Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
(ТУСУР)

Кафедра физики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой физики
__________ Е.М. Окс
«__» _________ 2017 г.

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

для студентов всех специальностей

РЕЦЕНЗЕНТ

Профессор каф. физики
________ В.А. Бурдовицин
«___» _________2017 г

РАЗРАБОТЧИК

Доцент каф. физики
________ А.В. Лячин
«___» _________2017 г

2017

Кинематика поступательного и вращательного движения: учебно-методическое пособие / А.В. Лячин. – Томский университет систем управления и радиоэлектроники, 2016 – 48 с.

Рецензент: В.А. Бурдовицин, профессор каф. физики ТУСУР

Учебно-методическое пособие написано на основе лекций по курсу «Общей физики», читаемых для студентов Томского университета систем управления и радиоэлектроники. Содержание соответствует программе курса физики для технических специальностей. В пособии изложены физические основы раздела физики «Кинематика». Главное внимание уделено рассмотрению физического смысла и содержания основных понятий и законов. Изложение вопросов кинематики сопровождается подробно прокомментированными решениями задач разной степени трудности. Пособие может использоваться для самостоятельного изучения теоретического материала, для подготовки студентов к практическим занятиям. Пособие предназначено для студентов ТУСУР и преподавателей кафедры физики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

От автора

Предлагаемое учебно-методическое пособие представляет собой изложение части лекционного курса общей физики – первого раздела «Механики» – «Кинематика материальной точки и твёрдого тела» – в соответствии с программой дисциплины для студентов некоторых специальностей ТУСУР. Программный материал адаптирован таким образом, что может быть усвоен обучающимся со средним уровнем школьного образования. С этой целью перед теоретическим физическим материалом включены математические главы, в которых изложены элементы векторной алгебры, начала дифференциального и интегрального исчисления. Математические главы даны в расчёте на то, что изучение механики как раздела дисциплины «Физика» может оказаться опережающим по отношению к изучению соответствующих разделов курса высшей математики.

Изложение вопросов кинематики сопровождается подробно прокомментированными решениями задач разной степени трудности.

Общие представления о физике и предмете изучения механики

Физика – наука, изучающая общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи.

Физика – наука модельная. Это означает, что вместо реальных физических объектов мы создаем некоторые модели этих объектов. При создании моделей во внимание принимаются только те свойства и связи объектов, которые существенны для данного круга явлений. Поэтому и установленные закономерности действуют в рамках принятых моделей.

Задача физики состоит в том, чтобы создать в нашем сознании такую картину физического мира, которая наиболее полно отражает свойства мира и обеспечивает такие соотношения между элементами модели, какие существуют между элементами внешнего мира.

Наиболее распространенная модель – это модель материальной точки.

Материальная точка – абстрактный физический объект, в геометрическом смысле эквивалентный математической точке, но обладающий массой. Материальная точка есть идеализированный образ реально существующих тел. Можно или нельзя то или иное тело принять за материальную точку зависит не столько от размеров самого тела, сколько от характера движения, а также от содержания вопросов, на которые мы хотим получить ответ. Например, если нас интересует только движение центра тяжести космической станции по орбите, то мы можем принять ее за материальную точку. Если же нас интересует ее ориентация относительно поверхности Земли, то бессмысленно ее считать материальной точкой.

Другая модель: ***абсолютно твердое тело*** – жесткая совокупность материальных точек. Это означает, что расстояние между любыми двумя точками абсолютно твердого тела остается всегда неизменным.

Модели, применяемые в физике необходимы, т.к. невозможно описать «абсолютно точно» поведение физических объектов. Выражение «абсолютно точно» взято в кавычки, т.к. чаще всего оно вообще лишено практического смысла.

При изучении различного круга явлений важно установить законы, с помощью которых можно объяснить все известные явления, а также предсказать новые.

Как устанавливаются физические закономерности? Основные законы не могут быть выведены путем умозаключений. Их доказательством является опыт. Основные законы являются обобщением опытных фактов, и поэтому их справедливость устанавливается лишь в ограниченных пределах и с ограниченной точностью.

Так, например, ньютоновская механика применима для описания движущихся объектов, скорости которых существенно меньше скорости света ($v << c$). Такие движения называются ***нерелятивистскими***.

Механика, применимая к объектам, движущимся со скоростью, сравнимой со скоростью света называется ***релятивисткой механикой***. Ньютоновская механика является предельным случаем релятивистской механики. Это означает, что в приближении ($v << c$) выражения релятивистской механики переходят в выражения механики Ньютона.

Другое ограничение применения законов, и притом не только ньютоновской, но и релятивистской механики, было получено в результате изучения микромира – мира атомов и молекул. Считалось, что все понятия и законы макромира применимы и имеют смысл для тел сколь угодно малой массы и сколь угодно малых промежутков пространства и времени. Такой подход к изучению явлений природы называется ***классическим***.

Однако опыты показали, что классический подход к изучению явлений микромира неприменим. Для адекватного описания поведения микрочастиц требуется применение аппарата ***квантовой механики***, который учитывает волновые свойства этих частиц.

Релятивистская и квантовая механики являются более общими теориями, чем механика Ньютона. Однако это не означает, что механика Ньютона утратила свое значение. Изменения, вносимые релятивистской и квантовой механикой, во многих случаях сводятся к небольшим поправкам. Они называются соответственно ***релятивистскими*** и ***квантовыми***. В случае обычных медленных движений макроскопических тел эти поправки меньше пределов самых точных физических измерений.

Изучение ньютоновской механики мы начнем с ***кинематики*** – раздела физики, занимающегося только описанием движения материальных точек и тел.

Сначала вспомним некоторые сведения из векторной алгебры, начала дифференциального и интегрального исчисления.

1 НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 Понятие и изображение вектора

Физические величины, для определения которых достаточно знать их число (положительное, отрицательное или нуль) называются ***скалярами***. Это, например, масса тела, работа силы, кинетическая энергия, время, заряд частицы и т.д.

Величины, полное описание которых требует дополнительного указания их направления в пространстве, называются ***векторными***. Примерами являются: перемещение, скорость, сила, момент силы, напряжённость электрического поля, индукция магнитного поля и множество других.

Вектор физической величины изображается отрезком прямой со стрелкой. Длина отрезка, называемая ***модулем вектора***, в выбранном, удобном для изображения, масштабе соответствует численному значению физической величины. Начало отрезка-вектора относят к точке тела или пространства, в которой данная физическая величина определяется, а конец стрелки указывает направление физической величины.

На рис. 1.1 показан пример траектории движения тела – ракеты, запускаемой с поверхности Земли. Векторами скоростей $\mathbf{v}_{1\text{-}5}$ показано, как изменялся характер движения ракеты по мере её взлёта.

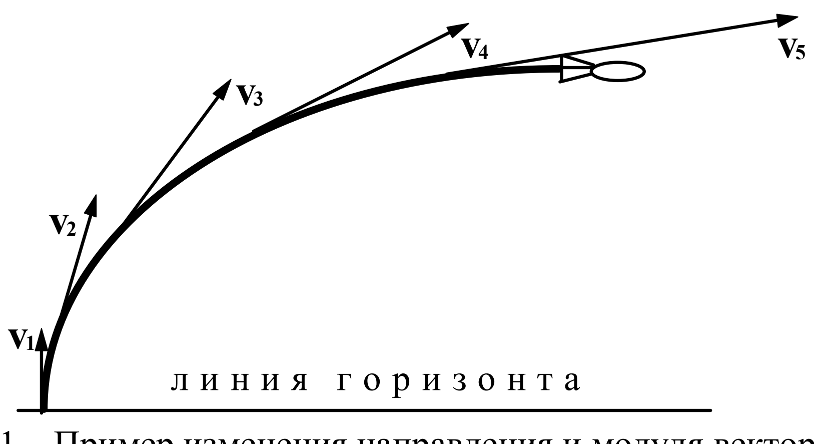


Рисунок 1.1 – Пример изменения направления и модуля вектора скорости

Буквенный символ вектора, в отличие от скаляра, изображается в учебной литературе (чаще всего) жирным прямым шрифтом или (реже) – нежирным курсивом со стрелочкой над буквой: $\mathbf{v}_0$ или $\vec{v}$. Модуль вектора изображается либо $|\mathbf{E}|$, либо нормальным курсивом: E.

1.2 Сложение и вычитание векторов

На примере экспериментального факта сложения сил возникло *правило сложения векторов* – «правило параллелограмма», согласно которому сумма векторов равна вектору, изображаемому диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах. Начала векторов-слагаемых и вектора-суммы при этом переносятся (относятся) в одну точку пространства или тела (рис. 1.2).

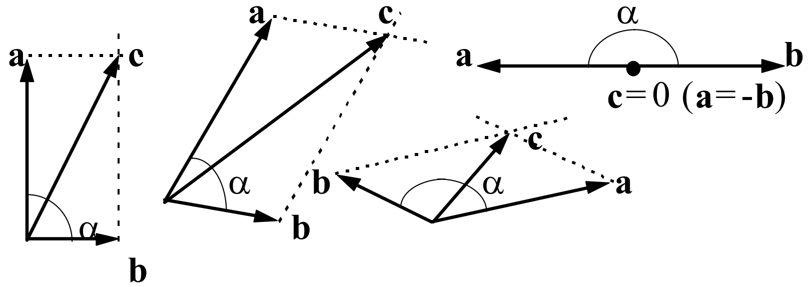


Рисунок 1.2 – Сложение двух векторов по «правилу параллелограмма»

Аналитическая форма записи суммирования выглядит так:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad \text{либо} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \tag{1.1}$$

Модуль вектора-суммы находится согласно теореме косинусов:

$$|\mathbf{c}| = c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\vec{a},\vec{b})} \tag{1.2}$$

В круглых скобках выражения (1.2) – символическое изображение угла между направлениями слагаемых векторов **a** и **b**.

Суммирование нескольких (множества) векторов сводится либо к последовательному многократному применению правила параллелограмма, аналитически выражаемому формулой:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{f} + \ldots = \left\{\left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}\right] + \vec{d}\right\} + \vec{f} + \ldots, \tag{1.3}$$

либо к построению из слагаемых векторов многоугольника (рис. 1.3):

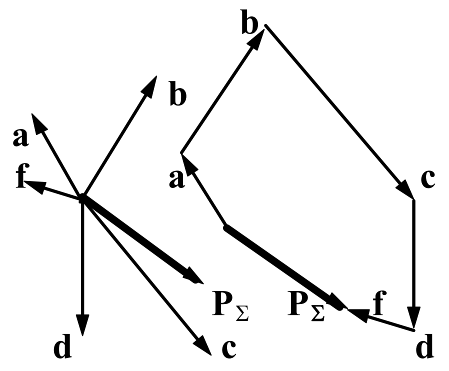


Рисунок 1.3 – Сложение множества векторов

Построение многоугольника можно производить в любом удобном месте, в том числе и из точки действия (приложения) векторов, параллельно перенося векторы так, чтобы начало последующего вектора примыкало к концу предыдущего. Суммарный вектор (на рис. $\mathbf{P}_\Sigma$) «соединяет» точку, с которой начато построение многоугольника, с концом последнего слагаемого вектора. В конце концов $\mathbf{P}_\Sigma$ переносят в точку, к которой он имеет физическое отношение.

При вычитании векторов необходимо представлять, какой из векторов является уменьшаемым, а какой – вычитаемым. Вычитание векторов можно представить как сложение уменьшаемого вектора с вектором, по модулю равным вычитаемому, но направленным в противоположную сторону (рис. 1.4):

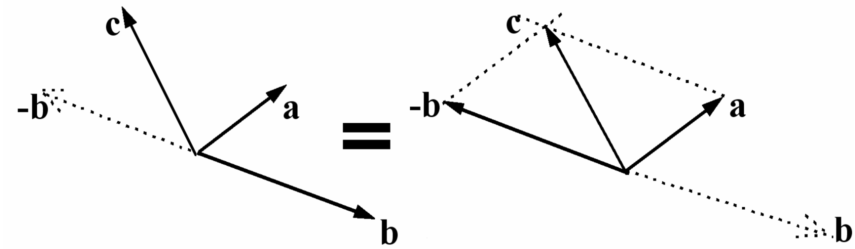


Рисунок 1.4 – Вычитание двух векторов

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{c}. \tag{1.4}$$

Модуль вектора-разности **c**, в соответствии с (1.4) и (1.2):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\vec{a},\vec{b})}\,. \tag{1.5}$$

1.3 Проекции и составляющие векторов

Во многих явлениях, процессах, играют роль не столько сами векторы физических величин, сколько их проекции на то или иное направление (например, при движении тела по наклонной плоскости движущая сила является проекцией силы тяжести тела на направление вектора скорости движения). Таким образом, проекция вектора – тоже вектор, но с другим направлением. Проекция зависит от модуля вектора, а также от угла между ним и выбранным направлением. Если **a** – проецируемый вектор на направление вектора **b**, то модуль проекции $\mathbf{a_b}$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}_b = a\cos(\vec{a},\vec{b})\,. \tag{1.6}$$

Если угол $(\vec{a},\vec{b}) < \pi/2$, то направление проекции совпадает с положительным направлением **b**, и $\mathbf{a_b} > 0$. Если же $(\vec{a},\vec{b}) > \pi/2$, то $\mathbf{a_b} < 0$.

Чтобы упростить математические действия над векторными величинами с точки зрения их числовой оценки, применяют разложение векторов на составляющие. Составляющие вектора являются его проекциями на выбранные направления, например, на оси координат (рис. 1.5, а, б, г), а также на направления другого вектора и перпендикуляра (нормали) к нему (в).

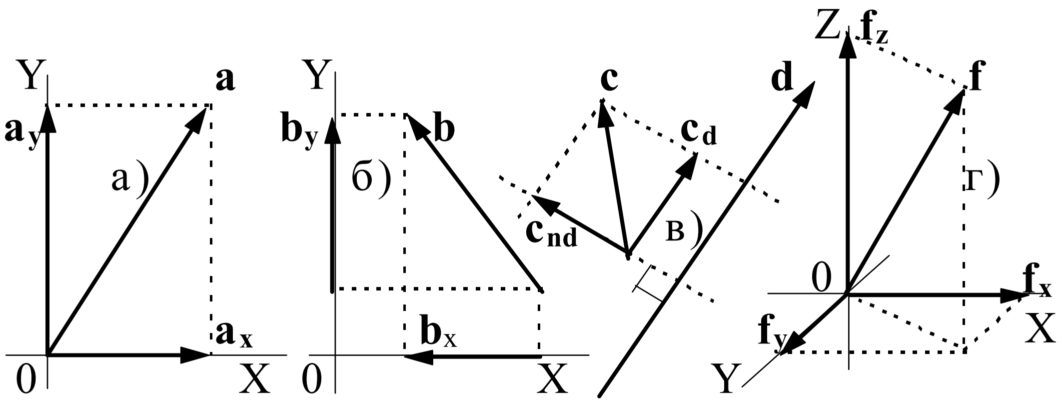


Рисунок 1.5 – Разложение вектора на составляющие (проекции)

При выбранных направлениях разложения составляющие вектора единственны, однозначны и, разумеется, векторная сумма всех составляющих разлагаемого вектора должна быть равна этому вектору.

Отображая вектора в трёхмерном пространстве с помощью декартовой системы координат, удобно раскладывать векторные величины на составляющие, сонаправленные с осями координат OX, OY и OZ (например, рис. 1.5, г):

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_x + \mathbf{f}_y + \mathbf{f}_z. \tag{1.7}$$

Модули составляющих (в данном случае – векторов $\mathbf{f}_x$, $\mathbf{f}_y$, $\mathbf{f}_z$) являются модулями проекций разлагаемого вектора на направления осей декартовой системы координат и, значит, в соответствии с (1.6),

$$f_x = f \cdot \cos(\vec{f}, \vec{X}),\ f_y = f \cdot \cos(\vec{f}, \vec{Y}),\ f_z = f \cdot \cos(\vec{f}, \vec{Z}) \tag{1.8}$$

Разлагаемый в декартовой системе координат вектор соответствует пространственной диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на своих составляющих. Поэтому модули разлагаемого вектора и его составляющих проекций связаны формулой длины этой диагонали параллелепипеда:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \tag{1.9}$$

1.4 Умножение и деление вектора на скаляр

Скалярные величины, независимо от их физического содержания, в векторной алгебре подобны простым числам, поэтому умножение или деление вектора на скаляр можно представить как удлинение или укорочение умножаемого вектора. Если скаляр имеет физическую размерность, то вектор, получившийся в результате перемножения (деления), приобретает другое, по сравнению с первоначальным, физическое содержание. В этом случае у конца вектора проставляются через запятую символы всех пропорциональных друг другу векторов. Например, вектор силы тяжести пропорционален вектору ускорения свободного падения, вектор кулоновской силы – вектору напряжённости электрического поля (рис. 1.6, а, б) и т.д.

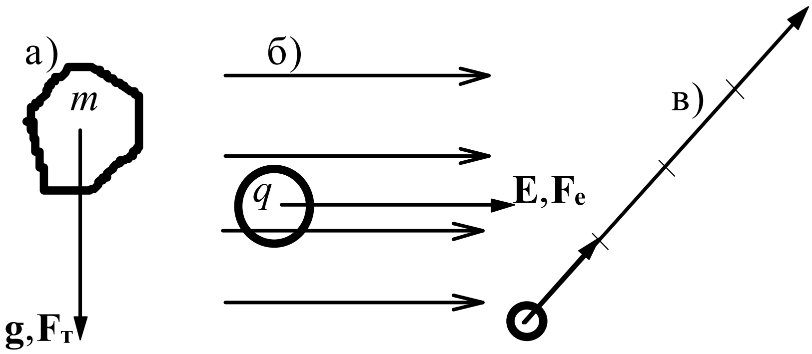


Рисунок 1.6 – Примеры умножения вектора на скаляр

Умножение на безразмерное число не изменяет физической сущности вектора, поэтому вектор-произведение изображается вектором соответственно изменённой длины, если не оговаривается изменение масштаба. На рис. 1.6, в, изображены в одинаковом масштабе векторы, отличающиеся по модулю в 4 раза.

Умножение на отрицательное число или отрицательную скалярную величину с физической размерностью даёт вектор противоположного направления с соответственно изменившимся модулем. С составляющими умножаемого или делимого вектора, естественно, происходит то же, что и с самим вектором.

Следуя логике произведения, можно любой вектор (или его составляющие) представить произведением его модуля как скалярной величины на сонаправленный вектор с модулем, равным единице:

$$\vec{a} = a \cdot \vec{\tau}_1, \text{ где } \left|\vec{\tau}_1\right| = 1. \qquad (1.10)$$

Для составляющих векторов по направлениям осей координат «единичные» векторы – *орты* – обозначаются символами $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ или **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z = \mathbf{i}\cdot a_x + \mathbf{j}\cdot a_y + \mathbf{k}\cdot a_z. \qquad (1.11)$$

Различие предлагаемых обозначений вытекает из целесообразности и удобства: если в формулах некоторым, в том числе векторным, величинам присваиваются символы i, j, k, то в этом случае предпочтительно использовать другие символы ортов.

1.5 Действия над векторами в ортогональной форме записи

А. ***Сложение***:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{i}\cdot a_x+\mathbf{j}\cdot a_y+\mathbf{k}\cdot a_z+\mathbf{i}\cdot b_x+\mathbf{j}\cdot b_y+\mathbf{k}\cdot b_z = \mathbf{i}\cdot(a_x+b_x)+\mathbf{j}\cdot(a_y+b_y)+\mathbf{k}\cdot(a_z+b_z), \qquad (1.12)$$

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2}. \qquad (1.12а)$$

Б. ***Вычитание***:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{i}\cdot a_x+\mathbf{j}\cdot a_y+\mathbf{k}\cdot a_z-\mathbf{i}\cdot b_x-\mathbf{j}\cdot b_y-\mathbf{k}\cdot b_z = \mathbf{i}\cdot(a_x-b_x)+\mathbf{j}\cdot(a_y-b_y)+\mathbf{k}\cdot(a_z-b_z), \qquad (1.13)$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2} \qquad (1.13а)$$

В. ***Умножение на скаляр или на безразмерное число*** m:

$$\mathbf{a}\cdot m = m\cdot(\mathbf{i}\cdot a_x+\mathbf{j}\cdot a_y+\mathbf{k}\cdot a_z) = \mathbf{i}\cdot m\cdot a_x+\mathbf{j}\cdot m\cdot a_y+\mathbf{k}\cdot m\cdot a_z, \qquad (1.14)$$

$$\left|\vec{a}\cdot m\right| = m\cdot\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad (1.14а)$$

Г. ***Деление на скаляр*** m ***равноценно умножению на скаляр*** $1/m$:

Д. ***Скалярное произведение двух векторов***:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{i}\cdot a_x+\mathbf{j}\cdot a_y+\mathbf{k}\cdot a_z)\cdot(\mathbf{i}\cdot b_x+\mathbf{j}\cdot b_y+\mathbf{k}\cdot b_z).$$

Общим правилом скалярного произведения является условие: $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = a\cdot b\cdot\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$, где $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ – угол между перемножаемыми векторами. Так как каждый из векторов может быть представлен суммой ортогональных составляющих (1.10), то результатом перемножения является сумма произведений составляющих векторов:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{i}a_x\cdot\mathbf{i}b_x+\mathbf{j}a_y\cdot\mathbf{i}b_x+\mathbf{k}a_z\cdot\mathbf{i}b_x+\mathbf{i}a_x\cdot\mathbf{j}b_y+\mathbf{j}a_y\cdot\mathbf{j}b_y+\mathbf{k}a_z\cdot\mathbf{j}b_x+\mathbf{i}a_x\cdot\mathbf{k}b_z+\mathbf{j}a_y\cdot\mathbf{k}b_z+\mathbf{k}a_z\cdot\mathbf{k}b_z. \qquad (*)$$

Скалярные произведения перпендикулярных друг другу ортов по определению равны нулю, а произведения одинаковых ортов равны единице, поэтому

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{i}a_x\cdot\mathbf{i}b_x+\mathbf{j}a_y\cdot\mathbf{j}b_y+\mathbf{k}a_z\cdot\mathbf{k}b_z = a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z. \qquad (1.15)$$

Е. ***Векторное произведение двух векторов***:

Если при перемножении двух разнородных по физическому содержанию векторов получается также векторная величина, то такое произведение называется векторным. Последовательность чередования векторов-сомножителей в этом случае должна соответствовать «договорному» правилу «правого винта»: направление вектора-произведения **c** (рис. 1.7), во-первых, перпендикулярно плоскости векторов-сомножителей **a** и **b**, и, во-вторых, соответствует направлению поступательного перемещения правого винта («буравчика») при его вращении по наименьшему углу от первого вектора-сомножителя **a** ко второму – **b**.

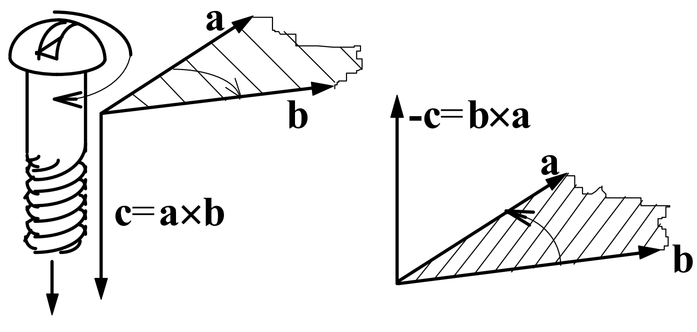


Рисунок 1.7 – Определение направления результата векторного произведения

Модуль векторного произведения, как и скалярного, тоже зависит от угла между векторами-сомножителями, но равен нулю при их параллельности и максимален в случае, когда вектора перпендикулярны, а, значит:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad \text{или} \quad c = ab\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Согласно приведённому на рис. 1.7 определению векторного произведения, для ортов **i**, **j**, **k** имеем:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0. \qquad (**)$$

Перемножение векторов, выраженных проекциями, в виде

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{i}a_x+\mathbf{j}a_y+\mathbf{k}a_z) \times (\mathbf{i}b_x+\mathbf{j}b_y+\mathbf{k}b_z),$$

даёт похожее на (*) выражение, которое, с учётом (**), преобразуется в

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{i}(a_z \cdot b_y - a_y \cdot b_z) + \mathbf{j}(a_x \cdot b_z - a_z b_x) + \mathbf{k}(a_y \cdot b_x - a_x b_y). \qquad (1.16)$$

В ситуациях, когда приходится перемножать три и более вектора, надлежит чётко представлять физический смысл промежуточных и итогового произведений (вектор или скаляр). При векторном – следует учитывать последовательность записи векторов-сомножителей.

2 ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1 Быстрота изменения функции

Физические процессы и явления протекают таким образом, что описывающие их характеристики или параметры изменяются с течением времени или от точки к точке в пространстве. Так, например, температура воздуха, как правило, под утро минимальная, затем до послеполуденного времени повышается – температура является функцией от времени. В зимний день температура внешней поверхности кирпичной стены отрицательна (по Цельсию), внутренней – положительна, а внутри стены принимает разные промежуточные значения: в данном случае температура – функция от координаты вдоль толщины стены.

Функции изображаются графиками, и они для специалиста становятся оперативной информацией – быстро (зрительно) воспринимаемой и дающей общее представление об явлении, процессе. На рис. 2.1 показан пример графика функции температуры от времени в течение суток, по которому метеорологи, фенологи, синоптики получают представление о погоде в течение дня: когда температура росла или падала, когда и какие она приобретала максимальное и минимальное значения и т.д.

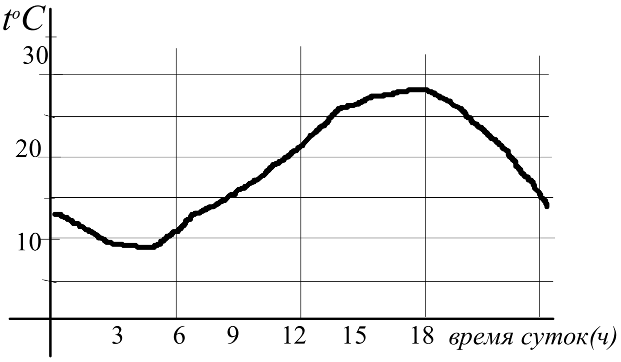


Рисунок 2.1 – График изменения температуры как функция времени суток

Физика изучает и такие процессы, когда, наряду с величиной параметра, важно знать быстроту его изменений в любой момент времени. А так как быстрота изменений параметра разная в те или иные моменты, значит, и она является функцией от времени, как-то согласующейся с функцией параметра. Например, процессы обмена тепла между жилым помещением и улицей зависят от перепада – разности температур, приходящейся на единицу толщины стенки (сантиметр, дециметр или метр).

Перепад может быть больше, например, со стороны жилого помещения и меньше – со стороны улицы (рис. 2.2); т.е. не только температура, но и её перепад оказывается функцией координаты вдоль толщины стенки.

Быстрота изменения физической величины во времени или в пространстве связана с наклоном графика этой величины: чем больше наклонен график, тем быстрее изменяется величина во времени, или тем больше перепад величины, приходящийся на ту или иную координату.

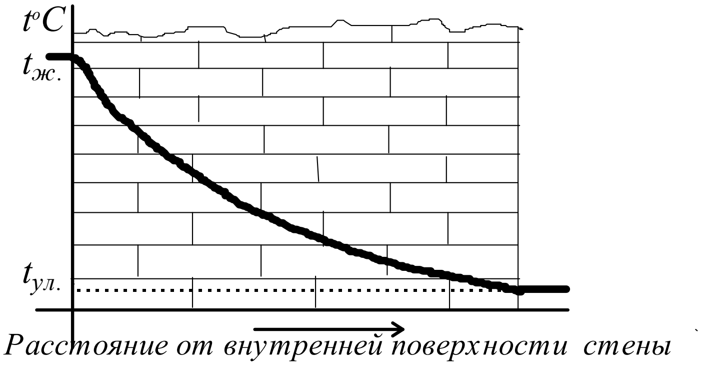


Рисунок 2.2 – График изменения температуры кирпичной стены от расстояния от внутренней поверхности

2.2 Угловой коэффициент графика функции

Количественная оценка наклона линии графика к горизонтальной оси – оси независимой переменной (аргумента функции) – производится по угловому коэффициенту – тангенсу угла между касательной к графику функции и осью абсцисс (рис. 2.3). Угловой коэффициент может принимать разный знак и быть равным нулю: если значение функции увеличивается (в, г) с ростом аргумента – принимает знак «плюс», если уменьшается (а, е) – знак «минус», если касательная параллельна оси аргумента (б, д), то угловой коэффициент графика равен нулю.

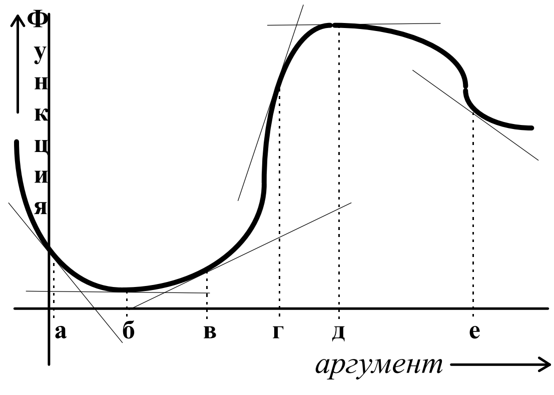


Рисунок 2.3 – Изменение угла наклона касательной к графику функции и осью абсцисс

Угловой коэффициент – тангенс угла наклона касательной к графику функции – есть отношение катетов прямоугольного треугольника, в котором отрезок касательной к графику является гипотенузой, а катеты параллельны осям аргумента и функции (рис. 2.4). Отношение катетов

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} = k = const,$$

остаётся таким же, когда катеты – приращения функции и аргумента – становятся бесконечно малыми.

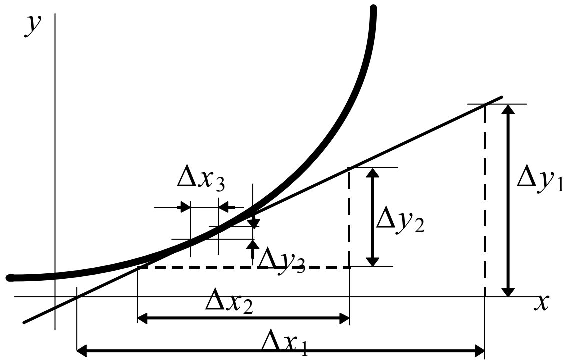


Рисунок 2.4 – Определение углового коэффициента касательной к графику функции

Бесконечно малые приращения величин называются ***дифференциалами***: dy – дифференциал функции, dx – дифференциал аргумента.

Отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента есть ***производная функции*** $y = f(x)$, обозначаемая так:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{2.1}$$

Итак, приходим к выводу: *быстрота изменения величины-функции при изменении аргумента (времени, координаты и др.) тоже является функцией от того же аргумента и равна производной функции по этому аргументу*.

2.3 О производных элементарных функций

Если значению аргумента x соответствует значение функции $f(x) = y$, то при изменении аргумента до значения $x+dx$ функция станет равной $f(x+dx) = y+dy = f(x) + dy$. Приращение функции dy вычисляется как $f(x+dx) - f(x)$, а производная (2.1) соответствует выражению:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \tag{2.2}$$

Возведение в степень больше чем единица, а также перемножение дифференциалов дают в результате ещё меньшие бесконечно малые числа – бесконечно малые более высокого порядка малости. На этом базируется нахождение производных функций.

Например, функция имеет вид $y = x^3$, а $y + dy = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$, но так как третий и четвёртый члены суммы содержат бесконечно малые более высокого порядка малости $(dx)^2$ и $(dx)^3$, то $y+dy = x^3+3x^2dx$. В соответствии с (2.2),

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^3)}{dx}=\frac{x^3+3x^2dx-x^3}{dx}=3x^2.$$

Дифференцирование – нахождение производной – ряда функций облегчается использованием *замечательных пределов*:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (где e – основание натурального логарифма).

Производные некоторых элементарных функций приведены в таблице Т.1.

Анализируя физические процессы, зачастую необходимо знать, какое приращение имеет функция при конечном, но малом, приращении аргумента. Если оба приращения малы по сравнению с абсолютными величинами, соответственно, функции и аргумента, то, учитывая вытекающее из (2.2) соотношение

$$dy=\frac{dy}{dx}\cdot dx=y'\cdot dx, \tag{2.3}$$

малое приращение функции выражают через приращение аргумента:

$$\Delta y=y'\cdot\Delta x. \tag{2.4}$$

Таблица 2.1 – Производные простейших функций

№	Название функции	Вид функции $y=f(x)$	Вид производной $y'=f'(x)$
1	Линейная	$ax+b$	a
2	Квадратичная	ax^2+bx+c	$2ax+b$
3	Кубичная	ax^3+bx^2+cx+d	$3ax^2+2bx+c$
4	Степенная	ax^p	apx^{p-1}
5	Обратная	$1/ax$	$-1/ax^2$
6	Синусоидальная	$\sin ax$	$a\cos ax$
7	Косинусоидальная	$\cos ax$	$-a\sin ax$
8	Тангенциальная	$\mathrm{tg}\, ax$	$a/\cos^2 ax$
9	Котангенциальная	$\mathrm{ctg}\, ax$	$-a/\sin^2 ax$
10	Экспоненциальная	e^{ax}	ae^{ax}
11	Показательная	a^{bx}	$b\ln a\cdot a^{bx}$
12	Логарифмическая	$\ln x$, $\ln(ax)$	$1/x$

2.4 Производные суммы, произведения и частного двух функций одного аргумента

В быту, в технике, в природе бывают ситуации, когда некоторый процесс можно описывать как сложную функцию нескольких независимых процессов, каждый из которых является функцией одного аргумента. Так, например, расстояние между двумя кораблями, имеющими разные курсы, зависит от функций перемещения каждого корабля в отдельности от общего времени; объём и масса древесины ствола дерева зависит от роста дерева в вышину и его прироста в толщину, а эти функции существенно отличаются... А как оценивать быстроту удаления кораблей друг от друга, как описать быстроту прироста массы древесины? Обратимся к математике.

Пусть функция $y = f(x)$ представляет собой произведение двух функций $u(x)$ и $v(x)$. С увеличением аргумента x на бесконечно малую величину dx функции принимают значения: $u+du$, $v+dv$, $y+dy$, при этом

$$y+dy = (u+du)(v+dv) = uv + vdu + udv + dudv.$$

Произведение $dudv$ есть величина высшего («второго») порядка малости, не влияющая на приращение, которое остаётся равным

$$dy = (y+dy) - y = uv + vdu + udv - uv = vdu + udv. \tag{2.5}$$

Производная произведения, согласно (2.2), представит собой

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = vu' + uv'. \tag{2.6}$$

Если величина $y = f(x)$ получается делением одной функции $u(x)$ на другую $v(x)$, то очевидны соотношения:

$$y + dy = f(x + dx) = \frac{u + du}{v + dv}, \qquad dy = \frac{u + du}{v + dv} - \frac{u}{v} = \frac{uv + vdu - uv - udv}{vv + vdv}.$$

Производная y' как отношение приращений функции y и аргумента x:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2 + vdv} = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \tag{2.7}$$

Читателю предлагается самостоятельно убедиться в правильности утверждений о производных суммы и разности функций:

$$y = u + v, \quad y' = u' + v'; \qquad\qquad y = u - v, \quad y' = u' - v'. \tag{2.8}$$

Это легко запоминается: *производная суммы функций равна сумме производных этих функций, а производная разности функций – разности производных.*

3 ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1 Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл функции $f(x)$ есть функция $F(x)$, такая что $F'(x) = f(x)$. Причем функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на некотором интервале (a, b).

Неопределенный интеграл обозначается

$$\int f(x)dx. \tag{3.1}$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, а $F(x)$ —*первообразной функцией* для функции $f(x)$.

Если к функции $F(x)$ прибавить произвольную постоянную C, то по правилам дифференцирования $(F(x) + C)' = F'(x)$. Поэтому неопределенный интеграл определяется с точностью до произвольной постоянной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{3.2}$$

3.2 Правила интегрирования и значения неопределённых интегралов

1. $\int 1dx = x$.

2. Интеграл суммы функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

4. При вычислении неопределенных интегралов бывают полезны:

– формула интегрирования по частям:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx;$$

– формула замены переменной интегрирования: если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Таблица 3.1 – Неопределённые интегралы функций

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + c$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	e^x	$e^x + c$
$a^x \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + c(a > 0)$
$\cos x$	$\sin x + c$		
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - b}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + b}\right\rvert + c$

3.3 Определённый интеграл

Определенный интеграл – это неопределенный интеграл, заданный на некотором промежутке $[a, b]$ и вычисляемый как разность значений первообразной функции на концах этого промежутка.

Определенный интеграл обозначается

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{3.3}$$

Функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, *x – переменной интегрирования*, *a – нижним пределом*, *b – верхним пределом*, *[a, b] – промежутком интегрирования*.

Определенные интегралы вычисляются по *формуле Ньютона — Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{3.4}$$

3.4 Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором промежутке $[a, b]$ и принимает на этом промежутке положительные значения (см. рис. 3.1).

Выберем малый промежуток Δx изменения аргумента x, на котором изменением функции $f(x)$ можно пренебречь.

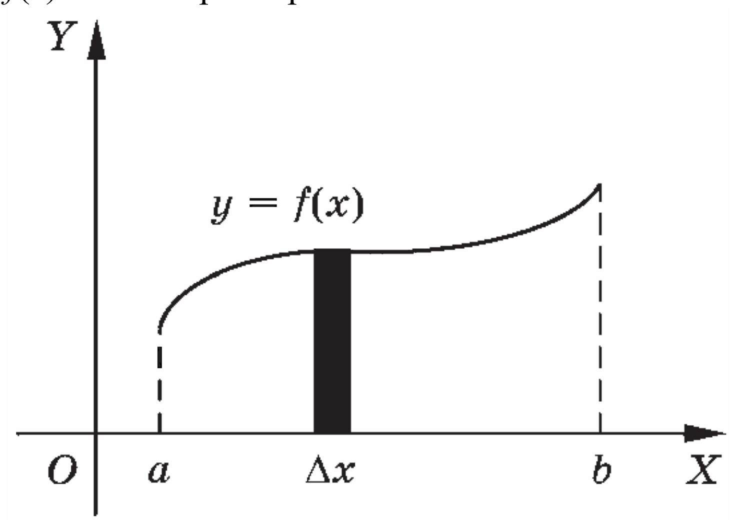


Рисунок 3.1 – Геометрический смысл определённого интеграла (площадь заштрихованной фигуры)

Тогда произведение $f(x)\cdot\Delta x$ численно равно площади заштрихованного прямоугольника (рис. 3.1). Сумма площадей таких прямоугольников

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

примерно равна площади фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$ и осью OX на отрезке $[a, b]$. Результат будет точным, если каждый отрезок Δx будет стремиться к бесконечно малой величине dx ($\Delta x \rightarrow dx$), а число таких отрезков n – к бесконечности ($n \to \infty$). При этом предел суммы записывается как определенный интеграл

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (3.5)$$

Функция $f(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения (рис. 3.2). В этом случае определённый интеграл (3.3) равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций (площадь трапеций для участка графика выше оси OX записывается со знаком «плюс», для участка графика ниже оси OX – со знаком «минус»).

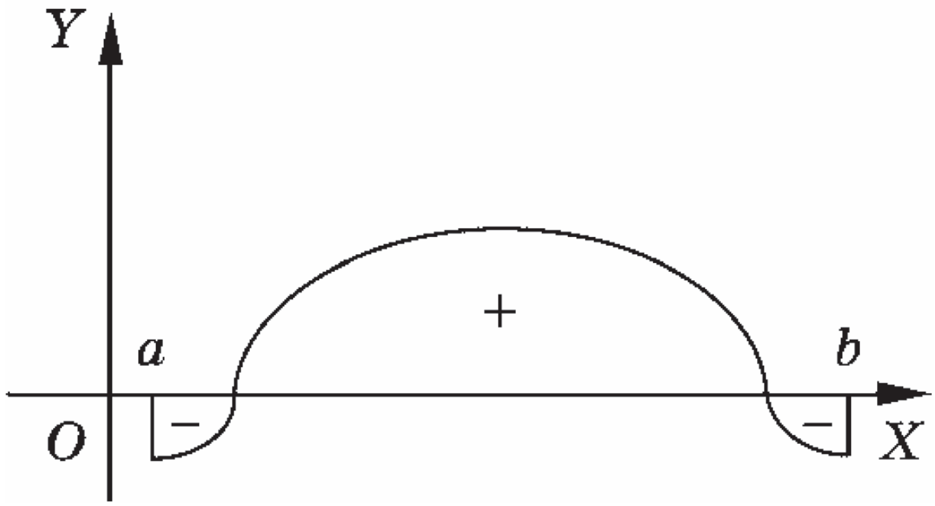


Рисунок 3.2 – Геометрический смысл определённого интеграла для функции, меняющей знак

4 КИНЕМАТИКА

4.1 Пространство и время. Система отсчета. Постановка задачи

Движением тел и, в частности, материальных точек называется изменение их положения в пространстве со временем. Положение тела определяется только по отношению к каким-либо другим телам. Поэтому, чтобы описать движение тела, необходимо условиться, относительно какого тела (или системы тел) рассматривается данное движение. Тело, относительно которого рассматривается положение движущегося тела, называется ***пространственной системой отсчета***.

В пространственной системе отсчета выбирают точку, которая принимается за ***начало отсчета***. От этой точки и отсчитываются расстояния до исследуемых точек. Расстояния отсчитываются с помощью эталонов длины. За единицу измерения длины был выбран ***метр***.

Перейдем к вопросу о *времени*.

Понятия пространства и времени относятся к фундаментальным понятиям. Это означает, что им нельзя дать определения через другие понятия. В этом случае дают способы измерения этих величин, тем самым и устанавливается их точный смысл.

*Под **временем** в количественном смысле мы будем понимать показания каких-то часов.* Под ***часами*** понимают тело или систему тел, в которых происходит некоторый периодический процесс. Примерами таких процессов могут служить колебания маятника, вращение Земли, колебания электромагнитного поля, возникающего при переходе электрона с одного энергетического уровня на другой уровень и др. Точнее надо говорить не о времени, а промежутке времени, который характеризуется разностью показаний часов в рассматриваемые моменты времени. Предполагают, что один из этих моментов привязан к некоторому событию в том месте, где находятся часы и фиксирован. Он принимается за начало отсчета времени. За единицу времени принята ***секунда***.

Пространственная система отсчета плюс часы полностью определяют ***систему отсчета***.

Не установив систему отсчета, бессмысленно говорить о движении тел, т.к. в одной системе отсчета тело может покоиться, а в другой то же самое тело двигаться. В каждой конкретной задаче выбор системы отсчета производится так, чтобы максимально упростить ее решение.

Описать движение точки означает ответить на вопрос о том, ***где*** она будет находиться в любой момент времени, т.е. иметь информацию о ее положении в пространстве.

При изучении законов механики (законы Ньютона, законы сохранения механических величин) существенны и другие кинематические величины – скорость и ускорение. *Положение точки*, *её скорость* и *ускорение* называются ***линейными кинематическими параметрами***. Строгие определения этих величин мы дадим чуть позже.

Описывать движение тел более трудная задача. Описать движение тела – это значит иметь информацию о движении всех материальных точек, составляющих тело.

В общем случае тело может двигаться весьма сложным образом, например, движение подброшенной монеты. При этом очевидно, что все точки монеты движутся по разным траекториям, будут иметь разные скорости и разные ускорения. Как быть в этом случае? Движение какой точки надо описывать? Задача получения информации о движении всех точек тела может показаться неразрешимой. В этом случае поступают следующим образом.

*Любое движение тела можно представить как совокупность **поступательного** и **вращательного** движений.*

Поступательным движением абсолютно твердого тела называют такое движение, при котором любая прямая, проведенная между двумя любыми материальными точками тела, при движении остается все время параллельной самой себе. При поступательном движении ***все*** точки тела описывают одинаковые по форме траектории, имеют одинаковые скорости и ускорения. Именно этим поступательное движение удобно для описания: достаточно описать движение только **одной**, причем любой, точки тела. Все остальные точки тела при поступательном движении движутся точно также.

Вращательным движением тела называют такое движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. При вращательном движении, в отличие от поступательного, у всех точек тела разные скорости и ускорения и, поэтому, скорость или ускорение какой-либо точки не может служить кинематической характеристикой движения всего тела.

Однако можно заметить, что угол поворота для ***всех*** точек тела одинаков и, следовательно, его можно и нужно использовать для описания вращательного движения тела. В соответствии с этим, для характеристики вращательного движения вводят ***угловые кинематические параметры*** – *угловые скорость* и *ускорение*, поскольку именно они являются одинаковыми для ***всех*** точек тела.

Итак, если научиться описывать движение точки с помощью линейных и угловых кинематических параметров, то это позволит описать любое сложное движение тела. Например, движение твёрдого тела, центр масс которого движется поступательно по произвольной траектории, а само тело вращается относительно оси, направление которой в пространстве также изменяется. Поступательное движение описывается с помощью линейных кинематических параметров, а вращательное движение тела и оси – с помощью угловых.

4.2 Линейные кинематические параметры

Как уже отмечалось, достаточно полное описание движения точки должно содержать информацию о трех кинематических параметрах для любого момента времени: о положении точки в выбранной системе координат, о скорости и ускорении точки. Вообще говоря, все эти параметры связаны между собой, и знание одного из них плюс начальные их значения, позволяет определить остальные параметры.

Перемещение

Допустим, что в момент времени t точка находилась в положении 1. Через время Δt точка оказалась в положении 2 (рис 2.1).

Положение точки определяется радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$. Это вектор, проведенный из начала отсчета в данную точку.

Например, положение 1 характеризуется вектором $\mathbf{r}(t)$, а положение 2 характеризуется вектором $\mathbf{r}(t + \Delta t)$.

При движении тела конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, с течением времени, будет описывать ***траекторию движения***. ***Траектория*** – это линия, описываемая движущейся материальной точкой в пространстве. Если траектория – прямая линия, то движение называется ***прямолинейным***. В противном случае – ***криволинейным***.

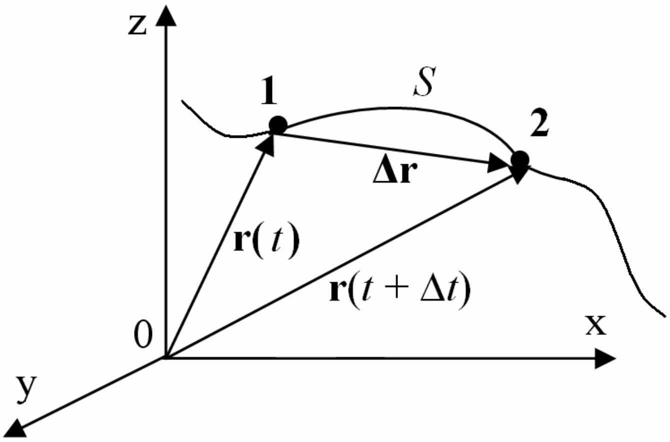


Рисунок 4.1 – К определениям понятий радиус-вектор, траектория, путь, перемещение

Длина траектории называется ***путем*** S.

Перемещением точки называется вектор $\Delta\mathbf{r}$, проведенный из начальной точки движения 1 в конечную точку 2.

Из рис. 4.1 видно $\mathbf{r}(t) + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t)$. Отсюда следует:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t). \qquad (4.1)$$

Следовательно, перемещение $\Delta\mathbf{r}$ точки за время Δt – это разность конечного и начального положений точки.

Законом движения материальной точки называется зависимость координат этой точки от времени: $r_x = r_x(t)$, $r_y = r_y(t)$, $r_z = r_z(t)$.

Скорость

Когда мы хотим объяснить, как быстро передвигалась материальная точка, то есть какова ее скорость, мы говорим, что она за какую-то единицу времени прошла такое-то расстояние.

Если за время Δt точка совершила перемещение $\Delta\mathbf{r}$, то отношение $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ будет характеризовать ***среднюю скорость*** $\langle v\rangle$ точки за время Δt.

$$\langle v\rangle = \Delta\mathbf{r}/\Delta t. \tag{4.2}$$

Конечно, при этом точка на этом участке может двигаться неравномерно. Например, свободно падающее тело за каждую секунду проходит разные расстояния. При этом мы также понимаем, что в начале и в конце каждой секунды тело имело разные скорости.

Если мы будем пытаться определять скорость в момент времени t, то, очевидно, нужно уменьшать промежуток времени Δt, и в течение этого промежутка определять перемещение $\Delta\mathbf{r}$ материальной точки. До какого предела можно уменьшать промежутки времени Δt? При этом $\Delta\mathbf{r}$ также будет стремиться к нулю. Есть ли предел отношению $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$?

Предел отношения $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ существует и будет точно определять мгновенную скорость точки.

Мгновенной скоростью $\mathbf{v}(t)$ в момент времени t называется предел отношения $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ при Δt стремящимся к нулю. В математике такой предел называется производной от радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени t и обозначается $d\mathbf{r}/dt$ (см. главу 2).

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{4.3}$$

При стремлении Δt к нулю ($\Delta\mathbf{r}\to 0$) направление перемещения $d\mathbf{r}$ совпадает с направлением касательной к траектории движения точки в момент времени t (рис. 4.1).

Поэтому *направление вектора скорости* $\mathbf{v}(t)$ *всегда совпадает с направлением касательной в данной точке траектории и указывает направление движения материальной точки*.

Определим модуль вектора скорости v:

$$|\mathbf{v}(t)| = v(t) = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt}. \tag{4.4}$$

Так как при стремлении Δt к нулю модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ стремится к длине дуги ΔS, то $|d\mathbf{r}| = dS$, и поэтому модуль скорости v равен производной пути S по времени t.

$$\frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt} = v. \tag{4.5}$$

Компоненты скорости равны производным соответствующих координат по времени.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль скорости, выраженный через компоненты скорости равен:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{4.6}$$

Модуль средней скорости $|\langle\mathbf{v}\rangle|$ и средний модуль скорости $\langle\mathbf{v}\rangle$ могут существенно отличаться.

Модуль средней скорости $|\langle\mathbf{v}\rangle|$ определяется как отношение модуля перемещения за некоторый промежуток времени к данному промежутку времени.

Средний модуль скорости $\langle\mathbf{v}\rangle$ определяется как отношение всего пройденного пути за некоторый промежуток времени к данному промежутку времени.

Например: точка движется равномерно по окружности радиуса R. За период обращения T перемещение точки равно нулю, так как начало и конец вектора перемещения находятся в одной и той же точке. Следовательно, модуль средней скорости $|\langle\mathbf{v}\rangle|$ за время T равен нулю. Путь же, пройденный точкой за время T, равен $2\pi R$ и средний модуль скорости $\langle\mathbf{v}\rangle$ будет равен: $\langle\mathbf{v}\rangle = \frac{2\pi R}{T}$. Легко убедиться, что в приведенном примере модуль средней скорости $|\langle\mathbf{v}\rangle|$ зависит от выбранного промежутка времени Δt, а средний модуль скорости $\langle\mathbf{v}\rangle$ не зависит.

Ускорение

Если скорость $\mathbf{v}(t)$ показывает, как изменяется радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки со временем, то ускорение $\mathbf{a}(t)$ показывает, как изменяется скорость $\mathbf{v}$ точки. Повторив предыдущие рассуждения, касающиеся скорости, можно прийти к следующим определениям ускорений.

Мгновенным ускорением $\mathbf{a}(t)$ называется предел отношения приращения скорости $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt, за который произошло это приращение, при стремлении Δt к нулю:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{4.7}$$

Более краткая формулировка: ***мгновенное ускорение это производная скорости по времени***.

Введём понятия тангенциального и нормального ускорений.

Тангенциальная составляющая ускорения $\mathbf{a}_\tau$ – вектор, направленный вдоль вектора скорости **v**, и по модулю равный изменению скорости по абсолютной величине (см. рис 4.2).

Нормальным ускорением $\mathbf{a}_n$ называется вектор, направленный по нормали к траектории (вектору скорости) и отвечающий за изменение скорости по направлению (см. рис 4.2).

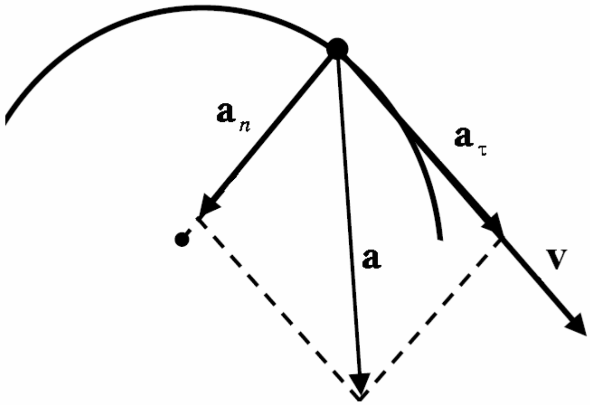


Рисунок 4.2 – Векторы тангенциального $\mathbf{a}_\tau$, нормального $\mathbf{a}_n$, полного **a** ускорений материальной точки и вектор скорости **v**.

Каждому бесконечно малому участку искривленной траектории можно сопоставить дугу окружности радиуса R, которая сливается с ним на этом участке. Радиус этой окружности характеризует кривизну траектории в данной точке. Поэтому движение точки на криволинейном бесконечно малом отрезке траектории можно представить как движение по окружности радиуса R. Тогда, модуль нормального ускорения можно определить, как

$$|\mathbf{a}_n| = \frac{v^2}{R}. \tag{4.8}$$

Вектор полного ускорения является векторной суммой векторов тангенциального и нормального ускорений (см. рис 2.2):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \tag{4.9}$$

Так как векторы тангенциального и нормального ускорений взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения можно определить по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{4.10}$$

Таким образом, зная зависимость $\mathbf{r}(t)$, можно найти скорость **v** и ускорение **a** точки в каждый момент времени. Это прямая задача кинематики.

В СИ единицами длинны, скорости и ускорения являются соответственно метр (м), метр на секунду (м/с), метр на секунду в квадрате (м/с^2).

4.3 Уравнения движения

Возникает и обратная задача: можно ли найти $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$, зная зависимость от времени ускорения $\mathbf{a}(t)$? Оказывается, для получения однозначного решения этой задачи одной зависимости $\mathbf{a}(t)$ недостаточно, необходимо знать так называемые начальные условия, а именно скорость $\mathbf{v}_0$ и радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ точки в некоторый начальный момент времени $t = 0$.

Движение материальной точки с постоянным ускорением ($\mathbf{a}$ = const), называется ***равнопеременным движением***, которое описывается двумя векторными кинематическими уравнениями – законом изменения приращения:

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t)dt = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}. \tag{4.11}$$

и законом изменения скорости:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t. \tag{4.12}$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ – начальная скорость. Если, в соответствии с (4.1), вместо приращения ввести начальный и конечный радиус-векторы материальной точки, то (4.11) перепишется в виде:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2} \tag{4.13}$$

Если начало системы координат совпадает с начальным положением точки ($\mathbf{r}_0 = 0$), то уравнения движения (4.12) и (4.13) приобретают следующую форму:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}, \tag{4.14}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t. \tag{4.15}$$

Векторным уравнениям движения (4.14) и (4.15) соответствуют системы скалярных уравнений для проекций на координатные оси:

$$r_x(t) = \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad r_y(t) = \upsilon_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \qquad r_z(t) = \upsilon_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2} \tag{4.16}$$

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t, \qquad \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} + a_y t. \qquad \upsilon_z(t) = \upsilon_{0z} + a_z t \tag{4.17}$$

При определении проекций следует придерживаться следующего правила: если направление проекции на некоторую ось совпадает с выбранным положительным направлением этой оси, то проекция считается положительной. В противоположном случае – отрицательной.

Если вектор ускорения $\mathbf{a}$ параллелен вектору начальной скорости $\mathbf{v}_0$, то движение является ***равноускоренным*** (и прямолинейным); при этом скорость материальной точки возрастает: $\upsilon > \upsilon_0$. Если вектор ускорения $\mathbf{a}$ антипараллелен вектору начальной скорости $\mathbf{v}_0$, то движение является ***равнозамедленным*** (и прямолинейным); при этом скорость материальной точки убывает: $\upsilon < \upsilon_0$.

Если при движении материальной точки ее ускорение равно нулю, то такое ***движение*** называется ***равномерным***. Из выражений (4.14) и (4.15), как частный случай, следуют уравнения равномерного движения:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t, \tag{4.18}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 . \tag{4.19}$$

Отсюда видно, что равномерное движение происходит без изменения скорости (v = const).

4.4 Относительность движения. Закон сложения скоростей

Понятие движение тела является относительным. Так как, одно и то же тело в разных системах отсчёта может, как двигаться, так и покоиться. При этом, направление и модуль скорости движения тела, а также траектория движения зависят от выбора системы отсчёта.

Рассмотрим случай движения одной и той же точки M в различных системах отсчета. Пусть система K является неподвижной системой отсчета, а система K' движется относительно системы K со скоростью $\mathbf{u}$. Обозначим через $\mathbf{v}$ вектор скорости точки M в неподвижной системе отсчета K, а через $\mathbf{v}'$ – вектор скорости этой же точки в подвижной системе K'. Связь между скоростями точки M в указанных системах отсчета дается классическим законом сложения скоростей (законом Галилея):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} . \tag{4.20}$$

Таким образом, *скорость тела в неподвижной системе отсчёта* $\mathbf{v}$ *определяется как* ***векторная*** *сумма скорости тела в подвижной системе отсчёта* $\mathbf{v}'$ *и скорости* $\mathbf{u}$ *подвижной системы отсчёта K' относительно неподвижной K.*

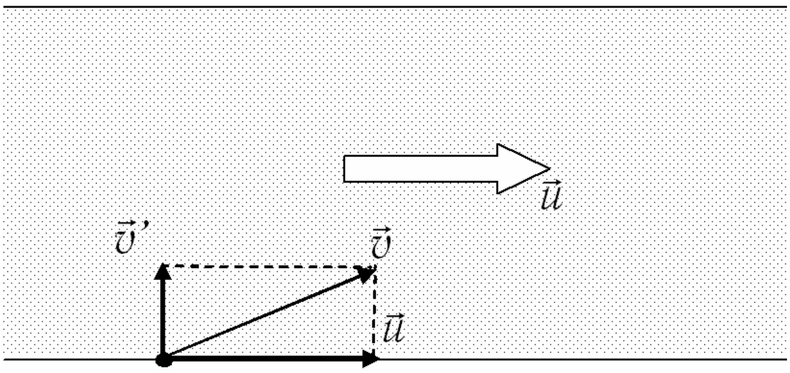


Рисунок 4.3 – Пример сложения скоростей при движении лодки в реке. Здесь система K – берег; система K' – течение воды в реке; $\mathbf{v}'$ – скорость лодки относительно воды; $\mathbf{u}$ – скорость течения реки относительно берега; $\mathbf{v}$ – скорость лодки относительно берега

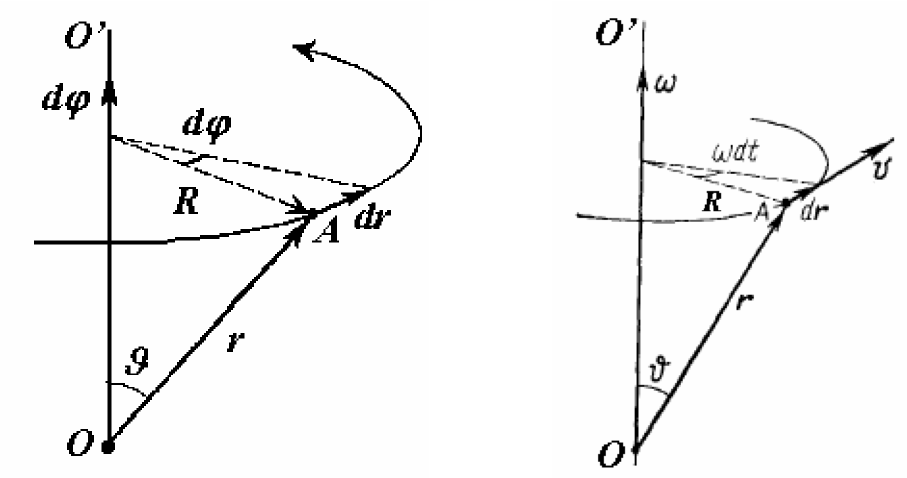
4.5 Кинематика вращательного движения

Движение твёрдого тела, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой называется ***вращением тела вокруг неподвижной оси***.

Пусть абсолютно твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси *OO'*. Проследим за некоторой точкой *A* этого тела (рис. 4.4).

За время dt точка *A* совершает перемещение $d\mathbf{r}$. При этом же угле поворота $d\varphi$ другая точка, отстоящая на большее расстояние от оси вращения, совершит другое (большее) перемещение. Поэтому использовать перемещение $d\mathbf{r}$ любой точки твёрдого тела неудобно для характеристики вращения всего тела.

За время dt любая плоскость, связанная с твёрдым телом и проходящая через ось вращения, повернётся на угол $d\varphi$, или, что тоже самое, на угол $d\varphi$ повернётся радиус-вектор **R** точки *A*, перпендикулярный оси вращения. Угол $d\varphi$ служит характеристикой вращения всего твёрдого тела. Удобно ввести вектор $d\boldsymbol{\varphi}$ поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *OO'* так, чтобы, глядя по направлению вектора $d\boldsymbol{\varphi}$, мы видели вращение по часовой стрелке (рис. 4.4, а). Направление вектора $d\boldsymbol{\varphi}$ и направление вращения связаны ***правилом правого винта*** (см. параграф 1.5, Е, рис. 1.7).



а) б)

Рисунок 4.4 – Вращение тела относительно неподвижной оси.
Векторы угла поворота $d\boldsymbol{\varphi}$ (а), угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (б), перемещения $d\mathbf{r}$ точки и вектор скорости **v**.

Для характеристики быстроты вращения, по аналогии с линейной скоростью, вводят векторы средней и мгновенной угловой скорости.

$$\vec{\omega}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}; \quad \vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{4.21}$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $d\boldsymbol{\varphi}$ направлены в одну сторону (рис. 4.4).

Если $\boldsymbol{\omega}$ = const, то вращение является равномерным.

Рассмотрим связь между линейной скоростью **v** точки A и её угловой скоростью **ω**.

За время dt точка A проходит путь равный $dS = Rd\varphi$.

Следовательно, $$\upsilon = \frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega.$$

Таким образом, $\upsilon = R \cdot \omega$. (4.22)

Из рисунка видно, что векторы $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v} \perp \mathbf{R}$, т.е. вектор **v** есть векторное произведение.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}] \tag{4.23}$$

Или в скалярной форме: $\upsilon = \omega \cdot R \cdot \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R})$. Причём, $\sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}) = 1$.

Наряду с угловой скоростью используются понятия периода T и частоты вращения ν.

Период вращения T – это промежуток времени, в течение которого тело совершает один полный оборот, т.е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$.

Частота вращения ν – это число оборотов за единице времени.

Период и частота связаны с угловой скоростью ω выражениями:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \nu = \frac{1}{T}.$$

Угловое ускорение вводится для характеристики неравномерного вращения тела. Угловое ускорение является вектором. Векторы среднего и мгновенного углового ускорения:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Вектор углового ускорения **ε** направлен в ту же сторону, что и вектор **ω** при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$ (рис. 4.5, а) и в противоположную сторону при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$ (рис. 4.5, б).

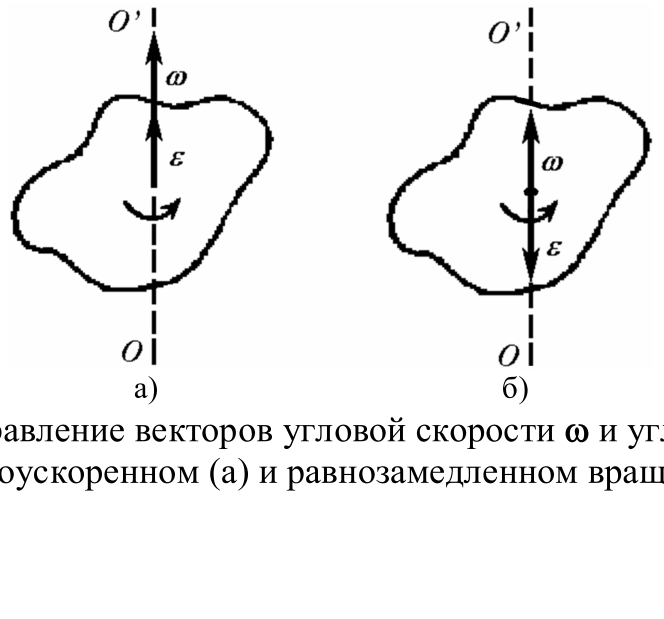


Рисунок 4.5 – Направление векторов угловой скорости **ω** и углового ускорения **ε** при равноускоренном (а) и равнозамедленном вращении (б).

Рассмотрим связь между угловым и линейным ускорением точки *A*. Линейное ускорение разлагается на два ускорения: нормальное ($\mathbf{a}_n$) и тангенциальное ($\mathbf{a}_\tau$). Модули этих составляющих ускорения можно рассчитать по формулам:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon, \tag{4.24}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = R \cdot \omega^2. \tag{4.25}$$

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению материала, подведём итог и рассмотрим подобие в описании поступательного и вращательного движения и связь между линейными и угловыми кинематическими параметрами.

При поступательном движении путь и перемещение являются функциями времени, при вращательном – угол поворота тела:

$$S = f(t); \Leftrightarrow \varphi = f(t).$$

Связь между путём, пройденным по дуге окружности с определённым радиусом и углом поворота радиус-вектора:

$$dS = Rd\varphi$$

Определения мгновенных значений линейной и угловой скоростей:

$$v = \frac{dS}{dt}; \Leftrightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Связь между линейной и угловой скоростями:

$$v = R \cdot \omega$$

Определения линейного и углового ускорений:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}; \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Связь между угловым и линейным ускорением точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = R \cdot \omega^2.$$

Уравнения кинематики поступательного и вращательного движения:

$$S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}; \Leftrightarrow \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2};$$

$$v = v_0 + a \cdot t; \Leftrightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t.$$

4.6 Применение уравнений движения

4.6.1 Движение тела, брошенного с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0

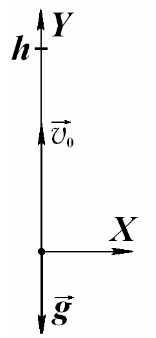


Рисунок 4.6 – Движение тела, брошенного вертикально вверх

Пусть начало отсчета времени совпадает с моментом броска. Начало системы координат совместим с начальным положением материальной точки, представляющей тело (рис. 4.6). Поскольку движение тела происходит под действием лишь одной силы – силы тяжести, его ускорение равно ускорению свободного падения g. Таким образом, мы имеем дело с равнопеременным движением: равнозамедленным – при подъеме тела и равноускоренным – при его падении. Для данного случая уравнения движения в проекции на ось Y принимают следующий вид (проекции на ось X равны нулю):

$$r_y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \tag{4.26}$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt\text{, где } v_{0y} = v_0. \tag{4.27}$$

В верхней точке подъема на высоте $h = r_y(t_h)$ в момент времени t_h, тело останавливается: $v_y(t_h) = 0$. Из уравнения (4.27) получаем время подъема тела:

$$t_h = v_0/g.$$

Высоту подъема тела h определяем из уравнения (4.26):

$$h = v_0 t_h - \frac{gt_h^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

В точке падения тела O в момент времени $t_П$ координата $r_y(t_П) = 0$. Из уравнения (4.26) находим момент падения тела на поверхность Земли:

$$t_П = \frac{2v_0}{g} = 2t_h.$$

Скорость падения тела $v_П = v_y(t_П)$ следует из уравнения (4.27):

$$v_П = -v_0$$

Знак минус здесь означает, что направление вектора скорости тела в момент падения противоположно положительному направлению оси Y.

4.6.2 Движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0

В этой ситуации мы сталкиваемся со случаем криволинейного двумерного движения, которое совершается телом с ускорением свободного падения g (рисунок 4.7). Уравнения движения тела в проекциях на координатные оси X и Y для данного случая записываются в следующем виде:

$$r_x(t) = v_{0x}t, \qquad v_x(t) = v_{0x}, \tag{4.28}$$

$$r_y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt. \tag{4.29}$$

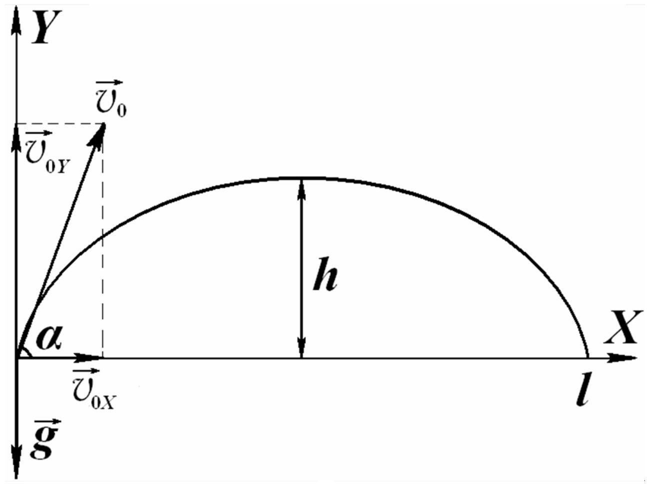


Рисунок 4.7 – Движение тела, брошенного под углом α к горизонту

Возможность рассматривать уравнения движения отдельно для каждой из проекций означает, что криволинейное движение тела распалось на два независимых прямолинейных движения, которые совершаются телом одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Из уравнений (4.28) видно, что движение вдоль оси X является равномерным с начальной скоростью $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Из уравнений (4.29) следует, что движение вдоль оси Y есть равнопеременное движение с начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$, направленной вертикально вверх. Этот тип движения уже рассмотрен нами в пункте 4.6.1. Применяя полученные там результаты, сразу можем записать окончательные выражения для высоты подъема тела:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

для времени полета тела:

$$t_П = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Обратившись к уравнениям движения для проекций на ось X (4.28), нетрудно найти дальность броска:

$$l = r_x(t_П) = v_{0x}t_П = v_0 \cos\alpha \cdot 2v_0 \sin\alpha/g = v_0^2 \sin 2\alpha/g.$$

4.6.3 Движение тела, брошенного горизонтально с высоты *h* с начальной скоростью v_0

Если выбрать систему координат так, как показано на рисунке 4.8, то уравнения движения тела для проекций на координатные оси X и Y в данном случае принимают вид:

$$r_x(t) = v_0 t, \qquad v_x(t) = v_0, \tag{4.30}$$

$$r_y(t) = \frac{gt^2}{2}, \qquad v_y(t) = gt. \tag{4.31}$$

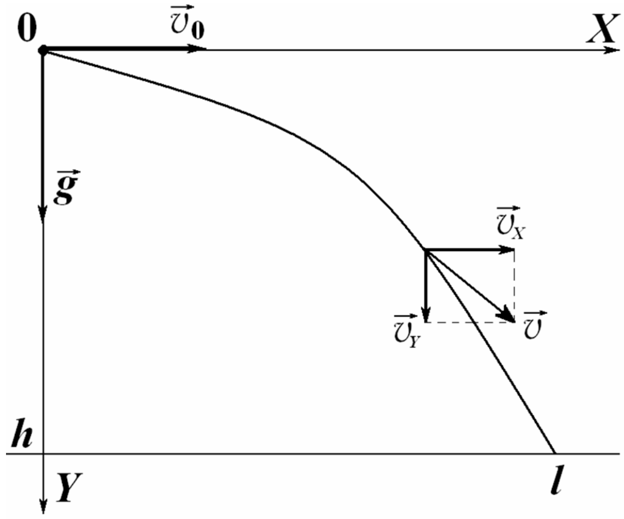


Рисунок 4.8 – Движение тела, брошенного горизонтально с некоторой высоты

Тем самым, криволинейное движение тела мы раскладываем на два более простых прямолинейных движения вдоль осей OX и OY. Из уравнений (4.31) видно, что движение вдоль оси Y – это равноускоренное движение вниз с нулевой начальной скоростью и ускорением g. В точке падения в момент времени $t_П$ координата тела $r_y(t_П) = h$. Из этого условия находим время падения:

$$t_П = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Движение вдоль оси X представляет собой равномерное движение со скоростью v_0. Из (4.30) определяем дальность броска:

$$l = r_x(t_П) = v_0 t_П = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Скорость тела $v(t)$ в любой момент времени легко найти из векторного треугольника скоростей, изображенного на рисунке 4.8:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

В частности, в точке падения ($t = t_П$) скорость тела определяется выражением:

$$v_П = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

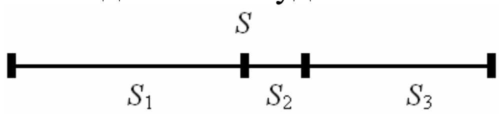
4.7 Примеры решения задач

1. Автомобиль проехал половину пути со скоростью 60 км/ч. Половину оставшегося времени движения он ехал со скоростью 15 км/ч, а последний участок пути – со скоростью 45 км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля на всем пути? Ответ дать в км/ч.

Решение:

Дано:
$\upsilon_1 = 60$ км/ч
$\upsilon_2 = 15$ км/ч
$\upsilon_3 = 45$ км/ч
$S_1 = S/2$
$t_2 = t_3$
Найти:
$\upsilon_{ср} = ?$

Т.к. ответ в задаче требуется дать в км/ч, то перевод единиц измерения в СИ делать не будем.



Представим себе весь путь S в виде отрезка прямой (см. рисунок). Весь путь можно разбить на три отрезка: $S = S_1 + S_2 + S_3$.

По определению средней скорости:

$\upsilon_{ср} = \dfrac{S}{t} = \dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3}$, где t_1, t_2, t_3 – соответственно время, за которое были пройдены участки пути S_1, S_2, S_3:

$$S_1 = \upsilon_1 \cdot t_1, \qquad S_2 = \upsilon_2 \cdot t_2, \qquad S_3 = \upsilon_3 \cdot t_3.$$

Из условия известно, что $S_1 = S_2 + S_3 = S/2$, а $t_2 = t_3$. Отсюда получаем:

$$\upsilon_1 \cdot t_1 = \upsilon_2 \cdot t_2 + \upsilon_3 \cdot t_2 = (\upsilon_2 + \upsilon_3) \cdot t_2, \qquad t_2 = \frac{\upsilon_1}{(\upsilon_2 + \upsilon_3)} \cdot t_1.$$

$$S = 2S_1 = 2\upsilon_1 \cdot t_1, \qquad t = t_1 + 2t_2 = t_1 + 2\frac{\upsilon_1}{(\upsilon_2 + \upsilon_3)} \cdot t_1 = \frac{2\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3}{\upsilon_2 + \upsilon_3} \cdot t_1.$$

В итоге, подставляя получившиеся выражения для S и t в формулу средней скорости, получим:

$$\upsilon_{ср} = \frac{2\upsilon_1 \cdot t_1}{\dfrac{2\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3}{\upsilon_2 + \upsilon_3} \cdot t_1} = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}{2\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3} = 40 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $\upsilon_{ср} = 40$ км/ч

2. Моторная лодка проходит расстояние между двумя пунктами A и B по течению реки за время 3 ч, а плот – за время 12 ч. Сколько времени t_2 затратит моторная лодка на обратный путь? Ответ дать в часах.

<u>Дано:</u> $t_1 = 3$ ч $t = 12$ ч <u>Найти:</u> $t_2 = ?$

Решение:

Обозначим расстояние между пунктами A и B через s, скорость моторной лодки относительно воды v, скорость течения реки (т.е. скорость плота) u. Тогда $t = \frac{s}{u}$, $t_1 = \frac{s}{v+u}$.

Отсюда $s = ut$, $v = u\left(\frac{t}{t_1} - 1\right)$.

Обратный путь у лодки займет время:

$$t_2 = \frac{s}{v-u} = \frac{u \cdot t \cdot t_1}{u(t-t_1) - ut_1} = \frac{t \cdot t_1}{t - 2t_1} = 6 \text{ ч.}$$

Полученное решение имеет смысл лишь при $t > 2t_1$ (т.е. при $v > u$).

Ответ: $t_2 = 6$ ч

3. Крейсер движется по прямому курсу в неподвижной воде с постоянной скоростью 54 км/ч. Катер, имеющий скорость 72 км/ч, проходит расстояние от кормы крейсера до его носа и обратно за 40 с. Найти длину крейсера в единицах СИ.

<u>Дано:</u> $v_1 = 54$ км/ч $= 15$ м/с $v_2 = 72$ км/ч $= 20$ м/с $t = 40$ с <u>Найти:</u> $L = ?$

Решение:

Для упрощения решения задачи выберем систему отсчёта, связанную с крейсером. Тогда движение катера по ходу крейсера (от кормы до носа) будет происходить со скоростью $u' = v_2 - v_1$ за время $t_1 = L/u'$, а в обратную сторону со скоростью $u'' = v_2 + v_1$ за время $t_2 = L/u''$.

Тогда весь путь туда и обратно будет проделан за время: $t = t_1 + t_2 = \frac{L}{(v_2 - v_1)} + \frac{L}{(v_2 + v_1)} = \frac{2Lv_2}{(v_2^2 - v_1^2)}$.

Откуда, выражая L, получаем: $L = \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2v_2} t = 175$ м.

Ответ: $L = 175$ м

4. За 2 с прямолинейного равноускоренного движения тело прошло 20 м, увеличив свою скорость в 3 раза. Определите в СИ конечную скорость тела.

Дано:
$l = 20$ м
$v = 3v_0$
$t = 2$ с
Найти:
$v = ?$

Решение:

Запишем основное уравнение кинематики поступательного движения:

$$S(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (1) \qquad\qquad v(t) = v_0 + at. \quad (2)$$

Учтём, что $v = 3v_0$, $S = 20$ м, $t = 2$ с. Выразим из (2) ускорение, подставим в (1) и найдём v_0:

$$at = v(t) - v_0,\ a = \frac{3v_0 - v_0}{t} = 2\frac{v_0}{t} \rightarrow (1)$$

$$S(t) = v_0 t + \frac{2v_0 \cdot t^2}{t \cdot 2} = v_0 t + v_0 t = 2v_0 t,\ v_0 = \frac{S(t)}{2t}.$$

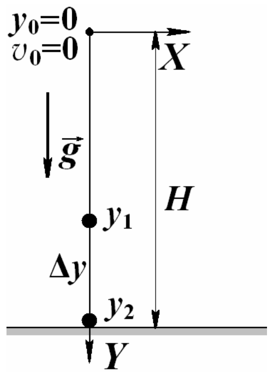
Тогда конечная скорость: $v(t) = 3v_0 = \frac{3S(t)}{2t} = \frac{3 \cdot 20}{2 \cdot 2} = 15$ м/с.

Ответ: $v = 15$ м/с

5. Свободно падающее тело с начальной скоростью, равной нулю, за последнюю секунду своего движения переместилось по вертикали на 45 м. Сколько времени и с какой высоты падало тело? Ответ дать в СИ.

Дано:
$\Delta y = 45$ м
$\Delta t = 1$ с
Найти:
$t = ?$
$H = ?$

Решение:



Направим ось OY вертикально вниз, начало координат расположим на высоте H от поверхности Земли (рисунок). Заметим, что высота, отсчитываемая от поверхности Земли, – величина всегда положительная. В нашем случае высота, с которой падает тело, равна значению координаты тела, находящегося, на поверхности Земли в выбранной системе отсчета.

Уравнение зависимости координаты тела от времени имеет вид:

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Т.к. $\Delta y = y_2 - y_1$, то $\Delta y = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2} = \frac{2gt\Delta t - g\Delta t^2}{2} = \frac{g\Delta t(2t - \Delta t)}{2}$.

Выразив полное время падения, получим: $t = \frac{2\Delta y}{2g\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} = \frac{2\Delta y + g\Delta t^2}{2g\Delta t} = 5$ с.

Высоту, с которой упало тело, можно найти по формуле: $H = y = \frac{gt^2}{2} = 122{,}5$ м

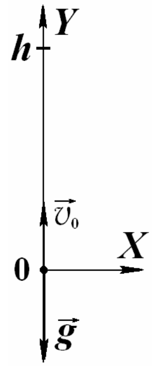
Ответ: $t = 5$ с, $H = 122{,}5$ м.

6. Из ружья произведен выстрел вертикально вверх. Начальная скорость пули υ_0 = 49 м/с. Какова максимальная высота полета пули и время ее движения до этой высоты? Найти путь и скорость пули через 10 с после выстрела. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в СИ.

Дано:
υ_0 = 49 м/с
t = 10 с
Найти:
t_{max} = ?
h = ?
S = ?
υ = ?

Решение:

Начало координат выберем в точке, совпадающей с положением пули в момент вылета из ствола ружья, ось OY укажем в направлении ее движения (рисунок). Движение пули происходит с ускорением 9,8 м/с^2, направленным вертикально вниз. Тогда координата пули и проекция ее скорости на ось OY в произвольный момент времени t соответственно равны:



$$y(t) = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad \upsilon(t) = \upsilon_0 - gt. \qquad (1)$$

Время полета пули до верхней точки траектории определим из условия, что скорость в ней равна нулю: $0 = \upsilon_0 - gt_{max}$. Отсюда $t_{max} = \upsilon_0 / g = 49/9{,}8 = 5$ с.

Такое же время пуля падала вниз, т.е. за 10 с своего движения пуля вернется в исходную точку. В этом легко убедиться, если в первом уравнении системы (1) положить координату y = 0 и найти соответствующие моменты времени:

$$0 = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad 0 = t\left(\upsilon_0 - \frac{gt}{2}\right), \qquad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2\upsilon_0}{g} = 10\,\text{с}.$$

Таким образом, пуля пребывает в этой точке дважды: первый раз в момент выстрела, двигаясь вверх, и второй раз – в момент падения на Землю. Скорость пули υ момент времени t определим, подставив значение t во второе уравнение системы (1):

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - gt = 49 - 9{,}8 \cdot 10 = -49 \text{ м/с}.$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что направление вектора скорости противоположно направлению оси OY. Заметим, что модуль скорости пули в момент падения равен модулю начальной скорости пули при выстреле.

Максимальную высоту подъема пули найдем, подставив значение t_{max}, в первое уравнение системы (1):

$$h = y(t) = \upsilon_0 t_{max} - \frac{gt_{max}^2}{2} = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{g} - \frac{g\upsilon_0^2}{2g^2} = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{49^2}{2 \cdot 9{,}8} = 122{,}5 \text{ м}.$$

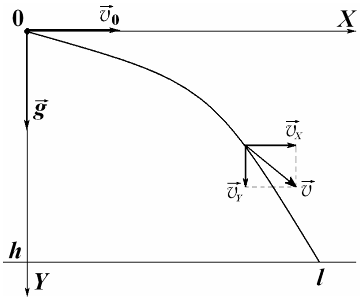
Путь, пройденный пулей за время t, равен удвоенной высоте подъёма h, т.е. $S = 2h = 2 \cdot 122{,}5 = 245$ м.

Ответ: t_{max} = 5 с, h = 122,5 м, S = 245 м, υ = –49 м/с.

7. С вышки в горизонтальном направлении бросили камень, который через 2 секунды приземлился со скоростью 25 м/с. На каком расстоянии от основания вышки упал камень? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:
$t = 2$ с
$v = 25$ м/с
$g = 10$ м/с^2
Найти:
$l = ?$

Решение:



Движение тела, брошенного горизонтально с некоторой высоты, было рассмотрено в пункте 4.6.3.

1) Горизонтальное перемещение происходит с постоянной скоростью $v_x = v_0$. За время падения камень проходит горизонтальный путь $l = v_x \cdot t$.

2) По вертикали движение камня равноускоренное с ускорением g, с нулевой начальной скоростью $v_{0y} = 0$. За время падения камень набирает вертикальную скорость: $v_y = v_{0y} + gt = gt$.

3) Т.к. нам известна полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, то мы можем найти v_x:

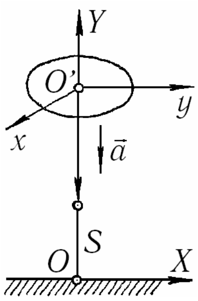
$v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{v^2 - (gt)^2}$. В итоге, $l = t\sqrt{v^2 - (gt)^2} = 30$ м.

Ответ: $l = 30$ м.

8. Вертолет начал снижаться вертикально с ускорением 0,2 м/с^2. Лопасть винта вертолета имеет длину 5 м и совершает вращение вокруг оси с частотой 300 с$^{-1}$. Определить число оборотов лопасти за время снижении вертолета на 40 м.

Решение:

Дано:
$a = 0{,}2$ м/с^2
$n = 300$ с$^{-1}$
$l = 5$ м
$S = 40$ м
Найти:
$N = ?$



Неподвижную систему отсчёта свяжем с Землёй, а ось OY направим вертикально вверх вдоль траектории вертолета. Подвижную систему отсчета свяжем с осью винта вертолета так, чтобы вращение лопасти происходило в плоскости $xO'y$. В подвижной системе отсчета траекторией конца лопасти вертолета является окружность, что дает основание применять уравнение движения точки по окружности, т.е. $\varphi = \omega t = 2\pi nt$, где φ – угол поворота лопасти за время t, n — частота вращения.

Число оборотов N лопасти винта вертолета можно найти по формуле $N = \varphi/2\pi$ или

$$N = nt. \qquad (1)$$

Относительно неподвижной системы отсчета траектория конца лопасти – винтовая линия, однако движение самого вертолета прямолинейное равноускоренное. Уравнение зависимости перемещения от времени для этого движения имеет вид (в скалярной форме):

$$-S = -\frac{at^2}{2}, \qquad S = \frac{at^2}{2}.$$

Откуда время снижения вертолета $t = \sqrt{\dfrac{2S}{a}}$. Подставив значение t в формулу (1), получим

$$N = n\sqrt{\frac{2S}{a}} = 300\sqrt{\frac{2 \cdot 40}{0{,}2}} = 6000 \text{ оборотов.}$$

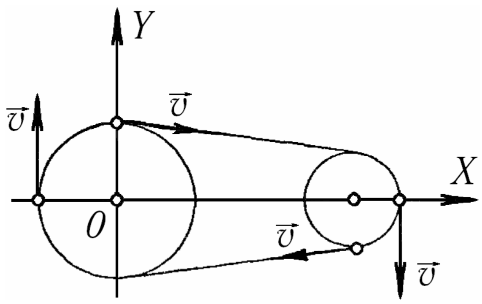
Ответ: $N = 6000$ оборотов.

9. Вал двигателя автомобиля вращается с угловой скоростью 180 рад/с. Определить в СИ линейную скорость ремня и угловую скорость шкива вентилятора автомобиля, если диаметр на валу двигателя 9 см, а вентилятора – 6 см. Сравнить периоды обращения и центростремительные ускорения периферийных точек каждого шкива.

Дано:
$\omega_{дв} = 180$ рад/с
$d_{дв} = 9$ см $= 9 \cdot 10^{-2}$ м
$d_в = 6$ см $= 6 \cdot 10^{-2}$ м
Найти:
$\upsilon_в = ?$
$\omega_в = ?$
$T_д/T_в = ?$
$a_д/a_в = ?$

Решение:

Систему отсчета OXY свяжем с валом двигателя так, чтобы вращение шкивов происходило в плоскости OXY (рисунок).



Если проскальзывание ремня по поверхности шкива отсутствует, то все точки ремня и периферийные точки обоих шкивов обладают одинаковыми по модулю скоростями υ. Используя эту особенность, а также связь линейной скорости с угловой скоростью, получаем:

$\upsilon_в = \upsilon = \omega_{дв} \cdot R_{дв} = \omega_{дв} \cdot d_{дв}/2 = 180 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2} = 8{,}1$ м/с;

$\omega_в = \upsilon_в/R_в = 2\upsilon_в/d_в = 2 \cdot 8{,}1/6 \cdot 10^{-2} = 270$ рад/с.

Так как, $\omega_{дв} = 2\pi/T_{дв}$, $\omega_в = 2\pi/T_в$, то разделив второе равенство на первое, получим: $T_{дв}/T_в = \omega_в/\omega_{дв} = 1{,}5$.

Центростремительное ускорение определяется по формуле $a_n = \upsilon^2/R$. Тогда $a_{дв}/a_в = d_в/d_{дв} = 1/1{,}5 = 0{,}67$.

Ответ: $\upsilon_в = 8{,}1$ м/с, $\omega_в = 270$ рад/с, $T_д/T_в = 1{,}5$, $a_д/a_в = 0{,}67$.

10. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте h = 630 км над поверхностью и облетает Землю за время T = 97 мин. Найти скорость υ спутника и ускорение свободного падения g_h, на этой высоте. Радиус Земли принять равным 70 км. Ответ дать в СИ.

Дано:
h = 630 км = $6{,}3\cdot10^5$ м
$R_з$ = 70 км = $7\cdot10^4$ м
T = 97 мин = $5{,}82\cdot10^3$ с
Найти:
υ = ?
g_h = ?

Решение:

Зная период вращения T спутника, находим его угловую скорость: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Радиус орбиты: $R = R_з + h$. Отсюда находим скорость:

$$\upsilon = \omega R = 2\pi(R_з + h)/T = 7560 \text{ м/с},$$

и нормальное ускорение:

$$a_n = \omega^2 R = 4\pi^2(R_з + h)/T^2 = 8{,}16 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку спутник вращается равномерно, нормальное ускорение совпадает с полным, которое и есть ускорение свободного падения g_h, на этой высоте.

Ответ: υ = 7560 м/с, $g_h = a_n$ = 8,16 м/с^2.

11. Движения двух материальных точек выражаются уравнениями $x_1 = A_1 + B_1\cdot t + C_1\cdot t^2$, $x_2 = A_2 + B_2\cdot t + C_2\cdot t^2$, где A_1 = 20 м, A_2 = 2 м, $B_1 = B_2$ = 2 м/с, C_1 = –4 м/с^2, C_2 = –0,5 м/с^2. Найдите, в какой момент времени скорости этих точек одинаковы? Определите значения скоростей и ускорений этих точек в данный момент времени.

Дано:
$x_1 = A_1 + B_1\cdot t + C_1\cdot t^2$
$x_2 = A_2 + B_2\cdot t + C_2\cdot t^2$
A_1 = 20 м
A_2 = 2 м
$B_1 = B_2$ = 2 м/с
C_1 = –4 м/с^2
C_2 = –0,5 м/с^2
Найти:
$t(\upsilon_1 = \upsilon_2)$ = ?
$\upsilon_1 = \upsilon_2$ = ?
$a_1 = a_2$ = ?

Решение:

Для нахождения скоростей материальных точек, возьмём производные уравнений движения:

$$\upsilon_1 = x_1' = B_1 + 2C_1\cdot t, \qquad \upsilon_2 = x_2' = B_2 + 2C_2\cdot t. \qquad (1)$$

По условию скорости равны:

$$B_1 + 2C_1\cdot t = B_2 + 2C_2\cdot t.$$

Отсюда находим время:

$$t = (B_2 - B_1)/2(C_1 - C_2) = (2 - 2)/2(-4 - 0{,}5) = 0.$$

Делаем вывод, что скорости равны только в начальный момент времени. Из уравнений (1) следует, что:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = B_1 = B_2 = 2 \text{ м/с}.$$

Для нахождения ускорений материальных точек, возьмём производные уравнений скоростей (1):

$$a_1 = 2C_1 = -8 \text{ м/с}^2, \qquad a_2 = 2C_2 = 1 \text{ м/с}^2.$$

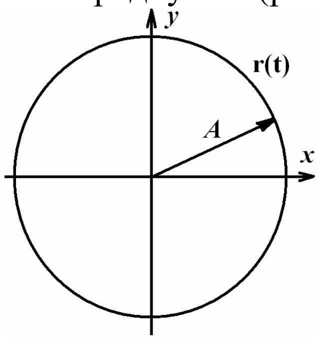
Ответ: t = 0, $\upsilon_1 = \upsilon_2$ = 2 м/с, a_1 = –8 м/с^2, a_2 = 1 м/с^2.

12. Движение материальной точки задано уравнением $\mathbf{r}(t) = A(\mathbf{i}\cos(\omega\cdot t) + \mathbf{j}\sin(\omega\cdot t))$, где $A = 0{,}5$ м, $\omega = 5$ рад/с. Начертите траекторию движения точки. Определите модуль скорости и модуль нормального ускорения этой точки.

Дано:
$\mathbf{r}(t) = A(\mathbf{i}\cos(\omega\cdot t) + \mathbf{j}\sin(\omega\cdot t))$
$A = 0{,}5$ м
$\omega = 5$ рад/с
Найти:
$v = ?$
$a_n = ?$

Решение:

Траекторией движения материальной точки является окружность радиуса A (рисунок).



$$x(t) = A\cos(\omega t), \qquad y(t) = A\sin(\omega t).$$

Избавимся от времени и получим зависимость $y(x)$.

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t), \qquad \frac{y}{A} = \sin(\omega t),$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1,$$

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Получили каноническое уравнение окружности радиуса A.

Для нахождения скорости материальной точки, возьмём производную уравнения движения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = A\omega(-\mathbf{i}\sin(\omega\cdot t) + \mathbf{j}\cos(\omega\cdot t)).$$

Модуль скорости можно определить по формуле:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где $v_x = -A\omega\sin(\omega\cdot t)$, $v_y = A\omega\cos(\omega\cdot t)$.

В итоге, находим модуль скорости:

$$v(t) = \sqrt{A^2\omega^2(\sin^2(\omega\cdot t) + \cos^2(\omega\cdot t))} = A\omega = 0{,}5\cdot 5 = 2{,}5 \text{ м/с}.$$

Модуль нормального ускорения можно определить по формуле:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{A^2\omega^2}{A} = A\cdot\omega^2 = 0{,}5\cdot 25 = 12{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v = 2{,}5$ м/с, $a = 12{,}5$ м/с^2.

13. Движение материальной точки задано уравнением $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(A + Bt^2) + \mathbf{j}Ct$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с^2, $C = 10$ м/с. Начертите траекторию движения точки. Найдите выражения для скорости и ускорения этой точки. Для момента времени $t = 1$ с вычислить модуль скорости, значение полного ускорения.

Дано:
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(A + Bt^2) + \mathbf{j}Ct$
$A = 10$ м
$B = -5$ м/с^2
$C = 10$ м/с
Найти:
$v = ?$
$a = ?$
$a_\tau = ?$
$a_n = ?$

Решение:

$$x(t) = A + Bt^2, \qquad y(t) = Ct.$$

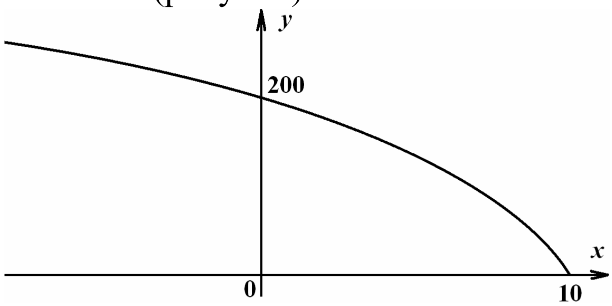
Избавимся от времени и получим зависимость $y(x)$.

$$\sqrt{\frac{x-A}{B}} = t, \qquad y = C\sqrt{\frac{x-A}{B}}.$$

Подставив значения констант, получим уравнение вида:

$$y = \sqrt{200 - 20x}.$$

Это уравнение параболы с горизонтальной осью (рисунок).



Для нахождения скорости материальной точки, возьмём производную уравнения движения:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}2Bt + \mathbf{j}C.$$

Для нахождения ускорения материальной точки, возьмём производную уравнения для скорости:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{i}2B.$$

Модуль скорости можно определить по формуле:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где $v_x = 2Bt$, $v_y = C$.

В итоге, находим модуль скорости:

$$v(t) = \sqrt{4B^2t^2 + C^2} = \sqrt{4 \cdot 25 \cdot 1 + 100} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14{,}1 \text{ м/с}.$$

Значение полного ускорения: $a = 2B = -10$ м/с^2.

Модуль полного ускорения: $|a| = |2B| = 10$ м/с^2.

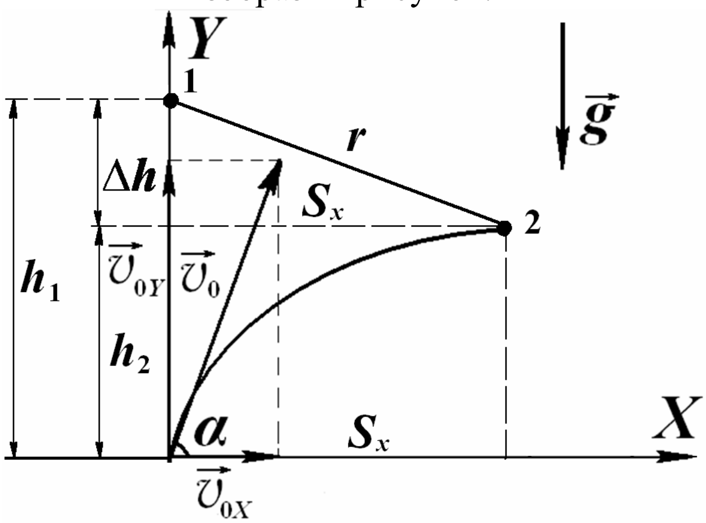
Ответ: $v = 14{,}1$ м/с, $a = -10$ м/с^2, $|a| = 10$ м/с^2.

14. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно – вертикально вверх, другое – под углом θ = 60° к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти расстояние между телами через $t = 1{,}7$ с.

Решение:

Дано:
θ = 60°
$v_0 = 25$ м/с
$t = 1{,}7$ с
Найти:
$r = ?$

Изобразим рисунок.



Из рисунка видно, что искомое расстояние r можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника, где один из катетов – путь, пройденный вторым телом по горизонтали, а второй катет – разность высот подъёма первого и второго тел за время полёта:

$$r = \sqrt{S_x^2 + \Delta h^2}\,.$$

Для первого тела: $h_1 = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$.

Для второго тела: $h_2 = v_{0y} t - \dfrac{gt^2}{2} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$,

$$S_x = v_{0x} t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t\,.$$

Найдём разность высот:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} - v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + \frac{gt^2}{2} = v_0 t(1 - \sin\alpha)$$

В итоге, находим расстояние:

$$r = \sqrt{v_0^2 t^2 \cos^2\alpha + v_0^2 t^2 (1 - \sin\alpha)^2} = v_0 t\sqrt{\cos^2\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha} = $$

$$= v_0 t\sqrt{2(1 - \sin\alpha)} = 22 \quad м/с$$

Ответ: 22 м/с.

4.8 Задачи для самостоятельного решения

1. Две прямые дороги пересекаются под углом α=60°. От перекрестка по ним удаляются машины: одна со скоростью υ_1=60 км/ч, другая со скоростью υ_2=80 км/ч. Определить скорости υ' и υ'', с которыми одна машина удаляется от другой. Перекресток машины прошли одновременно.

Ответ: υ' = 122 км/ч, υ'' = 72,2 км/ч.

2. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где A = 4 м/с, B = –0,05 м/с^2. Определить момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение в этот момент.

Ответ:40 с; 80 м;–0,1 м/с^2.

3. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением 0,5 м/с^2. Определить полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны 3 м, если точка движется на этом участке со скоростью 2 м/с.

Ответ: 1,42 м/с^2.

4. Точка движется по окружности радиусом 4 м. Начальная скорость точки равна 3 м/с, тангенциальное ускорение 1 м/с^2. Для момента времени t = 2 с определить 1) длину пути, пройденного точкой; 2) модуль перемещения; 3) среднюю путевую скорость; 4) модуль вектора средней скорости.

Ответ:1) 8 м; 2) 6,73 м; 3)4 м/с; 4) 3,36 м/с.

5. Движение точки по окружности радиусом 4 м задано уравнением $\xi = A + Bt + Ct^2$, где A = 10 м, B = –2 м/с, C = 1 м/с^2. Найти нормальное, тангенциальное и полное ускорения точки в момент времени t = 2 с.

Ответ: 2 м/с^2; 1 м/с^2; 2,24 м/с^2.

6. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью 30 м/с. Определить скорость, нормальное и тангенциальное ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

Ответ: 3,58 м/с; 5,37 м/с^2; 8,22 м/с^2.

7. Тело брошено под углом 30° к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорения тела в начальный момент движения.

Ответ: 4,9 м/с^2; 8,49 м/с^2.

8. Тележка катилась половину пути со скоростью υ_0 = 3 м/с. На оставшейся части пути она двигалась половину времени со скоростью υ_1 = 2 м/с, а последний участок пути прошла со скоростью υ_2 = 8 м/с. Найти среднюю скорость $\langle\upsilon\rangle$ за все время движения тележки.

Ответ: 3,75 м/с.

9. Три четверти своего пути автомобиль прошел со скоростью υ_1 = 60 км/ч, остальную часть пути со скоростью υ_2 = 80 км/ч. Какова в км/ч средняя путевая скорость $\langle\upsilon\rangle$ автомобиля.

Ответ: 64 км/ч.

10. Автомобиль прошёл расстояние из пункта A в пункт B со скоростью $\upsilon_1 = 40$ км/ч, а обратно со скоростью $\upsilon_2 = 30$ км/ч. Какова в км/ч средняя путевая скорость $\langle\upsilon\rangle$ автомобиля.

Ответ: 34,3 км/ч.

11. Вертикально вверх с начальной скоростью υ_0=20 м/с брошен камень. Через время $\tau = 1{,}0$ с после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте h (от Земли) встретятся камни?

Ответ: 19 м.

12. Из точки A вертикально вверх брошен камень со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Через какое время следует бросить с той же по модулю скоростью второй камень из точки B под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, чтобы он попал в первый камень? Точки A и B расположены на одной горизонтали на расстоянии 4 м друг от друга. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 1,2 с.

13. Тело бросили с поверхности Земли под углом α=60° к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 16$ м/с. Найдите: а) уравнение траектории $y(x)$, где y и x – перемещения тела по вертикали и горизонтали соответственно; б) время движения τ; в) максимальную высоту подъема h_{max} и горизонтальную дальность полета l. При каком значении угла α h_{max} и l будут равны друг другу?

Ответ: а) $y(x) = x\,\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}x^2$; б) 2,8 с; в) $h_{max} = 9{,}8$ м; $l = 23$ м; α=76°.

14. Точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от её скорости υ по закону $a = \alpha\sqrt{\upsilon}$, α – положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна υ_0. Какой путь она пройдёт до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

Ответ: $S = \dfrac{2}{3\alpha}\upsilon_0^{3/2}$, $\tau = \dfrac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\alpha}$.

15. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Начальная скорость υ_0 точки равна 3 м/с, тангенциальное ускорение $a_\tau = 1$ м/с^2. Для момента времени $t = 2$ с, определить: 1) длину пути S, пройденного точкой; 2) модуль перемещения $|\Delta r|$; 3) среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$; 4) модуль вектора средней скорости $|\langle\upsilon\rangle|$.

Ответ. 1) 8 м; 2) 6,73 м; 3) 4 м/с; 4) 3,36 м/с.

16. Два бумажных диска насажены на общую горизонтальную ось так, что плоскости их параллельны и отстоят на $d = 30$ см друг от друга. Диски вращаются с частотой ν=25 с$^{-1}$. Пуля, летевшая параллельно оси на расстоянии $r = 12$ см от неё, пробила оба диска. Пробоины в дисках смещены друг относительно друга на расстояние $S = 5{,}0$ см, считая по дуге окружности. Найти среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ пули в промежутке между дисками и оценить

создаваемое силой тяжести смещение h пробоин в вертикальном направлении. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ. 113 м/с; 35 мкм.

17. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением 0,5 м/с^2. Определите полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны 3 м, если скорость точки в данный момент времени на этом участке 2 м/с.

Ответ. 1,41 м/с^2.

18. Вентилятор вращается с частотой 900 об/мин. После выключения вентилятора, он сделал до полной остановки 75 оборотов. Определить время равнозамедленного вращения вентилятора.

Ответ. 10 с.

19. Диск вращается с угловым ускорением 2 рад/с^2. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение $\vec{a}$ точек на ободе диска равно 13,6 см/с^2. Найдите радиус диска в сантиметрах.

Ответ. 6 см.

20. На движущейся горизонтально со скоростью 20 м/с тележке установлена труба. Под каким углом α к горизонту нужно наклонить трубу, чтобы капля дождя, падающая вертикально с постоянной скоростью 60 м/с, упала на дно трубы, не задев её стенок?

Ответ. 71°35" (71,565°).

21. В реку, скорость течения которой 0,5 м/с, из некоторой точки O на берегу у самой воды бросают камень перпендикулярно берегу. Скорость поверхностных волн в воде 1 м/с. Через какое время, после падения камня в воду, волна от него придет в точку O, если камень упал в воду на расстоянии 10 м от берега?

Ответ. 11,54 с.

22. Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A. Через 60 минут после этого, он повернул обратно и встретил плот на расстоянии 6 км ниже пункта A. Найти скорость течения реки, если при движении в обоих направлениях скорость катера относительно воды была одинаковой.

Ответ. 3 км/ч.

23. Поезд движется прямолинейно с постоянной скоростью $v_0 = 180$ км/ч. Внезапно на пути возникает препятствие, и машинист включает тормозной механизм. С этого момента скорость поезда меняется по закону $v = v_0 - \alpha t^2$, где $\alpha = 1$ м/с^3. Определите тормозной путь и время, необходимое для полной остановки поезда.

Ответ.235,7 м; 7,07 с.

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Что является предметом изучения механики? Какова структура механики?
2. Что такое физическая модель? Какие физические модели использует механика для описания движения материальных объектов?
3. Что называется системой отсчета?
4. Что называется вектором перемещения?
5. В чём отличие пути и перемещения?
6. Какое движение называется поступательным?
7. Какое движение называется вращательным?
8. Что характеризуют скорость и ускорение?
9. Дайте определения средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения.
10. Дайте определения модуля средней скорости и среднего модуля скорости. В чём отличие этих величин?
11. Составьте уравнение траектории движения тела, брошенного горизонтально со скоростью v_0 с некоторой высоты. Сопротивление воздуха не учитывать.
12. Составьте уравнение траектории движения тела, брошенного с поверхности Земли под углом к горизонту со скоростью v_0. Сопротивление воздуха не учитывать.
13. Что характеризуют тангенциальная и нормальная составляющие ускорения? Каковы их модули?
14. Как можно классифицировать движение в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения?
15. Что называется угловой скоростью и угловым ускорением? Как определяются их направления?
16. Какими формулами связаны между собой линейные и угловые характеристики движения?
17. Почему движение является относительным? Сформулируйте закон сложения скоростей.

Список рекомендуемой литературы

1. Савельев И.В. Курс общей физики: учебное пособие для втузов: В 3 т. – 7-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2007.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебное пособие для вузов в 5 т. – М.: Физматлит, 2005-2006.

3. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. [Электронный ресурс] – 5-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2016. – 292 с. Режим доступа on-line: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=71766 с компьютеров ТУСУР.

4. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – 8-е изд., стереотип. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 309 с.

5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд., стереотип. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 431 с.

6. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике: Учебное пособие для втузов. – 8-е изд., перераб. и доп.– М.: Физматлит, 2007. – 640 с.

7. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики: Учебное пособие для втузов. – 12-е изд., испр. – М.: Наука, 1990. – 396 с.

8. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. – 6-е изд., испр. и доп. / Под общ. ред. С.С. Герштейна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 520 с.

9. Физика. Учебно-методическое пособие для поступающих в ТУСУР. 9-е издание / Под ред. А.В. Лячина. Томск, ТУСУР, 2015. – 269 с.

10. Бабаев В.С., Легуша Ф.Ф. Корректирующий курс физики – 1-е изд., Новое.– СПб.: Лань, 2011. – 160 с.