Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика
Учебное пособие (курс лекций) 2 семестр

для специальности 09.03.03
прикладная информатика в экономике

Томск
ТУСУР
2017

Электронное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения лекций на ФСУ в гр. 446-1-2 весной 2017 года.

Оглавление по темам

Оглавление по номерам лекций

ЛЕКЦИЯ № 1. 14. 02. 2017

ГЛАВА 1. ИНТЕГРАЛЫ.

§1. Определения и основные методы.

Определение. Если $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$.

Свойство. Если $F(x)$ первообразная, то $F(x)+C$ (для любого $C \in R$) тоже является первообразной для той же самой функции $f(x)$.

Это легко доказать, действительно, $(F(x)+C)' = f(x)+0 = f(x)$.

Таким образом, первообразных бесконечно много, то есть, если поднять или опустить на любую высоту график $F(x)$, снова будет первообразная.

Свойство. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две различные первообразные функции $f(x)$, то $F_1(x)-F_2(x) \equiv C$.

Доказывается так: $(F_1(x)-F_2(x))' \equiv C'$, то есть $f(x)-f(x)=0$.

Определение. Множество всех первообразных от одной и той же функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом этой функции.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Свойства линейности.

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

2. $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Замечание.

Для произведения свойство $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$ не существует. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть любые 2 простейшие функции, например $f(x)=x$, $g(x)=x$. Тогда:

$\int f(x)g(x)dx = \int x \cdot xdx = \int x^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3 + C$, в то же время

$\int f(x)dx \int g(x)dx = \int xdx \int xdx = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 + C = \dfrac{x^4}{4} + C$.

Впрочем, можно даже рассмотреть $f(x)$ произвольную, $g(x)=1$.
Тогда $\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$,
$\int f(x)dx\int g(x)dx=\int f(x)dx\int 1dx = F(x)\cdot x+C$.

Таблица основных интегралов.

$$\int 0dx=C \qquad \int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\ (a\neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx=arctgx+C \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \qquad \int e^x dx=e^x+C$$

$$\int \cos x dx=\sin x+C; \qquad \int \sin x dx=-\cos x+C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$$

Объяснение причины возникновения модуля в $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

Функция $\ln x$ существует только на правой полуоси, тогда как $\frac{1}{x}$ имеет две ветви, на правой и левой полуоси. Получалось бы противоречие, что производная от несуществующей функции есть на левой полуоси. Функция $\ln|x|$ является чётным продолжением $\ln x$ на левую полуось, и именно она там является первообразной для $\frac{1}{x}$ при $x<0$.

Методы интегрирования.

1. Преобразования подынтегральных выражений.

Различные преобразования, например, арифметические (домножить и поделить, прибавить и отнять), выделение полного квадрата, разбиение многочлена на множители, преобразования по тригонометрическим формулам, и т.д. нередко помогают упростить исходное выражение, разбить его на несколько более простых слагаемых, которые уже сводятся к интегралам табличного типа. На практике рассмотрены разнообразные примеры на виды этих преобразований. Часто нужно домножить и поделить, чтобы сформировать готовое выражение, являющееся производной от известной функции. Например,

Пример. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Когда сформировали выражение $3x^2$, а заодно поделили на 3 перед интегралом, теперь уже точно невозможно перепутать или забыть коэффициент.

Аналогично, допустим, что мы помним, что $(e^{ax})' = ae^{ax}$. Тогда можно постараться сформировать готовое выражение типа ae^{ax} внутри интеграла. Тем самым мы автоматически докажем, что при интегрировании такое выражение на этот коэффициент делится, а не домножается:

Пример. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}\int ae^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$.

Тригонометрические преобразования:

Пример. Вычислить $\int \cos^2 x dx$.

Решение. Применим формулу понижения степени.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int 1 dx + \int \cos 2x dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

Пример. Вычислить $\int \frac{x}{x+a}dx$.

Решение. $\int \frac{x}{x+a}dx = \int \frac{x+a-a}{x+a}dx = \int \left(1-\frac{a}{x+a}\right)dx =$

$\int 1dx - a\int \frac{1}{x+a}dx = x - a\ln|x+a| + C$.

Ответ. $x - a\ln|x+a| + C$.

2. Замена переменной.

Бывают такие случаи, когда функция имеет вид $f(g(x))$, то есть явно видно, что всё выражение зависит от какого-то однотипного блока, например всё выражается через $\sin x$ или $\sqrt{x}$. Делается замена на t, только нужно не забыть пересчитать dx, потому что $dx \neq dt$, если только замена не является простым линейным сдвигом $t = x + a$.

Пример. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = (t^2)'dt$, $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{t+1}{t}2tdt = \int (2t+2)dt = t^2 + 2t + C.$$

Обратная замена: $t^2 + 2t + C = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} + C = |x| + 2\sqrt{x} + C$.

Более того, область определения исходной функции $(0,+\infty)$ из-за наличия в ней квадратного корня, точка 0 не входит в область определения, так как корень там и в знаменателе, так что знак модуля в ответе является излишним, ответ можно записать так: $x + 2\sqrt{x} + C$.

Если в функции присутствуют корни разного порядка, например $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$, то замена должна происходить через корень порядка НОК (наименьшее общее кратное). Причина в том, что именно при этом все корни переводятся в целые степени от t.

Если $t = \sqrt[6]{x}$, тогда: $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$.

Объяснение, почему все корни выразятся через целые степени t:

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{6}} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2 = t^2,$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{6}} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^3 = t^3.$$

3. Подведение под знак дифференциала.

Если интеграл имеет вид $\int f(g(x))g'(x)dx$, то есть в функции присутствует какой-то множитель, который достаточно легко подлежит интегрированию, а в остальном множителе есть явная зависимость от его первообразной, то это значит, что подынтегральная функция есть производная от композиции $f(g(x))$. Тогда можно $g'(x)dx$ объединить и назвать $d(g(x))$, и далее $g(x)$ можно будет повсеместно заменить на t. Рассмотрим, как это действует, на примерах.

Пример. Вычислить $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. $\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x)$, фактически здесь уже подготовлена замена $t = \sin x$, более того, дифференциал пересчитывать не нужно, потому что под дифференциалом и так сформировано то же самое, что будет называться t. То есть, это частный случай замены переменных, только более простой.

Итак, вид интеграла получается $\int t^2 dt = \dfrac{1}{3}t^3 + C$.

Сделаем обратную замену, и вот ответ: $\dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$.

Проверка: $\left(\dfrac{1}{3}\sin^3 x\right)' = \dfrac{1}{3}3\sin^2 x(\sin x)' = \sin^2 x \cos x$, то есть именно исходную подынтегральную функцию мы и получили.

4. Интегрирование по частям.

Существует более общий метод, чем подведение под знак дифференциала. Иногда вовсе не требуется, чтобы первообразная от того множителя, который подводится под dx, была как-то связана с остальной частью функции. Запишите формулу:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Такой короткий вид легче выучить наизусть, а теперь запишем более подробно, чтобы понять смысл.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\,.$$

Если есть два множителя, и один из них интегрируется довольно легко (он обозначен v') то можно перейти к интегралу, в котором наоборот, u понижено до производной, а v' повышено до первообразной. Иногда именно это помогает упростить дальнейшие вычисления.

Доказательство формулы.

Вспомним, что по правилу дифференцирования произведения, которое мы доказывали в прошлом семестре: $\left(u(x)v(x)\right)' =$ $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Тогда $u(x)v'(x) = \left(u(x)v(x)\right)' - u'(x)v(x)$.

Тогда и неопределённые интегралы от этих двух функций совпадают:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int \left(u(x)v(x)\right)' dx - \int u'(x)v(x)dx\,.$$

Но первообразная от производной, это сама функция и есть, т.е.

$$\int \left(u(x)v(x)\right)' dx = u(x)v(x) + C\,.$$

Поэтому $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\,.$

Пример. Вычислить $\int xe^x dx$.

Решение. Если обозначить $u = x$, $v' = e^x$, то при переходе к u' степенной понизится степень, в данном случае она вообще перейдёт в 1. А вот для второго множителя переходим к первообразной, но там не усложняется, остаётся точно так же как и было, e^x. Поэтому на следующем шаге интеграл содержит вообще не два множителя, а один!

Составим таблицу:

$u = x$	$v = e^x$
$u' = 1$	$v' = e^x$

$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx$, тогда получаем ответ: $xe^x - e^x + C$.

Пример. Вычислить интеграл: $\int x\cos x dx$ Составим таблицу:

$u = x$	$v = \sin x$
$u' = 1$	$v' = \cos x$

После применения формулы, останется интеграл, в котором всего лишь один множитель, а не два, потому что x переходит в 1, и один из множителей исчезает.

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

А есть такие случаи, когда функция состоит не из 2 множителей, а всего из одного, но мы ведь всё равно можем считать, что второй множитель есть, только он равен 1.

Пример. $\int \ln x dx$.

$u = \ln x$	$v = x$
$u' = \frac{1}{x}$	$v' = 1$

Здесь производная от подынтегральной функции устроена лучше и проще, чем сама функция, но правда, пришлось допустить некоторое незначительное усложнение типа функции при переходе от v' к v.

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

§2. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим более подробно методы для интегралов типа $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, где $P(x), Q(x)$ - два многочлена каких-либо степеней.

Если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то дробь неправильная. Можно свести неправильную дробь к правильной, поделив $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком. В результате, появятся некоторые степенные слагаемые вне этой дроби, найти первообразные от них не проблема. Таким образом, мы должны научиться интегрировать именно правильные дроби.

Есть некоторые виды дробей, действия с которыми сводятся к тем методам, которые мы уже изучали, это так называемые «простейшие дроби» (у них знаменатель дальше нельзя разложить на множители).

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$\int \frac{dx}{(x+a)^n}$ заменой сводится к $\int t^{-n} dt$, а далее как для степенной.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C .$$

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (обозначим этот интеграл I_n) решается интегрированием по частям, если обозначить всю функцию u а второй множитель 1. Получится «рекурсивная» формула, выражающая I_{n+1} к I_n, значит, все они сводятся к $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ решается так: выделить полный квадрат, и тогда всё сведётся к виду $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$ выделить полный квадрат в знаменателе, и

получится выражение вида $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$.

Рассмотрим общий случай, когда степень знаменателя произвольна. Дробь при этом уже правильная, если не так, то мы отделили целую часть и проинтегрировали её отдельно.

Найдём корни знаменателя и разложим его на множители. При этом неразложимые множители могут остаться либо 1 либо 2 степени. Для любого многочлена 3 степени, уже есть хотя бы один действительный корень. Итак, в знаменателе могут быть только $(x \pm a)$ или $(x^2 + px + q)$.

Далее, можно разбить на сумму простейших дробей, где знаменатель каждой дроби - это один из множителей, на которые был разложен знаменатель $Q(x)$. Например, если все корни различны, то

$$\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Называется **метод неопределённых коэффициентов.**

Если сумму простейших привести к общему знаменателю, то останется приравнять числители, и найти неопределённые коэффициенты.

Ситуация 1) Если все корни $\in R$ и различны.

Пример. $\int \frac{2x - 3}{(x-1)(x-2)} dx$.

Решение. $\frac{2x - 3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$.

Приведём к общему знаменателю $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} =$

$\frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$.

Теперь приравняем числители в $\frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$ и $\frac{2x - 3}{(x-1)(x-2)}$.

$A(x-2)+B(x-1)=2x-3$, т.е.

$(A+B)x+(-2A-B)=2x-3$, получается система уравнений:

$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=-3 \end{cases}$ решая её, находим $A=B=1$.

Получается, что $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx =$

$\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-1|+\ln|x-2|+C$.

Ситуация 2. Если все корни $\in R$, но среди них есть кратные.

Например, если два из 3 корней совпадают, дробь имеет такой вид: $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)}$. Здесь нельзя записать $\frac{1}{(x-a)(x-a)(x-b)}$ и представить в виде $\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}$, потому что, приводя к общему знаменателю такую сумму, мы получим в знаменателе только $(x-a)(x-b)$, а вовсе не $(x-a)^2(x-b)$. Таким образом, тот вариант метода разложения на простейшие, который был для различных корней, здесь приведёт к противоречию.

Разложение необходимо искать в таком виде:

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{B}{(x-b)}$$

Если корень кратности k, то соответственно, надо включить в общую сумму k таких слагаемых, где есть все степени от 1 до k.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx$.

Решение. Наличие множителя x^2 означает, что корень 0 кратности 2. Фактически даже можем рассматривать в таком виде: $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x-0)^2(x+1)}dx$.

Сначала извлечём дробь из интеграла, и ищем разложение в виде:

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

Приводим к общему знаменателю.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

Так как знаменатели равны, то осталось приравнять числители.

$$Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2 = 2x^2+2x+1,$$

$$\Rightarrow \quad Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2 = 2x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow \quad (A+C)x^2+(A+B)x+B = 2x^2+2x+1$$

Тогда надо приравнять коэффициенты при каждой степени, получится $A+C=2$, $A+B=2$, $B=1$.

То есть система уравнений на поиск трёх неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} A+C=2 \\ A+B=2 \\ B=1 \end{cases}$$ решая эту систему, находим $A=B=C=1$.

Тогда исходный интеграл распадается на сумму:

$$\int\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C.$$

ЛЕКЦИЯ № 2.   21. 02. 2017

Продолжение - рациональные дроби.

Ситуация 3. Если не все корни $\in R$.

Возможно, что многочлен в знаменателе дроби не полностью разлагается на первые степени, так, могут присутствовать множители 2 степени типа $x^2 + a^2$ или $x^2 + px + q$ с отрицательным дискриминантом, которые далее нельзя разложить, потому что у них нет действительных корней (есть комплексные корни, но они $\notin R$). В этом случае вместо пары слагаемых в разложение надо включать одно, вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, т.е. правильная дробь с максимально возможной степенью в числителе, должна содержать там линейную функцию. В некоторых примерах может потом оказаться, что $M=0$, однако сразу искать в виде $\dfrac{A}{x^2+px+q}$ нельзя, иначе может получаться противоречие при приведении к общему знаменателю.

А если неразложимые множители 2 степени сами кратные, то надо включить в сумму несколько слагаемых, где степени идут по нарастающей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots$$

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

Решение. Ищем разложение в виде: $\dfrac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)} =$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Приводим к общему знаменателю.

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$A(x^2+1)+(Mx+N)(x+1) = x^2+x+2 \Rightarrow$$

$$Ax^2 + A + Mx^2 + Mx + Nx + N = x^2 + x + 2 \Rightarrow$$
$$(A+M)x^2 + (M+N)x + (A+N) = x^2 + x + 2.$$

Получаем систему:

$\begin{cases} A+M=1 \\ M+N=1 \\ A+N=2 \end{cases}$. Из разности 1-го и 2-го уравнения, получаем

$A-N=0$.

В то же время, $A+N=2$. Тогда $A=1, N=1$. Тогда $M=0$.

Итак, заменим в интеграле «большую» дробь на сумму маленьких, каждая из которых приводится к табличному интегралу.

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \ln|x+1| + arctg(x) + C.$$

Итак, в этом параграфе мы рассмотрели все типы рациональных дробей. Других случаев нет, т.к. неделимых множителей 3 степени уже быть не может, для многочлена 3 степени есть хотя бы один действительный корень.

§3. Интегрирование иррациональностей и тригонометрических выражений.

Иррациональности.

Если в подынтегральной функции присутствует корень какого-то порядка r, то есть $\int f(x, \sqrt[r]{x})dx$, то замена $t = \sqrt[r]{x}$ позволяет полностью избавиться от корней в выражении и свести к рациональной дроби.

Из $t = \sqrt[r]{x}$ следует $x = t^r$, $dx = rt^{r-1}dt$, то есть как видим, пересчёт дифференциала при замене тоже не добавляет ничего, кроме константы и целой степени от t.

Рассмотрим сразу более общий случай: если функция содержит несколько корней разного порядка, т.е. $\int f(x, \sqrt[r_1]{x}, \ldots, \sqrt[r_k]{x})dx$.

Тогда нужна замена на корень порядка r = НОК ($r_1,...,r_k$).

r это наименьшее общее кратное всех порядков, которые там есть.

Именно тогда все корни перейдут в целые степени от t. Так, к примеру, если $\int f(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x})dx$, то НОК = 6. Замена: $t=\sqrt[6]{x}$, тогда: $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Каждый корень становится целой степенью от t:

$$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{6}}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^2=t^2,$$

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{6}}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=t^3.$$

В общем случае степень равна r/r_i, то есть, какого множителя не хватает до наименьшего общего кратного, такая степень от t и получится.

Рассмотрим на примере, содержащем 3 разных корня.

Пример Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

НОК (2,3,5) = 30. Поэтому замена $t=\sqrt[30]{x}$.

Тогда $\sqrt[5]{x}=x^{1/5}=x^{6/30}=\left(\sqrt[30]{x}\right)^6=t^6$. Дополняющий множитель до НОК для числа 5 как раз и есть 6, ведь НОК = 30.

Другие корни пересчитываются аналогично:

$$\sqrt[3]{x}=x^{1/3}=x^{10/30}=\left(\sqrt[30]{x}\right)^{10}=t^{10},$$

$$\sqrt{x}=x^{1/2}=x^{15/30}=\left(\sqrt[30]{x}\right)^{15}=t^{15}.$$

Надо ещё также пересчитать дифференциал для новой переменной t.

$$t=\sqrt[30]{x}\quad\Rightarrow\quad x=t^{30}\quad\Rightarrow\quad dx=30t^{29}dt.$$

Теперь подставим всё это в интеграл.

$$\int\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{t^6+t^{10}}{t^{15}}30t^{29}dt=30\int(t^6+t^{10})t^{14}dt=$$

$$=30\int(t^{20}+t^{24})dt=\frac{30}{21}t^{21}+\frac{30}{25}t^{25}+C$$, и после обратной замены:

$\frac{30}{21}\sqrt[30]{x}^{21}+\frac{30}{25}\sqrt[30]{x}^{25}+C$.

Если $\int f(x,\sqrt[r_1]{x+a},...,\sqrt[r_k]{x+a})dx$ т.е. под корнем некоторое линейное выражение, то решается практически так же, замена $t=\sqrt[r]{x+a}$, где r это тоже наименьшее общее кратное. Более сложная ситуация, когда под корнем разные линейные функции.

Например, $\sqrt{x+1}$ и $\sqrt{x+2}$. Если один корень заменить на t, $t=\sqrt{x+1}$, то $x=t^2-1$, тогда $\sqrt{x+2}=\sqrt{t^2+1}$. Такие будут рассмотрены чуть позже в этом параграфе, они решаются с помощью тригонометрических функций.

Если интеграл вида $\int f\left(\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (где r - целое число), то

замена $t=\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ сводят всё к рациональной дроби от t.

$$t=\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Rightarrow t^r=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow (cx+d)t^r=ax+b\Rightarrow$$

$t^r cx-ax=b-t^r d \Rightarrow x=\frac{b-t^r d}{t^r c-a}$ то есть x выражено в виде рациональной дроби от t, содержащей только целые степени.

Дифференциал тоже выразится в виде рациональной дроби:

$$dx=\left(\frac{b-t^r d}{t^r c-a}\right)' dt = \frac{(b-t^r d)'(t^r c-a)-(t^r c-a)'(b-t^r d)}{(t^r c-a)^2}dt =$$

$$\frac{-rt^{r-1}d(t^r c-a)-rt^{r-1}c(b-t^r d)}{(t^r c-a)^2}dt.$$

Интегрирование тригонометрических выражений.

Пусть рассматриваются интегралы типа $\int f(\sin x, \cos x)dx$. Если там есть ещё и зависимость от tgx или $ctgx$, то всё равно их можно записать через синус и косинус, поэтому можем считать, что вид именно такой: именно $\int f(\sin x, \cos x)dx$

Универсальная тригонометрическая подстановка и её применение.

Замена $t = tg\frac{x}{2}$ называется универсальной тригонометрической подстановкой. Она иногда приводит к громозким вычислениям, зато универсальна. При этой замене:

$$x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Докажем формулы, по которым преобразуются синус и косинус.

Можно $\sin x$ записать по формуле двойного угла, рассматриввая целый угол как удвоенный половинный:

$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ чтобы всё выразилось через t,

которое равно $t = tg\frac{x}{2}$ желательно добиться того, чтобы синус и косинус половинного угла делились друг на друга. Для этого мы можем поделить и домножить на косинус ещё раз:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2tg\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Вспомним, что $1+tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$, тогда далее получается

$$2tg\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Аналогично $\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{1}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

Решение. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}$.

Свели к рациональной дроби. Далее, преобразуем её:

$$\int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(\frac{2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt =$$

$$-\int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = -\int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt = -\int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$\int \frac{2}{t^2+1}dt - \int dt = 2arctg(t) - t + C.$$

Сделаем обратную замену, и получим ответ:

$$2arctg\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) - tg\left(\frac{x}{2}\right) + C = x - tg\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Как видим, при действии универсальной тригонометрической подстановки могут получаться громоздкие 4-этажные дроби. Поэтому для различных частных случаев, где функция обладает какими-то свойствами чётности, придумали другие подстановки.

Частные случаи, связанные с нечётностью по sin и cos.

Случай 1. Если функция в интеграле нечётная относительно косинуса, то есть $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, нужна замена: $t = \sin x$.

В чём её смысл. $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$.

Далее, $x = \arcsin t$, поэтому $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Таким образом, будет корень в нечётной степени, полученный при замене в самой функции, и ещё один - из дифференциала. А если корень нечётной степени или умножить, или поделить на ещё один, то в итоге получится корень в чётной степени, то есть просто целая степень от $(1-t^2)$, т.е. какой-то многочлен от t. Таким образом, эта замена сводит всё к целым степеням от t.

Пример. Вычислить интеграл $\int \cos^3 x dx$.

Решение. Видим, что здесь функция нечётная относительно косинуса, то есть $(-\cos x)^3 = -\cos^3 x$. Поэтому применим замену $t = \sin x$.

В этом случае $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

$\int \cos^3 x dx = \int \sqrt{1-t^2}^3 \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Нечётная степень этого корня сократится с одним дополнительным корнем, который появился при пересчёте дифференциала, и станет чётная степень корня квадратного.

$$\int \sqrt{1-t^2}^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \sqrt{1-t^2}^2 dt = \int \left(1-t^2\right) dt.$$

Знак модуля здесь вовсе не нужен, ведь $t = \sin x$ с областью значений $[-1,1]$, так что заведомо выполняется $1-t^2 \geq 0$.

$$\int \left(1-t^2\right) dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Случай 2. Нечётная относительно sin функция в интеграле, то есть выполняется свойство $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$. Тогда замена: $t = \cos x$.

В этом случае $x = \arccos t$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

В результате тоже получается корень $\sqrt{1-t^2}$ в чётной степени.

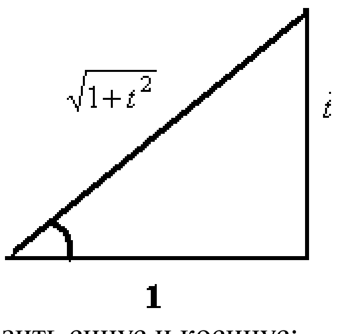
Случай 3. Если при смене знака и синуса, и косинуса знак итогового выражения по меняется 2 раза, то есть останется прежним.

$f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$

Это означает, что суммарная степень чётна. Замена: $t = tgx$.

$x = arctgt$, соответственно, $dx = \dfrac{1}{t^2+1}dt$.

Выразим синус и косинус. $\sin x = \sin(artcgt)$. Нужно выразить синус того угла, тангенс которого равен t. Рассмотрим прямоугольный треугольник, обозначим противолежащий и прилежащий катеты: t и 1. Но тогда по теореме Пифагора, гипотенуза равна $\sqrt{1+t^2}$. Подпишем её тоже.



А теперь можно выразить синус и косинус:

$\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$.

Решение. Степени обеих функций нечётны, суммарная степень чётна. То есть, это как раз тот случай, когда можно сделать замену $t = tgx$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^5} \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3} \frac{\sqrt{1+t^2}^5}{1} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\int t^3 \sqrt{1+t^2}^2 \frac{dt}{t^2+1} = \int t^3 \frac{(1+t^2)dt}{t^2+1} = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4} tg^4 x + C.$$

Ответ. $\frac{1}{4} tg^4 x + C$.

Интегрирование выражений, содержащих $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, или $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Они сводятся к тригонометрическим функциям.

Случай 1. $\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$.

Замена: $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$).

Рассмотрим замену $x = a\sin t$. На самом деле надо было записать $t = \arcsin\frac{x}{a}$, ведь по идее, для замены надо вводить новую переменную и выражать её через старую. Однако, запомнить здесь вам будет легче именно «обратную» замену в виде $x = a\sin t$.

Далее получается $dx = a\cos t$, а корни в этом выражении исчезают так: $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t$. Таким образом, всё сводится к тригонометрическим функциям.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

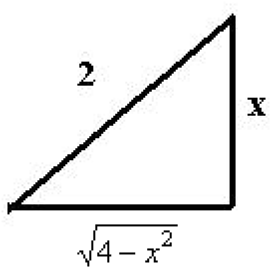
Здесь $a = 2$, потому что $a^2 = 4$.

Замена $x = 2\sin t$. Корень при этом превратится в $2\cos t$.

Итак, $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\sin t}{2\sin t} 2\cos t dt = \int 2\sin t dt = -2\cos t + C$.

после обратной замены, это $-2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C$.

Можем упростить композицию прямой и обратной тригонометрических функций с помощью чертежа, как это делали недавно. Надо найти косинус того угла, синус которого равен $\frac{x}{2}$. Подпишем противолежащий катет и гипотенузу, x и 2. тогда третья сторона по теореме Пифагора $\sqrt{4-x^2}$.



Ну а тогда косинус равен $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.

$$-2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C = -2\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

Примечание. Этот пример можно было решить и другим методом: подведением под знак дифференциала.

Пример. С помощью данной замены доказать формулу из таблицы интегралов: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

Сделаем замену $x = a\sin t$, тогда $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{1}{a\cos t} a\cos t dt$ $= \int dt = t + C$, и обратная замена приводит к $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

Случай 2. $\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$.

Здесь замена $x = \frac{a}{\sin t}$ (либо аналогично $x = \frac{a}{\cos t}$).

Подробнее рассмотрим, как и почему исчезает корень квадратный при замене $x = \frac{a}{\sin t}$. При этом $dx = \left(\frac{a}{\sin t}\right)' dt = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}$,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t}} =$$

$a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{a\cos t}{\sin t}$. Таким образом, все корни преобразуются в тригонометрические функции.

Случай 3. $\int f\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$.

Замена $x = atgt$ (либо $x = actgt$). Как действует такая замена.

$$dx = \frac{a}{\cos^2 t}, \ \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 tg^2 t + a^2} = a\sqrt{1 + tg^2 t} =$$

$$a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = .\frac{a}{\cos t}.$$

Итак, корни вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ могут быть преобразованы к тригонометрическим функциям с помощью замены.

А тогда уже 2-я замена после этого приведёт к рациональной дроби, для которых затем разложение на простейшие. То есть, здесь бывают задачи, которые решаются в 3 шага, рассмотрим их на практике.

ЛЕКЦИЯ № 3. 28. 02. 2017

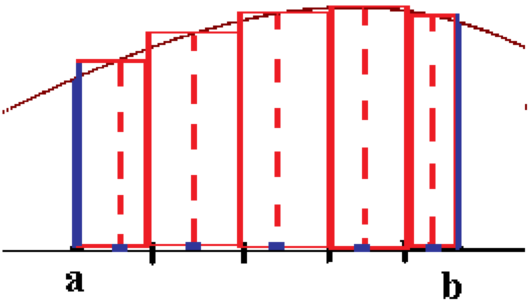
§4. Определённый интеграл.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$. Введём разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Каждый из n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ обозначим Δx_i, а его длину $|\Delta x_i| = x_i - x_{i-1}$. Возьмём какую-то произвольную точку на каждом из этих отрезков, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Следующая сумма: $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)|\Delta x_i|$ называется интегральной суммой. Предел σ_n при $n \to \infty$ и при условии, что $\max_{n\to\infty}|\Delta x_i| \to 0$ (то есть разбиение отрезка измельчается повсюду, а не только в какой-то его части) называется интегралом функции f по отрезку $[a,b]$.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx$.

Геометрически σ_n означает сумму площадей прямоугольников, высота каждого из которых равна значению в выбираемой точке $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$:



Чем больше n, тем более узкие прямоугольники получаются, и в пределе эта величина стремится к величине площади между графиком и осью. Геометрический смысл интеграла: площадь криволинейной трапеции под графиком (если график выше оси). Впрочем, интеграл может быть и меньше нуля, так, если $f < 0$ то это площадь, расположенная между графиком и осью 0x, взятая с отрицательным знаком.

Свойства определённого интеграла.

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Это свойство часто бывает нужно при заменах переменной в определённом интеграле. Так, например, если замена $t = a - x$, то большему x будет соответствовать меньшее t и наоборот. То есть, интеграл получится от большего числа до меньшего, и надо будет поменять пределы интегрирования обратно, и при этом сменится знак.

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Кстати, свойство верно даже в том случае, если $c \notin [a,b]$, тогда просто получится, что интегралы по $[b,c]$ и $[c,b]$ взаимоуничтожатся.

Следующие два свойства относятся к уже знакомому понятию «линейность»: можно вынести константу и интеграл от суммы функций разбить на сумму двух интегралов.

3. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ и 4. $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

5. Если $f \geq (\leq) 0$ то $\int_a^b f(x)dx \geq (\leq) 0$.

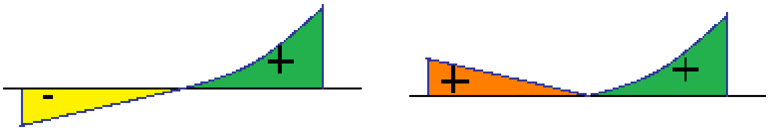
Действительно, если в интегральной сумме $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)|\Delta x_i|$ все числа $f(c_i)$ положительны (отрицательны) то и сумма положительна (отрицательна).

6. если $f \leq g$ то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Свойство 6 следует из 5, ведь можно рассмотреть $g - f \geq 0$.

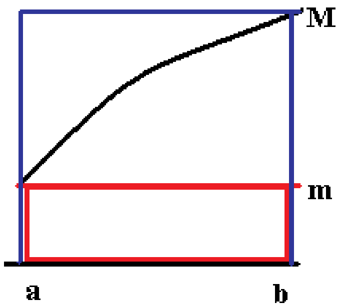
Свойство 7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

(Модуль интеграла меньше или равен, чем интеграл модуля). Действительно, если сначала вычислить интеграл, то площади, расположенные выше и ниже оси, частично вычитаются, и число получается меньше. А если заранее взять модуль функции, то эти площади не вычитаются, а складываются:



Равенство здесь возможно лишь в том случае, когда в области интегрирования функция нигде не меняет знак.

Свойство 8. Если $m \leq f \leq M$ то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.



Площадь прямоугольника, соответствующего минимальной высоте графика функции, это и есть $m(b-a)$, что меньше, чем площадь криволинейной трапеции, а $M(b-a)$ наоборот, больше, ведь это площадь прямоугольника, соответствущего максимальной высоте графика.

А теперь представьте себе, что высота прямоугольника плавно растёт от m до M. Площадь при этом растёт от $m(b-a)$ до значения $M(b-a)$. Но ведь значение интеграла между этими числами, следовательно, при какой-то высоте h, площадь растущего прямоугольника сравняется со значением интеграла.

Свойство 9. Существует такое h, где $m \le h \le M$, что

$$\int_a^b f(x)dx = h(b-a)$$.

Свойство 10. Если f непрерывна, то существует точка $c \in (a,b)$, такая, что: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Отличие от прошлого свойства в том, что это среднее значение не просто существует, а ещё достигается в какой-то точке, то есть обязательно найдётся точка графика на этой высоте. Для разрывной могло быть и не так: например, если ступенчатая функция на одной половине отрезка навна 1, а на второй половине 2, то средняя высота графика 1,5 но ведь график нигде не проходит через эту высоту.

Основной формулой в теме «определённый интеграл» является формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Она позволяет сразу же вычислить определённый интеграл, если известен неопределённый.

Но на самом деле, связь между этими двумя видами интегралов двусторонняя, т.е. и неопределённый интеграл может быть вычислен с помощью определённого. А именно, если рассматривать функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ то есть определённый интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 1. Функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной от функции $f(x)$.

Доказательство. Нужно доказать, что $\Phi'(x) = f(x)$.

Рассмотрим подробнее производную функции $\Phi(x)$. По определению, $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}$.

В данном случае, это $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt}{\Delta x}$, по свойству 2, интеграл по отрезку $[a, x+\Delta x]$ можно представить в виде суммы двух интегралов, а именно, по $[a, x]$ и $[x, x+\Delta x]$. Чертёж:

При этом интеграл по $[a, x]$ там в разности есть ещё и со знаком «минус», то есть он в итоге сокращается.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}.$$

По свойству 10, интеграл по отрезку $[x, x+\Delta x]$ можно представить как некоторое среднее значение, т.е. в какой-то точке $c \in [x, x+\Delta x]$, умноженное на длину отрезка.

В общем случае длина была равна $b-a$, а для данного отрезка это просто Δx. Тогда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x \cdot f(c)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$.

Однако точка $c \in [x, x+\Delta x]$, поэтому при $\Delta x \to 0$, точка c, которая находится где-то между x и $x+\Delta x$, стремится к левой границе отрезка: $c \to x$. Поэтому в итоге $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$.

Теорема 2. (Ньютона-Лейбница). Если $F(x)$ - какая-либо первообразная от $f(x)$, то верна формула: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Если $F(x)$ есть произвольная первообразная, то она отличается на какую-то константу C от той первообразной, которую мы рассматривали в теореме 1. То есть $F(x) = \Phi(x) + C$, что означает $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$. Запишем это равенство в точке a, получится $F(a) = \int\limits_a^a f(t)dt + C$ но ведь интеграл по одной точке это 0, там нулевая длина основания, а значит и нулевая площадь. Тогда $F(a) = 0 + C = C$. вот, кстати, мы заодно и установили, как связана константа C с выбором начальной точки a.
$\Phi(a) = 0$, а на сколько по высоте отличается от Φ любая другая первообразная - это и есть значение $C = F(a)$.

Итак, теперь ясно, что $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + F(a)$.

А теперь рассмотрим это выражение в точке b.
$F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + F(a)$, то есть $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)dt$. Но ведь переменная t вводилась исключительно для того, чтобы отличать x внутри функции и на верхнем пределе интеграла. Теперь, когда перешли к фиксированным границам в интеграле, можно сделать

тривиальную замену $x = t$ и запись примет вид $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, что и требовалось доказать.

Примеры вычисления по формуле Ньютона-Лейбница.

Пример. Найти интеграл $\int_a^b 1dx$.

Решение. $\int_a^b 1dx = x\Big|_a^b = b - a$.

Пример. Найти интеграл $\int_0^1 xdx$.

Решение. $\int_0^1 xdx = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1^2}{2} - \dfrac{0^2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Пример. Найти интегралы $\int_0^1 x^2dx$ и $\int_1^2 x^2dx$.

Решение. $\int_0^1 x^2dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1^3}{3} - \dfrac{0^3}{3} = \dfrac{1}{3}$.

$\int_1^2 x^2dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \dfrac{2^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Пример. Найти интеграл $\int_0^\pi \sin xdx$.

Решение. $\int_0^\pi \sin xdx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$.

Пример. Найти интеграл $\int_0^\pi \cos xdx$.

Решение. $\int\limits_0^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$.

Вид формулы интегрирования по частям для определённого интеграла: $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$.

Особенности замены переменной в определённом интеграле (пересчёт пределов интегрирования, и можно не возвращаться к старой переменной, то есть не делать обратную замену).

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Решение. При замене $t = \sqrt{x}$ мы адаптируем границы к новой переменной, то есть, если $x \in [0,4]$, то $t \in [\sqrt{0}, \sqrt{4}] = [0,2]$.

Тогда $\int\limits_0^2 \frac{1+t}{t} 2tdt = \int\limits_0^2 (2+2t)dt = (2t+t^2)\Big|_0^2 = 8$.

Конечно, старые границы могут остаться прежними, например, при такой замене $[0,1]$ отобразится в $[0,1]$. Но, как правило, при замене верхний и нижний предел интегрирования тоже изменяются.

Замена в определённом интеграле должна задаваться взаимно-однозначной функцией $t = \varphi(x)$, то есть монотонной функцией. Иначе можно столкнуться с такими парадоксами: например, $t = \sin x$, интеграл от 0 до π. Тогда по переменной t получаем интеграл по промежутку $[0,0]$, и он был бы в любом случае равен 0. Чтобы избежать такого противоречия, надо было бы разбить исходный интеграл по переменной x на 2 части, по $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

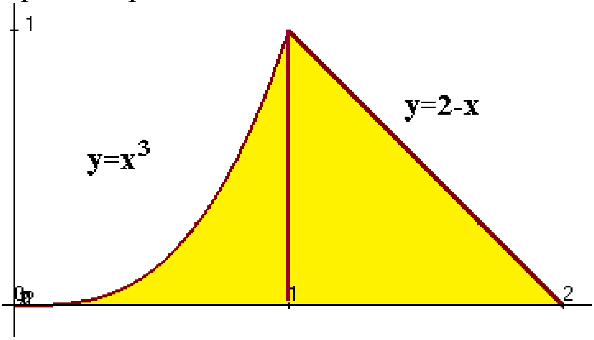
Приложения определённых интегралов.

Пункт 1. Вычисление площадей фигур.

Так как площадь криволинейной трапеции связана с интегралом, то это приложение очевидно. Но есть особенности, связанные со строением геометрической фигуры, в некоторых случаях надо разбить фигуру на несколько частей.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\{y = 0, y = x^3, y = 2 - x\}$.

Решение. Построим чертёж:



Так как верхняя граница после точки 1 переходит с одной кривой на другую, то придётся разбить на сумму двух вычислений по каждой части отдельно: $\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2-x)dx$. Итак, получим $\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2$

$= \frac{1}{4} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Пункт 2. Вычисление объёмов тел вращения.

Если график функции вращать вокруг оси 0х, то получится так называемое тело вращения. Каждое сечение плоскостью, паерпендикулярной оси 0х , это круг, его площадь равна $\pi \ f^2(x)$, так как $f(x)$ это как раз и есть радиус (равно удалению вращающейся точки от оси вращения). В итоге, $V = \int_a^b \pi \ f^2(x)dx$.

Пример. Вывести этим методом формулу объёма шара $V = \dfrac{4}{3}\pi\ R^3$.

Решение. Чтобы получить шар, достаточно вращать верхнюю полуокружность, которая задаётся такой функцией: $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

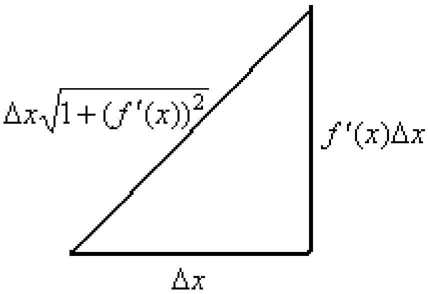
$$V = \int_{-R}^{R} \pi\ f^2(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi\ \sqrt{R^2 - x^2}^{\,2} dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx =$$

$$\pi\left(R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} \right) = \pi\left(2R^3 - 2\frac{R^3}{3} \right) = \pi\ \frac{4}{3}R^3.$$

Пункт 3. Вычисление длины дуги кривой.

Формула для явно заданной кривой: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

Доказательство. Разобьём область определения на n частей, рассмотрим подробнее одну часть графика.



Длина фрагмента кривой приближённо равна гипотенузе. При этом, тангенс угла наклона равен производной. Поэтому, если горизонтальный катет Δx то вертикальный равен $f'(x)\Delta x$. Но в этом случае гипотенуза, по теореме Пифагора, равна:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \Delta x\sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

При переходе к пределу при $n \to \infty$, получится $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

Чем круче наклон фрагмента графика, тем больше величина $(f'(x))^2$, и тем больше корень $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ и соответственно, длина части этой кривой. Напротив, если график горизонтальный (функция = константа) то $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+0^2} = 1$. Длина такой кривой просто равна длине отрезка в области определения, то есть $b-a$.

Для параметрически заданной в плоскости формула принимает такой вид: $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

В трёхмерном пространстве: $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$.

Длина кривой в полярной системе координат.
Пусть кривая задана формулой $r = r(\varphi)$.

Тогда: $L = \int_a^b \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Доказательство этой формулы. Рассмотрим формулы взаимосвязи между полярными и декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Теперь применим параметр φ таким же образом, как в прошлой формуле был параметр t.

$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$.

Найдём производные:

$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$

$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$

Их надо подставить в формулу: $L = \int_a^b \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

$$L=\int_a^b \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\, d\varphi$$

применим формулу сокращённого умножения в каждом квадрате под корнем. Там получатся квадраты и удвоенные произведения, которые, впрочем, сократятся, ведь они будут разного знака. Выражение под корнем преобразуется так:

$$(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2 =$$
$$(r'(\varphi))^2\cos^2\varphi + (r(\varphi))^2\sin^2\varphi - 2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi +$$
$$(r'(\varphi))^2\sin^2\varphi + (r(\varphi))^2\cos^2\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$(r'(\varphi))^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (r(\varphi))^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$
$$(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 .$$

Поэтому и получается в итоге: $L=\int_a^b \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi$.

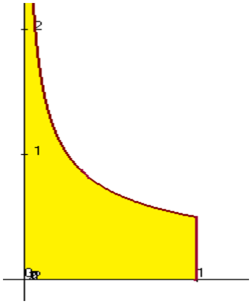
ЛЕКЦИЯ № 4. 07.03.2017

§5. Несобственный интеграл.

Если криволинейная трапеция бесконечно вытянута вправо или вверх, то может быть конечная площадь. Примеры:

Пример. $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1.$

Но ведь область значений E(f) не является ограниченной. При вычислении мы даже и не заметили, что функция неограниченная в окрестности точки 0, т.е. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$. Так как первообразная ограниченная, и в неё можно просто подставить $x=0$ и $x=1$. Вот график этой функции $\frac{1}{2\sqrt{x}}$:



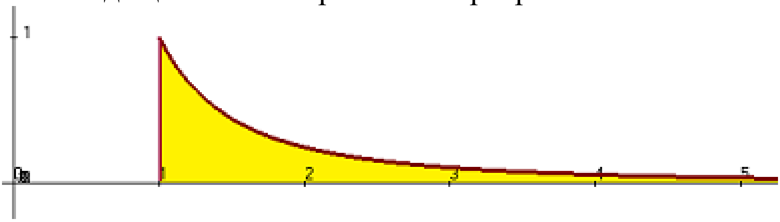
$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ можно рассматривать как предел $\lim\limits_{b\to 1}\int_0^b \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Пример. Вычислить $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Такой интеграл можно рассматривать как предел интегралов вида $\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ при $b\to\infty$. Если вычислить $\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ то получится

$-\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b}+\frac{1}{1} = 1-\frac{1}{b}$. Предел $\lim\limits_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1-0 = 1$.

Несмотря на неграниченность трапеции под интегралом, площадь конечна. Здесь область определения D(f) не является ограниченной. Тем не менее, трапеция слишком узкая, т.е. её ширина убывает достаточно быстро, чтобы площадь не превысила некоторое число. Так может быть, к примеру, если площади криволинейных трапеций между соседними целыми абсциссами убывают со скоростью сходящейся геометрической прогрессии.



Определение. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,+\infty)$, то предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$, и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Аналогично с помощью предела можно определить и несобственный интеграл 2 рода. Так, если функция имеет бесконечный предел на правой границе b то надо отступить на некоторое расстояние ε и посчитать конечный интеграл, а затем перейти к пределу.

Определение. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b)$ и при этом предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ называется несобственным интегралом 2-го рода от функции $f(x)$, и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Итак, если неограниченная D(f), то интеграл называется **несобственным интегралом 1-го рода**, а если E(f) то **несобственным интегралом 2-го рода.**

Если предел существует и является конечным числом, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, если предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется **расходящимся**.

Кстати, для сравнения, геометрическая прогрессия также бывает сходящейся либо расходящейся. Если площадь такой бесконечно вытянутой криволинейной трапеции разбить на части по целым числам, например от 1 до 2, от 2 до 3 и так далее, то если они образуют сходящуюся прогрессию, и в сумме равны некоторой константе, то интеграл сходится.

Примеры **расходящихся** несобственных интегралов.

Пример. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\Big|_1^{\infty} = \infty$. Здесь расходимость из-за неограниченности первообразной.

Пример. $\int\limits_0^{\infty}\cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^{b} = \lim\limits_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to\infty}\sin b$. Но этот предел не существует, синус колеблется от -1 до 1 и при увеличении переменной его график не стремится ни к какой конкретной высоте. И хотя даже функция ограничена, несобственный интеграл расходится. Площадь криволинейной трапеции, при увеличении x, то растёт, то снова убывает.

Пример $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^{b} = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim\limits_{b\to\infty}\ln b = \infty$.

Примеры **сходящихся** несобственных интегралов.

Пример. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = arctgx\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 1. Несобственный интеграл 1-го рода $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^a}$

сходится тогда и только тогда, когда $a > 1$,

несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^a}$

сходится тогда и только тогда, когда $a < 1$.

Доказательство. Сначала рассмотрим первообразную.

$\int\frac{1}{x^a}dx = \int x^{-a}dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1}$, что можно записать в виде $\frac{1}{1-a}\frac{1}{x^{a-1}}$.

Если пределы интегрирования от 1 до ∞, то не бесконечный результат получится лишь в том случае, когда переменная в знаменателе, то есть степень $-a+1<0$, то есть $-a<-1$, то есть $a>1$.

А если пределы интегрирования от 0 до 1, то наоборот, наличие переменной в знаменателе приводит к тому, сто предел бесконечен, интеграл расходится. То есть для сходимости, надо чтобы степень была такая, чтобы переменная находилась именно в числителе. Тогда $-a+1>0$, то есть, $-a>-1$, $a<1$. Что и требовалось доказать.

Обратите внимание, что в случае $a=1$ расходятся оба этих интеграла, так как первообразная -это логарифм, а он не ограничен ни при $x\to 0$, ни при $x\to\infty$.

Для таких интегралов 2 рода, для сходимости надо, чтобы степень перешла в положительные, например, если у функции степень $-\frac{1}{2}$, а у первообразной на 1 больше, уже $+\frac{1}{2}$. Если же она $-\frac{3}{2}$, то после интегрирования станет $-\frac{1}{2}$, то есть ещё не переходит через 0 в положительные.

Примеры

1 рода	$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$	$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$	$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}^3}dx$	$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$	$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$
2 рода	$\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx$	$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}^3}dx$	$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$
a	3	2	1,5	1	1/2	1/3

Жёлтым цветом здесь выделены сходящиеся интегралы.

Теорема 2. Несобственный интеграл сходится $\Leftrightarrow$ первообразная на границах интегрирования имеет конечный предел.

Идея доказательства. Действительно, $\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = \left(\lim\limits_{b\to\infty} F(b)\right) - F(a)$. Второе слагаемое конечное число. Первое слагаемое (предел) есть конечное число тогда и только тогда, когда разность - конечное число. То есть, сходятся именно те несобственные интегралы, где график первообразной стабилизируется по высоте, т.е. имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = C$. Если интеграл 1 рода, то $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = C$ равносильно сходимости.

Следствие (необходимый признак сходимости).

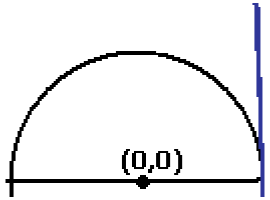
$\int_a^\infty f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Действительно, если $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = C$ то $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C' = 0$.

Замечание. Это необходимый, а не достаточный признак, то есть, из сходимости следует, что f стремится к 0, но не наоборот. То есть, при $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ могут быть как сходящиеся, так и расходящиеся интегралы, а вот если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, тогда только расходящиеся.

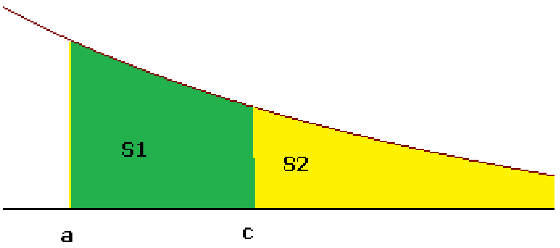
Рассмотрим $\int_0^\infty \frac{1}{x}dx$ и $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx$. Здесь в обоих случаях $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ выполнено. А тем не менее, первых из них расходится, а второй сходится. Их графики кажутся похожими, но ведь второй уменьшается существенно быстрее: так, при $x = 1000$ значение у первой их них $1/1000$, а у второй $1/1000\,000$, то есть в 1000 раз меньше! То есть кроме условия $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ важна ещё и скорость сходимости. Но если это условие не выполнено, то сходимости точно нет, в этом и состоит понятие «необходимый» признак.

Как мы увидели, овольно нередкой является ситуация, когда производная стремится к бесконечности, а сама функция (то есть её первообразная) в той же точке является конечной. Геометрическая интерпретация. Рассмотрим верхнюю полуокружность. При приближении к точке (1,0) касательная стремится к вертикальному положению, тангенс угла её наклона к ∞. А при этом сама полуокружность $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ограничена по высоте:



Теорема 3. Пусть $c > a$. Несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int_c^\infty f(x)dx$.

Идея доказательства. Вся площадь равна $S = S_1 + S_2$. При этом S_1 заведомо является конечной, в этом случае число S конечно тогда и только тогда, когда S_2 конечно. Чертёж:



Теорема 4. Признак сравнения в конечной (непредельной) форме.

Если $f(x) \le g(x)$ и сходится $\int_a^\infty g(x)dx$, то сходится $\int_a^\infty f(x)dx$.

Действительно, если интеграл для большей функции равен C, то для меньшей он меньше чем C, то есть, не равен бесконечности.

Пример. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2 \ln x}$.

Учитывая тот факт, что при $x > 3 > e$ верно $\ln x > 1$, получается

$\frac{1}{x^2 \ln x} < \frac{1}{x^2}$. Тогда $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2 \ln x} < \int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2}$, а он сходится, так как степень знаменателя больше 1. Тогда и исходный интеграл сходится.

Замечание. Аналогично тому, как мы ограничиваем сверху какой-либо сходящейся функцией, можно ограничить снизу какой-либо расходящейся функцией. Если интеграл от этой меньшей функции расходится, то и исходный тоже расходится.

Теорема 5. Признак сравнения в предельной форме.

Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, причём С отлично от 0 и от ∞ (то есть $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые одного порядка). Тогда:

$\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится.

Пример на признак в предельной форме.

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$.

Рассмотрим для функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ более просто устроенную, но эквивалентную ей $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$, котрую можно записать в виде $\frac{1}{x^{3/2}}$.

Предел их отношения равен 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} : \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

Тогда сходимость первого интеграла равносильна сходимости второго, то есть можно рассматривать $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx$. Степень $a=\frac{3}{2}>1$, поэтому интеграл сходится.

Эти признаки позволяют сравнивать интегралы, содержащие громоздкие функции, с какими-то более простыми «эталонными», например, степенными.

Замечание. В прошлом примере мы рассматривали по старшей степени, а в аналогичной ситуации для интегралов 2 рода надо определять степень суммы по младшей степени. Для интегралов 2 рода верны аналогичные признаки сравнения, но в предельной форме сравнение происходит по наименьшей степени.

§6. Кратные интегралы.

Определение. Пусть дана функция $z=f(x,y)$, её область определения - некоторая область D в плоскости. Введём разбиение D на части двумя семействами прямых линий. В каждой части D_i возьмём произвольную точку c_i с координатами (x_i,y_i). Площадь D_i обозначим $S(D_i)$. Величина $\sigma=\sum f(c_i)S(D_i)$ называется интегральной суммой. Предел этой величины при измельчении разбиения называется двойным интегралом функции $z=f(x,y)$ по множеству D, и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Как правило, сначала будем рассматривать область D - прямоугольник: $x\in[a,b]$, $y\in[c,d]$.

Геометрический смысл. Интегральная сумма означает сумму объёмов параллелепипедов, построенных на каждом из оснований D_i, а интеграл - объём под поверхностью, которая задана уравнением $z=f(x,y)$.

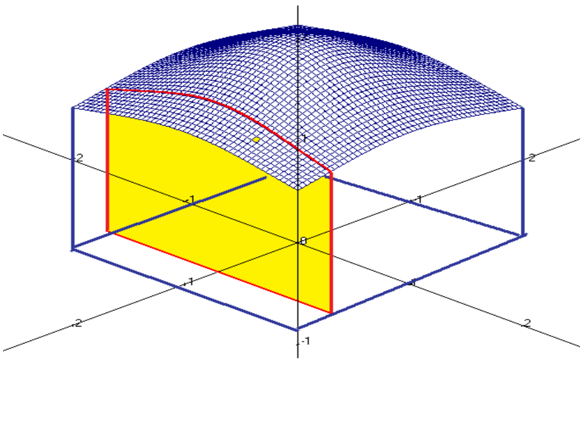
Физический смысл. Если функция задаёт плотность какой-либо плоской пластины, то двойной интеграл - масса.

Аналогично определяется понятие тройного интеграла. Если дана функция $w = f(x, y, z)$, определённая в трёхмерной области, то её можно разбить на части с помощью трёх семейств плоскостей, выбрать по точке в каждой части, и составить интегральную сумму. То, что получается в пределе, называется тройным интегралом. $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$. Физический смысл тройного интеграла: если функция - плотность некоторой породы, то в результате вычисления тройного интеграла получится масса.

Метод вычисления.

При вычислении кратных интегралов, как двойных, так и тройных, сводят к так называемым «повторным» интегралам.

$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx$. Также в этом случае можно применять запись вида: $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$ где дифференциал пишется именно после того интеграла, которому он соответствует. При фиксировании одной переменной, мы получаем функцию уже не двух, а одной переменной. Так, при $y \equiv c$ получается $f(x, c)$. На чертеже этому соответствует сечение поверхности вдоль оси Ox, то есть кривая. Интеграл по одной переменной при фиксированной второй, это площадь криволинейной трапеции, которая получается в сечении.



Если проинтегрировать все эти величины по второму направлению, то получится объём тела под поверхностью.
Аналогично, если разрезать булку хлеба на очень тонкие слои, а затем вычислить площадь каждого, и сложить все эти величины, умножая при этом на их толщину, то получим объём.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (xy)dxdy$, где D есть квадрат: $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$.

Решение. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 xydy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\left. \frac{xy^2}{2} \right|_0^1 \right) dx$ вычислили сначала «частную первообразную» по переменной y, то есть ту функцию, частная производная от которой по y была бы xy. Во внутренних скобках применяем формулу Ньютона-Лейбница по переменной y.

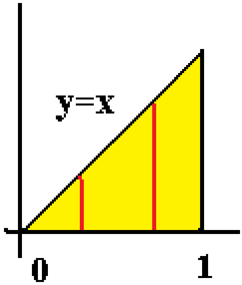
$\int\limits_0^1 \left(\left. \frac{xy^2}{2} \right|_0^1 \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x1^2}{2} - \frac{x0^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{2} dx$. Оставшийся интеграл по переменной x вычисляется обычным образом: $\int\limits_0^1 \frac{x}{2} dx = \left. \frac{x^2}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$.

Однако, область D может быть и не прямоугольной. Аналогично тому, как массив в программировании может быть не прямоугольным, тогда во внутреннем цикле двойного цикла границы переменные и зависят от переменной, определённой во внешнем цикле:

```
for i : = 1 to 10 do
for j : = 1 to i do
read (a[i,j]);
end;
end;
```

В случае, если область не прямоугольная, границы вложенного интеграла могут быть не числами, а зависеть от внешней переменной. Рассмотрим пример.

Пример. Вычислить $\iint\limits_D (x^2 y)dxdy$, D - треугольник с вершинами (0,0), (1,0), (1,1).



Решение. Границы фигуры по переменной x это $[0,1]$, при других значениях x нет точек этого треугольника вообще. При каждом x, вертикальный отрезок имеет разную высоту, сначала вообще 0, а затем чем правее, тем больше. Чем больше x, тем выше отрезок по y. Вертикальные отрезки внутри треугольника от высоты 0 доходят до линии $y = x$. Поэтому при каждом $x \in [0,1]$, верно $y \in [0, x]$.

Интеграл будет записан в виде: $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x x^2 y dy \right) dx$.

Граница во внутреннем интеграле зависит от внешней переменной x. Границы внешнего интеграла обязательно должны быть контантами. Во вложенной скобке, вычислится первообразная по y, и будет применена формула Ньютона-Лейбница по y.

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x x^2 y dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\left. \frac{x^2 y^2}{2} \right|_0^x \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2 x^2}{2} - \frac{x^2 0^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x^4}{2} dx .$$

И хотя границы зависят от x, они подставлены в переменную y, т.е. всё равно получилась функция от x, так же, как если был бы прямоуголник и границы были бы числовыми. Далее, уже обычным путём вычислим интеграл по x.Итак, $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \left. \frac{x^5}{10} \right|_0^1 = \frac{1}{10}$.

ЛЕКЦИЯ № 5. 14.03.2017

Смена порядка интегрирования.

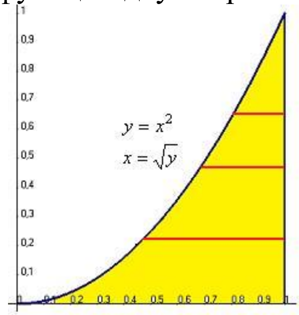
Любую прямоугольную таблицу можно суммировать сначала по строкам, и затем сложить все полученные результаты, а можно сначала по столбцам. Но в итоге всё равно получится сумма всех элементов. Подобное есть и для двойных интегралов. Можно разбить поверхность на сечения вдоль оси Ox, а можно в перпендикулярном направлении, вдоль Oy. Для прямоугольной области:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy .$$

Проблема возникает в том случае, когда область не прямоугольная. Там так просто заменить интегралы наоборот уже не получится, ведь границы внутреннего зависят от внешней переменной. В этом случае надо заново рассмотреть (с помощью чертежа) поведение одной переменной в зависимости от другой. Можно провести не вертикальные, а горизонтальные отрезки, и найти их пересечения с областью определения. Теперь нужны не верхняя и нижняя граница, а левая и правая.

Пример. Сменить порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$.

Сначала построим чертёж. Закрасим область под параболой. Это область определения D функции двух переменных.



Глобальные границы по y от 0 до 1, так как ниже 0 или выше 1 вообще нет точек этой фигуры Теперь надо узнать, от какой до какой абсциссы будет проходить горизонтальный отрезок внутри фигуры. Нужно границу $y = x^2$ записать с помощью обратной функции: $x = \sqrt{y}$. Горизонтальная линия чем выше, тем позже начинается, а именно от линии $\sqrt{y}$, а заканчивается всё время при $x = 1$.

Итак, $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$.

Вычисление тройных интегралов.

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D xyzdxdydz$ где D куб $x, y, z \in [0,1]$.

Решение. Здесь 3 вложенных действия: $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 xyzdz \right) dy \right) dx$.

Сначала вычислим первообразную по z и применим формулу Ньютона-Лейбница по z, $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(xy \frac{z^2}{2} \bigg|_0^1 \right) dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{xy}{2} dy \right) dx$.

После этого вычислим первообразную по y:

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{xy}{2} dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{xy^2}{4} \bigg|_0^1 \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8} \bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Замечание. Тройные интегралы тоже могут быть по сложной области, а не параллелепипеду или кубу. Во внутреннем интеграле (по переменной z) в этом случае будет зависимость уже от обеих внешних переменных, а именно x, y. Примеры - на практике.

Приложения кратных интегралов.

Если $f \equiv 1$ то при вычислении интеграла получится просто площадь области D (если двойной интеграл) или объём области (если тройной интеграл). Физический смысл: если плотность равна 1, то масса как раз и равна объёму.

Для сравнения, для определённых интегралов было то же самое, только там получалась длина отрезка: $\int\limits_a^b 1dx = x\Big|_a^b = b - a$.

1) Вычисление площадей фигур (двойной интеграл).
2) Вычисление объёмов тел (тройной интеграл).

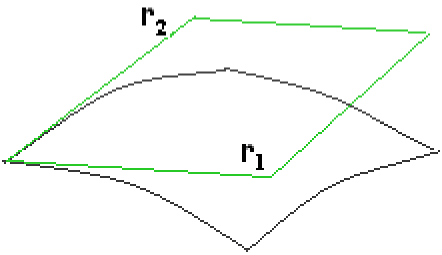
Примеры с $f \equiv 1$ будут чуть позже, после изучения полярных и сферических координат.

3) Площадь поверхности.

Формула площади явно заданной поверхности:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy\,.$$

Доказательство. Разобьём область определения на прямоугольники небольшого размера, со сторонами Δx и Δy. Над таким прямоугольником есть часть поверхности, за счёт малости размера она очень близка к касательной плоскости. Рассмотрим параллелограмм на касательной плосокcти и вычислим его площадь. Его стороны это векторы r_1 и r_2. Рассмотрим подробнее, какие у них координаты.



r_1 направлен по касательной в сечении, параллельном оси Ox, то есть тангенс угла наклона для него это $f'_x(x, y)$. Тогда его координаты: $(\Delta x, 0, \Delta x \cdot f'_x) = \Delta x(1, 0, f'_x)$. Аналогично вектор r_2 расположен в сечении вдоль оси Oy, его координаты $(0, \Delta y, \Delta y \cdot f'_x)$, если вынести дельта, то это $\Delta y(0, 1, f'_x)$. Площадь параллелограмма вычисляется с помощью векторного произведения, она равна модулю векторного произведения (вспомните 1 семестр, векторная алгебра и геометрия).

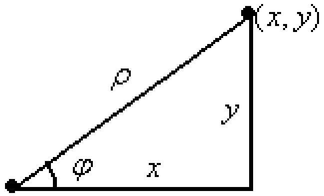
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = \left(-f'_x, -f'_y, 1\right)$$, модуль этого вектора: $\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}$.

Вспомним, что мы вынесли за скобку коэффициенты Δx и Δy.
Поэтому
в интегральных суммах получается $\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\,\Delta x\Delta y$. Тогда при переходе к пределу, будет интеграл: $S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\,dxdy$, где D это область определения в горизонтальной плоскости (то есть область, над которой расположена поверхность).

Замена переменных в кратных интегралах.

Замена в двойном интеграле. Полярные координаты.

Кроме пары чисел (x,y), которыми можно задать точку на плоскости, можно задать также и таким образом: соединим точку с началом координат, длину этого отрезка обозначим ρ. Угол между осью $0x$ и этим отрезком обозначим φ.



Так как x это прилежащий катет, а ρ гипотенуза, тогда $\cos\varphi=\dfrac{x}{\rho}$, аналогично $\sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}$, откуда следуют такие формулы:

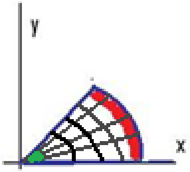
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

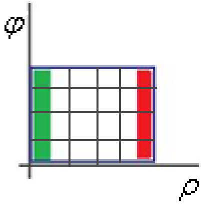
Также возможен обратный пересчёт: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол:

$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ (это верно для 4 и 1 четвертей, то есть там, где основная непрерывная ветвь тангенса) и $\varphi = \pi + arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ для 2,3 четвертей.

Полярная система фактически применяется в жизни, например в городах с радиальной сеткой улиц. Так, в Москве есть юго-западный округ, северо-восточный и т.д. То есть там практически важно расстояние от центра (Кремля) и направление от центра (на юг, запад, восток, северо-запад и т.д.).

При замене переменных, соответственно, надо все переменные x, присутствующие в функции, заменить на $\rho\cos\varphi$, а все y на $\rho\sin\varphi$, то есть получим $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Однако необходимо ещё заменить дифференциал, если помните, в 1-мерном случае это делали так: например, при $x = t^2$ было $dx = (t^2)'dt = 2tdt$. В двумерном случае, дополнительный множитель также есть. Если бы просто написали $d\rho d\varphi$ вместо $dxdy$, то неверно задали бы искажение сетки координат при замене. Еслди изобразить дуги и радиусы, то сектора круга сужаются к центру, а когда переносим изображение в плоскость параметров (ρ, φ) то мы растягиваем эту сетку на некоторый прямоугольник, зелёный сектор по площади гораздо меньше красного, но без правильного пересчёта дифференциалов они получились бы равны. Чертёж - слева в плоскости параметров (x, y), справа в плоскости (ρ, φ).





При том же растворе угла, чем ближе сектор к центру, тем меньше его площадь, и соответственно, меньше его влияние на интеграл. Для правильного учёта этих искажений, надо умножить на определитель матрицы линейного оператора порядка 2, эта матрица в то же время и является производной матрицей отображения $(\rho,\varphi) \to (x,y)$.

При замене двух старых на две новые переменные в плоскости, существует уже 4 различных частных производных, и из них можно образовать матрицу 2-го порядка. Строение этой матрицы: $\begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix}$.

Она называется матрицей Якоби, а её определитель - определителем Якоби, или «якобианом». В данном случае,

$\begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$, определитель: $\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$.

Итак, доказали, что определитель Якоби полярной системы координат: $I = \rho$. Выражение $dxdy$ заменяется на $\rho\ d\rho\ d\varphi$.

Интеграл по той части фигуры, которая ближе к центру, как раз и будет взят с меньшим весом, а которая дальше от центра - с большим весом, ведь там ρ больше. При замене $x = t^2$, где $dx = (t^2)'dt = 2tdt$, множитель $2t$ фактически является одномерным якобианом, но только для матрицы порядка 1 определитель вычислять было не нужно, так как он совпадает с самим этим элементом.

При переходе к полярным координатам, фрагмент круга фактически отображается в прямоугольную область. А это удобнее для вычисления, так как границы внутреннего и внешнего циклов становятся независимы друг от друга.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xy^2 dxdy$ где D - четверть круга единичного радиуса в первой четверти плоскости.

В декартовых координатах, этот интеграл имеет такой вид:

$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx$, что при вычислении внутреннего интеграла дало бы y^3, в итоге привело бы к $\sqrt{1-x^2}^{\,3}$ и потребовало бы ещё серию

подстановок. В полярных координатах, решение гораздо более просто и удобно.
Луч находится в 1 четверти при $\varphi \in [0, \pi/2]$. Радиус 1. Тогда:

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (\rho\cos\varphi)(\rho\sin\varphi)^2 \rho \cdot d\rho \right) d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (\sin^2\varphi\cos\varphi) \cdot \rho^4 d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos\varphi \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos\varphi \left(\left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^1 \right) d\varphi = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos\varphi \; d\varphi =$$

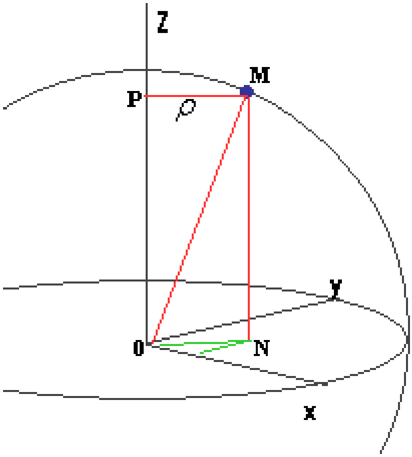
$$\frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \; d(\cos\varphi) = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \; d(\cos\varphi) = \frac{1}{5} \left. \frac{\sin^3\varphi}{3} \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}.$$

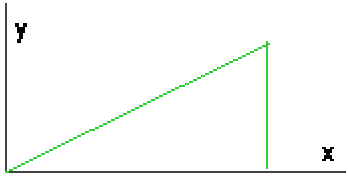
Кстати, множители, не зависящие от ρ, можно было сразу вынести во внешний интеграл, как видим, они всё равно умножаются на первообразную по ρ и остаются неизменными, и выносятся во внешний интеграл по φ.

Пример. Доказать формулу площади круга $S = \pi R^2$ с помощью полярных координат.
Решение. Так как надо вычислить площадь, то считаем $f = 1$.

$$\iint_D dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho \cdot d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^R \right) d\varphi = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2.$$

Цилиндрические и сферические координаты в пространстве.
Существует два различных обобщения полярных координат для трёхмерного пространства.
Цилиндрические координаты.





Соединим точку (x, y, z) кратчайшей линией с осью $0z$, и это расстояние (отрезок PM) обозначим ρ. В проекции на горизонтальную плоскость, такую же длину имеет отрезок ON, соединяющий точку (x, y) с началом координат в плоскости. Получается, что в плоскости $0xy$ пересчёт в ρ, φ такой же, как и для полярных координат. Координата z не меняется, они и в старой, и в новой системе одна и так же. Тогда формулы перехода:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

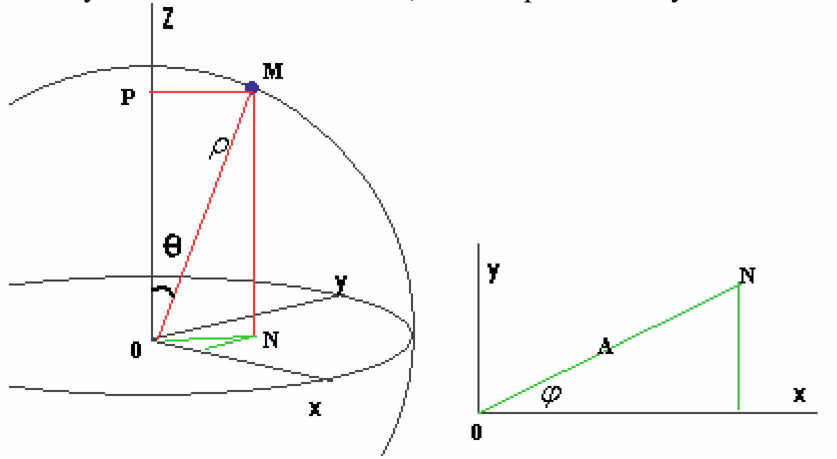
Вычислим определитель Якоби.

$$I = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho .$$

Диапазоны изменения таковы: $\varphi \in [0,2\pi)$, $\rho \in [0,+\infty)$, $z \in (-\infty,+\infty)$.

Сферические координаты.

Эта система очень сильно похожа на географические координаты на планете. Если соединим точку (x, y, z) кратчайшей линией теперь не с осью $0z$, а с точкой $(0,0,0)$, и именно это расстояние обозначим ρ, то чертёж получается несколько иной, чем в прошлом случае.



Угол между отрезком, соединяющим (x,y,z) с началом координат, и вертикальной осью, обозначим θ (греческая буква «тетта»), а угол в горизонтальной плоскости между осью $0x$ и его проекцией обозначим φ.

Координата z, равная расстоянию OP, это прилежащий катет угла θ,

$\frac{|OP|}{|OM|} = \frac{z}{\rho} = \cos\theta$ таким образом, $z = \rho\cos\theta$.

Расстояние PM = ON, обозначенное буквой А на правом чертеже, это противолежащий катет, поэтому $A = \rho\sin\theta$. А в треугольнике в плоскости $0xy$, это А является гипотенузой, где $x = A\cos\varphi$, $y = A\sin\varphi$. Поэтому в итоге получаем:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}.$$

Здесь θ это и есть $90-\alpha$, если α географическая широта. В этой системе «широта» фактически отмеряется от северного полюса, на экваторе она равна 90 градусов, а на южном полюсе 180. Угол φ это аналог географической долготы.

Диапазоны изменения таковы: $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, +\infty)$
Рассматривать $\theta > \pi$ нет смысла, потому что до этой же самой точки можно будет от северного полюса провести более короткую дугу с другой стороны, по другому мередиану, при $\varphi + \pi$.

Для сферических координат якобиан: $I = \rho^2 \sin\theta$. Выведем в качестве задачи на практике.

Известно, что площадь сферы пропорциональная квадрату расстояния от центра, и как видим, в определителе Якоби присутствует ρ^2. Появление $\sin\theta$ также не случайно и физически понятно: ведь при приближении к полюсу, площадь сегмента сферы между соседними широтами меньше, чем на экваторе. Так, между 0 и 10 градусов помещается много экваториальных стран, а длина экватора 40 тыс.км, а вот между 80 и 90 градусов - очень небольшая территория, и параллель 80^0 намного короче, чем 10^0.

Пример. С помощью сферических координат вывести формулу объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Решение. В этом примере надо рассматривать функцию $f = 1$.
Для шара, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, R]$.
Функция равна 1, и её умножаем на якобиан.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^R \right) d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$\frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2R^3}{3} 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

ЛЕКЦИЯ № 6. 21. 03. 2017

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Уравнение, содержащее переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$, а также её производные до какого-то порядка n, называется дифференциальным уравнением порядка n:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Например, $y'' = -4y$, $y' = 2y$ являются дифференциальными уравнениями. Для уравнения $y'' = -4y$ функции $\sin 2x$ и $\cos 2x$ являются решениями, ведь 2-я производная другого знака, и коэффициент 4 после двух операций дифференцирования. Для $y' = 2y$ решениями являются функции $y = Ce^{2x}$.

Если максимальный порядок производной в уравнении равен 1, то есть оно имеет вид $F(x, y, y') = 0$, то называется дифф. уравнением первого порядка. Именно их сначала мы изучим подробнее.

§ 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ называется дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Если первая производная явно выражена, т.е. уравнение имеет вид $y' = f(x, y)$, то оно называется «разрешённым относительно производной».

Замечание. Кстати, задачи на вычисление неопределённого интеграла - это тоже частный случай дифференциальных уравнений. Если нет зависимости от y, то $y' = f(x, y)$ превращается в $y' = f(x)$, т.е. известная производная, а надо найти саму функцию y. Такие дифференциальные уравнения мы решали в течение всей прошлой темы «интеграл». Решение такого дифференциального уравнения это $F(x) + C$, где $F(x)$ первообразная. А вот уравнение $y' = 2y$ уже не решается с помощью нахождения первообразной, здесь зависимость от y.

§ 1, пункт 1. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения вида $y' = f_1(x) f_2(y)$, то есть такие, в которых можно функцию разбить на отдельные множители, зависящие только от x или только от y, называются уравнениями с разделяющимися переменными. К слову, далеко не все уравнения - с разделяющимися переменными. Так, если присутствует множитель $(x+y)$, то что бы вы ни выносили за скобку, в скобках всё равно останутся обе переменные, а не одна: $(x+y) = x\left(1+\frac{y}{x}\right)$ или $(x+y) = y\left(\frac{x}{y}+1\right)$.

Пример. Решим уравнение $y' = y$.

Это означает, что надо найти все такие функции, которые равны своей производной. Метод решения: сначала представить y' в виде $\frac{dy}{dx}$.

Итак, $\frac{dy}{dx} = y$. Теперь домножим на dx, получили $dy = ydx$, затем разделим на y, и получили $\frac{dy}{y} = dx$.

При таком делении мы неявно предполагаем, что y не является тождественно равной 0. Поэтому при дальнейших действиях мы упускаем случай $y \equiv 0$, и его надо проверить отдельно. При этом, $y \equiv 0$ фактически является решением, подходит в уравнение $y' = y$, ведь $0' = 0$. Это называется «особым решением».

Итак, получилось следующее: y и её дифференциал с одной стороны равенства, а переменная x и (или) её дифференциал - с другой стороны. Теперь это выглядит так, как будто слева и справа были продифференцированы какие-то две различные функции от двух различных переменных x, y. Рассмотрим их как две независимые функции. Если теперь их проинтегрировать, то слева и справа можно получить две функции, одна от y, другая от x, а затем выразить y через x.

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \qquad \Rightarrow \quad \ln|y| + D_1 = x + D_2 .$$

Естественно, каждый неопределённый интеграл находится с точностью до константы, поэтому там и написали D_1, D_2. Но можно перенести одну из констант в другую сторону равенства, и записать единую константу:

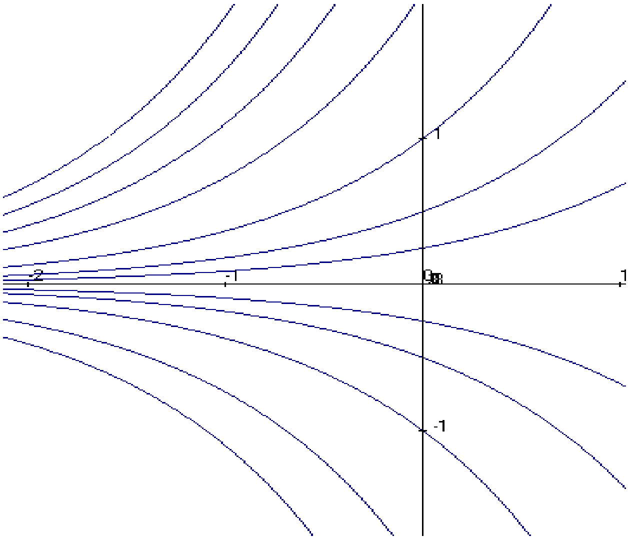
$\ln|y| = x + (D_2 - D_1)$, то есть $\ln|y| = x + C_1$.

Лучше всего константу писать именно там где x, чтобы максимально очистить выражение, содержащее y, ведь цель - выразить y.

$e^{\ln|y|} = e^{x+C_1} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{C_1}e^x$. Слева модуль, но и константа по построению является положительной, $e^{C_1} > 0$. Но надо выразить сам y, а не его модуль, тогда справа также возможны и отрицательные константы, т.е. общее решение будет записано в виде $y = Ce^x$, где $C = \pm e^{C_1}$ (константу для удобства переобозначили, чтобы записать ответ).

Кстати, особое решение входит сюда как частный случай, при $C = 0$.

Итак, ответ: $y = Ce^x$ - общее решение дифф. уравнения $y' = y$.



Общее, частное решение. Задача Коши.

Как мы только что увидели, решений бесконечно много, и они заполняют всю плоскость. Здесь константа С может участвовать в выражении совершенно по-другому, чем в задачах на интегралы: там первообразные отличаются на константу, то есть получаются одна из другой параллельным переносом. Здесь С может быть и множителем или участвовать в уравнении как-то иначе.

Через каждую конкретную точку плоскости проходит одна кривая из этого семейства кривых. Если задать точку (x_0, y_0) и наложить условие, что кривая проходит через неё, то есть $y(x_0) = y_0$, то можно определить конкретное значение параметра C, и одну кривую из бесконечного множества. Это дополнительное условие называется **условием Коши**. Чтобы найти эту одну кривую, надо подставить (x_0, y_0) в общее решение, и там останется одна неизвестная C. Например, если (x_0, y_0) = $(0,3)$, то есть кривая проходит через точку $(0,3)$, то $y = Ce^x$ запишется в виде $3 = Ce^0$, тогда $C = 3$. Функция $y = 3e^x$ называется **частным решением.**

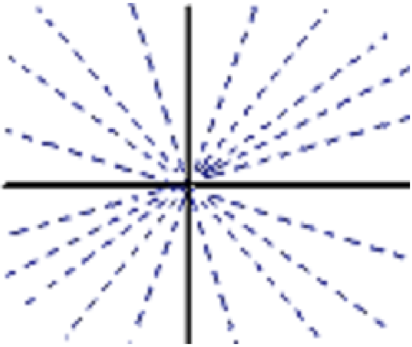
Кстати, движение в физике задаётся с помощью уравнений со 2-й производной (это ускорение), там в общем решении две константы, поэтому как раз и требуется 2 условия (начальная координата и начальная скорость), чтобы определить конкретную траекторию.

Поле направлений.

Если задано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, то это означает, что в каждой точке некоторой области D задано направление касательной, т.е. под каким углом наклона там пройдёт кривая. Ведь y' это тангенс угла наклона производной, и он дан для каждой точки, а именно равен $f(x, y)$. Возникает так называемое «поле направлений». Иногда даже зрительно можно заранее предположить, какие кривые являются решениями дифф. уравнения. Увидим это на следующем примере.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Заметим, что тангенс угла наклона касательной для любого решения здесь равен y/x, то есть касательные направлены радиально от центра.



Можно предположить, что решения это прямые вида $y = kx$. А теперь решим задачу аналитически.

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow xdy = ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$\ln|y| = \ln|x| + C_1$. Кстати, любую константу можно задать в виде $\ln C$, так как область значений логарифма $(-\infty, +\infty)$. Для удобства сразу запишем $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, чтобы логарифмировать это выражение. Впрочем, это не обязательно делать именно так, $C = e^{C_1}$ можно преобразовать и позже.

Далее, $e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + \ln C} = e^{\ln|x|} e^{\ln C} \Rightarrow |y| = C|x|$.

В итоге, общее решение $y = Cx$.

Проверка. $y = Cx$, $y' = C$, подставим в уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$ получим $C = \dfrac{Cx}{x}$. Действительно, верно.

§ 1, пункт 2. Однородные уравнения.

Уравнения, сводящиеся к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ называются однородными (по степени). Примечание. Не путать: название «однородные» будет использоваться ещё и для других свойств, например, когда правая часть линейного уравнения равна 0.

Допустим, $y' = \frac{xy^2}{x^3 + y^3}$. Как видим, суммарная степень везде однородна, и равна 3, то есть, если обе перемнные умножить на k, то и в числителе и в знаменателе за скобку выйдет 3 степень: $\frac{(kx)(ky)^2}{(kx)^3 + (ky)^3} = \frac{k^3 xy^2}{k^3(x^3 + y^3)}$. Рекомендуется вспомнить «однородные функции» в теме «конические поверхности» в геометрии. Так вот, при таком строении уравнения, можно привести его к виду, где будут только блоки типа y/x. Вынесем за скобку x^3 и сократим.

$$y' = \frac{xy^2}{x^3 + y^3} \Rightarrow y' = \frac{x^3 \frac{y^2}{x^2}}{x^3\left(1 + \frac{y^3}{x^3}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{1 + \left(\frac{y^3}{x^3}\right)}.$$

Докажем, что замена $u = \frac{y}{x}$ сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

$u(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow x \cdot u(x) = y(x)$, тогда $y' = \left(x \cdot u(x)\right)' = u(x) + xu'(x)$.

Тогда $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ преобразуется к $u + xu' = f(u)$, далее

$$xu' = (f(u) - u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = (f(u) - u) \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Таким образом, свели к уравнению с разделяющимися переменными.

§ 1, пункт 3. Линейные уравнения.

Уравнение вида $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ называется **линейным.**

Если $b(x) = 0$, то оно называется **линейным однородным**.

При этом, $a_1(x)$ не может быть тождественно равно 0, иначе вообще нет слагаемого с производной $a_1(x)y'$, то есть уравнение не являлось бы дифференциальным. Но тогда можно поделить всё уравнение на $a_1(x)$ и свести к виду $y' + p(x)y = q(x)$.

Линейные однородные уравнения фактически являются уравнениями с разделяющимися переменными. Действительно, $y' + p(x)y = 0 \Rightarrow$

$$y' = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx,$$

где $-\int p(x)dx = -P(x) + C_1$ первообразная, с точностью до константы.

В итоге, $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, то есть общее решение линейного однородного уравнения имеет вид: константа, умноженная на экспоненту в степени первообразной от коэффициента $p(x)$, взятую с другим знаком.

Пример. Решить уравнение $y' - 2y = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln y = 2x + \ln C \Rightarrow y = Ce^{2x}.$$

Мы видим коэффициент -2, её первообразная $-2x$, соответственно в ответе есть e^{2x}.

Пример. Решить уравнение $y' + xy = 0$.

Можно рассмотреть $p(x) = x$, первообразная равна $-\frac{x^2}{2}$,

тогда $y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-x^2/2}$.

Впрочем, можно его решить и просто как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Rightarrow \ln y = -\frac{x^2}{2} + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-x^2/2}.$$

Линейные неоднородные уравнения. Метод Лагранжа (другое название: метод вариации произвольной постоянной).
Предположим, что на месте С некоторая неизвестная функция, и ищем решение в виде: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Тогда $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Подставим эти y, y' в неоднородное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$.

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.

Два слагаемых получились одинаковые, и они сокращаются, осталось:
$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.

Отсюда можно выразить $C'(x)$. $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$.

$C(x) = \int C'(x) = \int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx$ что состоит в итоге из 2 слагаемых: первообразной от $q(x)e^{\int p(x)dx}$ и константы C. Поэтому решение однородного обязательно окажется отдельным слагаемым в общем решении неоднородного.

$y = \left(\int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$.

В конкретных примерах, это выглядит менее громоздко:

Пример. Решить линейное уравнение $y' - 2y = e^{5x}$.

1 шаг. Решаем соответствующее однородное уравнение. $y' - 2y = 0$.

$\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln y = 2x + \ln C \Rightarrow y_{00} = Ce^{2x}$ - общее решение однородного.

2 шаг. Методом Лагранжа решаем неоднородное.

Ищем решение в виде: $y = C(x)e^{2x}$. Ищем производную:

$y' = \left(C(x)e^{2x}\right)' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$. Всё это подставим в неоднородное:

$y' - 2y = e^{5x} \Rightarrow C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = e^{5x} \Rightarrow$

$C'(x)e^{2x} = e^{5x}$, тогда $C'(x) = e^{5x-2x} = e^{3x}$.

Тогда $C(x) = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.

Теперь подставим это в $y = C(x)e^{2x}$, получается

$$y = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right)e^{2x} = \frac{1}{3}e^{5x} + Ce^{2x}.$$

Общее решение неоднородного состоит из двух слагаемых: частное решение неоднородного (его мы и искали на 2-м шаге методом Лагранжа) и общее решение однородного, которое нашли на 1-м шаге, и оно воспроизвелось само в конце 2-го шага. Это происходит из-за того, что $C(x)$ всегда ищется с помощью её производной, а значит, в ней присутствует слагаемое $+C$.

Проверка. Можно подставить частное решение неоднородного, и это слагаемое само по себе тоже является решением:

Выполняется ли $y' - 2y = e^{5x}$?

$$\left(\frac{1}{3}e^{5x}\right)' - 2\left(\frac{1}{3}e^{5x}\right) = \frac{5}{3}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{5x} = \frac{3}{3}e^{5x} = e^{5x}$$. Верно.

§ 1, пункт 4. Уравнения Бернулли.

Уравнение вида $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)y^n$ называется уравнением Бернулли. Так как коэффициент $a_1(x)$ не тождественно равен 0, то на него можно поделить, поэтому будем рассматривать в виде: $y' + p(x)y = q(x)y^n$.

Отличаются от линейных только наличием y^n в правой части.

Если n=0 получается линейное неоднородное $y' + p(x)y = q(x)$.

Если n=1 то ещё лучше, получается однородное: $y' + p(x)y = q(x)y$ то есть $y' + (p(x) - q(x))y = 0$.

При $n \neq 0$, $n \neq 1$ получается уже собственно, уравнение Бернулли. Оно является обобщением линейного уравнения.

Алгоритм решения.

1) Разделить на y^n. Получится $\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$.

2) Сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$. Тогда оно сведётся к линейному по z.

3) решить линейное (в 2 шага, сначала однородное, потом неоднородное)

4) сделать обратную замену: так как $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, то $y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{z}}$.

Докажем подробнее, как и почему сводится к линейному.

$z(x) = y(x)^{-n+1}$, тогда $z'(x) = (-n+1)y(x)^{-n}\,y'(x)$ по правилам дифференцирования композиции. Получили, что $z' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$.

Тогда уравнение $\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$ сводится к такому виду:

$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x)$, или $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$.

Это уже линейное неоднородное уравнение.

ЛЕКЦИЯ № 7. 28. 03. 2017

§ 2. Дифференциальные уравнения порядка n.

Общий вид: $F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$.

Если уравнение сведено к виду $y^{(n)} = f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$ то оно называется разрешённым относительно старшей (высшей) производной.

Примеры дифференциальных уравнений 2 порядка из физики:

Уравнение колебаний $y'' = -ky$. Здесь чем больше координата, тем больше действует сила (ускорение) в противоположную сторону. Если координата y отрицательна, то сила действует в положительную сторону.

Методы понижения порядка.

Случай 1. Если в уравнении отсутствуют младшие порядки производных. Так, в уравнении $F(x, y^{(k)},..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ отсутствуют все производные до порядка k-1, в том числе 0-го порядка, а именно сама функция y, и начинаются с порядка k. В этом случае можно сдедать замену $z = y^{(k)}$, то есть в качестве новой функции взять производную самого младшего порядка, которая есть в уравнении. Докажем, что в этом случае понизится на k порядков и станет $y^{(n-k)} = f(x, z,.z',...)$.

$z = y^{(k)} \Rightarrow z' = y^{(k+1)} \Rightarrow z'' = y^{(k+2)}$ и т.д.

Пример. Решить уравнение 2 порядка $xy'' = y'$.

Замена: $z(x) = y'(x)$, тогда $z'(x) = y''(x)$.

Уравнение сводится к виду $xz' = z$. Для z уравнение 1 порядка и решается обычными методами, изученными ранее.

$$x\frac{dz}{dx} = z \Rightarrow xdz = zdx \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln z = \ln x + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 x.$$

Вспомним о том, что $z = y'$, то есть теперь, чтобы сделать обраную замену и восстановить y, надо 1 раз проинтегрировать.

$y = \int C_1 x dx = \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$. В общем решении здесь не одна, а две константы, вторая появляется из-за того, что интегрировали для обратной замены. А если уравнение 3 порядка, то будет 3 константы в общем решении.

Пример. Решить уравнение 3 порядка $xy''' = y''$.

Решение. Уравнение сводится к $xz' = z$ но только в этом случае - заменой $z = y''$, ведь самая младшая из производных, существующих в этом уравнении - вторая.

Уравнение 1 порядка решается аналогично, и получаем $z = C_1 x$.

Теперь надо два раза вычислить первообразную:

$z = y'' = C_1 x$, тогда $y' = \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$, а тогда $y = \dfrac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3$.

Случай 2. Если в уравнении содержится y и все порядки производных, но при этом нет переменной x. Тип уравнения такой: $F(y, y' ..., y^{(n)}) = 0$.

Например, $y'' = -y$ - уравнение колебательного процесса в физике.

В этом случае замена $y' = p(y)$, то есть y будет выступать в роли переменной, а y' - в роли функции от y.

Естественно возникает вопрос: а существуют ли в принципе такие преобразования, не содержат ли они противоречия? Всегда ли можно выразить y' как функцию от y? Изучим этот вопрос подробнее. Оказывается, надо лишь найти обратную функцию и подставить её в производную y'. Примеры:

Пример 1. $y = x^2$, $y' = 2x$. Выразим $x = \sqrt{y}$, и подставим в производную, тогда верно, что $y' = 2\sqrt{y}$.

Пример 2. $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x}$. Тогда $x = e^y$, и в итоге $y' = \dfrac{1}{e^y}$.

Как видите, y' может быть записано не только как функция от x, но и как функция от y.

Итак, замена $y' = p(y)$. В данном случае, y'' не p', потому что фактически здесь была композиция: $y' = p(y(x))$, и следующую производную от неё надо вычислять именно как для композиции. Получается $y'' = p'(y(x))y'(x) = p'p$.

$y''' = (p'p)' = (p'(y(x))p(y(x)))'$

вычисляем производную произдведения двух сомножителей, причём в каждом из них ещё и композиция:

$p''(y(x))y'(x)p(y(x)) + p'(y(x))p'(y(x))y'(x)$

учитывая, что $y' = p$, получится $y''' = p''p^2 + (p')^2 p$.

1-я производная от y выражается через 0-ю производную от p, 2-я производная от y выражается максимум через 1-ю производную от p, 3-я производная от y выражается через 2-ю, 1-ю и 0-ю производную от p:

$$y' = p$$
$$y'' = p'p$$
$$y''' = p''p^2 + (p')^2 p.$$

Таким образом, доказали, что порядок при таком преобразовании обязательно понизится на 1 единицу.

Пример: $y'' = -y$ (уравнение колебаний).

После замены, уравнение преобразуется к виду: $p'p = -y$.

Сначала 1-й шаг: ищем неизвестную функцию $p(y)$.

$$\frac{dp}{dy}p = -y \quad \Rightarrow \quad pdp = -ydy \quad \Rightarrow \quad \int pdp = -\int ydy \quad \Rightarrow$$

$\frac{p^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C}{2} \quad \Rightarrow p^2 = -y^2 + C$.При этом $C \geq 0$, иначе справа всё выражение было бы отрицательно и не могло бы быть равно p^2. Если $C \geq 0$, то эту константу можно представить в виде C_1^2. Итак, $p^2 = C_1^2 - y^2$, то есть $p = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$. Итак, мы нашли неизвестную функцию $p(y)$, то есть выполнели действия после замены. Теперь нужно сделать обратную замену, фактически для этого выполнить такой же по объёму 2-й шаг, решить новое дифференциальное уравнение. Ведь $p = y'$, то есть теперь надо решить уравнение:

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}\ .$$

2 шаг. Обратная замена.

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm dx \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm\int dx \;\Rightarrow\; \arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2 \;\Rightarrow \frac{y}{C_1} = \sin(\pm x + C_2) \Rightarrow$$

$y = C_1 \sin(\pm x + C_2)$. Здесь C_1 называется амплитудой колебаний, C_2 - фазой. Впрочем, при $C_2 = \frac{\pi}{2}$ получается не синус, косинус, а именно, по формуле приведения $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Поэтому в решении есть и косинусы. Более того, мы могли при решении знак плюс-минус также перенести, $\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = dx$, тогда бы слева сразу получалось 2 варианта: или арксинус, или арккосинус.

Ещё решение этого уравнения можно записать в виде:

$y = D_1 \sin x + D_2 \cos x$.

На этом примере увидели, что уравнение $y'' = -y$ действительно является уравнением колебаний, то есть в его решении периодические функции.

Здесь показаны лишь две основные наиболее известные замены. Существуют и другие замены и преобразования, применяемые в разных частных случаях, например, иногда удобно поделить всё уравнение на y или на y', чтобы оно упростилось.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения порядка n.

Уравнение вида $a_n(x)y^{(n)}+...+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением порядка n.

Если $b(x)\neq 0$ то оно называется неоднородным, а если $b(x)\equiv 0$, то однородным: $a_n(x)y^{(n)}+..a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$.

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$a_n y^{(n)}+..a_2 y''+a_1 y'+a_0 y=0$.

Если составить многочлен с теми же коэффициентами, и степенными функциями той же степени, что был на этом же месте порядок производной, то такой многочлен называется характеристическим, а уравнение $a_n r^n+..a_2 r^2+a_1 r+a_0=0$ - характеристическим уравнением.

Теорема 1. Функция e^{rx} является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\Leftrightarrow r$ есть характеристический корень.

Доказательство. Ищем решение в виде $y=e^{rx}$.

Если $y=e^{rx}$, то $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$, ... $y^{(n)}=r^n e^{rx}$.

Подставим в уравнение $a_n y^{(n)}+..a_2 y''+a_1 y'+a_0 y=0$.

Получим $a_n r^n e^{rx}+..a_2 r^2 e^{rx}+a_1 r e^{rx}+a_0 e^{rx}=0$.

Во всех слагаемых одинаковая экспонента, вынесем её за скобку:

$e^{rx}(a_n r^n+..a_2 r^2+a_1 r+a_0)=0$.

Но поскольку $e^{rx}\neq 0$, то $a_n r^n+..a_2 r^2+a_1 r+a_0=0$.

Что и требовалось доказать.

Итак, решениями могут быть не все экспоненты, а лишь некоторые избранные, не более n штук, потому что многочлен степени n имеет не больше n различных корней.

Теорема 2. Линейная комбинация решений линейного однородного дифференциального уравнения тоже является его решением.

Доказательство.

Пусть y_1 и y_2 - два различных решения уравнения

$a_n y^{(n)} + ..a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

То есть, они оба обращают его в тождество:

$a_n y_1^{(n)} + ..a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$ и

$a_n y_2^{(n)} + ..a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$.

Надо доказать, что линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ тоже подходит в качестве решения. Известно, что для производной, а также и последующих выполняется свойство линейности: $(f+g)' = f' + g'$, поэтому $(\alpha y_1 + \beta y_2)' = \alpha y_1' + \beta y_2'$, $(\alpha y_1 + \beta y_2)'' = \alpha y_1'' + \beta y_2''$, и т.д. Тогда, подставляя линейную комбинацию в дифференциальное уравнение, получим:

$$a_n(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n)} + ..a_2(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + a_1(\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_0(\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$\alpha(a_n y_1^{(n)} + ..a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + \beta(a_n y_2^{(n)} + ..a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2)$$

Но ведь в каждой скобке 0, так как каждая из этих функция была решением уравнения. Получается $\alpha 0 + \beta 0 = 0$.

Таким образом, линейная комбинация решений тоже является решением линейного уравнения.

Случай 1. Все характеристические корни действительны и различны. $r_1, r_2, ..., r_n \in R$, $r_i \neq r_j$. Тогда возможные решения это n различных экспонент: $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}\}$. Эта система функций называется «фундаментальная система решений» (ФСР). Но так как по теореме 2, любая линейная комбинация тоже является решением, то все функции вида $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$ тоже решения.

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$ называется «общим решением» дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 - 3r + 2 = 0$, оно сводится к виду $(r-1)(r-2) = 0$, корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Тогда решениями могут быть только e^x и e^{2x}. Сделаем проверку для каждой из экспонент. Подставим каждую из них в уравнение.

1) $(e^x)'' - 3(e^x)' + 2e^x = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$.

2) $(e^{2x})'' - 3(e^{2x})' + 2e^{2x} = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$.

Проверка выполнена. Обе экспоненты являются решениями.
При этом никакая третья экспонента не может служить решением этого же уравнения, потому что характеристический многочлен 2-й степени, и он имеет максимум 2 корня.

ФСР состоит из e^x и e^{2x}. Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Случай 2. Все характеристические корни действительные, но среди них есть кратные.

Если r есть корень кратности k, то в системе решений будут присутствовать $\left\{e^{rx}, xe^{rx}, ..., x^{k-1}e^{rx}\right\}$, то есть одну и ту же экспоненту k раз включать в фундаменатльную систему решений нельзя, иначе фактическое количество функций в ФСР получится меньше, чем n.
Кроме самой экспоненты, нужно взять ещё и с домножением на степенные, по нарастанию степеней до $k-1$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 - 2r + 1 = 0$, то есть $(r-1)^2 = 0$, характеристическое корни $r_1 = r_2 = 1$. Тогда ФСР: $\{e^x, xe^x\}$, а общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Сделаем проверку. Для e^x очевидно. Проверим xe^x.

$y = xe^x$, тогда $y' = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x$, $y'' = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

$y'' - 2y' + y = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x$

$= (x - 2x + x)e^x + (2-2)e^x = 0.$

Случай 3. Не все корни действительны (есть комплексные характеристические корни).

Если корень $a + bi$ (а также при этом и $a - bi$), то в ФСР, в числе всех прочих, входят две такие функции: $e^{ax}\cos bx$ и $e^{ax}\sin bx$.

Пример. $y'' = -y$, такой пример мы выше решали и другим способом, а теперь рассмотрим это уравнение как линейное. Характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$, корни $\pm i$, то есть $0 \pm 1i$. Решения $\sin x, \cos x$.

Теорема 3. (Теорема о наложении решений). Если y_1 - решение линейного неоднородного дифф.уравнения с правой частью $b_1(x)$, а y_2 - решение такого же дифф.уравнения, но с правой частью $b_2(x)$, то сумма $y_1 + y_2$ является решением уравнения с правой частью $b_1(x) + b_2(x)$.

Доказательство. Доказывается аналогично теореме 2.

Пусть верно $a_n y_1^{(n)} + ..a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = b_1(x)$ и $a_n y_2^{(n)} + ..a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = b_2(x)$.

Тогда подставим сумму в левую часть:

$$a_n (y_1 + y_2)^{(n)} + ... + a_1 (y_1 + y_2)' + a_0 (y_1 + y_2) =$$

$$\left(a_n y_1^{(n)} + ... + a_1 y_1' + a_0 y_1 \right) + \left(a_n y_2^{(n)} + ... + a_1 y_2' + a_0 y_2 \right) =$$

$$b_1(x) + b_2(x).$$

Таким образом, если в неоднородном уравнении правая часть состоит из нескольких слагаемых, то можно решить более простые уравнения (для каждого из них отдельно) и сложить решения.

Замечание. Такое же утверждение верно не только для суммы, но и для линейной комбинации. Здесь коэффициенты равны 1 только для простоты и наглядности доказательства.

Следствие 1. Сумма решений линейного неоднородного и соответствующего однородного дифференциального уравнения является решением неоднородного уравнения.

Доказательство. В условиях прошлой теоремы, взять одну правую часть $b_1(x)$, а вторую $b_2(x) \equiv 0$. тогда сумма решений $y_1 + y_2$ является решением уравнения с правой частью $b_1(x) + 0$.

Следствие 2. Разность двух различных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения является решением соответствующего однородного.

(Слово «соответствующего» здесь означает, что с той же левой частью, что и было неоднородное).

Понятие линейной комбинации, которое рассмотрели выше, здесь обобщено из векторной алгебры (вспомнить системы векторов). Рассмотрим другие обобщения, например, линейной зависимости и независимости системы.

Определение. Система функций $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ называется линейно-независимой, если из равенства $\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n = 0$ следует, что все коэффициенты $\alpha_i = 0$. Если же это равенство возможно при каком-то наборе коэффициентов (т.е. не все они равны 0), то система называется линейно-зависимой.

Примеры. $\{x, 2x\}$ ЛЗС. Возьмём коэффициенты 2 и -1.
$2x + (-1)2x = 0$. Если в системе есть хотя бы две пропорциональные функции, то системы ЛЗС.
$\{x, x^2\}$ ЛНС. Какими бы ни были коэффициенты, получается многочлен 2 степени $ax + bx^2$, и здесь 0 может получиться, только лишь в том случае, если обнулить все коэффициенты.
$\{e^{kx}, e^{mx}\}$ ЛНС. Ни одна экспонента одной степени не представляется в виде другой экспоненты, умноженной на коэффициент.

Чтобы выяснить, ЛЗС или ЛНС система векторов, в линейной алгебре применяли определители. Здесь же фактически нет матрицы, так как просто n скалярных функций. Тем не менее, оказывается, что здесь тоже можно достроить до квадратной матрицы, а именно с помощью их производных. Если во 2-й строке записать все их первые производные, в 3-й строке - вторые производные, и так далее, до $(n-1)$ порядка, с той целью, чтобы получилась именно квадратная матрица, такой определитель называется определителем Вронского.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим определители Вронского в тех примерах, которые были выше.

Система функций $\{x,2x\}$. $W(x)=\begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2x-2x\equiv 0$

Система функций $\{x,x^2\}$. $W(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2=x^2\neq 0$.

Система функций $\{e^{kx},e^{mx}\}$. $W(x)=\begin{vmatrix} e^{kx} & e^{mx} \\ ke^{kx} & me^{mx} \end{vmatrix}=me^{(k+m)x}-ke^{(k+m)x}=$

$(m-k)e^{(k+m)x}\neq 0$, так как числа разные (разность в скобке точно не 0) а экспонента не равна 0.

Как видим на примерах, определитель Вронского для линейно зависимой системы получился тождественно равен 0, а для независимых - нет. На следующей лекции докажем этот факт в общем виде.

ЛЕКЦИЯ № 8. 04.04.2017.

Лемма. Система функций линейно зависима $\Leftrightarrow$ хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных.

Доказательство аналогично тому, что было для векторов. Например, необходимость. Пусть какой-то коэффициент в выражении $\alpha_1 y_1+...+\alpha_n y_n=0$ отличен от 0. Тогда оставим с одной стороны равенства именно это слагаемое, а затем разделим на этот коэффициент. Например, пусть не равен нулю коэффициент α_1. Тогда

$\alpha_1 y_1=-\alpha_2 y_2-...-\alpha_n y_n$, откуда следует $y_1=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2-...-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_2}y_n$.

Теорема 4. Система функций линейно-зависима $\Leftrightarrow$ $W(x)\equiv 0$.

Доказательство.

Необходимость. Система функций линейно зависима $\Rightarrow$ верно $\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n = 0$ при некотором наборе коэффициентов, среди которых есть отличные от 0. Это эквивалентно тому, что одну из функция можно выразить через другие, то есть представить в виде линейной комбинации. Допустим для определённости, что $y_n = a_1 y_1 + ... + a_{n-1} y_{n-1}$. Используем свойство $(f+g)' = f' + g'$.
Тогда и для её производной верно аналогичное равенство:
$y_n' = a_1 y_1' + ... + a_{n-1} y_{n-1}'$.
Это же верно и для вторых производных, и для каждой из последующих. Но это эквивалентно тому, что в определителе

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

последний столбец является линейной комбинацией предыдущих столбцов, тогда определитель равен 0 при любом x, то есть тождественно равен 0.
Достаточность. Если определитель равен 0, то какой-либо столбец линейно выражается через остальные, тогда первый элемент столбца (а ведь это и есть сама функция) является линейной комбинацией остальных функций.

Теорема 5. Существует n линейно-независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n, и всякое другое решение есть их линейная комбинация.

Для доказательства того, что существует n линейно-независимых решений, сначала возьмём какую-либо невырожденную квадратную матрицу A порядка n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Найдётся такое решение y_1, которое удовлетворяет условиям Коши:
$y(0) = a_{11}$, $y'(0) = a_{21}$, $y''(0) = a_{31}$, ..., $y^{(n)}(0) = a_{n1}$
где числа взяты из 1-го столбца.
Аналогично, для чисел 2-го столбца найдётся другое частное решение y_2, для каждого последующего тоже. Нашлось n решений. Причём это такая система функций, для которой определитель Вронского в точке $x = 0$ равен определителю матрицы А. Ведь для y_i и всех её производных, значения в точке 0 это и есть i-й столбец матрицы.
Определитель Вронского этой системы функций не может быть тождественно равен 0, потому что, по крайней мере, в одной точке он не равен 0. Значит, эта система ЛНС.

Всякое другое, (n+1) е решение соответствовало бы некоторым новым условиям Коши, которые можно записать в виде столбца из чисел $b_1,...,b_n$. Но тогда обычная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

имеет единственное решение, в то же время $b_1 = y_{n+1}(0)$, тогда получается, что новое решение можно как-то выразить через n ранее найденных решений.

Определение. Система из n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n разывается фундаментальной системой решений (ФСР).

* В теореме 5 мы доказали, что линейно независимая система решений состоит ровно из n решений, не больше и не меньше. Это и есть ФСР. Она определяется не единственным образом. Если все характеристические корни различны, в качестве ФСР принимаются n различных экспонент. Если кратные корни, то в систему входят степенные функции, умноженные на экспоненту $\left\{e^{rx}, xe^{rx},..., x^{k-1}e^{rx}\right\}$.

Рассмотрим подробнее, почему происходит именно так. **Докажем,** что если 0 является корнем кратности k, то система решений, соответствующих этому корню, имеет вид $\{e^{0x}, xe^{0x}, ..., x^{k-1}e^{0x}\}$, то есть $\{1, x, ..., x^{k-1}\}$. Характеристическое уравнение обязательно имеет вид $a_n r^n + \ldots + a_k r^k = 0$, так как r^k можно вынести за скобку $\Leftrightarrow$ 0 корень кратности k. Но это значит, что исходное дифференциальное уравнение имеет вид $a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_k(x)y^{(k)} = 0$.

Оно содержит производные порядка k и выше. Известно, что если степенную функцию продифференцировать столько раз, какова её степень, то получим константу, а если большее количество раз, то обратится в 0. Так, например,

$x^2 \to 2x \to 2 \to 0, \quad x^3 \to 3x^2 \to 6x \to 6 \to 0$.

В данном уравнении производные порядка k и выше. Любая из степенных функций порядка $k-1$ и ниже, а именно взятая из набора $\{1, x, ..., x^{k-1}\}$, является решением.

Замечание. С помощью замены $z = ye^{rx}$ доказывается, что и для произвольного ненулевого корня r верен такой же факт, то есть $\{e^{rx}, xe^{rx}, ..., x^{k-1}e^{rx}\}$, где степенные функции взяты по возрастающей, есть решения.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения порядка n.

В этом пункты рассмотрим уравнения такого вида:

$a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$.

Сначала надо решать соответствующее однородное (1-й шаг). После этого для решения неоднородного уравнения есть различные способы: Лагранжа и неопределённых коэффициентов. Рассмотрим по порядку.

Обобщение метода Лагранжа для уравнений высшего порядка.

Пусть получено общее решение однородного уравнения, а именно $y = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x)$. Здесь функции y_i это как правило, экспоненты (если характеристические корни различны) либо другие типы функций, рассмотренные выше для случая кратных или комплексных корней. Теперь вместо констант запишем на этих местах неизвестные функции $C_1(x),..., C_n(x)$, то есть решение неоднородного будем искать в виде: $y = C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$.

Если продифференцировать 1 раз, то получим уже 2n слагаемых, после второго раза 4n, затем 8n и так далее. Получается, что в итоге у нас было бы 2^n слагаемых, которые подставили бы в дифференциальное уравнение, и было бы одно условие на n функций. Но для того, чтобы получить однозначное решение, можно наложить n условий на n функций, поэтому $n-1$ условие мы можем добавить искусственно. Лагранж придумал такой способ: если приравнивать к нулю ту группу слагаемых, которая содержит $C_i'(x)$ на каждом этапе дифференцирования, то мы получим как раз и уменьшение количества слагаемых в следующих производных, и увеличение количества условий. Так, после 1-го дифференцирования выражения

$y = C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$ получаем

$$y' = \left(C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x)\right) + \ldots + \left(C_n'(x)y_n(x) + C_n(x)y_n'(x)\right)$$

но ведь это можно перегруппировать так:

$$y' = \left(C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x)\right) + \left(C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x)\right)$$

искусственно приравняем к нулю первую часть, а вторую будем дифференцировать дальше. Затем сделаем то же самое и во второй раз. Витоге к последнему разу у нас всё равно будет лишь 2n слагаемых, а вовсе не 2^n. После подстановки в уравнение, а также записи всех дополнительных условий, получится система, из которой находятся неизвестные функции:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = b(x)/a_n \end{cases}$$

Её основная матрица точно такая же, как определитель Вронского для ранее найденной ФСР однородного уравнения.
Например, если n=2. Уравнение $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

$$y = C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$$

$y' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x)$ (первые слагаемые, как уже было сказано, вынесли в отдельную скобку и приравняли к нулю).

$$y'' = \left(C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) \right) + \left(C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x) \right)$$

На этом последнем шаге уже не приравниваем к 0, а просто подставляем в уравнение, и получим:

$$a_2\left(C_1' y_1' + ... + C_n' y_n' \right) + a_2\left(C_1 y_1'' + ... + C_n y_n'' \right) +$$

$$a_1\left(C_1 y_1' + ... + C_n y_n' \right) + a_0\left(C_1 y_1 + ... + C_n y_n \right) = b(x).$$

Таким образом, получили выражение

$$a_2\left(C_1' y_1' + ... + C_n' y_n' \right) + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ так как это решение однородного уравнения.

Остаётся $a_2\left(C_1' y_1' + ... + C_n' y_n' \right) = b(x)$.

Видно, что в случае n = 2 система имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = b(x)/a_2 \end{cases}$$

Пример. Решить методом Лагранжа уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$
Сначала решается соответствующее однородное уравнение.
Характеристическое уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$. Его корни равны 1 и 2, общее решение однородного $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Далее вместо констант ставим неизвестные функции, то есть решение неоднородного ищем в

виде $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Для того, чтобы найти неизвестные функции, строим систему: $\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0 \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = e^{3x} \end{cases}$

Решая её методом Гаусса, находим производные:

вычтем из 2-го уравнения 1-е, будет $C_2'(x)e^{2x} = e^{3x}$, то есть $C_2'(x) = e^x$. Теперь это выражение подставим в первое уравнение, $C_1'(x)e^x + e^x e^{2x} = 0 \Rightarrow C_1'(x)e^x = -e^{3x} \Rightarrow C_1'(x) = -e^{2x}$.

Итак, $C_1'(x) = -e^{2x}$, $C_2'(x) = e^x$.

Тогда

$$C_1(x) = -\int e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1.$$

$$C_2(x) = \int e^x dx = e^x + C_2.$$

Теперь подставляем их в выражение $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$.

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)e^x + \left(e^x + C_2\right)e^{2x}.$$

Приводя подобные, в итоге получим: $y = \frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Как видим, общее решение однородного уравнения, полученное на первом шаге, выделилось в виде отдельного слагаемого. Частное решение неоднородного (слагаемое без констант), которое мы и искали методом Лагранжа, равно $\frac{1}{2}e^{3x}$. Оно очень похоже на правую часть уравнения, разве что с другим коэффициентом. На самом деле, для некоторых случаев можно обойтись без метода Лагранжа, а вид правой части определяет вид частного решения:

Метод неопределённых коэффициентов.

Если правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$b(x) = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$

то частное решение существует в виде
$y = x^k e^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)$,
где k это кратность числа $a+bi$ в качестве характеристического корня. Если оно не является корнем, то $k=0$. Тогда домножение происходит на $x^0=1$, то есть фактически, не происходит.
Если в правой части нет тригонометрических функций, то всегда может автоматически считаться, что $b=0$, то есть
$b(x) = e^{ax}(P(x)\cos 0 + Q(x)\sin 0) \; = \; e^{ax}P(x)$.
Если отсутствует многочлен, а просто есть экспонента, то можем считать, что многочлен просто равен константе 1, то есть формально он всё равно есть, нулевой степени. Тогда в структуре частного решения записывается «произвольный» многочлен 0 степени, то есть константа А.
Для $b(x) = e^{ax}P(x)$ частное решение в виде $y = e^{ax}R(x)$, если a не является характеристическим корнем, либо $y = x^k e^{ax}R(x)$, если a совпадает с каким-то характеристическим корнем кратности k.
Покажем на примере того же уравнения, которое только что решали методом Лагранжа.
Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$.
Шаг 1. Решается однородное. Характеристическое уравнение
$r^2 - 3r + 2 = 0$. Его корни равны 1 и 2, общее решение однородного
$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
Шаг 2. Решение неоднородного. Правая часть $b(x) = e^{3x}$, число 3 не совпадает ни с каким характеристическим корнем левой части, так как там корни 1 и 2. Поэтому $k=0$, и по правой части $b(x) = 1\cdot e^{3x}$ надо записать структуру частного решения: $y = A\cdot e^{3x}$.
Найдём производные до второго порядка от $y = A\cdot e^{3x}$ и подставим их в неоднородное уравнение.
$y = Ae^{3x} \Rightarrow \; y' = 3Ae^{3x} \; \Rightarrow \; y'' = 9Ae^{3x}$.

$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \Rightarrow 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow 2Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow$

$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Таким образом, частное решение неоднородного:

$y = \frac{1}{2}e^{3x}$, а общее решение неоднородного: $y = \frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^{x} + C_2e^{2x}$.

§ 4. Системы дифференциальных уравнений.

Ознакомительно изучим системы дифференциальных уравнений. Как правило, система из n уравнений сводится к уравнению порядка n, поэтому часто для решения систем дифф. уравнений достаточно уметь решать уравнения порядка n. Однако здесь есть и матричный метод решения, не предполагающий сведение системы к уравнению.

Если есть несколько равенств, выражающих производные от различных функций через сами эти функции, например,

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \quad\quad ... \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

то говорят, что задана система дифференциальных уравнений.

Если рассматривать столбец, состоящий из функций $y_1, ..., y_n$ как векторную функцию, то вид записи системы похож на вид уравнения 1 порядка: $\bar{y}' = f(x, \bar{y})$.

Как правило, при размерности пространства 3, в физических задачах, переменную обозначают t (время), а функции $x(t), y(t), z(t)$.

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x, y, z) \\ y'(t) = f_2(t, x, y, z) \\ z'(t) = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$$

Если все функции f_i не зависят от t, а выражаются только через x, y, z, то система называется **автономной.**

Система **линейных** однородных дифференциальных уравнений:

В 2-мерном случае $\begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$

В 3-мерном случае $\begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + a_{13}z(t) \\ y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + a_{23}z(t) \\ z'(t) = a_{31}x(t) + a_{32}y(t) + a_{33}z(t) \end{cases}$

Физический смысл. Вектор, состоящий из производных, это вектор скорости, а выражен он через координаты в момент времени t. Получается, что система дифференциальных уравнений задаёт закон движения некоторого потока частиц. К примеру, если в некотором объёме дует ветер, то от того, куда поместить пылинку, зависит траектория её дальнейшего полёта. Если поток не меняется, то траектория не зависит от времени (когда система автономна). Задать координаты в нулевой момент времени $x(0), y(0), z(0)$ означает задать условия Коши для системы дифференциальных уравнений.

Методы решения. Можно свести систему из двух уравнений 1-го порядка к одному уравнению, но 2-го порядка. Рассмотрим на примере.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -6x + 4y \end{cases}$$

Решение. Выразим из 1-го $y = x' + x$, тогда $y' = x'' + x'$, подставим во 2-е: $x'' + x' = -6x + 4(x' + x)$ что сводится к $x'' - 3x' + 2x = 0$.

Это линейное однородное уравнение решается обычным образом, его общее решение $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

Тогда $x' = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$, $y = x' + x = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t}$.

Итак, общее решение системы:

$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, $y = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t}$

Его можно записать в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Кстати, векторы (1,2) и (1,3) являются собственными векторами матрицы этой системы, причём они соответствуют собственным числам 1 и 2. Существует и второй способ решения систем: с помощью собственных векторов.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{pmatrix},\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ -6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(-1-\lambda)(4-\lambda)-(-6)=0 \ \Rightarrow\ \lambda^2-3\lambda+2=0 \ \Rightarrow\ D=9-4\cdot 2=1$$

Корни $\frac{3\pm 1}{2}$ то есть 1 и 2. Ищем собственные векторы:

При $\lambda=1$ нужно решить систему $\begin{pmatrix}-1-1 & 1\\ -6 & 4-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, т.е.

$\begin{cases}-2a+b=0\\ -6a+3b=0\end{cases}$, что даёт вектор (1,2).

При $\lambda=2$ нужно решить систему $\begin{pmatrix}-1-2 & 1\\ -6 & 4-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, т.е.

$\begin{cases}-3a+b=0\\ -6a+2b=0\end{cases}$, что даёт вектор (1,3).

ФСР состоит из собственных векторов, умноженных на экспоненты в степени собственных чисел.

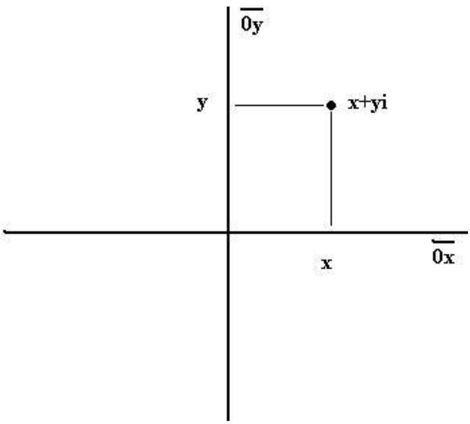
$$C_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^t,\ \ C_2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{2t}.$$

ЛЕКЦИЯ № 9.   11. 04. 2017

§ 5. Комплексные числа, их связь с дифф.уравнениями.

При изучении числовых систем в школе становится привычным понятие «действительная ось», «действительные» («вещественные») числа. Но эта система чисел является неполной, так как не содержит корни некоторых, казалось бы, простых уравнений, например $x^2+1=0$. Если у квадратичного уравнения $ax^2+bx+c=0$ отрицательный дискриминант, то есть $b^2-4ac<0$, то на действительной оси нет ни одного корня уравнения. Однако существует система условных, обобщённых чисел, где и такие уравнения тоже имеют решения. Они называются комплексными числами и геометрически соответствуют точкам на плоскости, а известная ранее действительная ось - это горизонтальная ось Ох в данной плоскости. Введено абстрактное понятие «мнимая единица» $i=\sqrt{-1}$ обозначающая «квадратный корень из минус 1». При этом получается $i^2=-1$.

Геометрическая интерпретация. На плоскости, горизонтальная ось отождествляется со множеством действительных чисел, а мнимая ось, содержащая $i=\sqrt{-1}$, перпендикулярна оси действительных чисел.
Но ведь и множество отрицательных чисел тоже когда-то в прошлом считали абстракцией, потому что они не отражают никакое реальное количество объектов.



$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Комплексные числа - ещё более абстрактное обобщение. Оно полезно при решении различных физических задач. Плоскость комплексных чисел есть расширение множества действительных чисел. Каждой точке на плоскости с координатами (x, y) можно поставить в соответствие комплексное число, состоящее из действительной и мнимой части: $z = x + iy$. Проекция на действительную и мнимую ось называются действительной частью и мнимой частью комплексного числа. $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Если $y = 0$, то число $x + 0i = x$ это обычное действительное число.

Сложение и вычитание комплексных чисел определяется покоординатно, как для обычных векторов в плоскости.

$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$.

Для вычитания аналогично: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Умножение.

$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2$, учитывая тот факт, что $i^2 = -1$, получаем $ac - bd + bci + adi = (ac - bd) + (bc + ad)i$.

Таким образом, после раскрытия скобок, надо просто учесть $i^2 = -1$ и привести подобные.

Пример. $(1 + i)(2 + i) = 2 + i + 2i + i^2 = 1 + 3i$.

Определение. число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым к $z = x + iy$.

Умножим два взаимно сопряжённых комплексных числа:

$(x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - ixy + i^2 y^2 = x^2 + y^2$, получилось действительное число. Мы заметили, что при умножении на сопряжённое мнимая часть станет 0, и получается действительное число. Этот факт можно использовать для процедуры деления. Если домножить на сопряжённое в знаменателе, то там получится действительное число, и это даст возможность разбить на сумму двух дробей. При этом, конечно, в числителе тоже домножаем на сопряжённое к знаменателю, чтобы дробь не изменилась.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd + bci - adi}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Пример. Вычислить $\frac{2+i}{1+i}$.

$$\frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+i-2i-i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{2+i-2i+1}{1+i-i+1} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

Поиск корней многочлена 2 степени при D < 0.

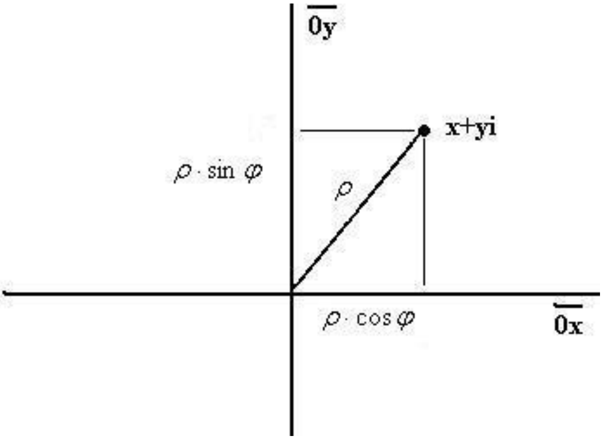
Пример. Решить уравнение $x^2+x+1=0$. $D=b^2-4ac = -3<0$. Теперь можно вычислить 2 корня, правда, они не на действительной прямой:

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Как видим, 2 корня получились взаимно сопряжённые, то есть вида $a\pm bi$, так как в выражении было $\pm\sqrt{D}$, где D отрицательно. Для многочлена с отрицательным дискриминантом всегда получаются 2 взаимно сопряжённых корня.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Введём величину $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ тогда x, y можно представить в таком виде: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ для некоторого φ, ведь геометрически в этом случае x, y - катеты прямоугольного треугольника, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ - его гипотенуза.



Абсцисса и ордината точки (x, y) на плоскости это проекции на оси, они равны $\rho \cdot \cos\varphi$ и $\rho \cdot \sin\varphi$ соответственно. Кстати, эти величины ρ и φ называются полярными координатами точки на плоскости.

Если записать комплексное число $x+iy$ с помощью введённых выше величин ρ и φ, получим:

$$x+iy=\rho\cdot\cos\varphi+i\cdot\rho\cdot\sin\varphi = \rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi).$$

Выражение $z=\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа, φ - его аргументом, ρ - модулем.

$$\varphi=\arg(z) \quad \rho=|z|.$$

Понятие модуля не противоречит известному понятию, применявшемуся раньше для отрицательных чисел: и там, и здесь модуль - есть расстояние по кратчайшей линии до начала координат.

Для любой точки $x+iy$ модуль вычисляется как $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Для вычисления аргумента верна формула $\varphi=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ если точка в 4-й и 1-й четверти, либо $\varphi=\pi+arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, если во 2-й и 3-й четверти. Это связано с тем, что период тангенса равен π, график этой функции непрерывен на интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Так, число $1+i$ запишется в виде $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Число i соответствует $1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Если вычислить синус и косинус, то снова перейдём к обычной, «алгебраической» форме числа:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+i.$$

Действительное число имеет аргумент 0 (если оно положительно) или π (если оно отрицательно).

Угол может определяться разными способами, так, например, вместо угла $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ во всех вычислениях для комплексных чисел в тригонометрической форме можно использовать $\varphi = -\frac{5\pi}{4}$, и это не будет ошибкой, так как тригонометрические функции повторяются через промежуток 2π.

Показательная форма комплексного числа.

Известна формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, таким образом, выражение $z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ может быть записано в виде $z = \rho e^{i\varphi}$.

Так, например, мнимой единице соответствует аргумент $\frac{\pi}{2}$ и модуль 1, поэтому запись в тригонометрической и показательной формах такова:

$$i = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1e^{i\pi/2}.$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Умножение и деление в тригонометрической и показательной форме.

Умножение, и особенно деление комплексных чисел чаще всего бывает легче выполнять в тригонометрической форме, чем в алгебраической, так как для деления не нужно домножать на сопряжённое в знаменателе.

В показательной форме.

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_2 + \varphi_1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

В тригонометрической форме:

$$\rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Доказательство формулы :

$z_1 z_2 \ = \ \rho_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)\ \rho_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2) =$

$\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2) =$

$\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Здесь были использованы известные тригонометрические формулы косинуса суммы и синуса суммы.

Таким образом, для умножения двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, достаточно просто умножить их модули и сложить аргументы.

Формула деления двух комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) .$$

Для деления двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, нужно поделить их модули и вычесть аргументы.

Заметим, что при умножении на мнимую единицу i, а именно при действии $(a+bi)i = -b+ai$, фактически вектор (a,b) на плоскости переходит в $(-b,a)$, то есть как раз и прибавляется аргумент числа i, то есть 90^0.

Пример. Поделить $\dfrac{i}{1+i}$.

$$\frac{1e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Можно выполнить это деление и с помощью умножения на сопряжённое, чтобы повторить ранее изученный алгоритм:

$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-i^2+i}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Формула Муавра, степень. Корни.

Если умножали бы в тригонометрической форме не два разных числа, а одно и то же число $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, то получилось бы:
$\rho\rho(\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi))$, то есть $z^2 = \rho^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$.
Таким же образом можно умножить z в третий раз и снова в аргументе прибавится φ, а модуль снова умножится на ρ. Таким образом, по индукции доказывается, что

$$z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Эта формула называется **формулой Муавра** и позволяет не перемножать множество скобок, если требуется вычислить большую степень числа, а вычислить её по формуле.
И снова можно сказать, что ещё легче возводить в степень с помощью показательной формы числа:

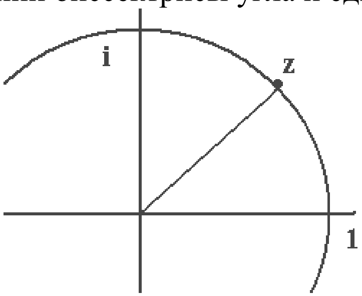
$$z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

Пример. Найти $(1+i)^8$ по формуле Муавра.

Вычислим модуль и аргумент. $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, соответствующая точка расположена в первой четверти на пересечении биссектрисы угла и единичной окружности.



По формуле Муавра, $\sqrt{2}^8\left(\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

$= 16(\cos 0 + i\sin 0) = 16.$

В показательной форме: $\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\right)^8 = 16\cdot e^{2\pi i} = \quad 16(\cos 0 + i\sin 0) \ = 16$

.

Корень порядка n вычисляется по такой формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Доказательство формулы корня порядка n.

Если возведём в степень n, получим

$$\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n\left(\cos(\varphi+2\pi k)+i\sin(\varphi+2\pi k)\right) = \rho\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right) = z \ .$$

Добавка $\frac{2\pi k}{n}$ после возведения в степень станет кратной 2π, то есть точка, отстоящие на угол $\frac{2\pi}{n}$, просто опишет один лишний оборот вокруг начала координат, то есть в аргументу добавится 360 градусов, и придёт в ту же точку, что и без $\frac{2\pi k}{n}$.

Пример. Найдите все значения корня $\sqrt[3]{8i}$.

Сначала представим комплексное число, которое находится под знаком корня, в тригонометрической форме.

Точка расположена на мнимой оси выше начала координат, поэтому аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$, модуль $\rho = |8i| = 8$.

Теперь находим все 3 корня.

$$\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right) \quad \text{при k = 0,1,2.}$$

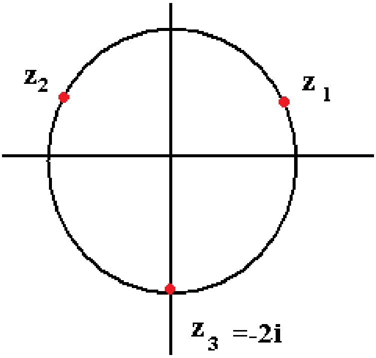
$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right)$, отсюда:

1) $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}+i$

2) $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$

3) $z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) = -2i$

Чертёж:



Если к исходному углу добавить 120 градусов, то для куба этого числа добавится 360 градусов, и результат будет точно такой же. С этим фактом как раз и связано наличие лишнего слагаемого $\frac{2\pi k}{n}$ в формуле.

Квадратных корней два, а именно $\pm\sqrt{a}$. Это происходит по той же причине: если число было положительным, то его аргумент был 0, и тогда по формуле $\sqrt{z} = \sqrt{a}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{2} + i\sin\frac{0+2\pi k}{2}\right)$ то есть $\sqrt{a}(cos\pi k + i\sin\pi k) = \sqrt{a}((-1)^k + i0) = (-1)^k\sqrt{a}$, что и соответствует $\pm\sqrt{a}$ при $k=0$ и $k=1$. К аргументу прибавляется по $360/2=180$ градусов.

Корни квадратные из отрицательного числа имеют вид $\pm i\sqrt{a}$.Там аргумент корня имеет вид $\frac{\pi+2\pi k}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то есть 90 и 270 градусов соответственно.

Обобщённые синус и косинус комплексного числа.

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ и $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Рассмотрим при действительном значении $z = x + i0$, и **докажем,** что это на самом деле обобщения тех тригонометрических функций.

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \dfrac{(\cos x + i\sin x) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2}$ по свойствам чётности и нечётности, получается

$\dfrac{(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)}{2} = \dfrac{2\cos x}{2} = \cos x$.

Для синуса, аналогично было бы

$\dfrac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)}{2i} = \dfrac{2i\sin x}{2i} = \sin x$.

При отступлении в сторону от действительной прямой, значения косинуса и синуса могут быть и больше 1 по модулю, т.е. область значений вовсе не отрезок $[-1,1]$, например $\cos(5i) > 1$.

$\cos 5i = \dfrac{e^{i5i} + e^{-i5i}}{2} = \dfrac{e^{-5} + e^{5}}{2} > \dfrac{e^{5}}{2} > 1.$

Эти функции в комплексной плоскости являются неограниченными.

Связь с линейными однородными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим функцию e^{rx} если r комплексное число.

$e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$.

то есть здесь действительная и мнимая часть - как раз те самые функции, которые входят в ФСР при наличии комплексных корней.

Логарифм комплексного числа.

$Ln(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$ $(\forall k \in Z)$.

Доказательство формулы $Ln(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$.

$$e^{Ln(z)} = e^{\ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)} \Rightarrow z = \rho\, e^{i(\varphi + 2\pi k)} =$$

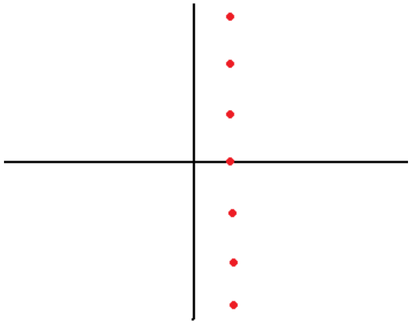
$$z = \rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = z$$

так как синус и косинус не зависят от прибавления угла, кратного 2π А это равенство уже очевидно, так как это и есть тригонометрическая форма комплексного числа.

Таким образом, логарифм существует для всех точек в плоскости, за исключением нуля. Для действительного положительного числа, аргумент равен 0, поэтому это бесконечное множество точек имеет вид $\ln\rho + i(0 + 2\pi k)$, то есть одно из значений, а именно, при $k = 0$, попадёт на действительную ось. Если вычислять логарифм отрицательного числа, то получим $\ln\rho + i(\pi + 2\pi k)$, то есть набор точек сдвинут вверх и ни одна из них не попадает на действительную ось.

Из формулы видно, что только при нулевом аргументе исходного числа одно из значений логарифма попадает на действительную ось. А это соответствует правой полуоси, и именно поэтому в курсе школьной математики рассматривали только логарифмы положительных чисел. Логарифмы отрицательных и мнимых чисел также существуют, но у них нет ни одного значения на действительной оси.

На следующем чертеже показано, где в плоскости расположены все значения логарифма положительного числа. Одно из них на действительной оси, остальные выше и ниже на 2π, 4π, 6π и так далее. Для отрицательного или комплексного числа, аргумент φ отличен от нуля, поэтому происходит сдвиг этой последовательности точек по вертикали, в результате чего на действительной оси не будет ни одной точки.



Пример. Вычислить $Ln(-2)$.

Решение. Определим модуль числа (равен 2) и аргумент 180^0, то есть π. Тогда $Ln(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k)$.

В обучающем видео (по ссылке) показано, как движутся точки в комплексной плоскости, являющиеся значениями логарифма, при изменении модуля или аргумента:

http://www.youtube.com/watch?v=LKFFn-TSLd0

ЛЕКЦИЯ № 10. 18. 04. 2017

Разложение функции f(z) в виде u+iv.

Если вычислить функцию, подставляя $z = x + iy$, то можно затем отделить действительную и мнимую часть, и образовать выражение u+iv, состоящее из так называемой действительной и мнимой части функции. u(x,y) = Re(f), v(x,y) = Im(f).

Пример. Разложить в сумму действительной и мнимой части функцию: $f(z) = z^2$.

$(x+iy)(x+iy) = x^2 + ixy + iyx + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

После раскрытия скобок, мы собрали в отдельное слагаемое те части, в которых нет i, и те, в которых есть i, тем самым выделили действительную и мнимую часть функции.

Таким образом, для отображения из плоскости в плоскость верно: $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$.

Другой пример:

Пример. Разложить в сумму действительной и мнимой части функцию: $f(z) = e^z$.

$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$.

Области в комплексной плоскости и неравенства, задающие их.

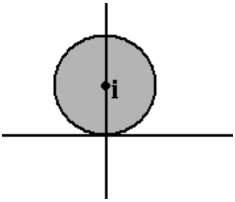
Пример. $\mathrm{Re}(z) > 0$ правая полуплоскость.

Пример. $\mathrm{Im}(z) > 0$ верхняя полуплоскость.

Пример. $|z| = R$ - окружность радиуса R вокруг начала координат.

Пример. $|z| > R$ - круг радиуса R вокруг начала координат.

Пример. $|z - i| < 1$ это круг радиуса 1 вокруг точки i. Это неравенство задаёт следующее условие: удаление числа z от фиксированного числа i не превышает 1. Можно непосредственно преобразовать в уравнение круга в плоскости: $|z - i| < 1 \Rightarrow |(x+iy) - i| < 1$ $\Rightarrow |x + i(y-1)| < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} < 1 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 < 1$ а это уравнение круга, центр которого в точке (0,1), то есть как раз в точке i. Чертёж:



Пример. $|z-1-i|<2 \Rightarrow |z-(1+i)|<2$ это круг радиуса 2 с центром в точке $1+i$, то есть точке (1,1) в плоскости.

Пример. Множество $1<|z-i|<2$ это кольцо вокруг точки i.

ГЛАВА 3. РЯДЫ.

§ 1. Числовые ряды.

Пусть дана последовательность $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Бесконечная сумма:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется рядом.

Если суммировать до какого-то номера n, то получается «частичная сумма» $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Часть, которая следует после слагаемого с номером n при этом называется остатком ряда. $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

Если сумма ряда обозначена S , то: $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = S - S_n$.

Для каждого ряда существует последовательность частичных сумм: $\{S_1, S_2, ..., S_n, ...\}$ ведь мы можем произвести конечное суммирование от 1-го до 1-го, затем от 1-го до 2-го, от 1-го до 3-го и так далее, и так для каждого n.

Определение 1. Если сходится последовательность частичных сумм ряда, то и соответствующий ряд называется сходящимся.

Лемма. Сходимость ряда эквивалентна сходимости любого из его остатков.

Доказательство. $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = S - S_n$. Частичная сумма содержит конечное количество слагаемых, она точно является конечным числом. Обозначим остаток через A. Тогда $S = S_n + A$. Если A конечно, то сумма двух конечных чисел $S = S_n + A$ тоже конечна. А если сумма ряда, то есть S , есть конечное число, то $A = S - S_n$ разность двух конечных чисел, а значит тже конечное число. Таким образом, имеет место и необходимость, и достаточность.

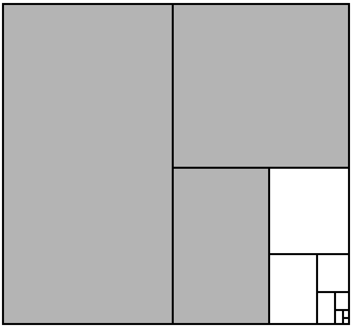
Более подробное определение сходимости с помощью ε :

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n \in N$, что $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i\right| < \varepsilon$.

Определения 1 и 2 эквивалентны: если, начиная с некоторого номера, сумма оставшихся элементов меньше любой заранее заданной погрешности, это и означает, что частичные суммы стабилизируются при $n \to \infty$, то есть существует предел S_n.

Пример. Рассмотрим убывающую геометрическую прогрессию - кстати, прогрессия это один из важных частных случаев ряда.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ Геометрическая интерпретация: возьмём квадрат



Если закрасить половину, затем четверть квадрата, и каждый раз половину того, что осталось до целого, то мы никогда не превысим площадь квадрата, а закрашенная площадь будет приближаться к 1.

Известна формула суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$. В данном случае $S = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$.

Для погрешности $\varepsilon = 0{,}01$ найдём такой элемент, что частичная сумма отклоняется от суммы прогрессии менее чем на $\varepsilon = 0{,}01$, то есть остаток меньше $\varepsilon = 0{,}01$.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots$ После 4-го элемента, $\frac{1}{32}+\ldots$

то есть для остатка, который тоже есть геометрическая прогрессия,

$$\varepsilon = 0{,}1 \quad S - S_4 = \frac{1/32}{1-1/2} = \frac{1/32}{1/2} = 1/16 < 0{,}1.$$

Таким образом, после 4-го элемента, частичные суммы отклоняются от суммы менее чем на $\varepsilon = 0{,}1$.

Теорема 1. Необходимый признак сходимости.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_n \to 0$.

Доказательство. Так как остаток ряда стремится к нулю, то есть сумма $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ = $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ по модулю меньше чем ε, то одно первое слагаемое из остатка - тем более, меньше чем ε. Получается, что при росте номера $|a_n| \to 0$, а значит и общий член ряда уменьшается к нулю, $a_n \to 0$.

Замечание. Это необходимый, а не достаточный признак! Т.е. если $a_n \to 0$, это ещё не всегда означает, что ряд сходящийся, а вот если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится, то есть такие ряды даже не надо исследовать, про них сразу же известно, что сходимости нет. Сейчас мы увидим пример, где слагаемые стремятся к 0, а сходимости всё же нет.

Гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Доказательство его расходимости. Возьмём сумму от элемента номер n+1 до 2n. Докажем, что она больше 1/2, то есть для произвольного ε, невозможно сделать её меньше, чем ε.

Если была бы сходимость, то для любого ε остаток, начиная с какого-то номера, меньше чем ε. Запишем для n даже не весь остаток ряда, а его часть, а именно, последующие n элементов.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

Наименьший элемент здесь $\frac{1}{2n}$. Если мы заменим все слагаемые на него, то сумма лишь уменьшится, т.е.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Итак, часть частичной суммы от номера n+1 до 2n больше, чем $\frac{1}{2}$, то есть не может быть меньше ε. Определение сходимости не выполнено, ряд расходится. Здесь слагаемые уменьшаются к 0, но слишком медленно, недостаточно для сходимости.

Замечание. Тема «ряды» связана с темой «несобственные интегралы», там тоже рассматриваются только функции, стремящиеся к 0, и для них может быть либо сходимость, либо расходимость несобственного интеграла 1-го рода. Но там непрерывные, а здесь дискретные величины. Вспомним, что там тоже интеграл от $\frac{1}{x}$ был расходящимся, аналогичное мы сейчас увидели для ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Суммы рядов в некоторых случаях можно найти, используя формулу Тейлора. Вспомним, например, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ если здесь положим $x=1$, то получается $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$, то есть сумма

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e-1.$$

Вспомним разложение функции $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$, тогда при $x = 1$ получается $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \ln 2$.

Если все слагаемые здесь были бы со знаком «+» то это был бы гармонический ряд, расходимость которого доказали ранее.

Получается, что если знаки чередуются, то сходимость может быть из-за частичной компенсации слагаемых, а если взять по модулю, то сходимости может и не быть. В связи с этим возникают такие понятия:

Абсолютная и условная сходимость.

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и при этом также $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся. А если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то исходный ряд называется условно сходящимся.

Если все слагаемые положительны, то сходимость равносильная абсолютной, а понятие «условно» не имеет смысла и не применяется.

Изменение суммы от перестановки бесконечного числа слагаемых (пример). $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \ln 2$. Теперь переставим так, чтобы после каждого положительного следовали ровно по 2 отрицательных члена ряда.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$$

объединим первые 2 слагаемых в каждой скобке.

$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$ а теперь вынесем $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...\right)$ мы получили точно такой же ряд, как и был в начале, но с коэффициентом $\frac{1}{2}$. То есть сумма теперь должна быть не ln2, а $\frac{1}{2}\ln 2$. Вот такой парадокс: привычный закон коммутативности далеко не всегда выполняется в бесконечных суммах!
Если ряд абсолютно сходится, то его сумма не зависит от перестановки бесконечного количества слагаемых. В связи с этим как раз и введено понятие абсолютной сходимости.

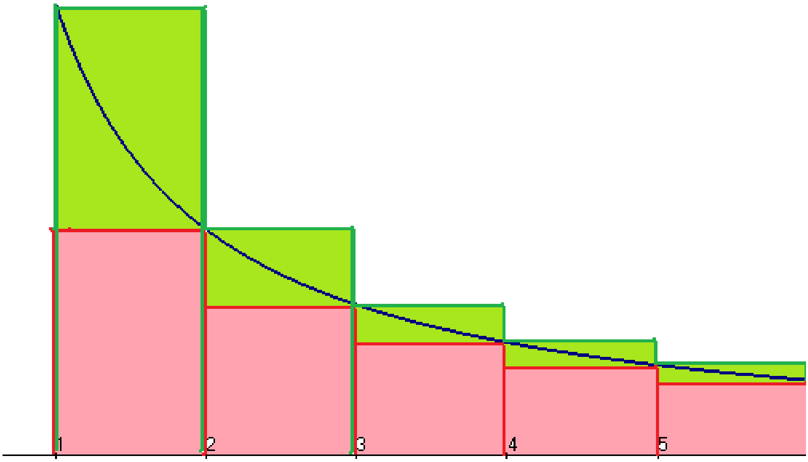
Признаки сходимости числовых рядов.
Признаки сходимости - это теоремы, дающие конкретные методы исследования рядов на сходимость или расходимость.

Теорема 2. Интегральный признак Коши.

Если дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и при этом существует функция $f(x)$, такая, что при целых значениях она совпадает с членами этого ряда, т.е. $f(n) = a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Рассмотрим чертёж. Высоты столбцов, расположенных выше графика (включающие в себя и зелёную и красную часть), это числа $a_1, a_2, a_3, ...$., так как эти высоты $f(1), f(2)$ и т.д. Сумма площадей этих столбцов, как раз и есть сумма ряда. И это больше, чем несобственный интеграл. В то же время столбцы, расположенные ниже графика (только красная часть на чертеже), имеют высоту $a_2, a_3, a_4, ...$ так как у первого из них высота $f(2)$.

Сумма их площадей это сумма остатка ряда без 1-го слагаемого. Но они все ниже графика, то есть их суммарная площадь меньше, чем несобственный интеграл.



Итак, получили: $a_2 + a_3 + ... \leq \int\limits_1^{\infty} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + a_3 + ...$

Правое неравенство означает: из того, что ряд сходится, следует, что несобственный интеграл сходится. А левое неравентство значит, что из сходимости интеграла следует сходимость остатка ряда, начиная со 2-го элемента. Но ведь сходимость остатка ряда равносильна сходимости самого ряда. Поэтому в итоге получается такой факт: ряд сходится тогда и только тогда, когда несобственный интеграл сходится.

Фактически, с помощью этой теоремы можно во многих случаях как бы заменять n на x, и исследовать не дискретные, а непрерывные величины, а это удобнее, т.к. можно интегрировать, применять первообразные, то есть гораздо больше способов для исследования.

Следствие. Ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, сходятся при $a > 1$.

Доказательство очевидно: они эквивалентны интегралам $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^a}dx$, про которые известно, что при $a>1$ есть сходимость. Итак, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ сходятся, а вот $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходятся, здесь степень меньше или равна 1.

Но не всегда удаётся подобрать такую функцию, чтобы применить интегральный признак Коши. Например, в ряде может содержаться n! Поэтому нужны и другие признаки.
Если исследовать внутреннюю структуру ряда, а именно отношение следующего слагаемого к предыдущему, то например, для геометрической прогресмсии это число всегда одно и то же q (называется знаменатель прогрессии). А вот если ряд не является прогресией, то оно как-то варьируется, для сходимости важно, чтобы оно оказалось меньше какого-то q, то есть было меньше сходящейся прогрессии.

Теорема 3. Признак Даламбера в конечной (не-предельной) форме. Если при всех $n>n_0$ (то есть начиная с некоторого номера) выполняется условие $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le q<1$, то ряд абсолютно сходится.

Доказательство. Во-первых, сходимость ряда равносильная сходимости его остатка, т.е. можем рассмотреть остаток ряда и заново перенумеровать члены ряда, начиная с n_0, поэтому можно доказывать даже при том условии, что $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le q<1$ верно, даже начиная с первого номера. Обратите внимание, что условие $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le q<1$ это не то же самое что $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. В нашем случае все они меньше q, которое само меньше 1, т.е. отделено от 1 некоторым расстоянимем на числовой прямой, т.е. предел этих величин не может быть равен 1, от любой из них до 1 остаётся некоторое расстояние $(1-q)$!

$$\frac{|a_2|}{|a_1|} \le q \quad \Rightarrow |a_2| \le q|a_1|,$$

$$\frac{|a_3|}{|a_2|} \le q \quad \Rightarrow |a_3| \le q|a_2| \ \Rightarrow \ |a_3| \le q^2|a_1|.$$

Продолжая таким образом, можно модуль каждого члена ряда оценить с помощью $|a_1|$ и какой-то степени числа q.

Итак, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots \le |a_1|+q|a_1|+q^2|a_1|+\ldots =$ $|a_1|\left(1+q+q^2+\ldots\right)$ получилось, что ряд, состоящий из модулей, меньше некоторой убывающей геометрической прогрессии.

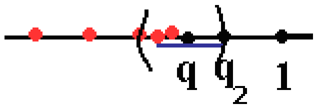
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots \le |a_1|\left(1+q+q^2+\ldots\right)=|a_1|\frac{1}{1-q}.$$

Итак, сумма меньше некоторого конечного числа, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, а значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Теорема 4. Признак Даламбера в предельной форме.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q < 1$ то ряд абсолютно сходится, если при этом $q > 1$ то ряд расходится.

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы таким образом. Если предел равен q и оно строго меньше 1, то для всякого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера, все отношения вида $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ входят в окрестность $(q-\varepsilon, q+\varepsilon)$, а если заранее возьмём $\varepsilon < 1-q$, то все эти элементы окажутся левее, чем $q_2 = q+\varepsilon$, при этом $q_2 < 1$.



То есть, они всё равно будут отделены от 1 неким расстоянием. А тогда выполняются условия прошлой теоремы, и ряд абсолютно сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

Поделим n+1 й член ряда на n-й. На практике лучше пользоваться предельным признаком, т.е. сразу перейти к пределу и получить q.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} : \frac{1}{3^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$. Ответ: ряд сходится.

Замечание. Сходимость здесь сразу абсолютная, так как все слагаемые и так положительны.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Итак, $q = 0 < 1$, ряд сходится.

Замечание. Если было бы знакочередование, для признака Даламбера всё равно надо было бы рассмотреть по модулю, т.е. отбросить $(-1)^n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ тоже сходится абсолютно. Знакочередование - вовсе не значит, что сходимость условная. Если исследовать здесь ряд даже без знакочередования, то он сходится.

Теорема 5. Радикальный признак Коши в конечной форме.

Если при всех $n > n_0$ выполнено условие $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

Доказательство. Если $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$, то $|a_n| \le q^n$. Таким образом, начиная с некоторого номера, остаток ряда меньше или равен, чем убывающая геометрическая прогрессия.

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... \le q + q^2 + q^3 + ... = \frac{q}{1-q}$. Эта сумма конечна, то есть ряд абсолютно сходится.

Теорема 6. Радикальный признак Коши в предельной форме.

Если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ то ряд абсолютно сходится, если $q > 1$ расходится.

Доказательство следует из предыдущей теоремы, аналогично тому, как Т.4 из Т.3.

Пример. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Рассмотрим $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$

(использовали 2-й замеч. предел) ряд расходится.

Замечание. При $q = 1$ признак Даламбера и радикальный признак Коши не дают никакого ответа, в этом случае надо применять какие-либо другие признаки.

ЛЕКЦИЯ № 11. 25. 04. 2017

Далее следует серия признаков, основанных не на внутренней структуре ряда, а на сравнении с каким-то внешним, «эталонным» рядом.

Теорема 7. Признак сравнения в конечной форме.

Даны 2 ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём, начиная с какого-то номера n_0 верно $a_n \le b_n$. Тогда:

1) Из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

2) Из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример. Выяснить сходимость $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln n}$.

Заметим, что $\frac{1}{2^n \ln n} < \frac{1}{2^n}$ при $n \ge 3$, так как $\ln n > \ln e = 1$.

В то же время ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, с помощью которого мы ограничили сверху, это сходящаяся геометрическая прогрессия, поэтому тот исходный ряд тоже сходится.

Теорема 8. Признак сравнения в предельной форме.

Даны 2 ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, где C константа, $C \ne 0, \infty$, т.е. a_n, b_n - бесконечно малые одного порядка, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Пример. Выяснить, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2}$.

Пусть $a_n = \frac{n+1}{n^3+2}$, тогда возьмём $b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Предел отношения этих величин равен 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+2} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^2}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2}{n^3+2} = 1.$$

Поэтому для исследования сходимости, можно рассматривать $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ вместо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2}$, они эквивалентны в смысле сходимости. В то же время $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ уже легко сравнить с несобственным интегралом $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$, который в свою очередь сходится. Ответ: ряд сходится (абсолютно, т.к. слагаемые все положительны).

Теорема 9. Признак Лейбница. Если выполнены 2 условия:
1) Ряд знакочередующийся, 2) $|a_n|$ монотонно убывает к нулю.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Идея доказательства. У нас есть ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$

Сначала объединим так: $(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots$ в каждой скобке положительное число, так как вычитаемое меньше по модулю, из-за монотонности. Получается, что подпоследовательность в последовательности частичных сумм возрастает.

А теперь перегруппируем так: $a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots$ из элемента a_1 вычитаются какие-то положительные числа, то есть частичный суммы меньше, чем a_1. Итак, последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит, у неё есть предел. тогда ряд сходится.

Пример. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ условно сходится.

§2. **Функциональные ряды.**

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется функциональным рядом.

Для функций комплексного переменного $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Если фиксировать ту или иную точку из области определения, будет получать различные числовые ряды. Фактически, здесь имеется бесконечное множество числовых рядов, так как бесконечное множество точек в области определения.

Например, рассмотрим ряд $x+x^2+x^3+\ldots$ мы можем зафиксировать различные точки, и будем получать различные числовые ряды:

$x=0 \Rightarrow 0+0+0+\ldots$ сходится, сумма равна 0.

$x=1 \Rightarrow 1+1+1+\ldots$ расходится, сумма ∞.

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ сходится, это геометрическая прогрессия, сумма равна 1.

Область сходимости функционального ряда.

Определение. Множество D называется областью сходимости, если для каждой точки $z_0 \in D$ соответствующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ сходится.

Если ряды из комплексных функций, то D это область в плоскости, например круг, а если действительные функции, то D какой-либо интервал или объединение интервалов на действительной прямой.

Метод нахождения области сходимости. применять те же самые признаки (Даламбера, Коши) но только для «произвольного» x.

То есть, в пределе так до конца и остаётся переменная. а затем решить неравентво.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}} : \frac{|x|^n}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} 2^n}{2^{n+1}|x|^n} = \frac{|x|}{2} = q(x) < 1.$$

Если раньше, в теме «числовые ряды» мы просто получали в пределе какое-то число q и могли сказать, что оно больше либо меньше 1, то теперь получили функцию от x, т.е. при одних значениях больше 1, а при других меньше. Надо решить неравенство и найти, где это выражение меньше 1.

$\frac{|x|}{2} < 1 \;\Rightarrow\; |x| < 2 \;\Rightarrow\; x \in (-2,2)$ это интервал, где есть абсолютная сходимость.

Там, где $q(x) > 1$, то есть $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$ ряд расходится.

При $q(x) = 1$ признак Даламбера не даёт ответа, надо проводить исследование поведения ряда в граничных точках в ручном режиме.

Подставим $x = 2$. Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ он расходится.

Подставим $x = -2$. Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ он тоже расходится, не выполнен необходимый признак, т.е. слагаемые не уменьшаются к 0. Итак, граничные точки не добавятся к области сходимости, и ответ остаётся таким: $x \in (-2,2)$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{n+1} : \frac{|x|^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} n}{|x|^n (n+1)} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Теперь решим неравенство $|x|<1$. Это означает $x\in(-1,1)$ - вот область абсолютной сходимости.
Исследуем граничные точки.

При $x=1$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, он расходится (гармонический ряд, изучали ранее). При $x=-1$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, знакочередующийся, сходится по признаку Лейбница, но условно, так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ это и есть ряд из его модулей а он расходится. итак, ответ: область сходимости $x\in[-1,1)$.

Пример. Найти область сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$.

Решение. Извлечём корень n порядка из модуля. Получим $\frac{|x-1|}{2}$.

Решим неравенство $\frac{|x-1|}{2}<1$, т.е. $|x-1|<2$, что равносильно $-2<x-1<2$, то есть $-1<x<3$. Решением неравенства будет множество $(-1,3)$. Подставляя граничные точки, получаем расходимость:

При $x=3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$

слагаемые не стремятся к 0, не выполнен необходимый признак, ряд расходится.

При $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(-1-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(-2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ по той же причине ряд расходится.

Ответ. область сходимости $(-1,3)$.

§3. Степенные ряды.

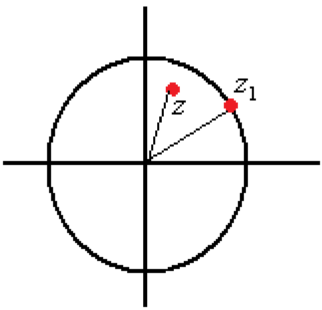
Общий вид степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, где a_n числовые коэффициенты. В этом ряде только положительные степени одного и того же выражения $(z - z_0)$ и константа (что получается при нулевой степени). Возможно, что часть коэффициентов равна 0, то есть некоторые степени пропущены.

Теорема 1 (Абеля). 1) Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке z_1, то он сходится в любой точке z, для которой $|z| < |z_1|$, причём абсолютно.

2) Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_1 то он расходится в любой точке, для которой $|z| > |z_1|$.

Доказательство. Сходимость в точке z_1 ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ означает, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^{\ n} = C$. Если этот ряд сходится, то согласно необходимому признаку, слагаемые стремятся к 0. Тогда среди них есть максимальное по модулю, и таким образом, они ограничены в совокупности, некоторой константой M, т.е. $\left|a_n z_1^{\ n}\right| \le M$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ в произвольной точке z, которая ближе к началу координат на комплексной плоскости.



Итак, взяли точку, для которой $|z|<|z_1|$. Тогда $\left|\frac{z}{z_1}\right| = q < 1$.

Для доказательства абсолютной сходимости, рассмотрим ряд, состоящий из модулей: $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n z^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n z_1^{\,n}\right|\left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ (домножили и поделили). При этом $\left|a_n z_1^{\,n}\right| \le M$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n z_1^{\,n}\right|\left|\frac{z}{z_1}\right|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} Mq^n =$ $M\sum_{n=0}^{\infty} q^n = M\left(1+q+q^2+q^3+\ldots\right) = M\,\frac{1}{1-q}$ то есть меньше или равно некоторой сходящейся геометрической прогрессии.

Итак, $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n z^n\right| \le M\,\frac{1}{1-q}$, то есть ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n z^n\right|$ сходится, то есть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно.

Пункт 2. Нужно доказать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке, которая дальше от начала координат. Допустим, что в z_1 расходимость, но есть сходимость в какой-то более далёкой точке z. Но тогда это противоречило бы уже доказанному пункту 1, так как из сходимости в z следовала бы сходимость в более близкой к началу координат точке z_1.

Следствие. Область сходимости степенного ряда есть круг.
(в R интервал)

Действительно, по теореме 1, во всех более близких к центру точках - сходимость, а если нашлась точка, где ряд расходится, то сразу же во всех, более далёких от центра - тоже расходимость. Тогда область есть круг.

Примечание. Центр круга сходимости это точка z_0. Мы доказали теорему Абеля для центра в точке 0 для простоты и ясности обозначений, но полностью аналогичные выкладки верны и для центра в любой другой точке.

Но на самом деле, выше был рассмотрен случай в комплексной плоскости. А для рядов из действительных степенных функций $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, пересечение круга с действительной прямой порождает симметричный интервал с центром в точке x_0. Таким образом, область сходимости это интервал $(x_0 - c, x_0 + c)$.

Теорема 2. Формулы радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ и } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Заметим, что в этих формулах a_n обозначает не просто n-е слагаемое, а лишь его часть, сам числовой коэффициент без степенной функции, а дроби обратные по сравнению с теми, как в признаках Даламбера или Коши. Рассмотрим доказательство, чтобы понять, почему так происходит.

Доказательство.

Применим к степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\cdot|z-z_0|^{n+1}}{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1, \text{ из чего следует}$$

$$|z-z_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}, \text{ т.е. } |z-z_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R.$$

Вот и получилось условие, задающее круг в комплексной плоскости. Это можно считать также вторым, независимым доказательством

того следствия из теоремы Абеля, где говорилось, что область сходимости есть круг.
Докажем вторую формулу.

Применим к степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z-z_0|^n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \text{ т.е. } |z-z_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ т.е.}$$

$$|z-z_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Пример. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$.

Отбросим степенную часть и извлечём коэффициент.

$a_n = \frac{1}{2^n}$, тогда $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \frac{2^{n+1}}{1} = 2$.

Можно считать и по второй формуле: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$.

Итак, центр в точке 1, а радиус 2, то есть область сходимости - интервал $(-1,3)$. Примечание. Чуть раньше мы решали этот же пример другим способом, просто по признаку Даламбера, а здесь по формулам радиуса R.

Пример. Найти радиус и область сх. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n}$.

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$. R=5, интервал сходимости $(-3,7)$.

Поиск суммы степенных рядов с помощью почленного интегрирования и дифференцирования.

До сих пор мы искали область сходимости, то есть ГДЕ сходится ряд. А теперь научимся находить суммы рядов, обозначаемые через $S(x)$.

Проще всего, если ряд это геометрическая прогрессия, можно воспользоваться формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$. Однако далеко не всегда ряд это прогрессия. Тем не менее, бывают такие ряды, для котрых сумма производных или сумма первообразных от его слагаемых будет геометрической прогрессией. То есть, можно свести к прогрессии с помощью почленного дифференцирования или интегрирования.

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ тогда $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$. Рассмотрим на примерах.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

Подробная запись: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ заметим, что первообразные уже просто степенных функции, т.е. здесь легче найти не $S(x)$ а её первообразную.

$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x + x^2 + x^3 + \ldots$ а это уже геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x$. Её сумма $\frac{x}{1-x}$, и это напомним, первообразная от $S(x)$. Тогда $S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' =$

$\frac{1\cdot(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. **Ответ** $\frac{1}{(1-x)^2}$.

А бывают примеры, где наоборот, сначала надо дифференцировать.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Здесь тоже не прогрессия, но тот случай, когда можно свести к прогрессии. Если $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ то $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} =$

$1+x+x^2+... = \dfrac{1}{1-x}$. При этом, сходимость прогрессии обеспечена только при $|x|<1$, то есть $x\in(-1,1)$.

А теперь, чтобы вернуться к $S(x)$, надо проинтегрировать. $S(x)=\int\frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)+C$, знак модуля под логарифмом не нужен, так как при $x\in(-1,1)$ будет $x<1$, т.е. $1-x>0$, выражение и так положительное. Однако мы искале через первообразную, и там ещё есть неопределённая константа С. Чтобы её найти, надо присвоить какое-то значение x одновременно в ряде и функции, например 0. $S(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n}=0$ а с другой стороны, это равно $-\ln(1-0)+C$, то есть $C=0$. Ответ $S(x)=-\ln(1-x)$.

На практике рассмотрим другие примеры, где есть особенности, связанные с реализацией этих методов. Например, иногда надо решать в 2 шага, а иногда домножать на что-либо, чтобы потом можно было продифференцровать и получить прогрессию.

ЛЕКЦИЯ № 12. 02. 05. 2017

§4. Ряды Тейлора и Лорана.

В конце прошлой лекции мы изучали степенные ряды и находили суммы S(x). А бывает наоборот, обратная задача: дана функция, надо представить её в виде степенного ряда, т.е. «разложить в степенной ряд».

Ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ - разложение функции $f(z)$ в степенной ряд в окрестности точки z_0, он называется рядом Тейлора этой функции. Соответственно, для действительных функций,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Метод определения круга сходимости (до ближайшей точки разрыва).

Пусть $f(z)=\frac{1}{1-z}$. Если надо разложить её в ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, то центр $z_0=0$, а ближайшая точка, где ряд точно расходится, это точка разрыва $z=1$. Тогда круг сходимости как раз и будет $|z|<1$.

Пример. Разложить $f(z)=\frac{1}{1-z}$ в степенной ряд (ряд Тейлора).

Первый способ - найти производные до любого порядка n, и подставить их в формулу.

$f(z)=\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$. Тогда:

$f'(z)=(-1)(1-z)^{-2}(1-z)' = f'(z)=(-1)(-1)(1-z)^{-2} = (1-z)^{-2}$.

$f''(z)=(-1)^2(-1)(-2)(1-z)^{-3} = (1-z)^{-3}2!$

$f'''(z)=(-1)^3(-1)(-2)(-3)(1-z)^{-4} = (1-z)^{-4}3!$, и.т.д.

В точке 0 n-я производная равна n!

Тогда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n = 1+z+z^2+z^3+\dots$.

Но не обязательно так искать все производные и устанавливать закономерность при их вычислении. Иногда количество слагаемых при дифференцировании экспоненциально возрастает (если там было произведение) на каждом шаге в 2 раза и равно 2^n, а закономерности очень сложно находятся. Так что напрямую по формуле считать не всегда удобно.

Второй способ - получать всё разложение сразу, используя геометрическую прогрессию. Применяем формулу суммы прогрессии $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$ при этом желательно заранее вынести все множители из числителя за пределы дроби, чтобы «очистить» числитель до 1, этим самым мы обеспечиваем то, что можно пользоваться упрощённой формулой суммы прогрессии $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, где $b_1 = 1$.

Итак, $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Заметим, что при $|z| < 1$ эта функция может рассматриваться как сумма прогрессии (т.е. уже свёрутая по формуле суммы). Здесь знаменатель прогрессии $q = z$. Тогда $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$ как видим, то же самое и получили.

Рассмотрим разные модификации для других случаев.

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии: $f(z) = \frac{1}{1+z}$ по степеням z, то есть в круге с центром 0.

Сумма вместо разности вовсе не является препятствием к тому, чтобы использовать прогрессию, запишем $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)}$ тогда $q = -z$ и $\frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$ если в знаменателе сумма, получается знакочередующийся ряд.

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии: $f(z) = \frac{1}{2+z}$ по степеням z.

Решение. $f(z) = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \ldots$

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии $f(z) = \frac{1}{3+z}$ по степеням $(z-1)$, то есть в круге с центром в точке 1.

Здесь мы сначала определим круг сходимости. От точки 1 до точки разрыва $z = -3$ расстояние 4, так что разложение в ряд возможно в круге $|z-1| < 4$.

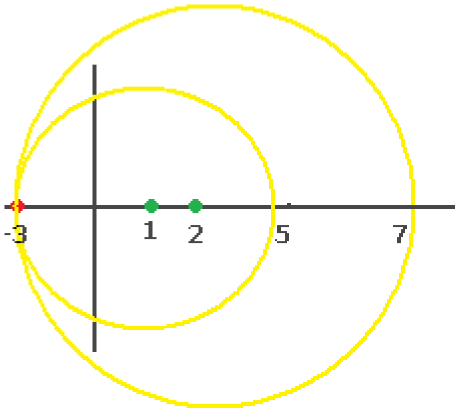
Отделим разность $(z-1)$ искусственным путём, т.е. прибавим и отнимем 1.

$f(z) = \frac{1}{3+z} = \frac{1}{4+(z-1)}$. А теперь далее не раскрываем блок $(z-1)$ вплоть до ответа, то есть эта скобка так и будет как единое целое.

$\frac{1}{4+(z-1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}$. Заметим, что при этом знаменатель прогрессии $q = -\frac{z-1}{4}$, он должен быть меньше 1 по модулю, но так и есть, ведь круг сходимости $|z-1| < 4$, как уже заметили раньше.

Замечание. Если центр был бы в точке 2, то пришлось бы преобразовывать так: $f(z)=\frac{1}{3+z}=\frac{1}{5+(z-2)}=\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{z-2}{5}}$. При этом получили бы условие $|z-2|<5$ что как раз и означает, что при сдвиге центра вправо, радиус круга увеличится, ведь он всё равно должен быть до ближайшей точки разрыва $z=-3$. Эти ситуации отражены на чертеже:



Приложения рядов Тейлора.

1. Приближённые вычисления.

Значения функции в точке можно приближённо вычислять с помощью разложения в ряд Тейлора, более того, во всех калькуляторах и компьютерах именно так и запрограммировано. Каждая функция там задана просто в виде набора коэффициентов ряда, и при обращении к функции именно это и вычисляется автоматически, с той точностью, с которой позволяет разрядная сетка калькулятора.

Так, вычислим e^1. Ихвестно, что $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$. Тогда

$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \quad = \quad e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$ Так, для первых шагов сразу получаем значение 2,5 затем прибавляется $\frac{1}{6}\approx 0{,}1666666$ и стало 2,6666666 а затем $\frac{1}{24}\approx 0{,}0416666$ станет 2,7083333 и так с каждым шагом всё ближе к $e\approx 2{,}71828$.

2. Нахождение производной высокого порядка.
Если разложить функцию в ряд и рассмотреть слагаемое со степенью n, то можно сравнить его с теоретически полученным видом $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ и отсюда извлекается информация о значении $f^{(n)}(x_0)$, причём не требуется вычислять все производные включительно до n порядка, а сразу получаем значение n-й производной в точке. Ведь бывает так, что функция содержит произведение, и там число слагаемых удваивается на каждом шаге, и их уже 1024 для 10-й производной.

Пример. Найти $f^{(10)}(0)$ для $f(x)=x^3\sin x$.

$$f(x) = x^3\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\right) = x^4-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\frac{x^{10}}{7!}+\frac{x^{12}}{9!}-\ldots$$

Здесь нам нужен только коэффициент при степени 10.

$$-\frac{1}{7!}=\frac{f^{(10)}(0)}{10!} \Rightarrow f^{(10)}(0)=-\frac{10!}{7!}=-8\cdot 9\cdot 10=-720.$$

Ответ. -720.

3. Нахождение определённого интеграла.
Если функция требует больших трудоёмких подстановок, или многократного интегрирования по частям, можно разложить функцию в ряд, состоящий из степенных функций, и приближённо вычислить.

Пример. Приближённо найти интеграл $\int\limits_0^{1/2}\sin(x^3)dx$ с точностью 10^{-4}.

$$\int_0^{0,5} \sin(x^3)dx = \int_0^{0,5} \left((x^3) - \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^5}{5!} - \ldots \right) dx =$$

$$\int_0^{0,5} \left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \ldots \right) dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^{1/2} - \left. \frac{x^{10}}{10 \cdot 3!} \right|_0^{1/2} + \left. \frac{x^{16}}{16 \cdot 5!} \right|_0^{1/2} - \ldots =$$

$\frac{1}{2^4 \cdot 4} - \frac{1}{2^{10} \cdot 10 \cdot 6} + \frac{1}{2^{16} \cdot 16 \cdot 120} - \ldots$очевидно, здесь 3 и последующие слагаемые заведомо меньше 10^{-5}, и не повлияют на 4-й знак после запятой, поэтому приближённое значение

$$\frac{1}{2^4 \cdot 4} - \frac{1}{2^{10} \cdot 10 \cdot 6} = \frac{1}{64} - \frac{1}{1024 \cdot 60} \approx 0{,}0156 - 0{,}000016 \approx 0{,}0156.$$

Как видим, даже 2-е слагаемое можно было не рассматривать, т.к. оно меньше, чем 10^{-4}.

4. Решение дифференциальных уравнений.

Можно представить неизвестную функцию $y(x)$ в виде степенного ряда $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ и подставить его в дифференциальное уравнение, тогда решение найдётся тоже в виде ряда, т.е. можно знать строение решения, его график и т.д. даже без аналитического выражения этой функции. .

Пример. $y' = y$ решить с помощью степенных рядов.

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ тогда $y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$

Из равенства $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ получаем:

$a_1 = a_0$, $2a_2 = a_1$, $3a_3 = a_2$ и так далее.

В этом случае все коэффициенты можно последовательно выразить через a_0. А именно, $a_1 = a_0$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}$, $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}$ и т.д.

Тогда $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \right)$ здесь видно,

что в скобках получилось разложение экспоненты. Итак, $y = a_0 e^x$.

Эту единственную константу можно переобозначить C и получится знакомый из вид общего решения такого уравнения: $y = Ce^x$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' = -y$ с помощью степенных рядов.

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \Rightarrow y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$

$\Rightarrow y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \ldots$

Подставим в уравнение.

$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \ldots = -a_0 - a_1x - a_2x^2 + \ldots$ тогда:

$2a_2 = -a_0$, $\quad 3 \cdot 2a_3 = -a_1$,

$4 \cdot 3a_4 = -a_2$, $\quad 5 \cdot 4a_5 = -a_3$,

$6 \cdot 5a_6 = -a_4$, $\quad 7 \cdot 6a_7 = -a_5$,

... $\quad$ ...

Из этих двух групп равенств можно все чётные коэффициенты выразить через a_0, а все нечётные через a_1.

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}a_2 = \frac{1}{4!}a_0, \quad a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4}a_3 = \frac{1}{5!}a_1, \ldots$$

аналогично, $a_6 = -\frac{1}{6!}a_0$, $a_5 = -\frac{1}{7!}a_1$, $a_8 = \frac{1}{8!}a_0$, $a_9 = \frac{1}{9!}a_1$,...

Тогда $y = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \ldots =$

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = a_0 \cos x + a_1 \sin x .$$

Впрочем, константы можно переобозначить через C_1, C_2 и записать решение в привычном виде $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Ряды ЛОРАНА.

Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, то есть содержащий как положительные, так и отрицательные целые степени, называется рядом Лорана. Совокупность слагаемых с нулевой и положительной степенью называется его правильной частью, а отрицательных - главной частью.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ правильная часть, $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ главная часть, её также можно переписать в виде: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

$$\ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Теорема 1. Область сходимости ряда Лорана есть кольцо вида $r < |z - z_0| < R$.

Доказательство. Распишем по отдельности на главную и правильную часть: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

1. Для правильной части верна теорема Абеля, ведь это обычный степенной ряд. Правильная часть абсолютно сходится в некотором круге $|z - z_0| < R$.

2. Рассмотрим главную часть ряда Лорана $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

Сделаем в ней замену с целью представить через положительные степени и применить теорему Абеля. $w = \frac{1}{z-z_0}$. тогда для новой переменной w ряд принимает такой вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$. Это степенной ряд, его круг сходимости с центром в 0. То есть, $|w| < r_1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z - z_0|} < r_1$

$\Leftrightarrow |z - z_0| > \dfrac{1}{r_1}$, обозначим $\dfrac{1}{r_1} = r$, вот и получили $|z - z_0| > r$.

Итак, область сходимости есть $r < |z - z_0| < R$, это кольцо.

Крайние случаи:

Если $r = 0$: круг с выколотой точкой $0 < |z - z_0| < R$.

Это происходит, если в главной части лишь конечное количество слагаемых. Их значение не существует только в самой точке z_0, а в любой точке из её окрестности - существует. Поэтому из области сходимости исключается лишь одна точка.

Если $R = \infty$: внешняя часть некоторого круга $r < |z - z_0| < \infty$.

Пример. Найти кольцо сх ряда Лорана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{5^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n (z-1)^n}$.

Решение. Найдём отдельно по радикальному признаку Коши область сходимости правильной и главной части.

1. Для $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{5^n}$ получается $\dfrac{|z-1|}{5} < 1$, т.е. $|z-1| < 5$

2. Для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n (z-1)^n}$ получается $\dfrac{1}{2|z-1|} < 1$, т.е. $|z-1| > \dfrac{1}{2}$.

Ответ. Кольцо сходимости: $\dfrac{1}{2} < |z-1| < 5$.

ЛЕКЦИЯ № 13.   16.05.2017

Разложение в ряд Лорана с помощью геометрической прогрессии.

Пример. Разложить функцию $\dfrac{1}{(z+2)(z+3)}$:

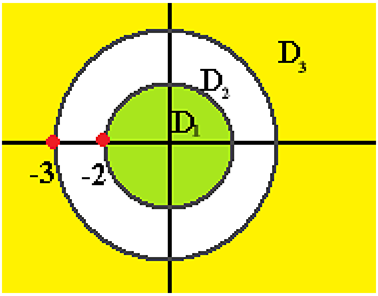
а) в ряд Лорана в кольце $2<|z|<3$

б) во внешней области $|z|>3$

в) в ряд Тейлора в круге $|z|<2$.

Во-первых, если центр кольца 0, а точки разрыва $z=-2$ и $z=-3$, то есть 3 области: $D_1=\{|z|<2\}$, $D_2=\{2<|z|<3\}$, $D_3=\{|z|>3\}$.

Чертёж:



$D_2=\{2<|z|<3\}$ кольцо, расположенное между двумя точками разрыва, так, чтобы ни одна из низ не была внутри кольца.

Разложим на простейшие дроби. Это действие необходимо в любом случае, независимо от того, в каком множестве надо получать разложение в ряд.

$$\frac{1}{(z+2)(z+3)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z+2)}{(z+2)(z+3)}$$

$$\Rightarrow (A+B)z+(3A+2B)=0z+1 \Rightarrow \text{система: } \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A=1, B=-1 \Rightarrow \quad f(z)=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}.$$

1) Для разложения в ряд Лорана в кольце, надо вынести за скобку иногда константу, а иногда z, чтобы всегда получалось что-то меньшее 1.

Из условия $2 < |z| < 3$ следует $\frac{2}{|z|} < 1$ и $\frac{|z|}{3} < 1$, то есть в знаменателе можно получать $\frac{2}{z}$ и $\frac{z}{3}$, но нельзя $\frac{z}{2}$ и $\frac{3}{z}$.

$$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}$$

теперь в каждом случае получено выражение вида $\frac{1}{1-q}$ котрое и является суммой геометрической прогрессии, и его можно превратить в бесконечную сумму по формуле $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} = \ldots + \frac{2^2}{z^3} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} - \frac{z^2}{3^3} - \ldots$$

2) Теперь разложим в ряд во внешней области, которую, впрочем, можно также считать кольцом типа $3 < |z| < \infty$. Здесь $|z| > 3$ причём автоматически выполнено также и $|z| > 2$, т.е. надо получать в знаменталелях выражения $\frac{2}{z}$ и $\frac{3}{z}$, и в итоге в ответе будут только отрицательные степени.

$$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z}\right)} =$$

$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z}\right)^n$ в данном случае их можно и объединить, т.к. в каждом слагаемом есть одинаковые степени.

$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n - \left(-\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n - 3^n}{z^{n+1}}$. В этом ряде Лорана есть только главная часть.

3) Если требуется разложить в ряд в круге, то это получится ряд Тейлора, там наоборот, в обеих дробях надо выносить константу, чтобы было $\frac{z}{3}$ и $\frac{z}{2}$.

$$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n .$$

Пример (со сдвигом центра)

Разложить функцию $\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ в ряд Лорана по степеням $z-1$.

Решение. Центр в точке 1, тогда расстояние до ближайшей особой точки равно 3, а до второй 4. Получается, что кольцо, где будет ряд, для этой задачи: $3 < |z-1| < 4$.

Разложение на простейшие дроби то же самое, $\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$.

Но после этого надо отделить выражение $z-1$.

$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+3} - \frac{1}{(z-1)+4}$ далее в соответствии с неравенствами $|z-1| < 4$ $|z-1| > 3$ надо вынести за скобку в одной дроби константу, а в другой $z-1$.

$$\frac{1}{(z-1)+3}-\frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} =$$

$$\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z-1}\right)}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-1}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n .$$

Объединить их нельзя, так как в одной части отрицательные степени, а в другой части положительные, это главная и правильная часть ряда соответственно.

§4. Ряды Фурье.

Скалярное произведение функций.

Вспомним скалярное произведение векторов $(a,b)=a_1b_1+...a_nb_n$.

Для функций можно построить обобщение. Если заданы 2 функции $f(x), g(x)$, то очевидно, их можно умножить в каждой точке. Затем все эти произведения надо проинтегрировать, так как точек на интервале бесконечное количество. Получается как бы бесконечное количество координат.

Итак, определим скалярное произведение пары функций на интервале (a,b) по формуле: $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Можно считать, что это верно и на отрезке $[a,b]$, ведь две граничные точки не влияют на величину интеграла.

Пример. Найти скалярное произведение $f(x)=x$ и $g(x)=x^2$ на интервале (0,1).

Решение. $(f,g)=\int_0^1 x\cdot x^2dx = \int_0^1 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$.

Свойства скалярного произведения, которые легко следуют из свойств линейности интеграла:

$(f,g)=(g,f)$

$(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$, $(f,g+h)=(f,g)+(f,h)$
$(cf,g)=c(f,g)$, $(f,cg)=c(f,g)$
Вспомним, что для векторов есть понятие модуля,
$|a|=\sqrt{a_1{}^2+..a_n{}^2}=\sqrt{(a,a)}$. Аналогичное понятие для функций называется **нормой функции:**

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f(x)f(x)dx}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}=\sqrt{(f,f)}\,.$$

Очевидно, что этот квадратный корень существует, ведь $f^2(x)\geq 0$, а значит и $\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$.

Ортогональные функции.
Две функции называются ортогональными на интервале (a,b), если $(f,g)=0$, то есть $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$.

Здесь нет такого простого геометрического смысла, как в случае перпендикулярных векторов, для функций ортогональность значит, что произведение функций где-то больше, а где-то меньше нуля так, чтобы эти части компенсировались и уничтожились при интегрировании.

Пример. Доказать, что функции $f=\sin x$, $g=\cos x$ ортогональны на интервале $(0,\pi)$.

$$\int_0^\pi \sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^\pi = -\frac{1}{4}(\cos 2\pi-\cos 0) = 0.$$

Замечание. Если одна из функций в произведении тождественно равна 0, то интеграл очевидно, равен 0. Поэтому тождественный 0 это ортогональная всем функция.

Ортогональные системы. Если любая пара функций в системе ортогональна, то система называется ортогональной.

$\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ ортогональна, если $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ для любых $i \neq j$.

Система функций на отрезке $[-l, l]$:

$$\left\{\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, ..., \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, ...\right\}$$

ортогональна, её подробно рассмотри позже, с помощью неё как раз и строятся тригонометрические ряды Фурье.

Формулы коэффициента (Фурье) разложения по ортогональной системе: $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ или $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

Доказательство. Пусть функция f представлена в виде суммы: $f = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + ...c_n\varphi_n + ...$ найдём коэффициенты .

Можно скалярно домножить на φ_n. Получим

$(f, \varphi_n) = (c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + ...c_n\varphi_n + ..., \varphi_n) =$

$c_0(\varphi_0, \varphi_n) + c_1(\varphi_1, \varphi_n) + ...c_n(\varphi_n, \varphi_n) + ...$

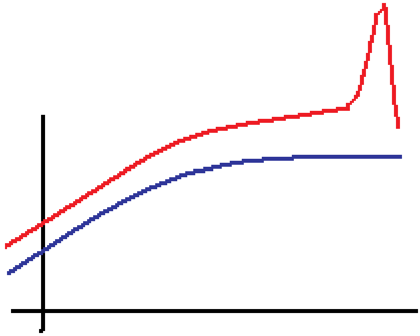
среди этих слагаемых, лишь одно отлично от нуля, ведь система ортогональна, и при $i \neq n$ будет $(\varphi_i, \varphi_n) = 0$.

Тогда $(f, \varphi_n) = c_n(\varphi_n, \varphi_n)$, тогда $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ то есть $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

Можно записать и с помощью интегралов: $c_n = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n{}^2(x)dx}$.

Аналогичное равенство верно и для векторов: $a_1 = \dfrac{(a, e_1)}{|e_1|^2} = \dfrac{a_1}{1}$.

Максимальное, среднее и среднеквадратичное отклонение.
Чтобы исследовать взаимосвязь 2 функций, а именно, удаление их графиков друг от друга, можно использовать такую величину:
$\Delta = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| f(x) - g(x) \right|$ называемую «равномерным», или максимальным, отклонением между графиками. Однако это не совсем точно характеризует взаимосвязь пары функций, ведь они могут идти очень близко, а затем удалиться на коротком интервале, а отклонение будет считаться большим. Например, как на чертеже:



Вместо этого можно рассматривать среднее значение модуля разности, и это уже более точная оценка.

$\Delta_2 = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$ - **среднее отклонение.**

Но чтобы посчитать интеграл от модуля, надо искать точки пересечения и разбивать интервал на части. Чтобы избежать этих громоздких вычислений, можно рассматривать такую величину:

$\Delta_3 = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx}$ **среднеквадратичное** отклонение между f и g. Когда среднее стремится к 0, то и среднеквадратичное тоже, и хотя они не прямо пропорциональны, но минимальное значение одной из этих величин достигается при тех же условиях, что и у другой.

Если домножить функции из системы на какие-то коэффициенты, то получится выражение $P_n = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$ **многочлен по ортогональной системе.**

Теорема. Среднеквадратичное отклонение между f и P_n минимально $\Leftrightarrow$коэффициенты $\alpha_i = c_i$ (совпадают с коэффициентами Фурье).

Доказательство. $\Delta_3 = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}$ минимально тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx$ минимально, так что мы можем рассмотреть просто интеграл от квадрата разности, то есть величину $(f-P_n, f-P_n)$. Во-первых, она по построениею больше или равна 0. Рассмотрим её подробнее:

$(f-P_n, f-P_n) = \left(f-\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i, f-\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right)$ применим свойства скалярного произведения, будет так:

$$\left(f, f\right)-2\left(f, \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right)+\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i, \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right) =$$

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}2a_i\left(f,\varphi_i\right)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_i a_j\left(\varphi_i,\varphi_j\right).$$

Но от двойной суммы где (n+1)^2 слагаемых, фактически остаётся только (n+1) так как при несовпадении номера, скалярные произведения 0, ведь это ортогональная система.

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}2a_i\left(f,\varphi_i\right)+\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\varphi_i,\varphi_i\right) = \|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}2a_i\left(f,\varphi_i\right)+\sum_{i=0}^{n}a_i\|\varphi_i\|^2$$

преобразуем 2-е слагаемое по формуле $c_n = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}2a_ic_i\|\varphi_i\|^2+\sum_{i=0}^{n}a_i\|\varphi_i\|^2$$ теперь прибавим и вычтем такое слагаемое, чтобы образовать разность квадратов:

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}2a_ic_i\|\varphi_i\|^2+\sum_{i=0}^{n}a_i\|\varphi_i\|^2+\sum_{i=0}^{n}c_i\|\varphi_i\|^2-\sum_{i=0}^{n}c_i\|\varphi_i\|^2 =$$

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}c_i\|\varphi_i\|^2+\sum_{i=0}^{n}(a_i-2a_ic_i+c_i)\|\varphi_i\|^2 =$$

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}c_i\|\varphi_i\|^2+\sum_{i=0}^{n}(a_i-c_i)^2\|\varphi_i\|^2 .$$

Это выражение минимально, когда разность (a_i-c_i) равна 0, то есть в точности, когда $a_i=c_i$ что и требовалось доказать.

Отсюда следует **неравенство Бесселя:** $\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}c_i\|\varphi_i\|^2\geq 0$

При $n\to\infty$ получается равенство $\|f\|^2=\sum_{i=0}^{n}c_i\|\varphi_i\|^2$, которое называется **уравнением замкнутости.**

Аналоги в векторных пространствах: если рассмотреть неполную сумму квадратов координат какого-то вектора, то очевидно, она меньше, чем квадрат его модуля. Так, для вектора из 3 координат $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2=|a|^2$, $\quad a_1{}^2+a_2{}^2<|a|^2$. Так и здесь, если рассматривать не всю систему функций, а всего лишь до номера n то получим неравенство, а если всю - то равенство.

Кстати, с помощью скалярных произведений и норм можно доказать аналог теоремы Пифагора для систем функций.
Если $x(t), y(t)$ ортогональные функции, то :

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y) = \|x\|^2+\|y\|^2$$

для векторов такое равенство означало,что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

ЛЕКЦИЯ № 14. 23.05.2017

Основная тригонометрическая система

Рассмотрим на отрезке $[-l,l]$ такую систему функций:

$$\left\{\frac{1}{2},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{\pi x}{l},\ldots,\sin\frac{n\pi x}{l},\cos\frac{n\pi x}{l},\ldots\right\}$$

Рассмотрим подробнее, какие у них периоды. Известно, что при умножении на коэффициент частота увеличивается, а соответственно период уменьшается.

Если $\sin x$ имеет период 2π, то $\sin\pi x$ имеет период 2,

$\sin\frac{\pi x}{l}$ имеет период $2l$, то есть как раз совершает одно колебание на $[-l,l]$. Впрочем, можно было бы рассматривать и на $[0,2l]$.

$\sin\frac{n\pi x}{l}$ имеет период $\frac{2l}{n}$, то есть для двух первых тригонометрических функций (не считая константы, конечно) на этом промежутке укладывается ровно одна волна, а для последующих - кратное число колебаний.

Докажем её ортогональность.

Константа ортогональна любой из функций этой системы, так как в интегралах $\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ и $\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ интегрируется функция, у которой целое количество периодов на данном отрезке, и такой интеграл равен 0.

Ортогональность всех остальных функций доказывается по формулам тригонометрии:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\right).$

$$\left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{m\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx =$$

$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx$ но так как $n \neq m$ (мы же взяли разные функции из системы) то будет $\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{k\pi x}{l} - \cos\frac{s\pi x}{l}\right)dx$ то есть разность интегралов, каждый из которых 0 в силу того, что там периодическая функция, у которой на промежутке укладывается целое число полных периодов.

Для двух косинусов аналогично: $\left(\cos\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{m\pi x}{l}\right) =$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0.$$

Для синуса и косинуса $\left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{m\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx =$

$$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(n-m)\pi x}{l} - \sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0\ .$$

А если умножать не разные функции, а одну и ту же, то получится квадрат нормы. Посчитаем квадраты норм всех функций:

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}2l = \frac{l}{2}.$$

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 - \cos\frac{n\pi x}{l}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}(2l - 0) = l\ .$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \left(\cos\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$=$

$$\frac{1}{2}\left(2l+0\right) = l .$$

Ряд Фурье: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l} + b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$

его коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Ряд Фурье с помощью синусов и косинусов разных частот осуществляет наилучшее приближении графика функции, в том смысле, что наименьшее среднеквадратичное отклонение. Для частичных сумм ряда, чем больше взято частот, тем более мелкие особенности графика будут учтены, и огибающая пройдёт ближе.

Докажем, что ряд Фурье имеет именно такое строение. Вспомним общую формулу $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$. У нас в данном случае квадрат нормы равен l для этой конкретной системы. Скалярное произведение определяется через интеграл. Поэтому $\dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ в этом случае имеет вид $\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$. Подробнее рассмотрим коэффициент a_0.

$$a_0 = \frac{1}{l/2}\int_{-l}^{l} f(x)\frac{1}{2}dx = \frac{2}{l}\frac{1}{2}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Свойства чётности и нечётности.

Если $f(x)$ чётная, то $b_n = 0$ и ряд состоит только из константы и косинусов. При вычислении $b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ в интеграле одна функция чётная, а синус нечётный, произведение нечётное. Интеграл от нечётной функции по симметричному отрезку равен 0. Аналогично, если $f(x)$ нечётная, то $a_n = 0$, ведь в интеграле $a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ одна нечётная вторая чётная, и интеграл получается от нечётной, по симметричному промежутку, и он равен 0.

Ряд Фурье более подробно учитывает поведение функции на всём протяжении промежутка, в отличие от ряда Тейлора, который учитывает производные только в одной точке.

Пример. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на интервале (-1,1).

$a_0 = \frac{1}{1}\int\limits_{-1}^{1}|x|dx = 2\int\limits_{0}^{1} xdx = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1$, при этом $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, кстати, это и есть средняя высотра графика.

$a_n = \int\limits_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx$, интегрируем по частям.

$u = x, u' = 1,\ \ v' = \cos(n\pi x),\ v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$.

$$2\int\limits_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx = 2\left(\left.\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int\limits_{0}^{1}\sin(n\pi x)dx\right) =$$

$$2\left((0-0) + \left.\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right|_0^1\right) = 2\frac{\cos(n\pi) - \cos 0}{n^2\pi^2} = 2\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

Обратите внимание, что $\cos(n\pi)$ равен $+1$ при чётных n и -1 при нечётных, поэтому совпадает с $(-1)^n$.

Коэффициенты $b_n = 0$ так как функция чётная. Итак, получаем ряд:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

Более подробная запись:

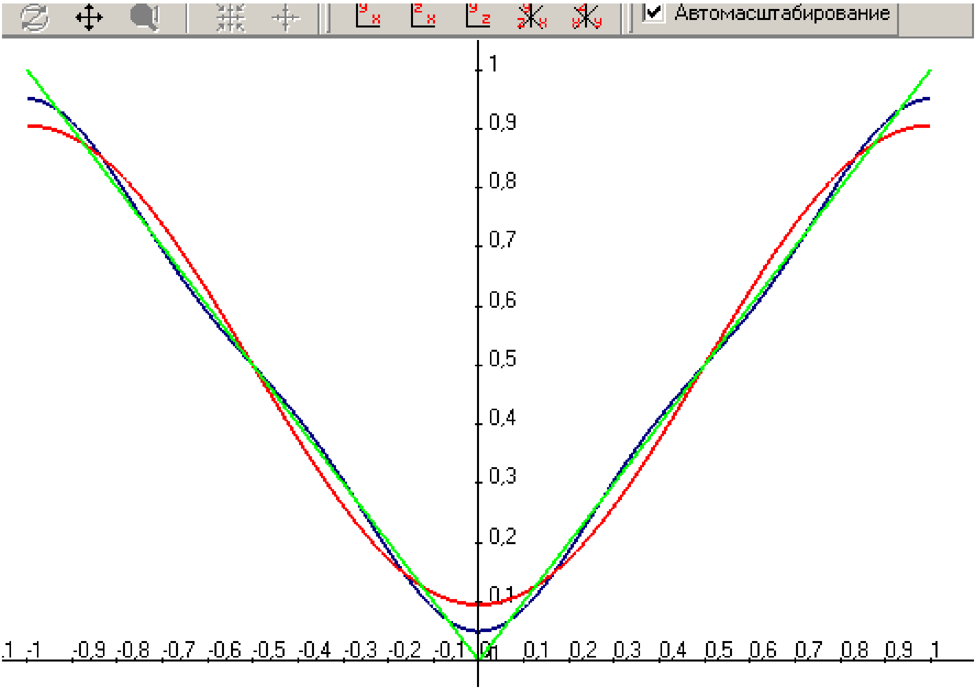
$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x-\frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x-\ldots$$

Графики:

Зелёным цветом показан график модуля,

красным частичная сумма $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$.

синим - частичная сумма $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x$.



Периодическое продолжение.

Мы ищем разложение функции в ряд на $[-l, l]$, однако функции sin и cos существуют на всей действительной оси. Таким образом, в каждой точке $x + 2l$ из интервала $[l,3l]$ они принимают точно такое же значение, как и в точке $x \in [-l, l]$. Таким образом, ряд Фурье сходится на $[l,3l]$ к точно такой же функции, как и на $[-l, l]$. То же самое будет на $[-3l,-l]$, и на $[3l,5l]$, и так далее. Получается, что сумма ряда Фурье это функция, определённая на всей числовой оси,

Поведение ряда в точках разрыва, теорема Дирихле.

Ряд Фурье в точке разрыва сходится к среднему арифметическому правостороннего и левостороннего пределов функции в этой точке:

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

Если точка разрыва на конце интервала, то $S(l)=\dfrac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}$.

Гармонический вид ряда Фурье.

Обозначим $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ тогда $\dfrac{a_n}{A_n}=\cos\varphi_n$, $\dfrac{b_n}{A_n}=\sin\varphi_n$.

Другими словами, если есть какие-то два числа a_n, b_n, то можно создать такой прямоугольный треугольник, что катеты будут именно такие по величине. Тогда $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ - гипотенуза.

Угол в этом треугольнике обозначим через φ_n.

В общем-то, это то же самое, что пересчитать в полярных координатах, A_n и φ_n это аналоги ρ и φ, исходные a_n, b_n аналоги x, y. Тогда ряд принимает вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\cos\varphi_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

по тригонометрической формуле $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ можно свести к выражению:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}-\varphi_n\right)$$

здесь A_n - амплитуда, $\dfrac{n\pi}{l}$ - частота, φ_n - фаза.

Как видим, сумма $a\cos x+b\sin x$ на самом деле представляет собой одно колебание, одну волну, с амплитудой $A=\sqrt{a^2+b^2}$.

Комплексный ряд Фурье.

Пусть $\varphi: R\to C$ комплексная функция действительного аргумента, то есть $\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$. Скалярное произведение комплекснозначных функций определено так: $(f,\varphi)=\int\limits_a^b f(x)\overline{\varphi}(x)dx$.

Вторая сопряжённая, т.к. только таким способом можно корректно ввести понятие нормы функции. Если по этому правилу умножать одну и ту же функцию, то $(f, f) = \int\limits_a^b f(x)\bar{f}(x)dx$ =

$\int\limits_a^b (f_1 + if_2)(f_1 - if_2)dx = \int\limits_a^b (f_1^{\ 2} + f_2^{\ 2})dx \geq 0$. Таким образом, существует корень квадратный из этой величины, $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Рассмотрим систему функций $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\}_{n \in Z}$ т.е. $\ldots, e^{-\frac{i\pi x}{l}}, 1, e^{\frac{i\pi x}{l}}, e^{\frac{i2\pi x}{l}}, \ldots$

причём при n = 0 получается именно $e^0 = 1$, т.е. константа автоматически находится в составе такой системы функций.

Докажем ортогональность системы $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\}$ и **вычислим квадраты норм** всех этих функций.

$\left(e^{\frac{in\pi x}{l}}, e^{\frac{im\pi x}{l}} \right) = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{im\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{i(n-m)\pi x}{l}} dx$, что при $n \neq m$ означает

$\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{ik\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} dx + i\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l} dx = 0 + 0i$ так как на отрезке $[-l, l]$ будет целое количество полных периодов этих тригонметрических функций.

Если вычислять это скалярное произведение при одном и том же номере n ,то мы получим этим самым квадраты норм этих функций.

$\left\| e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\|^2 = \left(e^{\frac{in\pi x}{l}}, e^{\frac{in\pi x}{l}} \right) = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{0i\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} e^0 dx = \int\limits_{-l}^{l} 1dx =$

$2l$. Квадраты норм равны $2l$.

Комплексный ряд Фурье. $f(x)=c_0+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$.

Где $c_0=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx$, $c_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx$.

Пример. Найти комплексный ряд Фурье для функции:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in(-1{,}0)\\ 1 & x\in(-01)\end{cases}$$

$$c_0=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx=\frac{1}{2}\ .\ c_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-in\pi x}dx=-\frac{1}{2in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_0^1=-\frac{e^{-in\pi}-e^0}{2in\pi}=$$

$$-\frac{\cos n\pi-i\sin n\pi-1}{2in\pi}=-\frac{\cos n\pi-1}{2in\pi}=-\frac{(-1)^n-1}{2in\pi}=\frac{1-(-1)^n}{2in\pi}$$

Ответ. $f(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2in\pi}e^{in\pi x}$

Кстати, если дальше преобразовать экспоненту в комплексной степени, то можно свести к обычному тригонометрическому ряду Фурье. Сделаем это. Объединим пары слагаемых при номерах $n,-n$.

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{2n\pi}e^{in\pi x}+\frac{1-(-1)^{-n}}{2(-n)\pi}e^{-in\pi x}\right)=$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\frac{1-(-1)^n}{2in\pi}(e^{in\pi x}-e^{-in\pi x})\right)=$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\frac{e^{in\pi x}-e^{-in\pi x}}{2i}\right)=$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin n\pi x.$$

ЛЕКЦИЯ № 15. 30.05.2017

Если записать подробнее комплексный ряд Фурье, т.е. внутри суммы подробно представить коэффициент, то получим:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx \right) e^{\frac{in\pi x}{l}} .$$

Обозначим частоту $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$. Приразение частоты от предыдущего к следующему номеру: $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l}$.

Разложение в ряд Фурье существует для функции на $[-l, l]$ для любого сколь угодно большого l. При этом период увеличивается, а частота уменьшается. Если представить что $l \to \infty$ то вся действительная ось представляет собой один большой период, при этом $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l} \to 0$.

Очевидно, что можно рассматривать тригонометрические функции с любым действительным коэффициентом, т.е. может ьыть не лискретный, а непрерывный набор частот синуса и косинуса.

Предельным переходом при $\Delta\omega_n \to 0$ сумма превращается в интеграл (как интегральные суммы в прошлых темах).

Интеграл Фурье $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) e^{i\omega x} d\omega$$

Промежуточная переменная u во внутренней части этого двойного интеграла пишется для того, чтобы отличать её от внешней переменной x. Но ведь можно коэффициент поделить поровну между внешним и внутренним интегралом,

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) e^{i\omega x} d\omega$. Та функция от ω, которая здесь в скобке, называется преобразованием Фурье:

Преобразование Фурье $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$

Когда мы не рассматриваем её в двойном интеграле, то можно x не заменять на новую переменную u.

Симметричность формул прямого и обратного преобразования Фурье:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad \text{и} \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(F(\omega)\right)e^{i\omega x}d\omega$$

Пример. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in(-\infty,0) \\ e^{-3x} & x\in(0,\infty)\end{cases}$$

Решение. Здесь на левой части действительной оси функция тождественно 0, так что интеграл только по правой части:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(3+i\omega)x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{3+i\omega}e^{-(3+i\omega)x}\Big|_0^{\infty} =$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{3+i\omega}(0-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(3+i\omega)}$. Можно ещё и домножить на сопряжённое, чтобы в знаменателе получить действительное выражение, тогда ответ: $F(\omega)=\frac{3-i\omega}{\sqrt{2\pi}(9+\omega^2)}$.

Дополнение.

Гиперкомплексные системы. Кватернионы. (краткий обзор).

Приложение 1. Вопросы на доказательства (для билетов).

Лекция № 1

1. Докажите формулу интегрирования по частям.

Лекция № 2

1. Доказать, что замена $t = \sqrt[r]{x}$, где r = НОК ($r_1,...,r_k$) сводит интеграл $\int f(x, \sqrt[r_1]{x}, \ldots, \sqrt[r_k]{x})dx$ к интегралу от рациональной дроби.

2. Доказать, что замена замена $t = \sqrt[r]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ сводит интеграл вида $\int f\left(\sqrt[r]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ к интегралу от рациональной дроби.

3. Вывести формулы преобразования синуса и косинуса

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ для универсальной тригонометрической замены $t = tg\dfrac{x}{2}$.

4. Доказать, что в случае, когда функция нечётна относительно косинуса, замена $t = \sin x$ сводит интеграл к рациональной дроби.

5. Доказать, что в случае, когда $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ замена: $t = tgx$ сводит интеграл к рациональной дроби.

6. Доказать, что для интеграла вида $\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ замена $x = a\sin t$ своит интеграл к рациональной дроби.

7. Доказать формулу $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

8. Доказать, что для интеграла вида $\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ замена $x = \dfrac{a}{\sin t}$ своит интеграл к рациональной дроби.

9. Доказать, что для интеграла вида $\int f\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$ замена $x = atgt$ сводит интеграл к рациональной дроби.

Лекция № 3

1. Доказать, что функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной от функции $f(x)$.

2. Доказать формулу Ньютона- Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

3. Доказать формулу длины явно заданной кривой:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

4. Доказать формулу длины кривой, заданной в полярных координатах $L = \int\limits_a^b \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\,d\varphi$

Лекция № 4

Докажите теорему: $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ сходится $\Leftrightarrow$ $a > 1$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^a}$ сходится $\Leftrightarrow a < 1$.

Лекция № 5

1. Вывести (доказать) формулу площади явно заданной поверхности

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\,dxdy.$$

2. Вывод формул перехода к полярным координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$.

3. Вывод определителя Якоби полярных координат $I = \rho$.

4. Вывод формул перехода к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

5. Вывод определителя Якоби цилиндрических координат $I = \rho$.

6. Вывод формул перехода к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \;. \\ \quad z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

Лекция № 6

1. Доказать, что замена $u = \dfrac{y}{x}$ сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.
2. Вывести общий вид решения линейного однородного уравнения.
3. Вывести общий вид решения линейного неоднородного уравнения методом Лагранжа.
4. Доказать, что замена $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ сводит уравнение Бернулли к линейному уравнению.

Лекция № 7.

1. Доказать, что замена $z = y^{(k)}$ понижает на k порядок уравнения $F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.
2. Доказать, что замена $y' = p(y)$ понижает на единицу порядок уравнения $F(y, y' ..., y^{(n)}) = 0$.
3. Доказать теорему: Функция e^{rx} является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\Leftrightarrow r$ есть характеристический корень.
4. Доказать теорему о том, что линейная комбинация решений линейного однородного дифф. уравнения тоже есть его решение.
5. Доказать теорему о наложении решений: Если y_1 - решение линейного неоднородного дифф.уравнения с правой частью $b_1(x)$, а y_2 - решение такого же дифф.уравнения, но с правой частью $b_2(x)$, то сумма $y_1 + y_2$ является решением уравнения с правой частью $b_1(x) + b_2(x)$.

Лекция № 8.

1. Доказать теорему о том, что система функций линейно-зависима $\Leftrightarrow W(x) \equiv 0$.

2. Доказать теорему о том, что существует n линейно-независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n.

3. Доказать, что если 0 является корнем кратности k, то система решений, соответствующих этому корню, имеет вид $\{1, x, ..., x^{k-1}\}$.

Лекция № 9.

1. Доказать с помощью показательной формы, что при умножении комплексных чисел модули умножаются, а аргументы складываются.

2. Доказать формулу Муавра для степени n
$z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

3. Доказать формулу корня порядка n комплексного числа
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

4. Доказать, что $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ и $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ являются обобщениями синуса и косинуса, т.е. для действительных чисел по этим формулам получится синус (косинус).

5. Доказать формулу логарифма комплексного числа:
$Ln(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$.

Лекция № 10

1. Доказать, что сходимость ряда эквивалентна сходимости его остатка.

2. Доказать расходимость гармонического ряда $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$

3. Доказать на примере ряда $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\ldots$,что закон коммутативности не выполняется в бесконечном случае.

4. Доказать необходимый признак сходимости.

5. Доказать интегральный признак Коши.

6. Доказать признак Даламбера в конечной форме.
7. Доказать признак Даламбера в предельной форме.
8. Доказать радикальный признак Коши в конечной форме.

Лекция № 11
1. Доказать признак Лейбница.
2. Доказать теорему Абеля. 1) Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке z_1, то он сходится в любой точке z, для которой $|z| < |z_1|$, причём абсолютно.
2) Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_1 то он расходится в любой точке, для которой $|z| > |z_1|$.
3. Доказать формулы радиуса сходимости степенного ряда.
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ и $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Лекция № 12.
Доказать теорему: Область сходимости ряда Лорана есть кольцо вида $r < |z - z_0| < R$.

Лекция № 13
1. Вывод формул коэффициента (Фурье) разложения по ортогональной системе: $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ или $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

2. Доказать теорему: Среднеквадратичное отклонение между f и P_n минимально $\Leftrightarrow$ коэффициенты $\alpha_i = c_i$ (совпадают с коэффициентами Фурье).
3. Доказать, что если $x(t), y(t)$ ортогональные функции, то :
$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Лекция № 14

1. Доказать ортогональность основной тригонометрической системы

$$\left\{\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, ..., \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, ...\right\}$$

и вычислить квадраты норм функций.

2. Доказать, что ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$ где его коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

3. Вывести гармонический вид записи ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right)$$

4. Доказать ортогональность системы $\left\{e^{\frac{in\pi x}{l}}\right\}$ и **вычислить квадраты норм** этих функций.

Приложение 2.
Мелкие и устные вопросы на знание теории (для коллоквиумов).

Лекция № 1
1. Что такое первообразная и неопределённый интеграл, чем они отличаются?
2. Объяснить, почему $F(x)+C$ тоже является первообразной.
3. Напишите формулу интегрирования по частям.
4. Какая замена требуется в интеграле вида $\int f\left(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}\right)dx$ и каким образом она устраняет корни?
5. Запишите вид разложения подынтегральной рациональной дроби на простейшие в случае, когда все корни различны и действительны.
6. Запишите вид разложения подынтегральной рациональной дроби на простейшие в случае, когда все корни действительны, и есть один кратный корень кратности k.

Лекция № 2.
1. Напишите, какое разложение рациональной дроби на простейшие в случае, когда в знаменателе есть множитель 2 степени с отрицательным дискриминантом.
2. Какая замена сводит интеграл $\int f(x, \sqrt[r_1]{x}, \ldots, \sqrt[r_k]{x})dx$ к рациональной дроби?
3. Что такие универсальная тригонометрическая подстановка?
4. Какие замены производятся в случаях, когда функция под знаком интеграла нечётна относительно синуса (косинуса) ?
5. Какие замены производятся в случае наличия в подынтегральной функции выражений $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, или $\sqrt{x^2+a^2}$.

Лекция № 3.
1. Определение определённого интеграла.
2. Перечислите некоторые из основных свойств определённого интеграла.
3. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
4. Напишите формулу объёма тела вращения.

5. Напишите формулу длины явно заданной кривой.
6. Напишите формулу длины параметрически заданной кривой.

Лекция № 4.
1. Определение несобственного интеграла (с помощью предела).
2. Чем отличаются несобственные интегралы 1 и 2 рода.
3. Приведите простые примеры сходящихся интегралов 1 и 2 рода.
4. При каких a сходятся интегралы $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^a}$ $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^a}$ (Т1).
5. Как сходимость связана с конечным пределом первообразной (Т2)
6. Что такое необходимый признак сходимости, его формулировка.
7. Признак сравнения в конечной форме
8. Признак сравнения в предельной форме.
9. Определение кратного интеграла.

Лекция № 5.
1. Смена порядка интегрирования, показать на простейшем примере.
2. Напишите формулу площади поверхности.
3. Что такое полярные координаты, напишите формулы перехода.
4. Чему равен якобиан полярной системы координат?
5. Что такое цилиндрические и сферические координаты, в чём их отличие.
6. Чему равен якобиан цилиндрических (сферических) координат.

Лекция № 6.
1. Что такое дифференциальное уравнение 1 порядка (общий вид).
2. Что такое дифференциальное уравнение 1 порядка, разрешённое относительно производной. Приведите какой-нибудь пример.
3. Что такое уравнение с разделяющимися переменными.
4. Что такое общее, частное решение, условия Коши.
5. Что такое однородное уравнение, каков общий метод его решения.
6. Что такое линейное уравнение, в чём состоит алгоритм его решения, что такое метод Лагранжа.
7. Что такое уравнение Бернулли, алгоритм его решения.

Лекция № 7.

1. Какая замена необходима для уравнения вида $F(x, y^{(k)},..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

2. Какая замена необходима для уравнения вида $F(y, y'..., y^{(n)}) = 0$.

3. Покажите на примерах, как можно выразить y' в виде $p(y)$.

4. Что такое линейное дифференциальное уравнение порядка n.

5. Что такое характеристический многочлен, характеристическое уравнение.

6. Сформулировать теорему о том, при каком r функция e^{rx} является решением линейного однородного дифференциального уравнения.

7. Сформулировать теорему о том, что линейная комбинация решений линейного однородного уравнения тоже есть его решение.

8. Сформулировать теорему о наложении решений и следствия из неё.

9. Что такое линейно-зависимая и линейно-независимая системы функций, привести какие-нибудь примеры.

10. Что такое определитель Вронского системы из n функций, приведите пример определителя Вронского для ЛЗС и ЛНС систем.

Лекция № 8.

1. Каким свойством обладает определитель Вронского, если система функция линейно-завимима.

2. Сколько существует линейно-независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n.

3. Определение ФСР (фундаментальной системы решений) линейного однородного уравнения порядка n.

4. Сколько функций содержится в ФСР ?

5. Запишите вид системы уравнений для нахождения $C_i'(x)$ методом Лагранжа при n=2.

6. Запишите вид частного решения в случае, когда $b(x) = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$.

7. Что такое линейная система дифференциальных уравнений, напишите какой-нибудь пример.

8. Что такое автономная система дифференциальных уравнений.

9. Физический смысл системы дифференциальных уравнений.

10. Запишите, из каких функций состоит ФСР системы уравнений, если известны собственные числа и собственные векторы основной матрицы этой системы.

Лекция № 9.
1. Что такое мнимая единица.
2. Что такое сопряжённое число и что получится при его умножении на исходное.
3. Что такое тригонометрическая, показательная форма комплексного числа.
4. Напишите формулу Эйлера.
5. Что такое модуль, аргумент комплексного числа.
6. что происходит с модулями и аргументами при умножении (делении).
7. Напишите формулу Муавра для степени n.
8. Напишите формулу корня порядка n.
9. Напишите формулы обобщённых синуса и косинуса для комплексного аргумента.
10. Напишите формулу логарифма комплексного числа.

Лекция № 10
Что такое числовой ряд,его частичная сумма и остаток. Определение сходящегося ряда. Что такое абсолютная, условная сходимость.
Сформулировать необходимый признак сходимости.
Сформулировать интегральный признак Коши.
Сформулировать признак Даламбера в конечной форме.
Сформулировать признак Даламбера в предельной форме.
Сформулировать радикальный признак Коши в конечной форме.
Сформулировать радикальный признак Коши в предельной форме.

Лекция № 11
1. Сформулировать признак сравнения в конечной форме
2. Сформулировать признак сравнения в предельной форме
3. Сформулировать признак Лейбница
4. Определение области сходимости функционального ряда.
5. Запишите общий вид степенного ряда.

6. Сформулировать теорему Абеля об области сходимости степенного ряда.
7. Написать формулы радиуса сходимости степенного ряда.

Лекция № 12.

Запишите общий вид ряда Тейлора.

Как найти разложение в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии.

Как решить дифференциальное уравнение с помощью степенного ряда.

Что такое ряд Лорана, главная, правильная часть.

Сформулировать теорему об области сходимостя ряда Лорана.

Лекция № 13

Что такое скалярное произведение функкий, норма функции.Приведите пример.

Что такое ортогональные фнукции, ортогональная система функций.

Что такое среднее и среднеквадратичное отклонение.

Напишите вид коэффициента Фцрье по произвольной ортогональной системе.

Лекция № 14

Что такое основная тригонометрическая система?

Что такое периодическое продолжение?

К чему сходится ряд Фурье в точке разрыва?

Какие коэффициенты равны 0 в ряде Фурье в случае чётности либо нечётности функции?

Как вводится скалярное умножение комплекснозначных функций?

Лекция № 15

Что такое интеграл Фурье и преобразование Фурье, запишите формулы.

Приложение 3. Задачи из лекций.

Лекция № 1

Пример. $\int \cos^2 x dx$. **Пример.** $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx$.

Пример. $\int \sin^2 x \cos x dx$. **Пример.** $\int x e^x dx$.

Пример. $\int x \cos x dx$ **Пример.** $\int \ln x dx$.

Пример. $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx$. **Пример.** $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)} dx$.

Лекция № 2

Пример. $\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)} dx$. **Пример.** $\int \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Пример. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$. **Пример.** $\int \cos^3 x dx$.

Пример. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$. **Пример.** $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Лекция № 3 $\int_0^1 x dx$, $\int_0^1 x^2 dx$, $\int_1^2 x^2 dx$, $\int_0^\pi \sin x dx$, $\int_0^\pi \cos x dx$.

Пример. Вычислить $\int_0^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\{y=0, y=x^3, y=2-x\}$.

Пример. Вывести формулу объёма шара $V=\frac{4}{3}\pi\ R^3$.

Лекция № 4

Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Выяснить сходимость: $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2 \ln x}$, $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$.

Вычислить $\iint\limits_D (xy)dxdy$, где D есть квадрат: $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$.

Вычислить $\iint\limits_D (x^2 y)dxdy$, D треугольник с вершинами (0,0), (1,0), (1,1).

Лекция № 5.

Пример. Сменить порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$.

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D xyzdxdydz$ где D куб $x, y, z \in [0,1]$.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xy^2 dxdy$ где D - четверть круга единичного радиуса в первой четверти плоскости.

Пример. Доказать формулу площади круга $S = \pi R^2$ с помощью полярных координат.

Пример. С помощью сферических координат вывести формулу объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Лекция № 6.

Пример. Решить дифф. уравнение $y' = y$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x}$.

Пример. Решить уравнение $y' - 2y = 0$.

Пример. Решить уравнение $y' + xy = 0$.

Пример. Решить линейное уравнение $y' - 2y = e^{5x}$.

Лекция № 7.

Пример. Решить уравнение 2 порядка $xy'' = y'$.

Пример. Решить уравнение 3 порядка $xy''' = y''$.

Пример. Решить уравнение $y'' = -y$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Лекция № 8.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных).

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ методом неопределённых коэффициентов (по виду правой части).

Пример. Решить систему $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -6x + 4y \end{cases}$ с помощью сведения системы к одному уравнению.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -6x + 4y \end{cases}$ с помощью собственных чисел и векторов.

Лекция № 9.

Пример. Умножить $(1+i)(2+i)$.

Пример. Вычислить $\dfrac{2+i}{1+i}$.

Пример. Решить уравнение $x^2 + x + 1 = 0$, найти комплексные корни.

Примеры. Записать в тригонометрической и показательной формах число $1+i$, число i.

Пример. Поделить $\dfrac{i}{1+i}$ в показательной форме.

Пример. Найти $(1+i)^8$ по формуле Муавра.

Пример. Найдите все значения корня $\sqrt[3]{8i}$.

Лекция № 10

Пример. Разложить в сумму действительной и мнимой части функцию: $f(z) = z^2$.

Пример. Разложить в сумму действительной и мнимой части функцию: $f(z) = e^z$.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Пример. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Лекция № 11. **Пример.** Выяснить сходимость $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln n}$.

Пример. Выяснить, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 2}$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$.

Пример. Найти радиус и область сх. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n}$.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Лекция № 12.

Пример. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ в степенной ряд (ряд Тейлора).

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии: $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ по степеням z, то есть в круге с центром 0.

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии: $f(z)=\dfrac{1}{2+z}$ по степеням z.

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии $f(z)=\dfrac{1}{3+z}$ по степеням $(z-1)$, то есть в круге с центром в точке 1.

Пример. Найти $f^{(10)}(0)$ для $f(x)=x^3\sin x$.

Пример. $y'=y$ решить с помощью степенных рядов.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y''=-y$ с помощью степенных рядов.

Пример. Найти кольцо сх ряда Лорана $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{5^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n(z-1)^n}$.

Лекция № 13

Пример. Разложить функцию $\dfrac{1}{(z+2)(z+3)}$:

а) в ряд Лорана в кольце $2<|z|<3$

б) во внешней области $|z|>3$

в) в ряд Тейлора в круге $|z|<2$.

Пример. Разложить $\dfrac{1}{(z+2)(z+3)}$ в ряд Лорана по степеням $z-1$.

Пример. Найти скалярное произведение $f(x)=x$ и $g(x)=x^2$ на интервале (0,1).

Пример. Доказать, что функции $f=\sin x$, $g=\cos x$ ортогональны на интервале $(0,\pi)$.

Лекция № 14

Пример. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на интервале (-1,1).

Пример. Найти комплексный ряд Фурье для функции:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1{,}0) \\ 1 & x \in (-01) \end{cases}$$

Лекция № 15

Пример. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-3x} & x \in (-0, \infty) \end{cases}$$

Литература.

1. Л.И.Магазинников, А.Л. Магазинникова. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Учебное пособие http://edu.tusur.ru/publications/2244

2. Л.И.Магазинников, А.Л.Магазинников. Дифференциальное исчисление. Учебное пособие http://edu.tusur.ru/publications/2246

3. А.А.Ельцов, Т.А.Ельцова. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения http://edu.tusur.ru/publications/2259

4. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования http://edu.tusur.ru/publications/2258