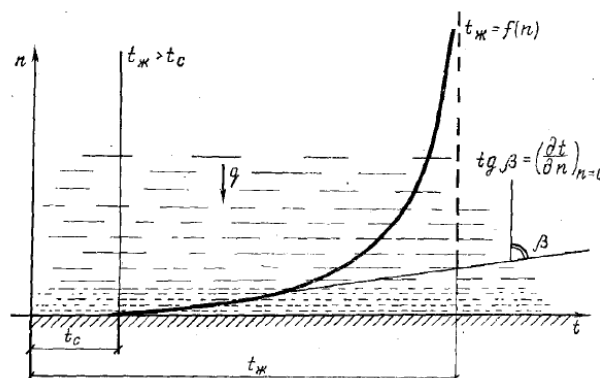


Рисунок 2.6 - Температурное поле в жидкости, протекающей вблизи холодной стенки

Благодаря выполнению условия прилипания частицы жидкости, находящиеся в непосредственной близости к твердой поверхности тела, образуют тонкий неподвижный слой. В неподвижной среде, как известно, перенос теплоты осуществляется только путем теплопроводности, поэтому можно записать

$$q = -\lambda \left( \frac{dt}{dn} \right)_{n=0} \quad (2.5)$$

где  $q$  – плотность теплового потока,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности жидкости,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;

индекс  $n = 0$  означает, что значение градиента берется на стенке.

С другой стороны, плотность теплового потока может быть выражена с помощью уравнения Ньютона-Рихмана

$$q = \alpha(t_{ж.} - t_c) \quad (2.6)$$

где  $t_{ж.}$ ,  $t_c$  – температуры жидкости и поверхности стенки, °С.

Из уравнений (2.5) и (2.6) получаем дифференциальное уравнение теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_{ж.} - t_c} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.6) устанавливает связь между коэффициентом теплоотдачи и температурным полем в жидкости. Уравнение (2.7) сводит задачу нахождения коэффициента теплоотдачи к основной задаче теории теплообмена – определению температурного поля.

## 2.5 Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

Применяя общие законы физики, можно составить дифференциальные уравнения для конвективного теплообмена, учитывающие как тепловые, так и гидродинамические явления в любом процессе. Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена состоит из уравнений энергии, движения и неразрывности (сплошности потока).

Рассмотрим задачу конвективного теплообмена для простых геометрических условий: поток жидкости движется в направлении оси  $X$  вдоль плоской поверхности (рис. 2.7). Заданы скорость  $w_0$  и температура  $t_{ж.}$  невозмущенного потока, температура стенки  $t_c$  на участке длиной  $l_0$ , а также теплофизические свойства жидкости – плотность  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>; удельная изобарная теплоемкость  $c_p$ , кДж/(кг·К); коэффициент теплопроводности жидкости  $\lambda$ , Вт/(м·К) и коэффициент динамической вязкости  $\mu$ , Па·с.

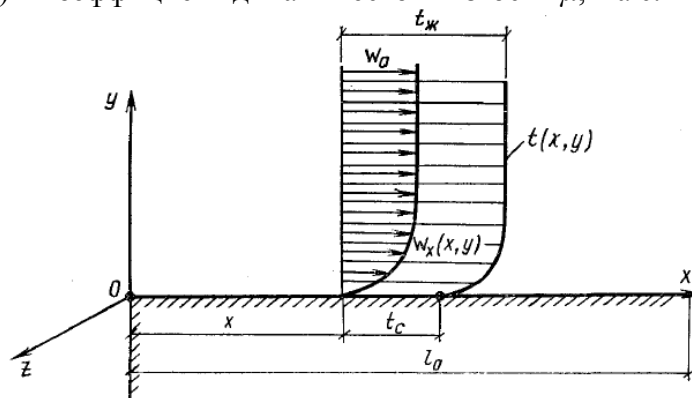


Рисунок 2.7 - Поле температуры и поле скорости при движении жидкости вдоль плоской поверхности

В результате теплового и динамического взаимодействия стенки с потоком температура и скорость последнего в пристенной области меняются. Формируются поле температуры  $t(x,y)$  и поле скорости  $w(x,y)$ . В направлении оси  $Z$  по условию задачи никаких изменений не происходит. Рассматриваемый процесс является стационарным.

Для данного случая запишем систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена – уравнения энергии, движения и сплошности; из уравнений исключаются члены, связанные с изменением величин во времени и по оси  $Z$ . Уравнение энергии будет иметь следующий вид:

$$\rho c_p \left( w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right). \quad (2.8)$$

Две проекции уравнения движения на оси  $X$  и  $Y$  могут быть представлены следующим образом:

$$\rho \left( w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \quad (2.9)$$



$$\rho \left( w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right). \quad (2.10)$$

Уравнения (2.9) и (2.10) называют еще уравнениями Навье-Стокса в честь известных ученых, слагаемые этих уравнений имеют размерность силы, отнесенной к единице объема. Уравнение сплошности или неразрывности потока для несжимаемой жидкости (при  $\rho = const$ ) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) является уравнением сохранения массы.

В уравнениях (2.9) – (2.11)  $w_x, w_y$  – проекции вектора скорости на оси X и Y;  $g_x, g_y$  – проекции вектора ускорения свободного падения на оси X и Y;  $\partial p$  – изменение давления.

Для описания рассматриваемого процесса конвективного теплообмена к уравнениям необходимо добавить условия однозначности. Пространственная область, в которой рассматривается процесс конвективного теплообмена задана следующими геометрическими условиями:

$$0 \leq x \leq l_0; \quad 0 \leq y \leq +\infty; \quad -\infty \leq z \leq +\infty. \quad (2.12)$$

Процесс стационарен, поэтому начальные условия отпадают. Граничные условия для искомых функций  $t, w_x, w_y$  и  $p$  могут быть заданы следующим образом:

- на поверхности стенки при  $y = 0; 0 \leq x \leq l_0$   
 $t = t_c; w_x = w_y = 0;$  (2.13)

- на бесконечном удалении от стенки при  $y \rightarrow +\infty; 0 \leq x \leq l_0$   
 $t = t_{жс}; w_x = w_0; w_y = 0.$  (2.14)

Давление  $p$  следует задать в начальном сечении при  $x = 0, 0 \leq y \leq +\infty$ .

Уравнения (2.8) – (2.11) совместно с условиями однозначности (2.12) – (2.14) описывают процесс конвективного теплообмена на плоскости.

Для потока сжимаемой жидкости, движущейся в трехмерном пространстве при нестационарном режиме, уравнения (2.8) – (2.11) должны быть дополнены.

Уравнение энергии, устанавливающее связь между пространственным и временным изменением температуры в любой точке движущейся жидкости, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t. \quad (2.15)$$

Если  $w_x = w_y = w_z = 0$ , то уравнение (2.15) превращается в дифференциальное уравнение теплопроводности для твердого тела.

Для компактной записи уравнение движения удобно представить в векторной форме

$$\rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}, \quad (2.16)$$

где величина  $d\vec{w}/d\tau$  – характеризует изменение скорости во времени.

Уравнение (2.15) составлено без учета зависимости физических параметров жидкости от температуры.

Уравнение неразрывности для потока сжимаемой жидкости ( $\rho \neq const$ ) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.17)$$

Уравнения (2.15) – (2.17) описывают множество процессов конвективного теплообмена, чтобы выделить какой-то конкретный процесс, к этим уравнениям необходимо добавить условия однозначности (геометрические, физические, начальные и граничные).

Система дифференциальных уравнений (2.15) – (2.17) в совокупности с условиями однозначности представляет собой математическую формулировку задачи конвективного теплообмена.

## 2.6 Основы теории подобия

### 2.6.1 Три вида подобия

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности, которые содержат большое количество неизвестных. Аналитическое решение полной системы дифференциальных уравнений очень трудоемко, поэтому при решении задач конвективного теплообмена большое значение приобретает экспериментальный путь исследований. Недостатком экспериментальных исследований является невозможность распространения результатов, полученных в данном опыте, на другие явления и процессы, отличающиеся от изученного.

Создание специальной теории подобия позволяет объединить методы теоретических и экспериментальных исследований. С одной стороны, теория подобия позволяет сделать ряд выводов из дифференциальных уравнений и условий однозначности, не прибегая к интегрированию, и тем самым обосновать теоретическую базу для постановки опытов и обработки экспериментальных данных. С другой стороны, теория подобия устанавливает такие условия, при которых результаты экспериментальных исследований можно распространить на другие явления, подобные рассматриваемому.

С помощью теории подобия размерные физические величины объединяют в безразмерные комплексы, число которых значительно меньше, чем неизвестных величин. Безразмерные комплексы рассматриваются как новые переменные, что упрощает исследование физических процессов.

Различают три вида подобия:

- 1 *Геометрическое подобие* – подобие углов, линейных размеров, геометрических фигур и т. д.
- 2 *Кинематическое подобие* – подобие распределения скоростей в сходственных точках.
- 3 *Полное подобие физических явлений* – этот вид подобия означает, что все величины, характеризующие данные явления, должны находиться в определенных соотношениях для сходственных точек и сходственных моментов времени.

Подобными могут быть лишь явления одного и того же класса, т. е. явления, которые описываются одним и тем же дифференциальным уравнением. Подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемое явление. Это означает, что в сходственных точках пространства в сходственные моменты времени любая величина  $\varphi'$  одного процесса пропорциональна однородной ей величине другого процесса  $\varphi''$

$$\varphi'/\varphi'' = C_\varphi, \quad (2.18)$$

где  $C_\varphi$  коэффициент пропорциональности, называемый константой подобия.

Константа подобия не зависит ни от координат, ни от времени.

### 2.6.2 Критерии подобия

Подобие двух явлений рассмотрим на примере равномерного прямолинейного движения двух потоков жидкости. Первый поток движется со скоростью  $w'$  (рис. 2.8 а), а второй со скоростью  $w''$  (рис. 2.8, б).

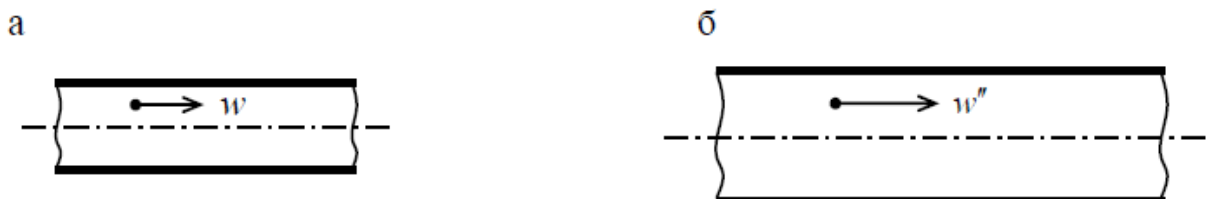


Рисунок 2.8 - Прямолинейное движение двух потоков жидкости в трубах

Скорость можно выразить через длину пути и время:

- для случая на рис. 2.8,а:  $w' = l'/\tau'$ ;
- для случая на рис. 2.8,б:  $w'' = l''/\tau''$ .

Для скоростей  $w'$  и  $w''$  справедливо следующее соотношение

$$\frac{w'}{w''} = \frac{l'/\tau'}{l''/\tau''} = \frac{l'}{l''} \cdot \frac{\tau''}{\tau'}. \quad (2.19)$$

Полученную пропорцию можно переписать, используя константы подобия

$$C_w = C_l/C_\tau \text{ или } C_w C_\tau / C_l = 1. \quad (2.20)$$

Из последнего соотношения видно, что для подобия двух явлений необходимо, чтобы безразмерный комплекс, составленный из констант подобия, был равен 1. Заменяя значения констант подобия в последнем уравнении на размерные физические величины, получим

$$\frac{w' \tau'}{l'} = \frac{w'' \tau''}{l''} = idem. \quad (2.21)$$

Таким образом, существуют величины, которые для всех подобных между собой явлений сохраняют одно и то же числовое значение. Такие комплексы величин называют критериями или числами подобия.

Критерий подобия – это безразмерное соотношение параметров, характеризующих процесс, который у подобных явлений в сходственных точках в сходственные моменты времени имеет численно одинаковое значение.

Критерии подобия принято назвать именами крупных ученых, известных своими работами в области тепломассообмена и гидродинамики, и обозначать двумя буквами, например,  $Re$  – критерий Рейнольдса,  $Fo$  – критерий Фурье и другие. Возможно также обозначение некоторых критериев заглавными русскими буквами с индексом, например,  $K_1, K_2, K_3$  и т. д.

Для решения задач конвективного теплообмена наиболее часто используются следующие критерии подобия.

1 Критерий Рейнольдса  $Re$  – определяет режим движения жидкости и выражает соотношение между силой инерции и силой внутреннего трения (вязкости), определяется по формуле

$$Re = vdp/\mu \quad (2.22)$$

2. Критерий Нуссельта  $Nu$  – характеризует теплообмен на границе жидкость- стека

$$Nu = \alpha l / \lambda_{жс} \quad (2.23)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);

$l$  – характерный линейный размер, м;

$\lambda_{жс}$  – коэффициент теплопроводности жидкости, Вт/(м·К).

3. Критерий Пекле  $Pe$  – выражает соотношение между двумя видами теплообмена: теплопроводностью и конвекцией

$$Pe = wl/\alpha, \quad (2.24)$$

где  $w$  – скорость потока жидкости, м/с;

$\alpha$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;

4 Критерий Прандтля  $Pr$  – характеризует физические свойства жидкости

$$Pr = \nu/\alpha, \quad (2.25)$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости, м<sup>2</sup>/с.

Критерий Прандтля можно выразить через два других критерия  $Pe$  и  $Re$ :

$$Pr = Pe / Re. \quad (2.26)$$

5. Критерий Грасгофа  $Gr$  – характеризует свободную конвекцию и выражает соотношение между подъемными силами, возникающими в жидкости при нагреве, и силами вязкости

$$Gr = (gl^3\beta\Delta t) / \nu^2$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$\Delta t$  – разность температур между жидкостью и поверхностью, °С;

$\beta$  – коэффициент объемного расширения (показывающий, на какую часть первоначального объема произошло расширение при  $\Delta t = 1$ ),  $1/^\circ\text{C}$ .

6. Критерий Фурье  $Fo$  – характеризует нестационарность процессов

$$Fo = a\tau/l^2$$

где  $a$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\tau$  – время, с.

### 2.6.3 Теоремы подобия

Практическое применение теории подобия базируется на трех теоремах. Две первые из них говорят о явлениях, подобие которых заранее известно, и формулируют основные свойства подобных между собой явлений. Третья теорема обратная первым двум, она устанавливает признаки, по которым можно узнать, подобны ли два явления друг другу. Рассмотрим формулировки теорем подобия, подробные доказательства приводятся в [2].

1 Теорема Ньютона. Первая теорема подобия для подобного течения двух жидкостей была высказана И. Ньютоном в 1686 г. Однако строгое доказательство теоремы было дано Ж. Бертраном в 1848 г. Формулировка теоремы Ньютона: подобные между собой явления имеют численно одинаковые критерии подобия ( $Re = idem$ ,  $Nu = idem$ ).

Первая теорема подобия устанавливает связь между константами подобия и позволяет вывести уравнения для чисел подобия. Теорема указывает, что при выполнении опытов необходимо и достаточно измерять лишь те величины, которые входят в числа подобия изучаемого явления.

2. Теорема Букингема. Вторая теорема подобия была доказана в 1911 отечественным ученым А. Федерманом и в 1914 г. американским ученым Е. Букингом. Формулировка теоремы Букингема: любая зависимость между переменными, характеризующими какое-либо явление, может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия. Из второй теоремы подобия следует, что если результаты любого эксперимента обработать в числах подобия, то зависимость между ними необходимо выражать в виде уравнения подобия, которое может быть записано в виде

$$f(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n) = 0$$

Эту зависимость называют обобщенным критериальным уравнением. Это уравнение любую зависимость между величинами, характеризующими данное явление, представляет зависимостью между числами подобия. Для всех подобных явлений критериальные зависимости одинаковы.

3. Теорема Кирпичева – Гухмана. Третья теорема подобия устанавливает необходимые условия для того, чтобы явления оказались подобными друг другу. Формулировка ее была дана М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом, а доказательство теоремы – М. В. Кирпичевым в 1933 г. Формулировка теоремы: подобны те явления, условия однозначности которых подобны, и критерии подобия, составленные из условий однозначности, численно одинаковы.

Теоремы подобия и теория подобия в целом дают общие методические указания, как поступить в каждом отдельном случае при анализе уравнений, описывающих явление, устанавливают пути для правильной постановки опыта и дают указания по обработке полученных результатов. Теория подобия устанавливает также условия, при которых результаты экспериментальных исследований можно распространить на другие явления, подобные рассматриваемому. В итоге можно отметить, что теория подобия является научной основой проведения экспериментов по изучению процессов теплообмена и обобщения результатов опытов.

### 2.6.4 Основы метода анализа размерностей

Необходимой предпосылкой теории подобия является математическое описание изучаемого процесса в виде дифференциальных уравнений и условий однозначности. Из математической формулировки задачи следует перечень существенных для

рассматриваемого процесса физических величин. Иногда список безразмерных величин устанавливают интуитивно, без строгой формулировки краевой задачи. В этом случае возможны ошибки. Во избежание ошибок при выборе критериев подобия предложен метод анализа размерностей.

Подробно метод анализа размерностей рассматривается в специальной литературе. Мы ограничимся рассмотрением некоторых выводов, следующих из анализа размерностей и имеющих интерес для практического использования обобщенных переменных.

Обычно различают два вида физических величин: первичные (основные) и вторичные (производные).

Первичные величины характеризуют какое-либо физическое явление непосредственно, без связи с другими величинами.

Вторичными являются величины, которые выражаются через первичные согласно определениям или физическим законам. Так, например, если длина и время являются первичными величинами, т. е. если длину нельзя выразить через время (и наоборот), то скорость, представляющая собой по определению отношение длины ко времени, является вторичной, производной величиной.

Выбор первичных величин произволен. За первичные выбраны длина  $L$ , масса  $M$ , время  $T$ , температура  $\Theta$ , сила тока  $I$ , сила света  $J$ . Известны и другие системы первичных величин, используемых или предложенных к использованию. Например, Гауссом было предложено использовать в качестве первичных величин длину, массу и время; остальные мыслимые величины должны быть производными. При выборе первичных величин большое значение имеет вопрос об удобстве их применения.

Символическое выражение производной величины через основные (первичные) называется размерностью. О размерности можно говорить только применительно к определенной системе первичных величин. Размерность можно представить в виде степенной формулы. Формула размерности имеет вид

$$[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \Theta^{n_4} I^{n_5} J^{n_6} \quad (2.27)$$

где  $[\varphi]$  – производная единица измерения;

$n_i$  – действительные числа.

Размерность вторичной величины относительно данной первичной  $i$  может быть охарактеризована значением показателя степени  $n_i$  при этой первичной величине. Поэтому безразмерные числа часто называют величинами с нулевой размерностью, так как для них все показатели степени в формуле размерности (2.27) равны нулю. Согласно формуле (2.27) размерность первичной величины можно принять равной единице (берется относительно себя).

Помимо размерности физические величины характеризуются числовыми значениями. Числовые значения первичных величин получают путем прямого измерения, т. е. путем сопоставления измеряемой величины с некоторой величиной той же физической природы, выбранной в качестве стандарта и называемой единицей физической величины. Выбор единиц первичных величин (основных) произволен и определяется вопросами удобства их использования.

Числовое значение вторичной величины определяется косвенным путем, его находят по числовым значениям первичных величин. От выбора единиц первичных величин зависят численные значения как первичных, так и вторичных величин. От выбора основных единиц физических величин не зависят только численные значения безразмерных величин (величин с нулевой размерностью).

Выбор перечня первичных величин и их единиц является необходимым и основным шагом на пути создания системы единиц физических величин.

*Согласно  $\pi$ -теореме физическое уравнение, содержащее  $n \geq 2$  размерных величин, из которых  $k \geq 1$  величин имеют независимую размерность, после приведения к безразмерному виду будет содержать  $(n - k)$  безразмерных величин.*

Таким образом, метод анализа размерностей помогает определить число безразмерных переменных, актуальных для рассматриваемого процесса, что позволяет избежать ошибок при описании экспериментальных данных в виде уравнений подобия.

### 2.6.5 Критериальное уравнение конвективного теплообмена в общем виде

Критериальным уравнением называют зависимость между каким-либо определяемым критерием подобия и другими определяющими критериями подобия. Определяемыми критериями подобия являются критерии, в которые входят искомые зависимые переменные, а определяющими – критерии, целиком составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности. В зависимости от постановки задачи определяющие критерии могут становиться определяемыми.

При решении задач конвективного теплообмена неизвестной величиной чаще всего является коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К), поэтому определяемым критерием является критерий Нуссельта  $Nu$ . Используя метод анализа размерностей, критериальное уравнение конвективного теплообмена для нестационарных процессов можно представить в следующем виде

$$Nu = f(Fo, Re, Pr, Gr). \quad (2.28)$$

В случае стационарного процесса из зависимости (2.28) исчезнет критерий  $Fo$ , и критериальное уравнение конвективного теплообмена примет вид

$$Nu = A \cdot Re^n Pr^m Gr^k, \quad (2.29)$$

где  $A, n, m, k$  – постоянные величины, зависящие от конкретных условий.

Схема решения задач конвективного теплообмена заключается в следующем: с помощью критериальных уравнений определяется значение критерия  $Nu$ .

Найденное значение  $Nu$  подставляется в формулу (2.23), из которой находится неизвестный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = Nu \lambda_{ж} / l$$

Таким образом, значение коэффициента  $\alpha$  будет зависеть от правильного выбора критериального уравнения для расчета критерия Нуссельта.

## 2.7 Частные случаи конвективного теплообмена

### 2.7.1 Теплоотдача при ламинарном движении жидкости в трубах

Интенсивность теплообмена в прямых гладких трубах может изменяться в широких пределах и зависит от скорости движения потока. Изменение температуры жидкости происходит как по сечению, так и по длине трубы.

Характер движения жидкости в трубах может быть ламинарным и турбулентным. О режиме течения судят по величине числа Рейнольдса. Если  $Re < 2300$ , то движение жидкости ламинарное. При ламинарном движении большое значение приобретает свободная конвекция. Наличие ее меняет закон распределения скорости по сечению и интенсивность теплообмена. Если при ламинарном движении отсутствует свободная конвекция, то передача теплоты к стенкам канала осуществляется только теплопроводностью. С появлением свободного движения теплота передается не только теплопроводностью, но и конвекцией (рис. 2.9). Влияние конвекционной передачи теплоты будет возрастать с увеличением температурного напора. Коэффициент теплоотдачи изменяется по длине канала. Он будет иметь большее значение у входа в канал и стабилизироваться на расстоянии от входа, равном примерно  $50d$ .

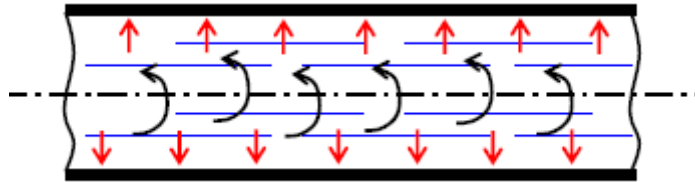


Рисунок 2.9 - Теплоотдача при ламинарном течении жидкости в трубе

Для определения коэффициента теплоотдачи пользуются эмпирическими формулами.

Для определения среднего по длине коэффициента теплоотдачи при ламинарном режиме течения жидкости в прямых гладких трубах академик М. А. Михеев рекомендует следующую расчетную формулу:

$$Nu_{жcd} = 0,15 Re_{жcd}^{0,33} Pr_{жс}^{0,43} Gr_{жcd}^{0,1} (Pr_{жс}/Pr_{см})^{0,25} \bar{\varepsilon}_l \quad (2.29)$$

Для воздуха эта формула упрощается и принимает вид

$$Nu_{жcd} = 0,13 Re_{жcd}^{0,33} Gr_{жcd}^{0,1} \bar{\varepsilon}_l \quad (2.30)$$

где  $\varepsilon_l$  – поправочный коэффициент;

«жд» – индекс, который означает, что определяющей температурой является температура жидкости, определяющим линейным размером является внутренний диаметр или эквивалентный диаметр трубы любого сечения, определяющей скоростью является скорость жидкости в трубе.

В уравнении (2.29) направление теплового потока учитывается отношением чисел Прандтля при температурах жидкости и стенки  $(Pr_{жс}/Pr_{см})^{0,25}$ . Для воздуха и двухатомных газов критерий Прандтля практически не зависит от температуры, поэтому отношение  $Pr_{жс}/Pr_{см} = 1$  и в уравнении (2.30) отсутствует.

Поправочный коэффициент  $\varepsilon_l$  зависит от соотношения  $l/d$ , при  $l/d \geq 50$   $\varepsilon_l = 1$ , в остальных случаях  $\varepsilon_l$  находится по табл. 2.1.

Таблица 2.1 - Значение коэффициента  $\varepsilon_l$  в зависимости от  $l/d$  при ламинарном режиме

$l/d$	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$\varepsilon_l$	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1,00

По уравнениям (2.29) или (2.30) определяется число Нуссельта, а по нему – коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ .

### 2.7.2 - Теплоотдача при турбулентном движении жидкости

При турбулентном потоке жидкость весьма интенсивно перемешивается и естественная конвекция практически не оказывает влияния на теплоотдачу. Поэтому из совокупности определяющих чисел подобия может быть исключено число Грасгофа. Температура жидкости по сечению ядра практически постоянна. При нагревании жидкости интенсивность теплоотдачи выше, чем при охлаждении. Направление теплового потока, как и в предыдущих уравнениях, также учитывается отношением  $(Pr_{жс}/Pr_{ст})^{0,25}$ .

Для определения среднего по длине коэффициента теплоотдачи при развитом турбулентном движении ( $Re > 10\,000$ ) академик М. А. Михеев рекомендует следующее критериальное уравнение:

$$Nu_{жcd} = 0,021 Re_{жcd}^{0,8} Pr_{жс}^{0,43} (Pr_{жс}/Pr_{см})^{0,25} \bar{\varepsilon}_l \quad (2.31)$$

Для воздуха эта формула упрощается и принимает вид

$$Nu_{жcd} = 0,018 Re_{жcd}^{0,8} \bar{\varepsilon}_l \quad (2.32)$$

Формулы (2.31) и (2.32) применимы в пределах  $10\,000 \leq Re_{жcd} < 5 \cdot 10^6$ ,  $Pr_{жс} = 0,6 \div 2\,500$ . За определяющую температуру принята средняя температура жидкости, за определяющий размер – внутренний диаметр трубы, за определяющую скорость – средняя скорость потока жидкости в трубе.

В критериальных уравнениях (2.31) и (2.32) поправочный коэффициент  $\epsilon_l$  зависит от соотношения  $l/d$  и числа  $Re$ , его значение определяется по табл. 2.2.

Таблица 2.2 Значение коэффициента  $\epsilon_l$  в зависимости от  $l/d$  и  $Re$  при турбулентном режиме

Re	$\epsilon_l$ при $l/d$		
	5	15	20
$1 \cdot 10^4$	1,34	1,23	1,13
$5 \cdot 10^4$	1,18	1,13	1,08
$1 \cdot 10^5$	1,15	1,10	1,06
$1 \cdot 10^6$	1,08	1,05	1,03

При турбулентном течении жидкости в изогнутых трубах-змеевиках (рис. 2.9) вследствие центробежного эффекта в поперечном сечении трубы возникает вторичная циркуляция, наличие которой приводит к увеличению коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ .

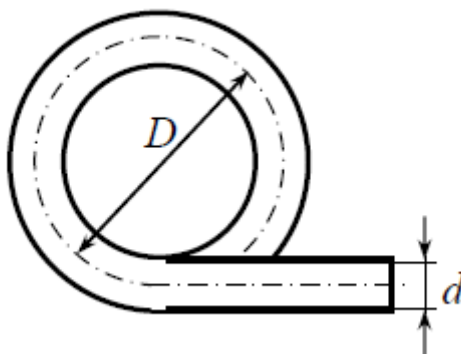


Рисунок 2.9 - Элемент изогнутой трубы-змеевика

Расчет теплоотдачи в змеевиках можно вести по формулам (2.31) и (2.32) для прямых труб, но полученное значение  $\alpha$  следует умножить на поправочный коэффициент

$$\bar{\epsilon}_{\text{зм}} = 1 + 3,6d/D, \quad (2.33)$$

где  $d$  – внутренний диаметр трубы;  $D$  – диаметр спирали.

### 2.7.3 Теплоотдача при продольном обтекании пластины

При омывании плоской поверхности пластины безграничным потоком с равномерным распределением скоростей на ней образуется гидродинамический пограничный слой. В последнем вследствие трения скорость невозмущенного потока падает до нуля. Течение жидкости в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным.

При наличии разности температур между потоком жидкости и пластиной у поверхности последней кроме гидродинамического образуется также и тепловой пограничный слой. В пределах теплового пограничного слоя температура жидкости изменяется от температуры потока вдали от пластины до температуры, равной температуре поверхности пластины.

Анализ опытных данных показывает, что коэффициент теплоотдачи зависит не только от изменения характера течения жидкости (ламинарного или турбулентного), но и от рода жидкости, ее температуры, температурного напора и направления теплового потока, являющихся функцией температуры. Особое значение имеет изменение вязкости жидкости в пограничном слое. Кроме того, при малых скоростях течения жидкости большое влияние на теплоотдачу оказывает естественная конвекция. В связи с тем, что влияние всех этих факторов на теплоотдачу в настоящее время в достаточной степени не выявлено, для определения среднего коэффициента теплоотдачи пластины, омываемой продольным потоком жидкости при ламинарном режиме в пограничном слое, можно



рекомендовать следующие приближенные формулы академика М. А. Михеева при значениях чисел  $Re_{жкл} < 4 \cdot 10^4$ :

$$Nu_{жкл} = 0,66 Re_{жкл}^{0,5} Pr_{жс}^{0,43} (Pr_{жс}/Pr_{см})^{0,25}. \quad (2.34)$$

Для воздуха при  $Re_{жкл} < 4 \cdot 10^4$  формула (2.34) упрощается:

$$Nu_{жкл} = 0,57 Re_{жкл}^{0,5}. \quad (2.35)$$

В этих формулах за определяющую температуру принята температура набегающего потока ( $Pr_{см}$  берется по температуре стенки); за определяющую скорость – скорость набегающего потока; за определяющий размер – длина пластины  $l$  по направлению потока. Влияние естественной конвекции на теплоотдачу в этих формулах не учитывается.

При турбулентном гидродинамическом пограничном слое у поверхности пластины образуется тонкий слой ламинарно текущей жидкости, называемый ламинарным подслоем, в котором происходит основное изменение скорости потока. Также в ламинарном подслое происходят почти все изменения температуры текущей жидкости, т. е. ламинарный подслой представляет собой главное гидродинамическое и термическое сопротивление.

В настоящее время расчет конвективной теплоотдачи обычно производят по экспериментальным формулам. Для определения среднего коэффициента теплоотдачи капельных жидкостей при турбулентном пограничном слое у поверхности пластины М. А. Михеев рекомендует при значениях критерия  $Re_{жкл} > 4 \cdot 10^4$  следующее уравнение:

$$Nu_{жкл} = 0,037 Re_{жкл}^{0,8} Pr_{жс}^{0,43} (Pr_{жс}/Pr_{см})^{0,25}. \quad (2.36)$$

Для воздуха при  $Pr_{жс} = \text{const}$  уравнение упрощается и принимает вид

$$Nu_{жкл} = 0,032 Re_{жкл}^{0,8}. \quad (2.37)$$

В уравнениях (2.36) и (2.37) за определяющую температуру принята температура жидкости вдали от пластины; за определяющий размер берется длина пластины по направлению потока.

Опыты показывают, что при развитом турбулентном течении жидкости теплоотдача не зависит от числа  $Gr$  и, следовательно, в передаче всего количества теплоты принимает участие не естественная, а вынужденная конвекция.

## 2.7.4 Теплоотдача при поперечном обтекании одиночного цилиндра

Процесс теплоотдачи при поперечном потоке жидкости, омывающей одиночную круглую трубу (цилиндр), в значительной мере зависит от скорости потока и характеризуется рядом особенностей.

Рассмотрим несколько случаев обтекания потоком жидкости одиночного круглого цилиндра, изображенных на рис. 2.10.

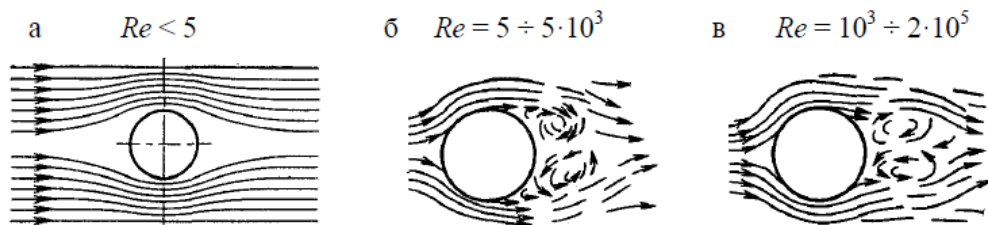


Рисунок 2.10 - Обтекание потоком жидкости одиночного круглого цилиндра при разных значениях критерия Рейнольдса

Плавное, безотрывное омывание поверхности круглой трубы наблюдается только при  $Re < 5$  (рис. 2.10,а). При больших значениях  $Re$  условия омывания лобовой и кормовой половин трубы совершенно различны (рис. 2.10,б). В кормовой части трубы, которая представляет собой плохо обтекаемое тело, появляется вихревая зона. Ламинарный пограничный слой, образующийся в лобовой части трубы около вертикального диаметра, отрывается от ее поверхности и в кормовой части образуются два симметричных вихря.

Только 45–47% поверхности трубы, считая от лобовой точки, омывается потоком жидкости безотрывно, вся остальная ее часть находится в вихревой зоне. Чем больше скорость потока, тем при больших углах  $\varphi$  происходит отрыв ламинарного пограничного слоя.

При больших значениях числа  $Re$  ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный, а отрыв слоя происходит при  $\varphi = 120 - 130^\circ$ . Это смещение приводит к уменьшению вихревой зоны в кормовой части трубы и обтекание ее улучшается (рис. 2.10,в). Турбулентный пограничный слой появляется при значительных числах  $Re = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ . На появление турбулентного пограничного слоя большое влияние оказывает начальная турбулентность потока, чем она больше, тем при меньших значениях числа  $Re$  появится турбулентный пограничный слой. Такое движение жидкости при поперечном обтекании одиночной трубы в значительной мере отражается на коэффициенте теплоотдачи по ее окружности.

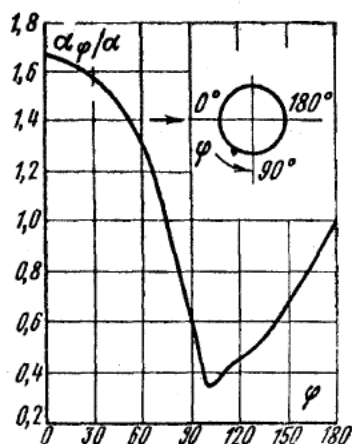


Рис. 2.11 - Значение коэффициента теплоотдачи при разных значениях угла  $\varphi$

В лобовой части трубы (при  $\varphi = 0$ ) коэффициент теплоотдачи имеет наибольшее значение, т. к. пограничный слой имеет наименьшую толщину. По мере движения жидкости вдоль поверхности толщина пограничного слоя увеличивается и достигает максимального значения почти у экватора (при  $\varphi = 90^\circ$ ), что примерно соответствует месту отрыва пограничного слоя (рис. 2.11). Благодаря увеличению толщины пограничного слоя коэффициент теплоотдачи уменьшается и у экватора достигает наименьшего значения.

За экватором кормовая часть цилиндра омывается жидкостью, имеющей сложный вихревой характер движения, при этом происходит разрушение пограничного слоя, толщина его уменьшается, а коэффициент теплоотдачи увеличивается, достигая наибольшего значения при  $\varphi = 180^\circ$ , и может сравняться с теплоотдачей в лобовой части трубы.

Описанная картина движения жидкости справедлива для значений чисел Рейнольдса  $Re = 5 \div 2 \cdot 10^5$ .

Из изложенного следует, что теплоотдача по окружности одиночной трубы при поперечном обтекании тесно связана с характером омывания ее поверхности. Теплоотдача также зависит от скорости и направления потока жидкости, от температуры и диаметра трубы, от направления теплового потока, от внешних тел, изменяющих степень турбулизации потока, и т. п. Все эти моменты указывают на трудность теоретического решения данной задачи.

Подробные экспериментальные исследования теплоотдачи проволок и трубок в поперечном потоке воздуха, воды, трансформаторного масла были проведены А. А. Жукаускасом. Им также были использованы экспериментальные работы других авторов. В результате обобщения всех данных были получены критериальные уравнения,

позволяющие определять средний коэффициент теплоотдачи по окружности одиночной трубы, обтекаемой потоком жидкости:

$$\text{- при } Re = 5 \div 1 \cdot 10^3 \quad Nu_{жсд} = 0,5 Re_{жсд}^{0,5} Pr_{жс}^{0,38} (Pr_{жс} / Pr_{см})^{0,25}, \quad (2.38)$$

$$\text{- при } Re = 1 \cdot 10^3 \div 2 \cdot 10^5 \quad Nu_{жсд} = 0,25 Re_{жсд}^{0,6} Pr_{жс}^{0,38} (Pr_{жс} / Pr_{см})^{0,25}, \quad (2.39)$$

Для воздуха и двухатомных газов формулы (2.38) и (2.39) примут вид:

$$\text{- при } Re = 5 \div 1 \cdot 10^3 \quad Nu_{жсд} = 0,43 Re_{жсд}^{0,5}, \quad (2.40)$$

$$\text{- при } Re = 1 \cdot 10^3 \div 2 \cdot 10^5 \quad Nu_{жсд} = 0,21 Re_{жсд}^{0,6}, \quad (2.41)$$

При вычислении чисел подобия в формулах (2.38) – (2.41) за определяющий линейный размер принят внешний диаметр трубы; за определяющую температуру – средняя температура жидкости. Скорость отнесена к самому узкому сечению канала.

Приведенные формулы справедливы для цилиндра, который располагается перпендикулярно направлению потока. Если угол атаки  $\psi < 90^\circ$ , то коэффициент теплоотдачи для  $\psi = 90^\circ$  нужно умножить на поправочный коэффициент  $\varepsilon$ , взятый с графика (рис. 2.12), или для углов  $\psi = 30 \div 90^\circ$  рассчитанный по формуле

$$\varepsilon = 1 - 0,54 \cos^2 \psi. \quad (2.42)$$

В результате итоговый коэффициент теплоотдачи  $\alpha_\psi = \varepsilon \cdot \alpha_{90}$ . Как видно из графика (рис. 2.12,б), с уменьшением угла атаки поправочный коэффициент резко падает, а следовательно, уменьшается и коэффициент теплоотдачи.

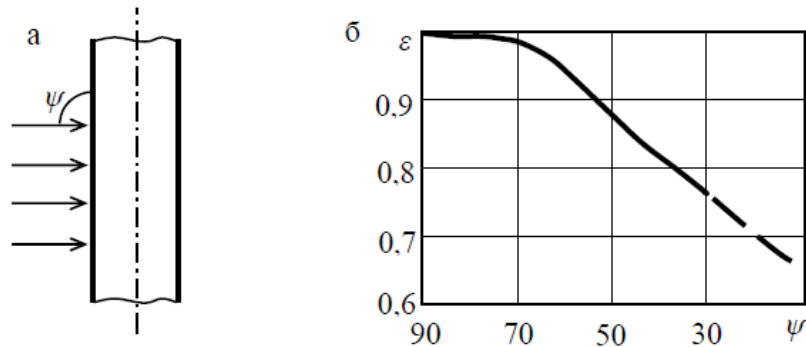
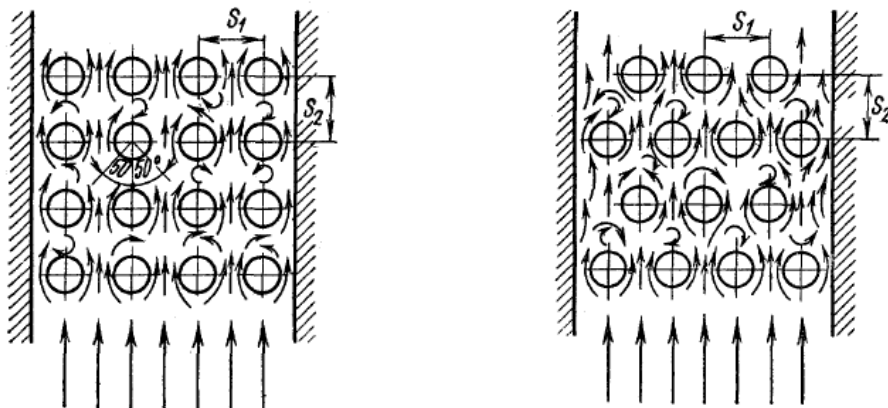


Рисунок 2.12 - Угол атаки потока жидкости (а) и значение поправочного коэффициента  $\varepsilon$  (б)

### 2.7.5 Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб

На практике часто встречается конвективный теплообмен в пучках труб, расположенных перпендикулярно движению потока жидкости. Теплообменные аппараты, собирающиеся из пучка круглых труб и омываемые поперечным потоком жидкости, имеют в технике большое распространение. Сложная гидродинамическая картина омывания одиночной трубы делается еще более сложной при омывании пучка круглых труб. Применяются в основном два вида расположения труб в пучках: коридорный (рис. 2.13) и шахматный (рис. 2.14).



## Рисунок 2.13. Коридорный пучок труб    Рисунок 2.14 - Шахматный пучок труб

Характеристиками пучка труб считаются внешний диаметр  $d$ , количество рядов труб по движению жидкости и относительные шаги (отношение расстояния между осями труб по ширине пучка к внешнему диаметру труб  $s_1/d$  и отношение расстояния между осями двух соседних рядов труб по направлению движения жидкости к внешнему диаметру труб  $s_2/d$ ). От расположения труб в значительной степени зависят характер движения жидкости, омывание труб каждого ряда и в целом теплообмен в пучке.

При этом если в канале было турбулентное движение жидкости, то оно будет турбулентным и в пучке труб, причем степень турбулизации будет возрастать от ряда к ряду, так как пучок труб является очень хорошим турбулизирующим устройством. Если в канале перед пучком режим течения был ламинарным, то в зависимости от числа  $Re$  в пучке труб может быть как ламинарное, так и турбулентное течение жидкости.

При малых значениях числа  $Re < 10^3$  ламинарный режим течения может сохраниться и в пучке труб. В теплообменных аппаратах, как правило, встречается турбулентное течение жидкости. Однако и при турбулентном течении теплообмен в пучках определяется различными законами. Изменение законов теплоотдачи связано с появлением на трубах пучка турбулентного пограничного слоя, который может появиться при  $Re < 1 \cdot 10^5$ .

При  $Re = 1 \cdot 10^5$  лобовая часть трубы оmyвается ламинарным пограничным слоем, а кормовая находится в вихревой зоне, при этом в межтрубном пространстве движение жидкости будет турбулентным. Такой режим называется смешанным режимом движения жидкости. В настоящее время наиболее изученным является именно этот режим, который соответствует значениям числа  $Re = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$ . Рассмотрим его особенности.

Омывание трубок первого ряда независимо от расположения труб в пучке практически не отличается от оmyвания одиночной трубы и зависит только от начальной турбулентности потока. Характер оmyвания следующих рядов труб в обоих пучках изменяется. При коридорном расположении трубы любого ряда затеняются соответственными трубами предыдущего ряда, что ухудшает оmyвание лобовой части, и большая часть поверхности трубы находится в слабой вихревой зоне. При шахматном расположении труб загромождения одних труб другими не происходит. Вследствие этого коэффициент теплоотдачи при шахматном расположении труб в одинаковых условиях выше, чем при коридорном.

На рис. 2.15 а и б показано изменение локального коэффициента теплоотдачи по окружности трубы в зависимости от угла  $\varphi$  для первого и последующих рядов семирядного коридорного и шахматного расположения пучков. По оси ординат отложены относительные значения коэффициента теплоотдачи  $\alpha_\varphi/\alpha$ , а по оси абсцисс – угол  $\varphi$ , отсчитываемый от лобовой точки трубы. Здесь  $\alpha$  – среднее значение коэффициента теплоотдачи по окружности труб различных рядов, а  $\alpha_\varphi$  – его локальное значение.

Из рассмотренных кривых (рис. 2.15, а, б) следует, что коэффициент теплоотдачи  $\alpha_\varphi$  для любого ряда шахматного расположения труб в лобовой части (при  $\varphi = 0$ ) получает максимальное значение и изменение его мало отличается от изменения коэффициента теплоотдачи для одиночной трубы. Такое же изменение коэффициента теплоотдачи имеет место и для первого ряда коридорного расположения пучка. Для трубок второго и следующих рядов коридорного расположения получается два максимума теплоотдачи  $\alpha_\varphi$  при углах около  $50 - 60^\circ$  к направлению потока. Из этого следует, что теплоотдача как в лобовой, так и в кормовой части труб меньше по сравнению с теплоотдачей одиночной трубы. При любом расположении труб каждый ряд вызывает дополнительную турбулизацию потока. Поэтому коэффициент теплоотдачи для труб второго ряда выше, чем для первого, а для третьего ряда выше, чем для второго.

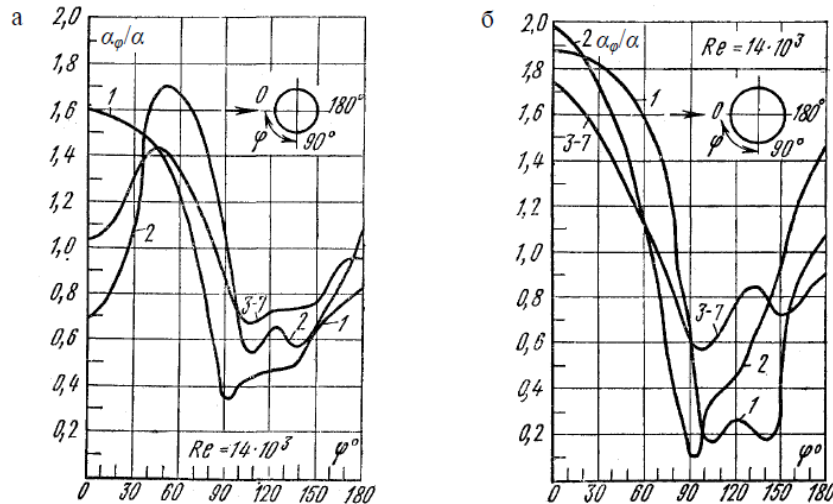


Рисунок 2.15 - Изменение коэффициента теплоотдачи по окружности труб для различных рядов (с 1-го по 7-й) коридорных (а) и шахматных (б) пучков труб

Начиная с третьего ряда, поток жидкости стабилизируется, и коэффициент теплоотдачи для всех последующих рядов остается постоянным. Если коэффициент теплоотдачи третьего ряда принять за 100%, то коэффициент теплоотдачи первого ряда коридорных и шахматных пучков составляет лишь 60%. Коэффициент теплоотдачи второго ряда коридорного пучка составляет 90%, а шахматного – 70% (рис. 2.16).

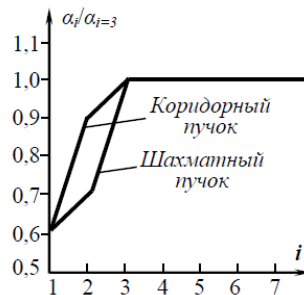


Рисунок 2.16 - Графики изменения относительных коэффициентов теплоотдачи по рядам пучков труб

В целом теплоотдача в шахматных пучках за счет лучшей турбулизации потока выше, чем в коридорных. Кроме того, теплоотдача в пучках зависит от расстояния между трубами. Эта зависимость учитывается поправочным коэффициентом  $\varepsilon_s$ , представляющим собой влияние относительных шагов. Для глубинных рядов коридорного расположения пучка  $\varepsilon_s = (s_2/d)^{-0,15}$ ; для шахматного: при  $s_1/s_2 < 2$   $\varepsilon_s = (s_1/s_2)^{1/6}$ , при  $s_1/s_2 \geq 2$   $\varepsilon_s = 1,12$ .

При расчете теплообменных аппаратов и определении среднего коэффициента теплоотдачи для третьего и последующих рядов труб в пучке при смешанном режиме ( $Re = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$ ) применяются следующие уравнения, полученные В. П. Исаченко: при коридорном расположении труб

$$Nu_{жд} = 0,26 Re_{жд}^{0,65} Pr_{ж}^{0,33} (Pr_{ж} / Pr_{см})^{0,25} \varepsilon_s, \quad (2.43)$$

при шахматном расположении труб

$$Nu_{жд} = 0,41 Re_{жд}^{0,6} Pr_{ж}^{0,33} (Pr_{ж} / Pr_{см})^{0,25} \varepsilon_s. \quad (2.44)$$

Для воздуха расчетные формулы (2.43) и (2.44) упрощаются и принимают вид:

при коридорном расположении труб

$$Nu_{жд} = 0,21 Re_{жд}^{0,65} \varepsilon_s, \quad (2.45)$$

при шахматном расположении труб

$$Nu_{жд} = 0,37 Re_{жд}^{0,6} \varepsilon_s. \quad (2.46)$$

При вычислении чисел подобия по формулам (2.43) – (2.46) за определяющую температуру принята средняя температура жидкости; за определяющую скорость – скорость жидкости в самом узком сечении ряда; за определяющий размер – наружный диаметр трубы. Формулы справедливы для любых капельных жидкостей и газов.

Значение коэффициента теплоотдачи для трубок первого ряда определяется путем умножения коэффициента теплоотдачи для третьего ряда на поправочный коэффициент  $\varepsilon_1 = 0,6$ ; для труб второго ряда в шахматных пучках – на  $\varepsilon_2 = 0,7$ , а в коридорных – на  $\varepsilon_2 = 0,9$ .

Среднее значение коэффициента теплоотдачи для всего пучка в целом определяется по формуле осреднения

$$\alpha_{cp} = \frac{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \quad (2.47)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – средние коэффициенты теплоотдачи в отдельных рядах труб;

$F_1, F_2, \dots, F_n$  – поверхности нагрева каждого ряда.

Если пучок труб омывается вынужденным потоком жидкости под углом  $\psi < 90^\circ$ , то коэффициент теплоотдачи для пучка труб при  $\psi = 90^\circ$  необходимо умножить на поправочный коэффициент  $\varepsilon_\psi$ , приведенный в табл. 1.4, тогда  $\alpha_\psi = \varepsilon_\psi \cdot \alpha_{90}$ .

Таблица 2.3 - Значения поправочного коэффициента  $\varepsilon_\psi$  в зависимости от угла  $\psi$

$\psi$	90	80	70	60	50	40	30	20	10
$\varepsilon_\psi$	1,00	1,00	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

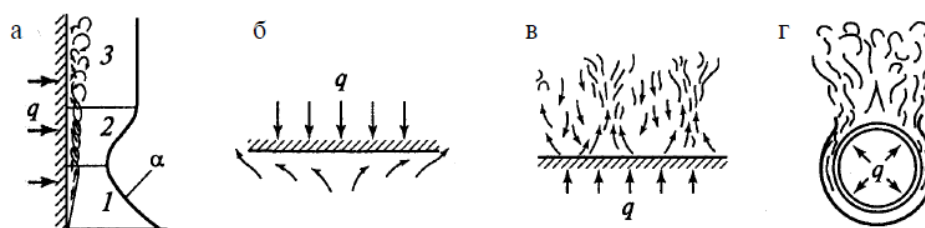
### 2.7.6 - Теплоотдача при свободной конвекции

Свободная, или естественная, конвекция возникает в связи с изменением плотности жидкости от нагревания, которое происходит неравномерно. Свободная конвекция имеет место у нагретых стен печей, трубопроводов, у радиаторов различного назначения, в холодильных установках и в других случаях. Этот вид теплообмена играет большую роль как в промышленности, так и в быту. Свободный теплообмен возникает в неравномерно нагретом газе или жидкости, находящейся как в ограниченном, так и в неограниченном пространстве. Если тело имеет более высокую температуру, чем окружающая среда, то слои жидкости, нагреваясь от тела, становятся легче и под действием возникающей подъемной силы поднимаются вверх, а на их место поступают из окружающего пространства более холодные слои. Поэтому и возникает свободное движение (рис. 2.17).

Все наши знания по определению коэффициента теплоотдачи в основном базируются на эксперименте.

Глубокие экспериментальные исследования по теплоотдаче в свободном потоке были выполнены академиками М. В. Кирпичевым, М. А. Михеевым и их учениками. Многочисленные исследования по теплоотдаче в свободном потоке жидкости были проведены с горизонтальными и вертикальными проволоками, трубами, плитами и шарами. Опыты проводились с воздухом, водородом, углекислым газом, водой, маслом и различными органическими жидкостями.

В результате обобщения опытных данных были получены эмпирические уравнения подобия.



а - нагрев вертикальной стенки ; б - нагрев горизонтальной стенки сверху; в - нагрев горизонтальной стенки снизу; г - нагрев горизонтальной трубы изнутри; 1, 2 и 3 – соответственно ламинарный,

переходный и турбулентный участки движения жидкости.

Рисунок 2.17 – Характер движения жидкости при естественной конвекции в неограниченном пространстве

Рассмотрим свободный теплообмен в неограниченном пространстве у вертикальной плиты или трубы (рис. 2.17, а). Возникающее свободное движение жидкости у вертикальных поверхностей может быть как ламинарным, так и турбулентным. Характер движения жидкости в основном зависит от температурного напора  $\Delta t = t_{cm} - t_{жс}$  (здесь  $t_{cm}$  – температура нагретой поверхности;  $t_{жс}$  – температура неподвижной жидкости вдали от поверхности). При малых значениях температурного напора вдоль всей поверхности наблюдается ламинарное движение жидкости. При больших температурных напорах преобладает турбулентный режим движения. В развитии свободного движения форма тела играет второстепенную роль. Основное значение для свободного движения жидкости имеет длина поверхности, вдоль которой происходит теплообмен.

Характерная картина свободного движения и изменение коэффициента теплоотдачи вдоль вертикальной стенки показаны на рис. 2.17,а. У нижней части стенки в поднимающемся с небольшой скоростью воздухе (жидкости) наблюдается ламинарное движение с постепенно увеличивающейся толщиной ламинарного пограничного слоя. На некотором расстоянии по высоте от нижнего края стенки ламинарный пограничный слой начинает разрушаться, возникает локонообразное движение жидкости, которое постепенно усиливается и переходит в развитое турбулентное движение с ламинарным подслоем в непосредственной близости к поверхности. В соответствии с изменением толщины пограничного слоя и характера движения жидкости у поверхности изменяется и коэффициент теплоотдачи. По мере увеличения ламинарного пограничного слоя, считая от нижнего конца стенки, коэффициент теплоотдачи уменьшается. Минимального значения коэффициент теплоотдачи достигает там, где толщина ламинарного пограничного слоя будет максимальной.

В области переходного движения коэффициент теплоотдачи постепенно возрастает и принимает наибольшее постоянное значение в области развитого турбулентного движения жидкости. На рис. 2.17, а показана зависимость коэффициента  $\alpha$  только от высоты стенки. Переменность физических параметров жидкости и температурного напора по высоте может привести к изменению коэффициентов теплоотдачи. В среднем теплоотдача при переходном режиме возрастает от значения, соответствующего ламинарному течению, до значения, соответствующего турбулентному движению жидкости.

Для определения среднего коэффициента теплоотдачи при свободном ламинарном движении жидкости вдоль вертикальных стенок и труб, если  $(Gr_{жсл} \cdot Pr_{жс}) \leq 10^3 \div 10^9$ , то можно использовать следующее уравнение:

$$Nu_{жсл} = 0,75(Gr_{жсл} \cdot Pr_{жс})^{0,25} (Pr_{жс}/Pr_{см})^{0,25} \quad (2.48)$$

Для определения среднего коэффициента теплоотдачи при свободном турбулентном движении жидкости вдоль вертикальной стенки, которое наступает при произведении чисел  $(Gr_{жсл} \cdot Pr_{жс}) > 6 \cdot 10^{10}$ , предложена следующая формула

$$Nu_{жсл} = 0,15(Gr_{жсл} \cdot Pr_{жс})^{0,33} (Pr_{жс}/Pr_{см})^{0,25} \quad (2.49)$$

Уравнения (2.48), (2.49) получены для чисел  $Pr_{жс} \geq 0,7$ . В этих формулах за определяющую температуру принята температура жидкости вдали от нагретой поверхности; за определяющий размер – длина поверхности, отсчитываемая от начала теплообмена.

На рис. 217(б – г) показан характер свободного движения жидкости около горячих горизонтальных поверхностей и труб. Особенностью свободного движения жидкости около горизонтальных труб является то, что у труб малого диаметра восходящий поток сохраняет ламинарный режим даже вдали от трубы, а при большом диаметре переход в турбулентный режим может происходить в пределах поверхности самой трубы.

Для определения средних коэффициентов теплоотдачи при свободном ламинарном движении жидкости около горизонтальных труб при  $10^3 < (Gr_{ж\delta} \cdot Pr_{ж}) < 10^8$  может быть применена формула

$$Nu_{ж\delta} = 0,5(Gr_{ж\delta} \cdot Pr_{ж})^{0,25} (Pr_{ж}/Pr_{см})^{0,25} \quad (2.50)$$

Здесь за определяющую температуру принята температура капельной жидкости или газа вдали от трубы, а за определяющий размер – наружный диаметр трубы.

### 2.7.7 Теплоотдача при свободной конвекции в ограниченном пространстве

В теплотехнике встречаются случаи, когда свободная конвекция возникает в ограниченном пространстве (рис. 2.18). Теплоотдача в замкнутом ограниченном пространстве не может развиваться свободно, поэтому условия теплообмена в этом случае определяются формой и размерами пространства.

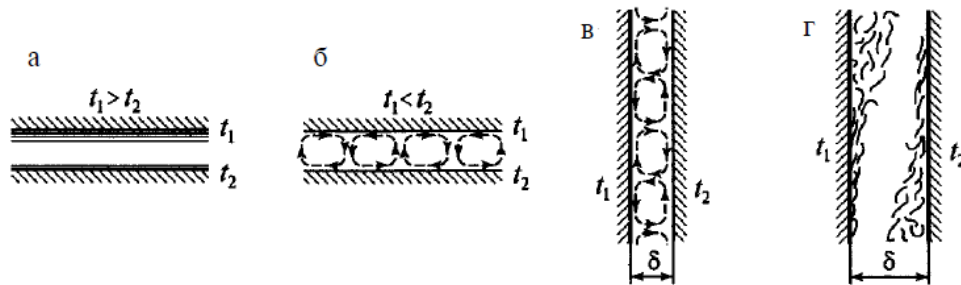
Рассчитать такой теплообмен достаточно трудно. Для упрощения расчета сложный процесс теплообмена заменяют теплопроводностью путем введения понятия эквивалентного коэффициента теплопроводности,  $\lambda_{экв}$ , Вт/(м·°С)

$$\lambda_{экв} = (q \delta) / \Delta t, \quad (2.51)$$

где  $q$  – плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup> ;

$\delta$  – толщина (ширина) замкнутого пространства, м;

$\Delta t$  – разность температур между параллельными поверхностями, °С.



а - горизонтальная прослойка при нагреве сверху; б - горизонтальная прослойка при нагреве снизу; в, г - вертикальные прослойки разной ширины.

Рисунок 2.18 - Характер естественного движения жидкости, находящейся в ограниченном пространстве

Влияние конвекции учитывается с помощью коэффициента конвекции  $\varepsilon_k$ , представляющего собой отношение  $\lambda_{экв}$  к  $\lambda$  той же среды при средней температуре.

В приближенных расчетах при  $(Gr_{ж\delta} \cdot Pr_{ж}) > 10^3$  принимают

$$\varepsilon_k = 0,18(Gr_{ж\delta} \cdot Pr_{ж})^{0,25} \quad (2.52)$$

После определения  $\varepsilon_k$  вычисляют  $\lambda_{экв}$  и  $q$  по формулам

$$\lambda_{экв} = \varepsilon_k \lambda \quad (2.53)$$

$$q = \lambda_{экв} \Delta t / \delta \quad (2.54)$$

В уравнении (2.52) при определении чисел подобия (независимо от формы прослойки) за определяющий размер принята ее толщина  $\delta$ , а за определяющую температуру – средняя температура  $t_{cp} = 0,5(t_1 + t_2)$ .

## Глава 3 Теплообмен излучением

### 3.1 Основные понятия

При любых температурах выше абсолютного нуля все тела обладают способностью непрерывно посылать в окружающее пространство электромагнитные волны различной длины. Электромагнитные волны представляют собой поток элементарных частиц, называемых фотонами, обладающих энергией, импульсом и нулевой массой покоя. Источниками фотонов являются атомы и молекулы излучающего тела. При излучении фотоны отрываются от атомов и молекул излучающего тела и движутся в пространстве со скоростью света (в вакууме). Попадая на другое тело, фотоны передают свой импульс и



свою энергию атомам и молекулам этого тела, преобразуясь при этом в другую форму материи.

Электромагнитные волны принято классифицировать в зависимости от длины волны, а также от источников излучения.

Вид излучения	Длина волны, м
$\gamma$ – излучения	$1 \cdot 10^{-15} - 1 \cdot 10^{-11}$
Рентгеновское	$1 \cdot 10^{-12} - 1 \cdot 10^{-9}$
Ультрафиолетовое	$20 \cdot 10^{-9} - 0,4 \cdot 10^{-6}$
Видимое (световое)	$0,4 \cdot 10^{-6} - 0,8 \cdot 10^{-6}$
Тепловое (инфракрасное)	$0,8 \cdot 10^{-6} - 0,8 \cdot 10^{-3}$
Радиоволны	$10^{-2} - 10^{-3}$

Изучение различных тел зависит от природы тела, его температуры и состояния поверхности. Большинство твёрдых и жидких тел излучают энергию всех длин волн в интервале от 0 до  $\infty$ , т. е. эти тела имеют сплошной спектр излучения. Некоторые тела излучают энергию с прерывистым спектром, т. е. в определённых интервалах. К ним относятся нагретые газы и пары.

Излучение, определяемое только температурой и оптическими свойствами излучающего тела, называют тепловым излучением или радиацией.

Все тела обладает свойствами теплового излучения и каждое из них излучает энергию в окружающее пространство. Тепловые лучи, поглощённые другим телом, преобразуются в энергию хаотического теплового движения атомов и молекул и повышают температуру тела. Таким образом, теплообмен излучением осуществляется в результате двойного взаимного превращения энергии: тепловая – лучистая – тепловая. Интенсивность излучения повышается с повышением температуры излучающих тел.

Потоком излучения  $E$  называют излучение, проходящее в единицу времени через произвольную поверхность:

$$E = Q/\tau. \quad (3.1)$$

Единица измерения потока – ватт (Вт).

$Q$  - лучистый поток, испускаемый площадкой  $F$

Поверхностной плотностью  $q$  потока излучения называют отношение потока излучения к площади поверхности и измеряется в Вт/м<sup>2</sup>

$$q = E/A.$$

Из всего потока излучения  $E$ , падающего на поверхность тела, часть  $E_A$  поглощается телом, часть  $E_R$  отражается от него, а часть  $E_D$  пропускается сквозь тело, т. е.

$$E = E_A + E_R + E_D.$$

Поделим обе части уравнения на  $E$

$$E_A/E + E_R/E + E_D/E = 1. \quad (3.2)$$

Обозначим:

$E_A/E = A$  – поглощательная способность тела;

$E_R/E = R$  – отражательная способность тела;

$E_D/E = D$  – пропускательная способность тела.

Учитывая равенство (3.2) получим:

$$A + R + D = 1. \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) называется уравнением теплового баланса.

Если  $A = 1$  (при  $R = D = 0$ ), то тело поглощает всё падающее на него излучение, ничего не поглощая и не пропуская. Такое тело называется абсолютно чёрным. Нефтяная сажа наиболее подходит к абсолютно чёрному телу –  $A = 0,9 - 0,96$ .

Если  $R = 1$  (при  $A = D = 0$ ), то тело отражает весь поток излучения. Если угол падения равен углу отражения, тело называют зеркальным. Если же излучение отражается во все направления, то поверхность тела называют абсолютно белым.

Если  $D = 1$  (при  $A = R = 0$ ), то тело пропускает всё падающее излучение и называется абсолютно прозрачным или диатермичным. Все одно и двухатомные газы можно считать

диатермичными телами. В противоположность им трёхатомные и многоатомные газы поглощают и излучают тепловую энергию.

В реальных условиях абсолютно чёрных, белых и прозрачных тел не существует. Для всех реальных тел коэффициенты  $A$ ,  $R$ ,  $D$  всегда меньше единицы.

Реальные тела обладают лишь той или иной степенью черноты, белизны и прозрачности.

Тело, спектральная поглощательная способность которого не зависит от длины волны падающего излучения, называют серым.

Цвет тела определяется способностью поглощать и отражать свет с различными длинами волн.

### 3.2 Законы лучистого теплообмена

**Закон Кирхгофа.** При термодинамическом равновесии отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела, а является одинаковой для всех тел функцией температуры и равно излучательной способности абсолютно чёрного тела при той же температуре.

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = \dots = E_0/A_0 = f(T),$$

где  $E_0$  и  $A_0$  - излучательные и поглощательные способности абсолютно чёрного тела, а аналогичные величины  $E_1$ ,  $A_1$ ,  $E_2$ ,  $A_2$  соответственно относятся к первому, второму и т. д. телам.

**Закон Стефана – Больцмана.** Поток излучения абсолютно чёрного тела прямо пропорционален четвёртой степени его температуры.

$$E_0 = \sigma_0 T^4,$$

где  $\sigma_0 = 5,7 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> К<sup>4</sup>) – константа излучения абсолютно чёрного тела.

Обычно это уравнение записывают так

$$E_0 = C_0 (T/100)^4,$$

где  $C_0 = 5,7$  Вт/(м<sup>2</sup> К<sup>4</sup>) – постоянная излучения абсолютно чёрного тела.

Закон Стефана – Больцмана применим также и для серых тел. У серых тел, так же как и у чёрных, излучательная способность пропорциональна абсолютной температуре в четвёртой степени:

$$E = C (T/100)^4,$$

$C$  – коэффициент излучения серого тела, Вт/(м<sup>2</sup> К<sup>4</sup>) – определяется природой, температурой, состоянием поверхности тела и всегда меньше  $C_0$ .

Отношение коэффициента излучения серого тела к постоянной излучения абсолютно чёрного тела при той же температуре называется степенью черноты и обозначается  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = C/C_0,$$

Используя понятие степени черноты, можно записать закон Стефана – Больцмана для реального тела:

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 = C \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4. \quad (3.4)$$

Так как  $C_0 > C$ , то всегда степень черноты серого тела  $\varepsilon < 1$ .

Таблица 3.1 - Степень черноты различных материалов

Материал	Температура, °С	Степень черноты $\varepsilon$
Алюминий:		
полированный	225...575	0,039...0,057
с шероховатой поверхностью	26	0,055
Сталь:		
листовая шлифованная	940...1100	0,55...0,61
окисленная	200...600	0,80
Медь:		
полированная	80...115	0,018...0,023
окисленная	200...600	0,57...0,87
Чугун обточенный	830...990	0,60...0,70
Кирпич:		
красный строительный	20	0,93
огнеупорный	1100	0,75
Штукатурка известковая шероховатая	10...90	0,91
Сажа ламповая	40...370	0,945
Вода	0...100	0,95...0,963
Масляные краски различных цветов	100	0,92...0,96

**Закон Планка.** Законы лучистого теплообмена получены для абсолютно черного тела, при условии, что все рассматриваемые тела принимают одинаковую температуру (т. е. находятся в термодинамическом равновесии), т. к. испускают и поглощают лучистую энергию в одинаковых количествах.

Интенсивность излучения абсолютно черного тела и любого реального серого тела зависит от температуры и длины волны. Абсолютно черное тела испускает лучи всех длин волн от 0 до  $\infty$ . Если каким-либо образом отделить лучи с разными длинами волн друг от друга и измерить энергию каждого луча, то окажется, что распределение энергии вдоль спектра различно.

Закон Планка устанавливает распределение интенсивности излучения по различным участкам спектра длин волн  $\lambda$ .

Связь спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела  $I_{\lambda 0}$ , Вт/м<sup>3</sup>, (в дальнейшем все характеристики абсолютно черного тела будем записывать с индексом «0») с длиной волны излучения  $\lambda$  и абсолютной температурой тела была установлена в 1900 году М. Планком:

$$I_{\lambda 0} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/(\lambda T)} - 1}, \quad (3.5)$$

где  $C_1 = 3,74 \cdot 10^{-16}$  Вт/м<sup>2</sup> и  $C_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$  м·К – постоянные излучения.

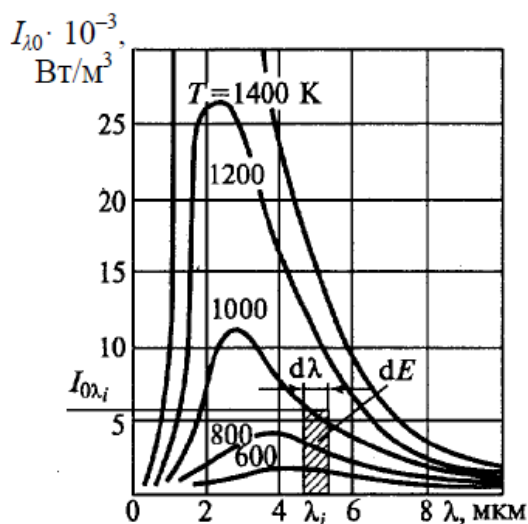


Рисунок 3.1 - Спектральная плотность потока излучения по закону Планка

Графически закон Планка представлен на рис. 3.1. Для луча одной и той же длины волны интенсивность излучения увеличивается с возрастанием температуры тела, испускающего лучи.

Из рис. 3.1 видно, что плотность потока излучения  $I_{\lambda 0}$  возрастает от нуля при  $\lambda = 0$  до максимума при определенной длине волны  $\lambda_{max}$  и снова стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

В. Вин в 1893 г. установил, что произведение  $T\lambda_{max}$  есть величина постоянная, т. е. для длины волны  $\lambda_{max}$ , мкм, соответствующей максимальному значению  $I_{\lambda 0}$ , справедливо отношение

$$\lambda_{max} = \frac{2,898 \cdot 10^3}{T}, \quad (3.6)$$

где  $T$  – абсолютная температура излучающего тела, К.

Из выражения (3.6) сле

Пользуясь законом Вина, можно определить температуру сильно нагретых тел на расстоянии, например, температуру расплавленных металлов или космических объектов.

**Закон Ламберта.** Ранее было показано, что закон Стефана – Больцмана определяет количество энергии, излучаемой телом по всем направлениям. Однако интенсивность зависит от его направления, определяемого углом  $\varphi$ , который оно образует с нормалью к поверхности (рис. 3.2).

И. Ламберт установил, что максимальное излучение  $E_n$  имеет место в направлении нормали к поверхности. Количество энергии  $E_\varphi$ , излучаемой под углом  $\varphi$  к нормали, пропорционально косинусу угла  $\varphi$ :

$$E_\varphi = E_n \cos \varphi. \quad (3.7)$$

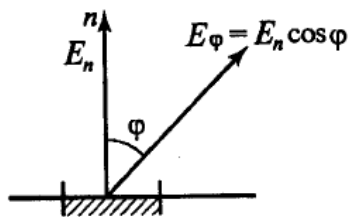


Рисунок 3.2 - К закону Ламберта

Отсюда видно, что интенсивность излучения вдоль поверхности (при  $\varphi = 90^\circ$ ) равна нулю.

Закон Ламберта применим для тел, обладающих диффузным излучением, в диапазоне изменения угла  $0 < \varphi < 60^\circ$ . Закон Ламберта неприменим для зеркальных поверхностей.

### 3.3 Лучистый теплообмен между твердыми телами

#### 3.3.1 Лучистый теплообмен между двумя параллельными пластинами

Вначале рассмотрим теплообмен между двумя единичными (по  $1 \text{ м}^2$ ) поверхностями, обращенными друг к другу с небольшим зазором (рис. 3.3), причем  $T_1 > T_2$ . Степени черноты этих поверхностей различны и равны  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , соответственно. В этой системе  $E_1$  энергия собственного излучения первого тела на второе,  $E_2$  – второго на первое. После попадания энергии  $E_1$  на второе тело часть ее  $E_1 A_2$  поглощается вторым телом, часть  $E_1 - E_1 A_2 = E_1(1 - A_2)$  отражается снова на первое тело, где доля  $E_1(1 - A_2)A_1$  отраженного излучения поглощается, а доля  $E_1(1 - A_2)(1 - A_1)$  отражается на второе тело и так до бесконечности.

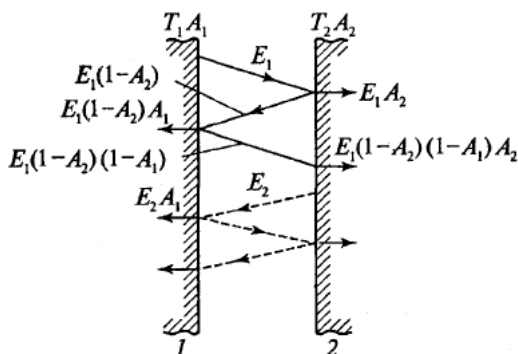


Рисунок 3.3 - Схема лучистого теплообмена между двумя параллельными пластинами

Введем понятие эффективного излучения тела, которое равно сумме его собственного и отраженного излучений. Для непрозрачного тела при  $D = 0$  и  $R = 1 - A$  выражение для определения эффективного излучения тела  $E_{эф}$  будет иметь вид

$$E_{эф} = E + E_{над} (1 - A) . \quad (3.8)$$

Каждое из рассматриваемых тел, изображенных на рис. 3.3, имеет эффективное (полное) излучение, соответственно  $E_{эф1}$  и  $E_{эф2}$ . Для первого тела  $E_{эф2}$  является падающим излучением, поэтому

$$E_{эф1} = E_1 + E_{эф2} (1 - A_1) . \quad (3.9)$$

Здесь величина  $E_{эф2}(1 - A_1)$  автоматически учитывает бесконечную сумму отраженных первым телом потоков. Аналогично для второго тела

$$E_{эф2} = E_2 + E_{эф1} (1 - A_2) . \quad (3.10)$$

Решая систему уравнений (3.9) и (3.10) относительно  $E_{эф1}$  и  $E_{эф2}$ , получим:

$$E_{эф1} = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} , \quad (3.11)$$

$$E_{эф2} = \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} . \quad (3.12)$$

Плотность результирующего теплового потока от первого тела на второе  $q_{1,2}$ , Вт/м<sup>2</sup>, определяется по формуле

$$q_{1,2} = E_{эф1} - E_{эф2} = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} . \quad (3.13)$$

Выразим  $E_1$ ,  $E_2$  по закону Стефана – Больцмана (3.4) и подставим в уравнение (3.13). Опуская подстановки и замены соответствующих величин и считая, что коэффициенты теплового излучения обеих поверхностей существенно не изменяются в диапазоне температур от  $T_1$  до  $T_2$ , получим

$$q_{1,2} = C_{np} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (3.14)$$

где  $C_{np}$  – приведенный коэффициент излучения, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>).

Приведенный коэффициент излучения определяется по формуле

$$C_{np} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 - 1/C_0}, \quad (3.15)$$

где  $C_1 = \varepsilon_1 C_0$  – коэффициент излучения первого тела, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);

$C_2 = \varepsilon_2 C_0$  – коэффициент излучения второго тела, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>).

Из формулы (3.14) следует, что полный поток теплоты  $Q_{1,2}$ , Вт, передаваемой излучением от горячего тела холодному, пропорционален поверхности тела  $F$ , м<sup>2</sup>, приведенному коэффициенту теплового излучения системы  $C_{np}$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>), и разности четвертых степеней абсолютных температур тел

$$Q_{1,2} = C_{np} F \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

### 3.3.2 Лучистый теплообмен между поверхностями, находящимися одна внутри другой

На практике часто встречается случай, когда одна теплообменная поверхность находится внутри другой с большим зазором (рис. 3.4).

В отличие от теплообмена между близко расположенными поверхностями одинаковой величины здесь лишь часть излучения поверхности  $F_2$  попадает на  $F_1$ . Остальная энергия воспринимается самой же поверхностью  $F_2$ . Количество теплоты, излученной внутренним телом внешнему телу, можно определить по формуле

$$Q_{1,2} = C_{np} F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.16)$$

Приведенный коэффициент излучения  $C_{np}$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>), определяется по формуле

$$C_{np} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0} \right)}.$$

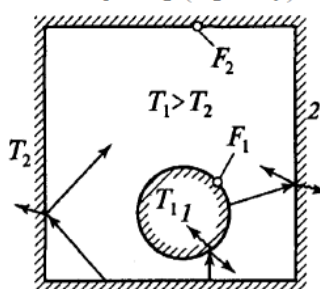


Рисунок 3.4 - Схема лучистого теплообмена между телами в замкнутом пространстве

В расчетах можно применять приведенную степень черноты системы тел  $\varepsilon_{np}$

$$\varepsilon_{np} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (3.17)$$

Тогда в формулу (3.17) вместо  $C_{np}$  нужно подставлять произведение  $\varepsilon_{np} C_0$ .

В общем случае теплообмена каждое из тел излучает в сторону другого лишь часть своей энергии, остальная часть рассеивается в пространстве или попадает на другие тела. Поэтому в расчетную формулу (3.17) вводится поправочный коэффициент, называемый

коэффициентом облученности тела  $\varphi_{1,2}$ , учитывающий долю излучения первого тела, которая воспринимается вторым телом.

Таким образом, теплообмен между двумя произвольно расположенными телами может быть рассчитан по формулам

$$Q_{1,2} = \varphi_{1,2} C_{np} F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (3.18)$$

или

$$Q_{1,2} = \varphi_{1,2} \varepsilon_{np} C_0 F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.19)$$

Коэффициент облученности называют также угловым коэффициентом излучения. Это чисто геометрический фактор, зависящий только от формы, размеров тел и их взаимного расположения. Различают коэффициент облученности первым телом второго  $\varphi_{1,2}$  и коэффициент облученности вторым телом первого  $\varphi_{2,1}$ . При этом  $\varphi_{1,2} F_1 = \varphi_{2,1} F_2$ . Коэффициент облученности определяется аналитически или экспериментально. Для большинства частных случаев в технике значения коэффициентов облученности или соответствующие формулы для их расчета приводятся в справочниках. Если все излучение первого тела попадает на другое, как показано на рис. 3.4, то  $\varphi_{1,2} = 1$ .

В приближенных расчетах лучистого теплообмена между двумя произвольно расположенными телами величину  $\varepsilon_{np}$  допустимо рассчитывать по формуле  $\varepsilon_{np} = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ .

При  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 \geq 0,8$  ошибка таких расчетов меняется от 0 до 20 % при изменении отношения  $F_1/F_2$  от 1 до 0.

### 3.3.3 Влияние экранов на лучистый теплообмен

Для защиты от перегрева некоторых элементов требуется уменьшить лучистый теплообмен. Например, чтобы оградить рабочих от действия теплового излучения в горячих цехах, где имеются поверхности с высокими температурами. В других случаях необходимо защитить деревянные части зданий в целях предотвращения воспламенения. В этом случае между излучателем и обогреваемым элементом ставят перегородки, называемые экранами.

Обычно экран представляет собой тонкий металлический лист с большой отражательной способностью, причем температуры обеих поверхностей экрана можно считать одинаковыми.

Рассмотрим действие экрана, установленного при лучистом теплообмене между двумя плоскими безграничными параллельными поверхностями, причем передачей теплоты конвекцией будем пренебрегать (рис. 3.5).

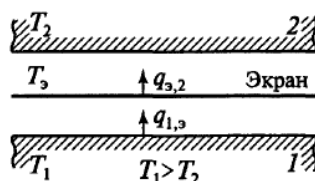


Рисунок 3.5 - Схема лучистого теплообмена между двумя поверхностями через экран

Температуры стенок и экрана поддерживаются постоянными, причем  $T_1 > T_2$ . Поверхности стенок и экрана считаются одинаковыми и имеют одну и ту же степень черноты  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{эк} = \varepsilon$ , следовательно, коэффициенты излучения стенок и экрана равны между собой. Тогда приведенные коэффициенты излучения между поверхностями без экрана, между первой поверхностью и экраном, экраном и второй поверхностью также равны между собой и равны  $C_{np}$ .

Удельный лучистый тепловой поток  $q_0$ , Вт/м<sup>2</sup>, передаваемый от первой поверхности ко второй без экрана, определяем по формуле

$$q_0 = C_{np} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.20)$$

Тепловой поток  $q_1$ , Вт/м<sup>2</sup>, передаваемый от первой поверхности к экрану, находим по формуле

$$q_1 = C_{np} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{эк}}{100} \right)^4 \right], \quad (3.21)$$

а от экрана ко второй поверхности  $q_2$ , Вт/м<sup>2</sup>, по уравнению:

$$q_2 = C_{np} \left[ \left( \frac{T_{эк}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.22)$$

При установившемся тепловом состоянии  $q_1 = q_2$ , поэтому

$$C_{np} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{эк}}{100} \right)^4 \right] = C_{np} \left[ \left( \frac{T_{эк}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.23)$$

Отсюда можно выразить отношение, из которого находится температура экрана  $T_{эк}$ , К

$$\left( \frac{T_{эк}}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.24)$$

Подставляя полученную температуру экрана в уравнение (3.21) или (3.22), получаем

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} C_{np} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.25)$$

Сравнивая уравнения (3.21) и (3.22), находим, что установка одного экрана при принятых условиях уменьшает удельный лучистый тепловой поток в два раза

$$q_{1,2} = 1/2 q_0 \quad (3.26)$$

Аналогично можно доказать, что установка двух экранов уменьшает лучистый тепловой поток втрое, установка трех экранов уменьшает лучистый тепловой поток вчетверо и т. д.

Таким образом, при установке  $n$  экранов можно записать

$$q_0 = q_n / (n+1) \quad (3.27)$$

При установке  $n$  экранов в случае, если  $\varepsilon_{эк} \neq \varepsilon$  ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ), справедливо отношение

$$\frac{q_n}{q_0} = \frac{1}{1 + n \frac{\varepsilon(2 - \varepsilon_{эк})}{\varepsilon_{эк}(2 - \varepsilon)}}. \quad (3.28)$$

Значительный эффект уменьшения теплообмена излучением получается при использовании экрана из полированного металла. Если  $\varepsilon = 0,8$  (окисленная стальная поверхность), а  $\varepsilon_{эк} = 0,1$  (полированная металлическая поверхность), то при наличии одного экрана  $q_n/q_0 = 0,073$ , т. е. лучистый тепловой поток уменьшается более чем в 13 раз. При наличии трех таких экранов лучистый теплообмен снижается в 39 раз! На этом основано конструирование специальной изоляции, состоящей из множества полированных металлических пластин или фольги с зазорами, широко применяемой в последнее время. Для исключения конвекции и теплопроводности из зазоров часто откачивается воздух. Такая изоляция называется вакуумно-многослойной.

### Список использованных источников



1. Видин. Ю.В. Тепломассообмен: учеб.-метод. пособие к выполнению контрольных заданий / Ю. В. Видин, В. В. Колосов. Красноярск : Издво КГТУ, 1998. – 56 с.
2. Бойков, Г. П. Основы тепломассообмена: учеб. пособие / Г. П. Бойков, Ю. В. Видин, В. М. Журавлев. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2000. – 272 с.
3. Теоретические основы теплотехники : учеб. пособие / В. И. Ляшков. – М. : Высш. школа, 2007. – 300 с.
4. Теплопередача : учеб. пособие / под ред. В. С. Чередниченко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 200 с.
5. Тепломассообмен : учеб. пособие к практ. занятиям / М. С. Лобасова, А. А. Дектерев, Д. С. Серебренников. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009.– (Тепломассообмен:УМКД № 1536-2008 / рук. творч. коллектива М. С. Лобасова).
6. Тепломассообмен : метод. указания к лаб. работам / сост.: К. А. Фиников, М. С. Лобасова. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – (Тепломассообмен : УМКД № 1536-2008 / рук. творч. коллектива М. С. Лобасова).
7. Тепломассообмен : метод. указания по самостоятельной работе / сост. М. С. Лобасова, А. А. Дектерев, К. А. Фиников, Д. С. Серебренников. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – (Тепломассообмен : УМКД № 1536-2008 / рук.творч. коллектива М. С. Лобасова).
8. Цветков, Ф. Ф. Тепломассообмен : учеб. пособие для вузов /Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев. – М. : МЭИ, 2006. – 550 с.
9. Орлов М.Е. Теоретические основы теплотехники. Тепломассообмен. Учебное пособие для вузов. Ульяновск. УлГТУ, 2013 – 204 с.
10. Апкарьян А.С. Организация производства гранулированной пеностеклокерамики ПСК-200 и автоматизация технологического процесса/ В.Г. Христюков. Томск. Россия. Издательство ТУСУРа. 2013. – С.174.
11. A.S. Arkaryan Afanasy S, Kulkov Sergey N, Gomze Laszlo A. Foam Glass Ceramics as Composite Heat-Insulating Material. *Építőanyag. Jurnal of Silikate Based and Composite Materials*. 2014, No. 2, pp.38-42 (Hungary, Budapest).