Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

В.А. Семиглазов

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие по направлению
43.03.01 «Сервис» Профиль «Информационный сервис»

Томск 2017

Компьютерное моделирование управленческих решений: Учебное пособие / Семиглазов В.А. – Томск, Кафедра ТУ, ТУСУР, 2017г. – 59 с.

Рассматриваются методы и алгоритмы практического решения типовых управленческих задач основных классов. Описываются теоретические основы и практические особенности постановки и решения соответствующих задач. Для типовых задач оптимизации предлагаются насколько способов их решения. Курс содержит методическую основу для теоретической проработки материала для студентов направления 43.03.01 Информационный сервис.

Оглавление

Введение

В.1 Предисловие

Курс посвящен рассмотрению основ теории и практики решения задач оптимизации в среде электронных таблиц MS Excel. Насколько актуальна необходимость изучения задач оптимизации, разработки методов и программ их решения при ведении современного бизнеса, когда зачастую проблемы планирования и внутрифирменного управления отступают на второй план по сравнению с юридическими и административными?

С одной стороны, можно было бы упомянуть известное утверждение о том, что вся история человечества неразрывно связана с явным или неявным решением задач оптимизации. С другой стороны, часто отмечают и бытовой контекст принятия оптимальных решений. Действительно, кто из читателей хотя бы раз не задавал себе вопроса о том, как с максимальной для себя пользой потратить некую сумму имеющуюся в его распоряжении? Или как побывать в нескольких точках города, затратив на это минимальное время? Наконец, существуют прагматический интерес изучения данной тематики, когда студентам нужно подготовить и сдать соответствующую курсовую работу или домашнее задание.

При составлении плана оптимального использования семейного бюджета на текущий месяц большинство из нас поступают на основе здравого смысла или в лучшем случае ограничиваются листом бумаги и ручкой. В несколько более сложных ситуациях может потребоваться калькулятор. Однако уже при планировании работы предприятия мелкого или среднего бизнеса калькулятора оказывается недостаточно. Требуется что-то еще, о чем современные менеджеры стараются не задумываться, поскольку для многих из них оперативность принятия решения оказывается важнее точности оптимального решения. Как в этой связи не вспомнить известный совет: "Всегда довольствуйтесь третьим по качеству решением, ибо второе приходит слишком поздно, а лучшее не приходит никогда".

Тем самым суть проблемы смещается в иную плоскость— если имеются средства выполнения быстрых расчетов для получения оптимальных решений, то почему бы ими не воспользоваться? Ведь опыт развития современной экономики неизменно свидетельствует, что умение эффективно расходовать имеющиеся ресурсы является одним из решающих факторов конкурентных преимуществ в любой сфере бизнеса. И в этом кроется один из важнейших потенциалов выживания современных фирм и компаний.

В.2 Пример использования надстройки Поиск решений в MS Excel

Оптимизация значений таблицы Excel, удовлетворяющих определенным критериям, может быть сложным процессом. К счастью, Microsoft предлагает надстройку Решение проблем для численной оптимизации. Хотя данный сервис не может решить всех проблем, он может быть полезным в качестве инструмента что-если. Данный пост посвящен надстройке Решение проблем в Excel.

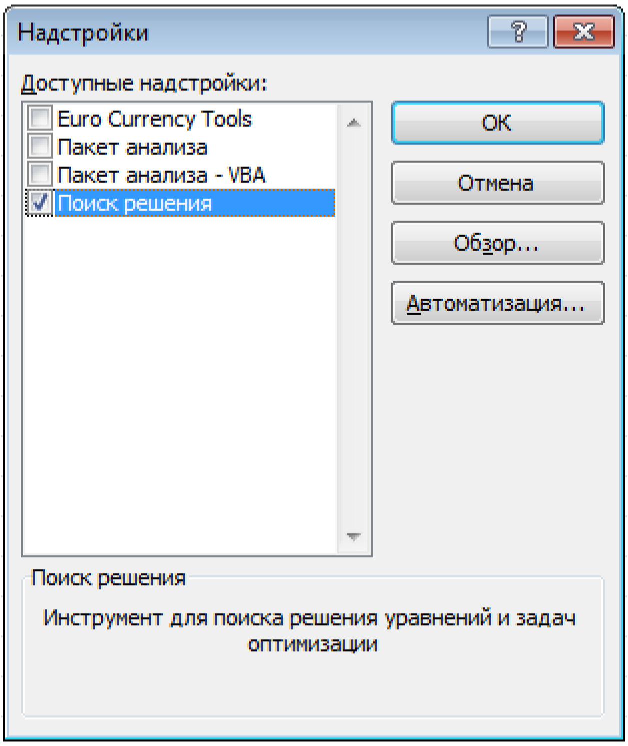
Надстройка Решение проблем доступна во всех версиях Excel. Обратите внимание, что скриншоты могут не соответствовать вашей версии. Несмотря на то, что некоторые функции могут менять свое местоположение в зависимости от версии надстройки, функционал остается практически неизменным.

Что такое Поиск решений

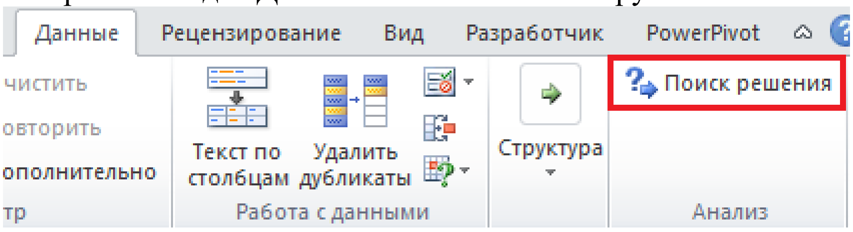
Поиск решений – надстройка Excel, которая помогает найти решение с помощью изменения значений целевых ячеек. Целью может быть минимизация, максимизация или достижение некоторого целевого значения. Проблема решается путем регулировки входных критериев или ограничений, определенных пользователем.

Где в Excel поиск решений

Надстройка Поиск решений поставляется вместе с Excel, но по умолчанию отключена. Чтобы включить его, перейдите по вкладке Файл в группу Параметры. В появившемся диалоговом окнеПараметры, выберите Надстройки -> Управление: Надстройки Excel -> Перейти. В окне Надстройки устанавливаем галочку напротив поля Поиск решения, жмем ОК.



Теперь во вкладке Данные появилась новая группа Анализ с кнопкой Поиск решения.



Пример использования Поиска решения

Данный пост основан на примере использования Надстройки Поиск решения. Файл совместим со всеми версиями Excel.

Определение проблемы

Предположим, что у нас есть набор данных, состоящий из 8 пунктов, каждому из которых соответствует свое значение.

	A	B
1	**Пункт**	**Значение**
2	A	1
3	B	2
4	C	3
5	D	4
6	E	5
7	F	6
8	G	7
9	H	8

… и нам необходимо скомбинировать значения в две группы так, чтобы суммы значений этих групп примерно совпадали.

Для начала требуется определить каждый пункт к какой-нибудь группе.

	A	B	C	D
1	Пункт	Значение	Группа A	Группа B
2	A	1	0	0
3	B	2	0	0
4	C	3	0	0
5	D	4	0	0
6	E	5	0	0
7	F	6	0	0
8	G	7	0	0
9	H	8	0	0

Чтобы указать привязанность пункта к группе, будем помечать их единицей (1), в противном случае нулем (0).

В следующем столбце мы будем суммировать значения каждого пункта в группе, и затем подведем итог в конце столбца.

	A	B	C	D	E
1	Пункт	Значение	Группа A	Группа B	Итого
2	A	1	0	0	=C2+D2
3	B	2	0	0	=C3+D3
4	C	3	0	0	=C4+D4
5	D	4	0	0	=C5+D5
6	E	5	0	0	=C6+D6
7	F	6	0	0	=C7+D7
8	G	7	0	0	=C8+D8
9	H	8	0	0	=C9+D9
10					=СУММ(E2:E9)

Нам также необходимо обработать значение каждого пункта в каждой группе, для этого умножаем значение пункта на значение группы, соответствующее этому пункту.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Пункт	Значение	Группа A	Группа B	Итого	Сумма A	Сумма B
2	A	1	0	0	=C2+D2	=$B2*C2	=$B2*D2
3	B	2	0	0	=C3+D3	=$B3*C3	=$B3*D3
4	C	3	0	0	=C4+D4	=$B4*C4	=$B4*D4
5	D	4	0	0	=C5+D5	=$B5*C5	=$B5*D5
6	E	5	0	0	=C6+D6	=$B6*C6	=$B6*D6
7	F	6	0	0	=C7+D7	=$B7*C7	=$B7*D7
8	G	7	0	0	=C8+D8	=$B8*C8	=$B8*D8
9	H	8	0	0	=C9+D9	=$B9*C9	=$B9*D9

Наконец, нам необходимо свести сумму групп и работать с разницей между ними.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Пункт	Значение	Группа А	Группа В	Итого	Сумма А	Сумма В
2	A	1	0	0	=C2+D2	=$B2*C2	=$B2*D2
3	B	2	0	0	=C3+D3	=$B3*C3	=$B3*D3
4	C	3	0	0	=C4+D4	=$B4*C4	=$B4*D4
5	D	4	0	0	=C5+D5	=$B5*C5	=$B5*D5
6	E	5	0	0	=C6+D6	=$B6*C6	=$B6*D6
7	F	6	0	0	=C7+D7	=$B7*C7	=$B7*D7
8	G	7	0	0	=C8+D8	=$B8*C8	=$B8*D8
9	H	8	0	0	=C9+D9	=$B9*C9	=$B9*D9
10					=СУММ(E2:E9)	=СУММ(F2:F9)	=СУММ(G2:G9)
11							=G10-F10

Наша задача минимизировать разницу между суммами групп.

Теперь мы можем присвоить каждой группе пункты, для этого вручную проставляем единицы в столбцах C и D. Excel отобразит разницу сумм групп в ячейке G11.

Для большей наглядности я добавил условное форматирование для ячеек, имеющих значение >0.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Пункт	Значение	Группа А	Группа В	Итого	Сумма А	Сумма В
2	A	1	1	0	1	1	0
3	B	2	0	1	1	0	2
4	C	3	0	1	1	0	3
5	D	4	1	0	1	4	0
6	E	5	1	0	1	5	0
7	F	6	0	1	1	0	6
8	G	7	0	1	1	0	7
9	H	8	0	1	1	0	8
10					8	10	26
11							16

Проблема в том, что количество возможных комбинаций 28, т.е. 256 вероятных ответов на вопрос. Если на каждый из них тратить по 5 секунд, это займет у нас 21,3 минуты, предполагая, что мы сможем выдержать темп и запомнить лучшую комбинацию.

Вот где Поиск решения находит применение.

Поиск оптимального решения в Excel

Чтобы применить сервис Поиск решения, нам необходимо определить ряд требований, правил и ограничений, которые позволят надстройке найти правильный ответ.

Наши правила

Наше основное требование – это минимизировать разницу между двумя группами. В нашем примере она находится в ячейке G11 – Группа В минус Группа А. Нам нужно, чтобы значение в ячейке G11 было настолько малым насколько это возможно, но больше или равно 0.

Мы также знаем, что пункт может находиться либо в Группе А, либо в Группе В, к тому он не может быть дробным. Таким образом у нас два ограничения для каждого элемента:

Во-первых: Значение элемента в колонке Итог должна равняться единице.

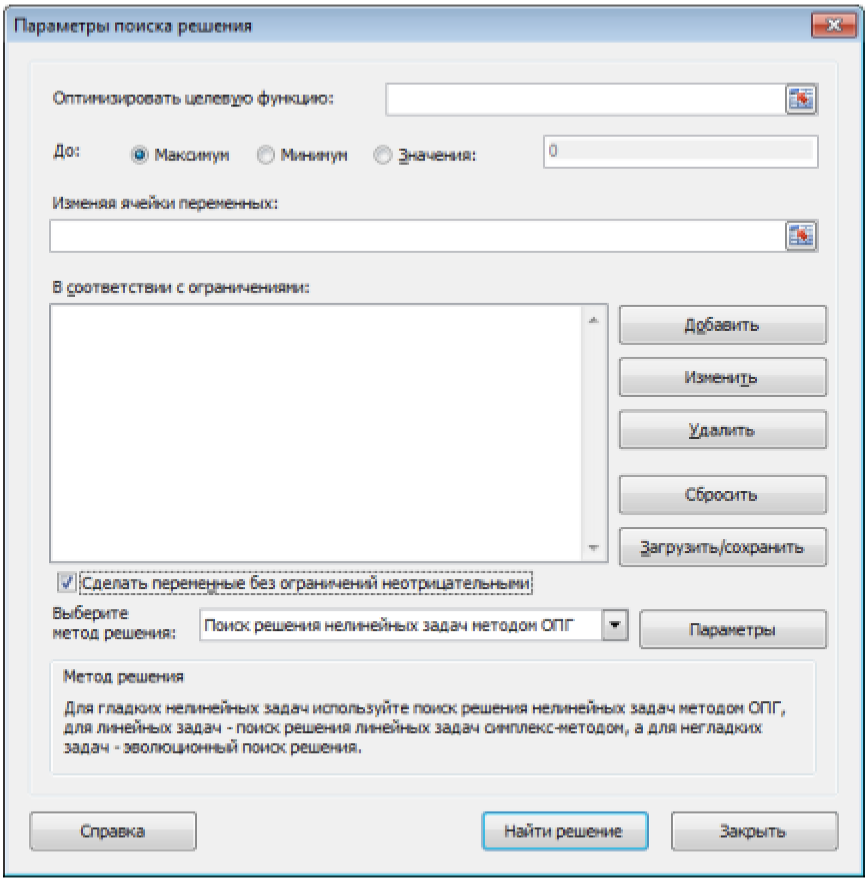
Во-вторых: Значения элементов в группах должны быть целыми.

Мы также знаем, что общее количество элементов 8, это еще одно ограничение. Как использовать эти ограничения мы обсудим в следующем разделе.

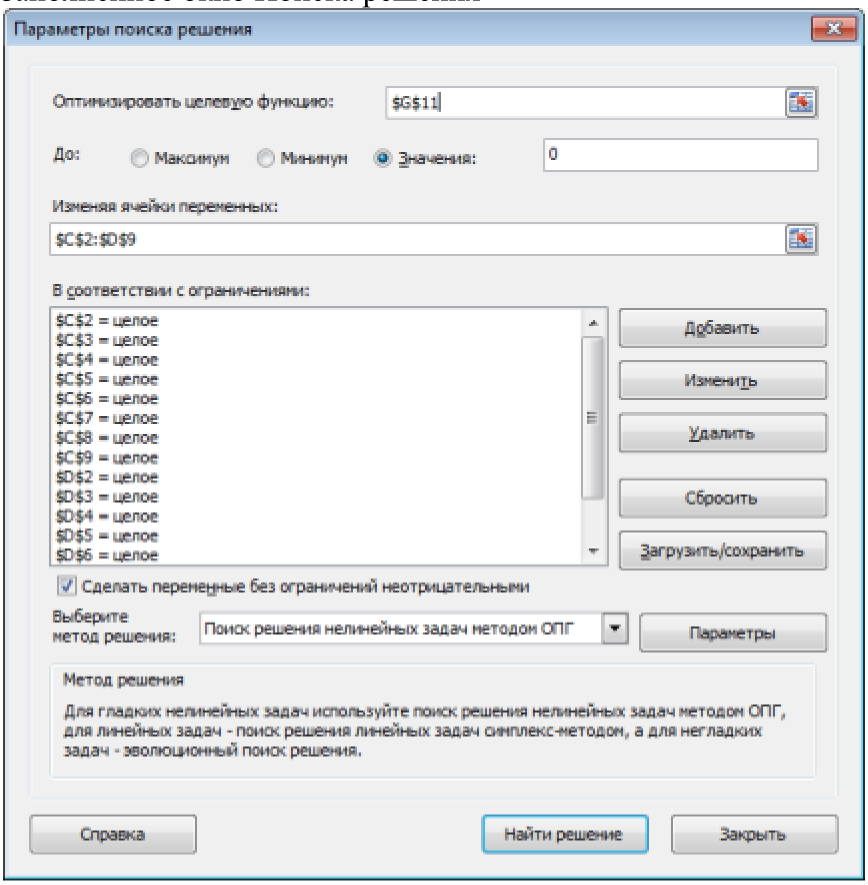
Диалоговое окно Поиска решения

В этом разделе описано окно надстройки Поиск решения и его использования для определения проблемы.

Пустое окно Поиска решения



Заполненное окно Поиска решения



Оптимизировать целевую функцию

Это целевая ячейка, в которой мы пытаемся решить проблему. Наша целевая ячейка G11 – разница в группах.

До

Здесь мы указываем, каких результатов хотим добиться от целевой функции.

Мы хотим, чтобы суммы обоих групп совпадали, т.е. чтобы разница сумм была равна 0. Это может показаться странным, но нам не требуется минимизировать разницу, потому что при этом все элементы будут помещены в Группу А, что приведет к значению ячейки G11 меньше нуля.

Другой способ наложения ограничения – изменить G11 на =ABS(G10-F10). При этом мы сможем установить маркер на Минимум, как результат достижения целевой функции.

Но пока мы остановимся на формуле =G10-F10 и установим маркер в значение равным 0.

Изменяя ячейки переменных

Изменяемые ячейки – ячейки, которые надстройка попытается изменить, чтобы решить задачу. В нашем случае это привязка элемента к конкретной группе: $C$2:$D$9.

В соответствии с ограничениями

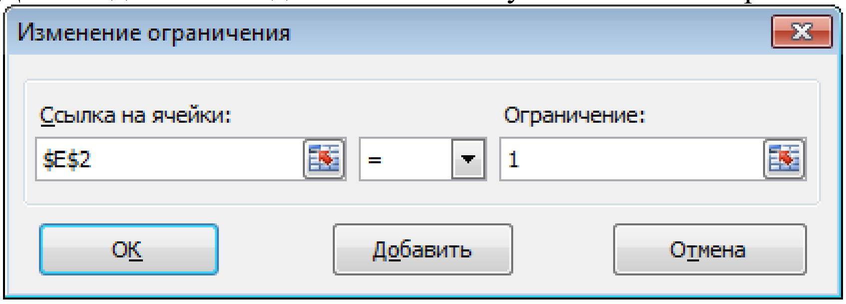
Ограничения – это правила, которые лимитируют возможные решения проблемы.

Нам необходимо добавить несколько ограничений в наш список:

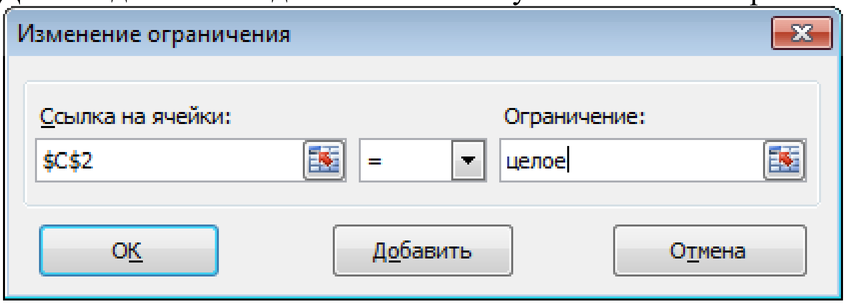
1. В колонке Итого каждый элемент должен равняться 1
2. Элементы групп должны быть целым числом
3. Сумма значений столбца Итого должна равняться 8

Чтобы наложить ограничения, жмем кнопку Добавить

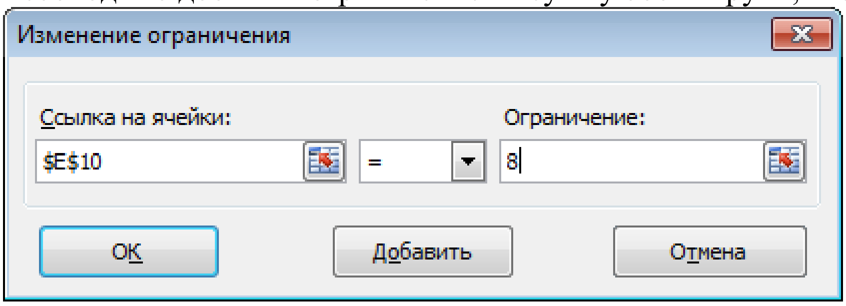
Для каждой ячейки диапазона E2:E9 устанавливаем ограничение значения равным 1.



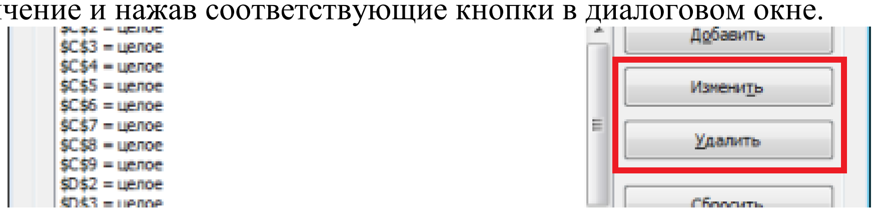
Для каждой ячейки диапазона C2:D9 устанавливаем ограничение значение целое число.



Необходимо добавить ограничение на сумму обоих групп, ячейка E10 = 8.

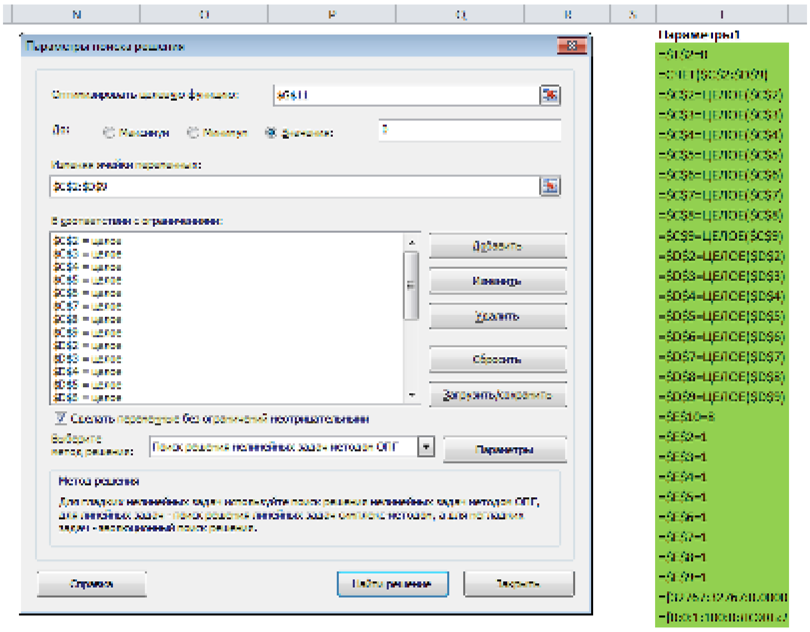


Вы можете Изменить или Удалить ограничение, если допустили ошибку, выбрав конкретное ограничение и нажав соответствующие кнопки в диалоговом окне.



Загрузить/сохранить параметры поиска решений

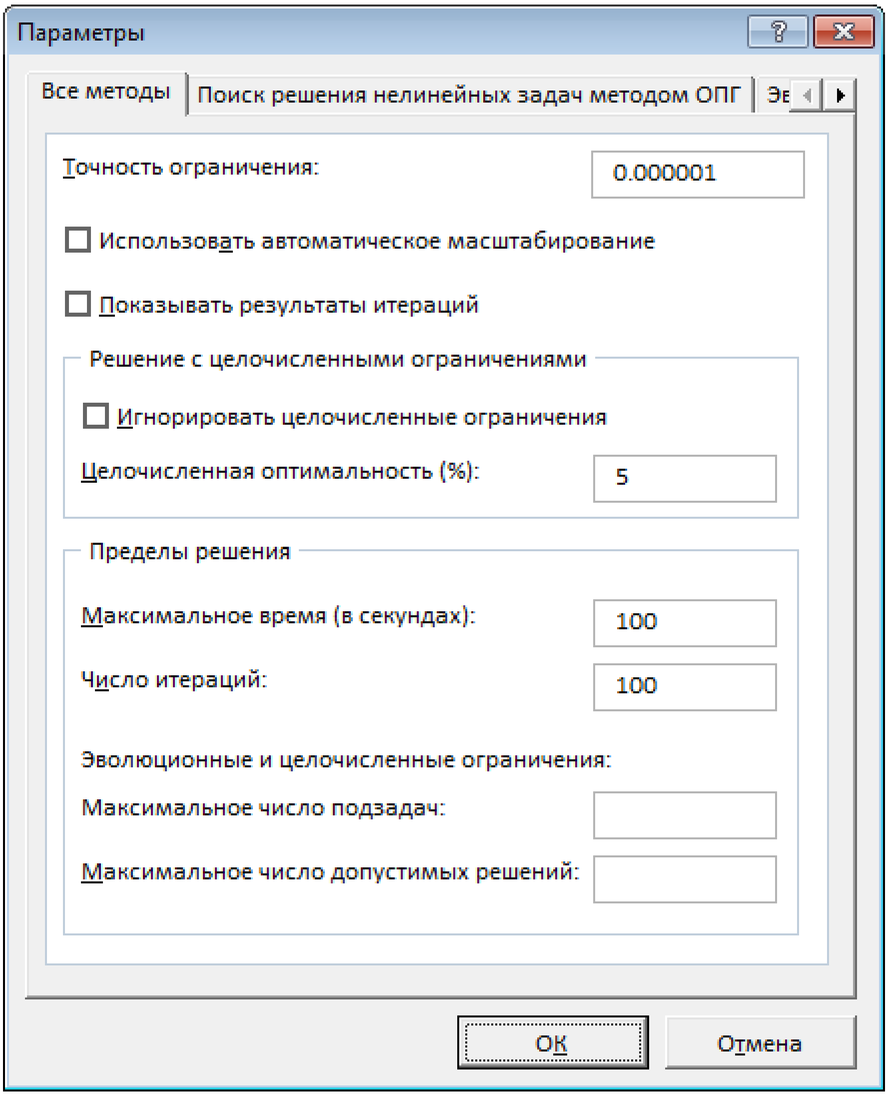
Сервис поиска решений позволяет сохранять и загружать параметры надстройки. Для этого в окне существует кнопка Загрузить/сохранить. Параметры модели сохраняются в диапазон, который вы указали ранее. Данный подход позволяет быстро настраивать и изменять параметры Поиска решения.



Запуск поиска оптимального решения в Excel

Предупреждение!!! Надстройка поиск решения является сложной вычислительной надстройкой, поэтому перед запуском сохраните рабочую книгу.

Прежде чем запустить модель, необходимо задать еще несколько параметров, чтобы убедиться, что сервис отработает корректно. В основном диалоговом окне убедитесь, что стоит маркер напротив поля Сделать переменные без ограничений неотрицательными. В этом же окне нажмите кнопку Параметры.



Два параметра, которые необходимо будет менять время от времени:

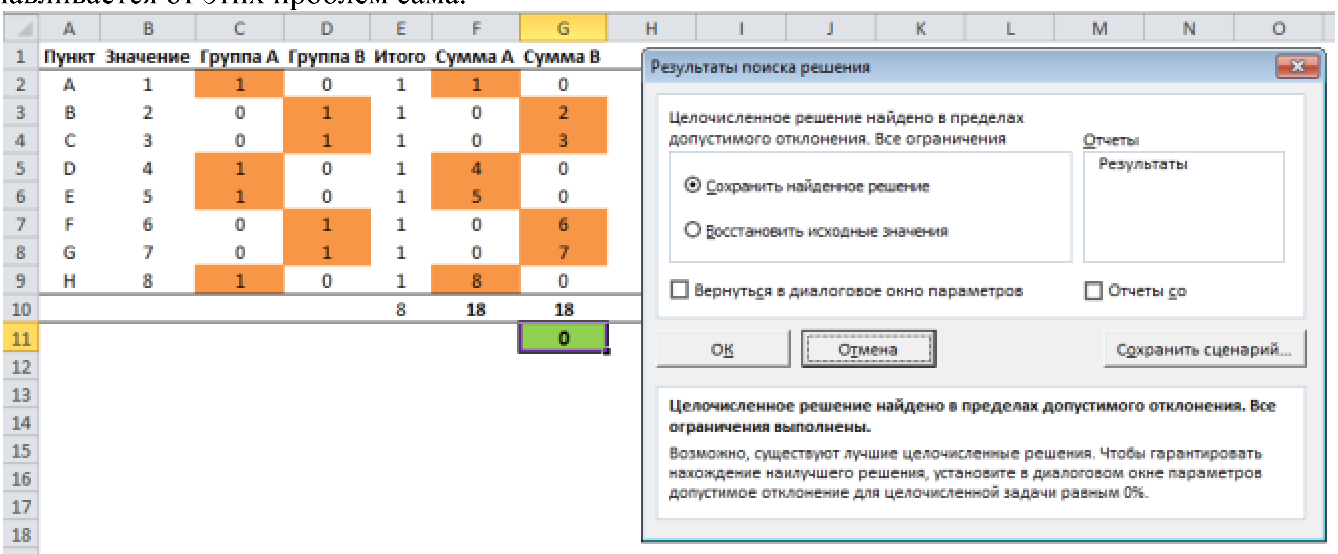
Точность ограничения: значение от 0 до 1, где, чем больше цифра, тем больше ограничение

Целочисленная оптимальность: показывает насколько далеко от целого числа ограничение имеет право быть.

Запуск модели

Чтобы запустить надстройку нажмите кнопку Найти решение в основном окне.

В строке состояния вы увидите ряд статических данных, которые будут отображать внутреннюю работу надстройки. Как правило, они быстро меняются, и читать их сложно. Если модель сложная, то работа может остановится на некоторое время, надстройка обычно восстанавливается от этих проблем сама.



После того, как Поиск решения закончит свою работу, Excel отобразит диалоговое окно Результаты поиска решения с некоторой информацией. Первое, на что стоит обратить внимание – это надпись Решение найдено в пределах допустимого отклонения. Если решение найдено, ячейки рабочей книги изменятся с предложенным решением.

Теперь у вас есть 4 варианта на выбор:

— Запустить отчет

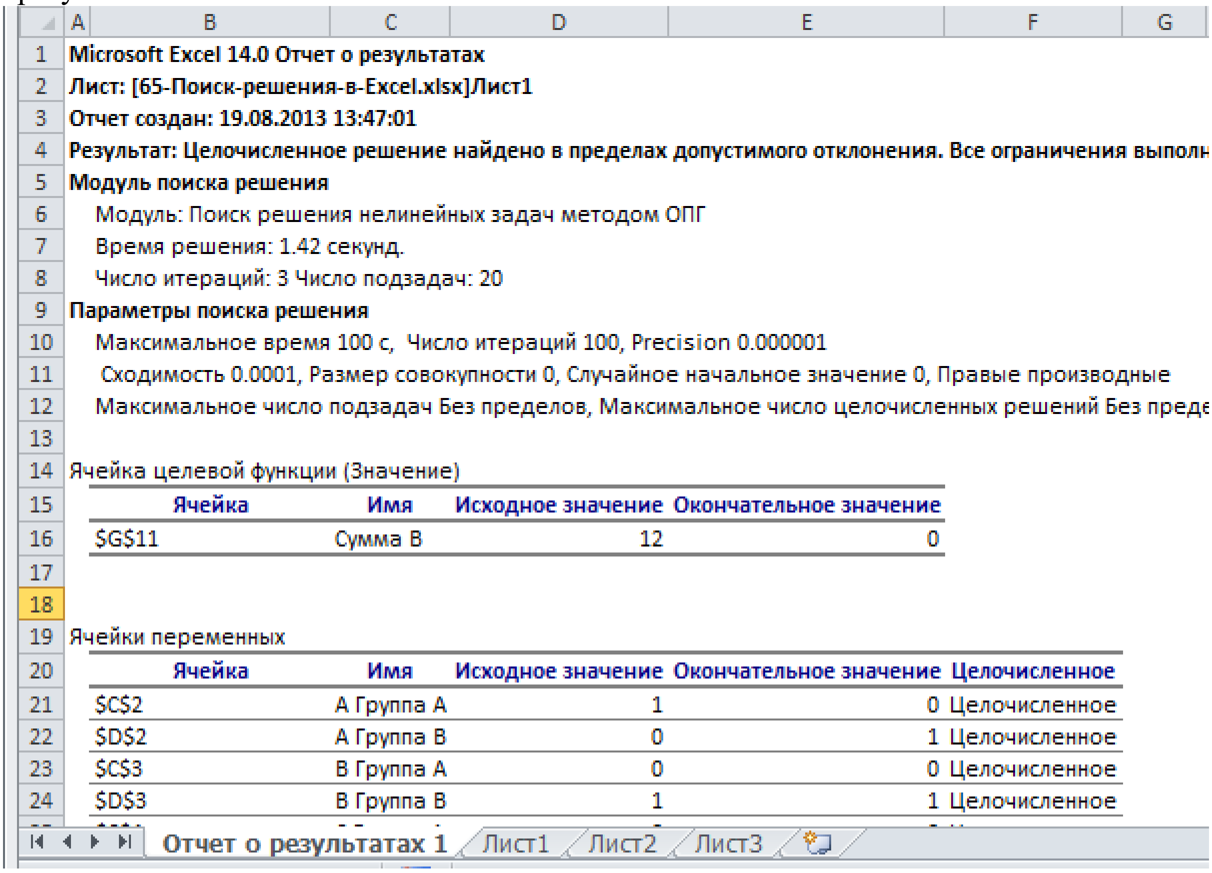
— Сохранить сценарий

— Восстановить исходные значения

— Сохранить найденное решение

Запустить отчет

Вы можете создать отчет, выбрав доступные из списка отчетов. Будет создан новый лист Отчет о результатах1.

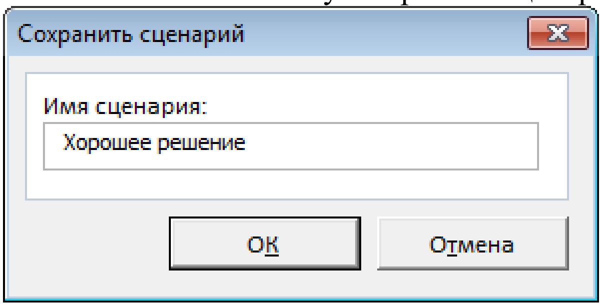


	A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах						
2	Лист: [65-Поиск-решения-в-Excel.xlsx]Лист1						
3	Отчет создан: 19.08.2013 13:47:01						
4	Результат: Целочисленное решение найдено в пределах допустимого отклонения. Все ограничения выполн						
5	Модуль поиска решения						
6		Модуль: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ					
7		Время решения: 1.42 секунд.					
8		Число итераций: 3 Число подзадач: 20					
9	Параметры поиска решения						
10		Максимальное время 100 с, Число итераций 100, Precision 0.000001					
11		Сходимость 0.0001, Размер совокупности 0, Случайное начальное значение 0, Правые производные					
12		Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без преде					
13							
14	Ячейка целевой функции (Значение)						
15		Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение		
16		$G$11	Сумма В	12	0		
17							
18							
19	Ячейки переменных						
20		Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	
21		$C$2	А Группа А	1	0	Целочисленное	
22		$D$2	А Группа В	0	1	Целочисленное	
23		$C$3	В Группа А	0	0	Целочисленное	
24		$D$3	В Группа В	1	1	Целочисленное	

Обратите внимание, что в зависимости от установленных вами ограничений, будут доступны различные отчеты.

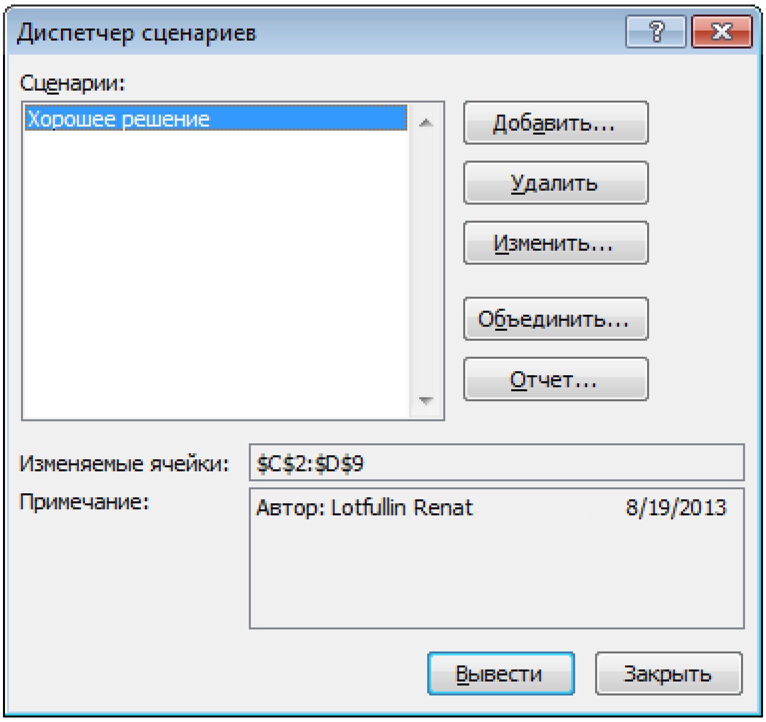
Сохранить сценарий

Если вы нажмете кнопку Сохранить сценарий, Excel откроет следующее диалоговое окно:



Где необходимо ввести название вашего сценария модели и нажать кнопку ОК.

Все сценарии доступны в Диспетчере сценариев, который находится во вкладке Данные в группе Работа с данными –> Анализ что-если -> Диспетчер сценариев.



Вернуться к модели

К тому же, вы можете вернуться к модели и:

— Восстановить исходные значения

— Сохранить найденное решение

Проверка результатов

Сервис Поиск решения, вероятно, самая непредсказуемая система в Excel. Таким образом, все найденные решения, которые он выдает необходимо перепроверять вручную, для дальнейшего использования.

Данная проверка на реалистичность должна начинаться с подтверждения, что все результаты удовлетворяют заданным критериям:

— Являются ли результаты примерно похожими на ваши ожидания?

— Не нарушены ли максимумы и минимумы?

Глава 1. Общая характеристика задач оптимизации

1.1 Особенности задач оптимизации

Начиная разговор о задачах оптимизации, обычно всегда упоминают об исключительно широком распространении этих задач. Действительно, трудно найти человека, который хотя бы раз не попадал в ситуацию необходимости выбора одной из нескольких возможностей.

Как оптимально распорядиться семейным бюджетом или за минимальное время добраться до нужной точки в городе, минимизировать риски капитальных вложений, как наиболее эффективно организовать работу персонала компании или определить оптимальные запасы сырья на складе – это лишь небольшая часть проблем, в которых желательно принять не просто какое-то решение, а наилучшее из всех потенциально возможных решений – управленческое решение.

Когда речь заходит о покупке новой вещи в быту, вряд ли у кого не возникает желание иметь вещь наилучшего качества, надежности, внешнего вида или комфорта. Однако, с одной стороны, в подобных случаях выбор может быть ограничен имеющимися в наличии доступными средствами. Тем самым на принятие решения оказывают влияние некоторые ограничивающие обстоятельства, которые из всех потенциально возможных вариантов исключают не удовлетворяющие определенным ограничениям.

Что касается истории систематического изучения задач оптимизации, то ее начало относится к эпохе зарождения математики как науки. Известно, что одними из первых математических задач, которые были сформулированы и решены античными математиками, были задачи нахождения геометрических фигур максимальной площади и тел максимального объема при ограничениях на периметр и площадь поверхности, соответственно.

Интенсивное развитие экономики и производства в XX в. привело к появлению целого ряда новых типов задач оптимизации, которые не могли быть решены классическими методами и потребовали разработки специальной математической теории — **теории решения задач оптимизации**. В рамках этой теории были разработаны не только методологические основы постановки и анализа задач оптимизации, но и вычислительные методы и алгоритмы их решения. Хотя по-прежнему некоторые неклассические задачи оптимизации могут быть решены *аналитически*, однако акцент исследований смещается в сторону поиска *вычислительного* способа решения для целых классов задач оптимизации.

1.2. Примеры типовых задач оптимизации

Понятие *типовой задачи оптимизации* является в некоторой степени условным и определяется исключительно соображениями удобства анализа и классификации соответствующих задач. Из всего разнообразия задач оптимизации и их модификаций были выбраны только те, которые имеют наглядный характер и не требуют для понимания своих особенностей специальных знаний из той или иной предметной области.

1.2.1. Задача о коробке максимального объема

Данная задача формулируется следующим образом. Имеется квадратная заготовка из некоторого гибкого материала, например, картона или жести, причем размеры этой заготовки фиксированы для конкретной ситуации (рис. 1.1, а). Из этой заготовки следует вырезать четыре равных квадрата по ее углам, а полученную фигуру (рис. 1.1,б) согнуть так, чтобы получилась коробка без верхней крышки (рис. 1.1, *в)*. При этом необходимо так выбрать размер вырезаемых квадратов, чтобы получилась коробка максимального объема.

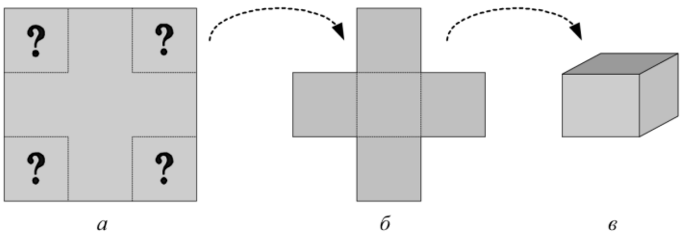


Рис. 1.1. Схема изготовления коробки из прямоугольной заготовки фиксированного размера

На примере данной задачи можно проиллюстрировать все элементы постановки задач оптимизации. **Оценочной функцией** в данной задаче служит объем изготовленной коробки.

Проблема выбора заключается в выборе размера вырезаемых квадратов. От нуля до целой стороны.

Из этого следует, что в постановке данной задачи должны присутствовать некоторые **ограничения**.

Задача о коробке максимального объема имеет не только наглядную интерпретацию, но и достаточно простое аналитическое решение. Она относится к классу задач *нелинейной* оптимизации.

1.2.2. Задача о пожарном ведре

Данная задача формулируется следующим образом. Имеется заготовка в форме круга из некоторого гибкого материала, причем размеры заготовки фиксированы для конкретной ситуации (рис. 1.2, *а)*. Из заготовки следует вырезать некоторый сектор так, чтобы, согнув полученную фигуру (рис. 1.2, *б)* и сварив шов, можно было бы получить конус без основания. Необходимо так выбрать размер вырезаемого сектора, чтобы пожарное ведро оказалось максимального объема.

Хотя данная задача имеет наглядную интерпретацию, однако ее аналитическое решение уже не является простым. Она относится к классу задач нелинейной.

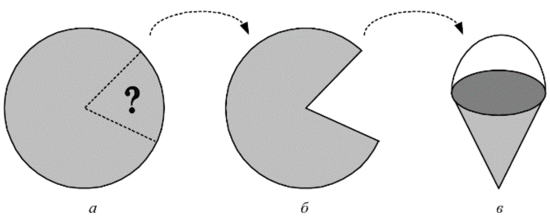


Рис. 1.2. Схема изготовления ведра из круглой заготовки фиксированного размера

1.2.3. Задача об оптимальной диете

В общем случае задача об оптимальной диете формулируется следующим образом.

Имеется конечное число видов продуктов питания, например, хлеб, крупа, мясо, рыба, в которых содержится конечное число типов питательных веществ, например, белки, жиры, углеводы, витамины. В каждом виде продуктов питания содержится известное количество питательных веществ каждого из типов. Задана минимальная суточная потребность человека, например, спортсмена или пациента больницы, в каждом из видов питательных веществ. Задана также калорийность каждого типа продукта.

Требуется определить такой состав рациона питания, чтобы каждое питательное вещество содержалось в нем в необходимом количестве, обеспечивающем суточную потребность человека, а при этом суммарная калорийность рациона была минимальной.

Данная задача известна в литературе также как задача об **оптимальной смеси** или **рационе питания**. Оценочной функцией в ней является суммарная калорийность рациона, а ограничениями служат минимальная суточная потребность человека в каждом из видов питательных веществ. Задача об оптимальной диете является одной из классических задач линейного программирования.

ИДЗ 1. *Подобрать в интернете суточную потребность в калориях и питательных веществах (витамины, белки, углеводы, жиры, клетчатки) для спортсмена/водителя/артиста, составить разнообразное меню на неделю с учетом выходных. Решить задачу 7 раз на разных листах Excel.*

1.2.4. Транспортная задача

В некотором регионе имеется фиксированное число пунктов производства и хранения некоторого продукта и конечное число пунктов потребления этого продукта (рис. 1.3). Для каждого из пунктов производства и хранения известен объем производства продукта или его запаса. Для каждого пункта потребления задана потребность в продукте в этом пункте потребления. Известна стоимость перевозки одной единицы продукта из каждого пункта производства в любой из пунктов потребления.

Требуется определить оптимальный план перевозок продукта, так чтобы потребности во всех пунктах потребления были удовлетворены, а суммарные затраты на транспортировку всей продукции были минимальными.

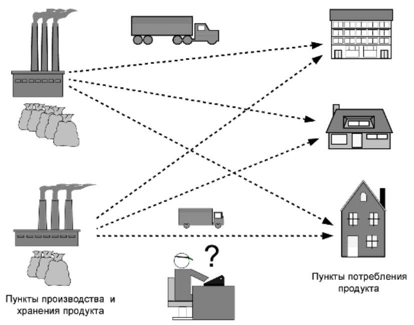


Рис. 1.3. Иллюстрация транспортной задачи для двух пунктов производства и трех пунктов потребления

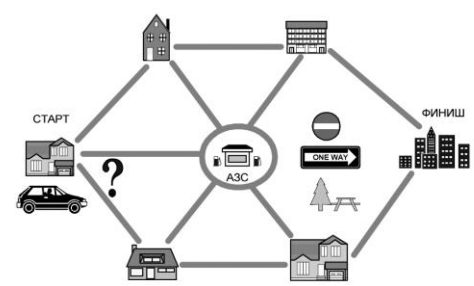
Очевидно, оценочной функцией в данной задаче являются суммарные затраты на транспортировку всей продукции, а ограничениями служат объемы производства продукта в каждом пункте производства и потребности в продукте в каждом пункте потребления.

Данная задача также является одной из классических задач линейного программирования.

В бизнес-приложениях эта задача известна как задача о перемещении товаров со складов на торговые точки. В случае штучного товара, например, телевизоры, компьютеры, пылесосы, автомобили и пр., соответствующая транспортная задача относится к классу задач целочисленного программирования.

1.2.5. Задача о минимальном пути в графе

Задача поиска кратчайшего маршрута в этом случае формулируется следующим образом. Из



всех возможных маршрутов перемещения, связывающих исходный населенный пункт с конечным, необходимо найти такой маршрут, суммарная длина участков дорог которого минимальна (рис. 1.4).

Рис. 1.4. Иллюстрация задачи о минимальном пути в графе

Оценочной функцией в данной задаче является суммарная длина пути, связывающего пункты *А* и *Б,* а ограничениями служат наличие или отсутствие дорог между отдельными населенными пунктами соответствующего географического региона.

Таким образом, задача поиска кратчайшего маршрута формулируется как задача нахождения минимального пути в графе между двумя фиксированными парами вершин. Данная задача относится к классу задач оптимизации на графах.

1.2.6. Задача коммивояжера

Данная задача очень похожа по своей постановке на предыдущую задачу, однако по своей сложности принципиально от нее отличается. Суть проблемы заключается в следующем.

Торговцу необходимо обойти фиксированное число городов, начиная с города, в котором он находится, и закончить свой маршрут, вернувшись в исходный город, не побывав нигде дважды (рис. 1.5). Известна стоимость перелета между любой парой указанных городов. *При этом вовсе не очевидно, что наиболее короткий маршрут будет обладать минимальной стоимостью перелета*.

Требуется определить маршрут или последовательность посещения городов, которые обладают минимальной суммарной стоимостью перелета среди всех возможных маршрутов.

Оценочной функцией в данной задаче является суммарная длина полного пути, начинающегося и оканчивающегося в некотором городе *А* (например, в Москве), а ограничениями служат наличие или отсутствие авиарейса между отдельными городами рассматриваемого списка, а также необходимость посещения всех этих городов.

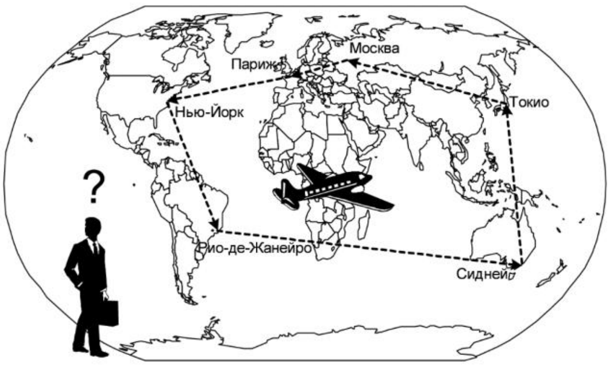


Рис. 1.5. Иллюстрация задачи коммивояжера

Хотя в общем случае задача коммивояжера может быть сформулирована как задача нахождения замкнутого или незамкнутого контура (пути, проходящего через все вершины) минимальной длины в графе, однако ряд особенностей позволяют отнести ее к классу задач комбинаторной оптимизации.

1.2.7. Задача о рюкзаке

Турист готовится к длительному переходу в горах или в лесу. В рюкзаке он может нести груз, масса которого не должна превышать некоторого фиксированного значения. Сам по себе груз может включать конечное число видов предметов, например, пакеты с продуктами, баллоны с газом для горелки и пр. Для каждого вида предмета известна его масса, например, в *кг.* При этом каждый вид предмета имеет для туриста определенную эвристическую или объективную ценность на все время перехода.

Сколько предметов каждого вида турист должен положить в рюкзак, чтобы суммарная ценность предметов была максимальной, а их общая масса не превысила допустимого фиксированного значения?

Очевидно, что оценочной функцией в данной задаче является суммарная ценность предметов, а ограничением служит требование, чтобы общая масса выбираемых для похода предметов не превысила допустимого фиксированного значения.

В исходной постановке задача о рюкзаке относится к классу задач целочисленного линейного программирования (дискретной оптимизации). Если же в постановке задачи каждый вид предмета присутствует в единственном экземпляре, то это условие изменяет не только характер задачи, но и ее сложность. Соответствующая задача о рюкзаке перейдет в разряд задач булева программирования.

1.2.8. Задача о назначении

Имеется конечное число видов работ, которые могут быть выполнены потенциальными кандидатами. При этом каждого кандидата можно назначить на выполнение только одной работы, а каждая работа, в свою очередь, должна выполняться только одним кандидатом (рис. 1.6). Известна эффективность выполнения каждой работы любым из потенциальных кандидатов. Требуется распределить всех кандидатов по работам, так чтобы общая эффективность выполнения всех работ была наибольшей.

Оценочной функцией в данной задаче является общая эффективность выполнения всех работ, а ограничениями служат дополнительные условия на выполнение каждой работы только одним кандидатом и участие каждого кандидата в выполнении только одной работы.

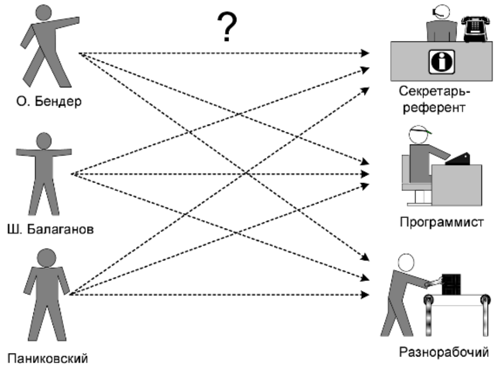


Рис. 1.6. Иллюстрация задачи о назначении

Классическая задача о назначении — это *симметричная* задача, когда общее число видов работ равно количеству потенциальных кандидатов. В противном случае задача о назначениях называется *несимметричной.* Оба варианта этой задачи относятся к классу задач булева программирования.

1.2.9. Задача о минимальном покрывающем дереве в графе

Один из возможных вариантов этой задачи может быть сформулирован следующим образом. Необходимо разработать проект транспортной сети, которая должна соединить конечное число населенных пунктов в некотором географическом районе (рис. 1.7). Известна стоимость прокладки автодороги между двумя соседними населенными пунктами. Из экономических соображений требуется, чтобы общая стоимость реализации проекта была минимальной, при этом должно быть выполнено обязательное условие — из любого населенного пункта по построенным автодорогам можно было бы попасть в любой другой населенный пункт рассматриваемого географического района.

Оценочной функцией в данной задаче является общая стоимость реализации проекта, а ограничением служит требование достижимости из произвольного населенного пункта любого другого.

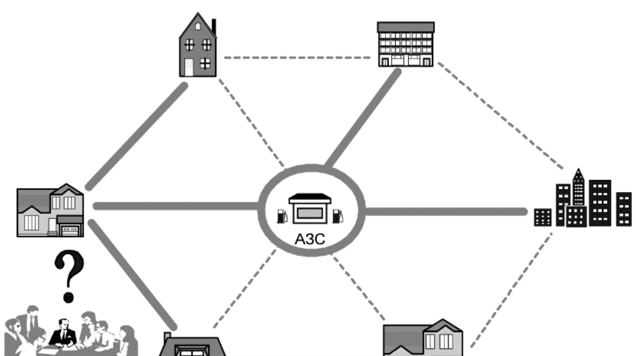


Рис. 1.7. Иллюстрация задачи о минимальном покрывающем дереве

Каждое ребро графа в этом случае будет соответствовать потенциально возможной автомобильной дороге между двумя соседними населенными пунктами. Вес ребра примем равным стоимости прокладки соответствующего участка дороги.

Задача о минимальном покрывающем дереве в графе легко преобразуется к варианту задачи о максимальном покрывающем дереве в графе, при этом характер задачи и ее сложность не изменяются. В литературе она также известна как *задача о минимальном или максимальном остовном дереве*. Все эти варианты данной задачи относится к классу задач оптимизации на графах.

1.2.10. Задача о максимальном потоке в сети

Имеется система магистральных трубопроводов, связывающих источник добычи нефти или газа с предприятием по его промышленной переработке (рис. 1.8).

Отдельные участки трубопроводов оснащены компрессорными установками. Известны предельные значения пропускной способности каждого участка. Требуется определить количество транспортируемого продукта по каждому из участков системы, так чтобы количество доставленного на предприятие переработки продукта было максимальным.

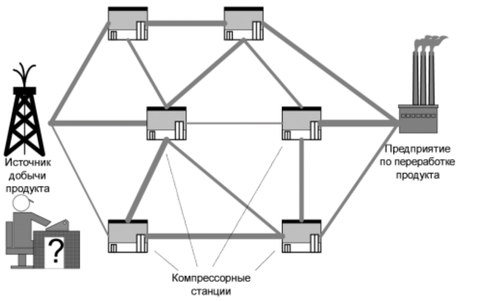


Рис. 1.8. Иллюстрация задачи о максимальном потоке в сети

Оценочной функцией в данной задаче является количество продукта, доставленного на предприятие переработки, а ограничениями служат предельные значения пропускной способности каждого участка рассматриваемой системы.

Чтобы в общем случае сформулировать задачу о максимальном потоке в сети, для рассматриваемой системы магистральных трубопроводов построим граф. В данном графе одна из вершин, называемая *истоком,* будет соответствовать источнику добычи продукта, другая, называемая *стоком,*— предприятию по переработке этого продукта. Остальные вершины графа интерпретируются как компрессорные станции. Каждое ребро графа в этом случае будет соответствовать наличию участка трубопровода между парой компрессорных станций. Вес ребра равен пропускной способности соответствующего участка трубопровода

Таким образом, задача о максимальном потоке в сети формулируется как задача нахождения переменных значений величин потока по каждому ребру графа, которые не превышают весов соответствующих ребер и максимизируют общий поток от источника к стоку. Данная задача также относится к классу задач оптимизации на графах.

1.2.11. Задача водопроводчика

Данная задача достаточно часто встречается при производстве дорожностроительных и ремонтных работ, ее называют также задачей временного удаления плит с поверхности грунта. Сущность задачи водопроводчика заключается в следующем.

Водопроводчику надо установить вентили на нескольких водопроводных трубах, проложенных под землей и покрытых тяжелыми плитами. Имеется конкретный план прокладки труб под землей (рис. 1.9). Допускается установление вентильного перекрытия в любом месте трубы, но лишь по одному на каждой трубе. С целью минимизации трудозатрат водопроводчику необходимо определить минимальное число плит, которые требуется приподнять, чтобы установить по одному вентилю на каждой трубе.

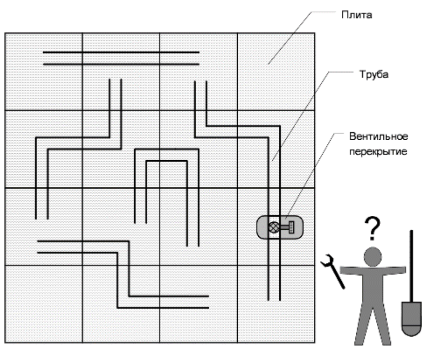


Рис. 1.9. Геометрическая интерпретация задачи водопроводчика

По своей постановке задача водопроводчика может быть отнесена к классу задач *геометрического программирования.* Многие задачи этого класса, после некоторых предварительных преобразований, могут быть сформулированы и эффективно решены с помощью модели булева программирования.

1.3. Процесс постановки и решения задач оптимизации

После рассмотрения содержания типовых задач оптимизации следует дать краткую характеристику базовой методологии, которая определяет общие принципы и подходы к анализу и решению данных задач.

В общем случае процесс постановки и решения задач оптимизации может быть представлен в форме взаимосвязанных этапов, на каждом из которых выполняются определенные действия, направленные на построение и последующее использование информационно-логических моделей систем (рис. 1.10). Характерной особенностью данного процесса является его циклический или итеративный характер.

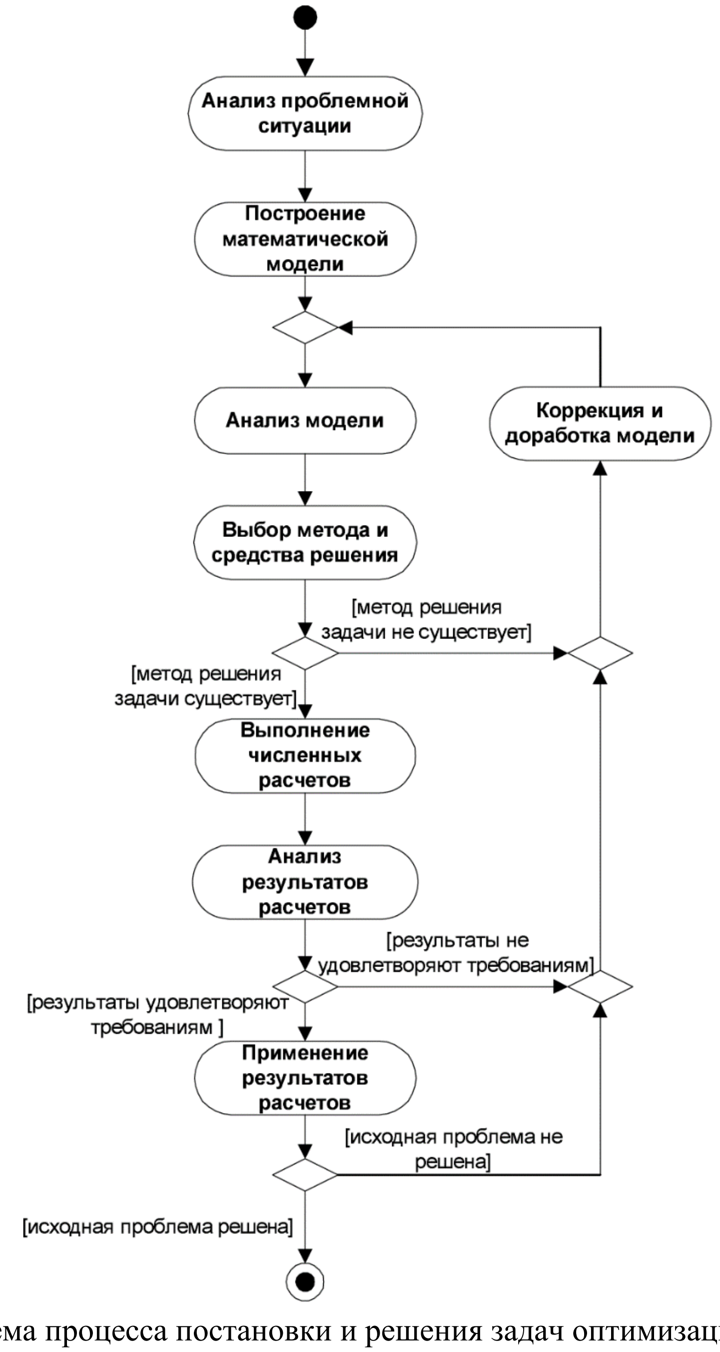


Рис. 1.10. Общая схема процесса постановки и решения задач оптимизации

1.4. Математическая модель задач оптимизации

При рассмотрении процесса постановки и решения задач оптимизации ключевую роль играет понятие математической модели задач оптимизации и свойства ее основных элементов. Именно от свойств математической модели зависит возможность решения отдельной задачи оптимизации и выбор наиболее эффективного алгоритма и способа для этой цели.

1.4.1. Понятие математической модели и ее основные элементы

В общем случае под *математической моделью* задачи оптимизации будем понимать специальную запись постановки и условий решения типовой задачи оптимизации с использованием понятий математики и математической символики.

Применительно к конкретной задаче оптимизации математическая модель соответствует *математической постановке* данной задачи.

При постановке задачи оптимизации должны быть определены или специфицированы следующие ее базовые компоненты:

- характеристика переменных;
- набор ограничивающих условий (ограничения);
- оценочная (целевая) функция.

Каждый из этих компонентов математической модели имеет свои особые свойства, которые зависят от свойств соответствующих математических объектов.

1.4.2. Характеристика переменных

Понятие *переменной* является одним из фундаментальных в математике, характерным свойством которой служит множество принимаемых ею значений. В зависимости от специфических свойств этого множества в задачах оптимизации используются три основных типа переменных:

- *непрерывные,* множество принимаемых значений которых как правило, совпадает с множеством всех неотрицательных вещественных чисел или является его подмножеством;
- *целочисленные* или *дискретные,* множество принимаемых значений которых конечно и, как правило, совпадает с множеством всех неотрицательных целых чисел или является его подмножеством;
- *булевы,* множество принимаемых значений которых имеет всего лишь два значения: 0 и 1.

Как в математике, так и в математической модели задач оптимизации переменные традиционно принято обозначать латинскими буквами: без индексов — x, y, z; с одним индексом — x_i, y_j, z_k с двумя индексами — x_{ij}, y_{ij}, z_{kl}.

Важно понимать, что каждая переменная должна иметь реальную интерпретацию или физический смысл в постановке задачи, а набор их значений — определять некоторое потенциальное решение исходной проблемы.

Традиционно в математике множество всех вещественных чисел обозначают через R^1 или просто R, множество всех целых чисел — через Z^1 или просто Z, множество из двух чисел: 0 и 1 — через B^1 или $\{0, 1\}$. С учетом этих обозначений требование *непрерывности* переменных принято символически обозначать в виде: $x, y, z \in R^1$; требование целочисленности переменных— в виде: $x, y, z \in Z^1$: требование булевости переменных— в виде: $x, y, z \in \{0, 1\}$ или, если не возникает недоразумений, $x, y, z \in B^1$.

1.4.3. Характеристика ограничений

Большинство, если не все, практические задачи оптимизации имеют некоторый набор ограничивающих условий, которые исключают из рассмотрения отдельные решения по причине их физической или логической невозможности. Данные условия получили название *ограничений,* которые в своей совокупности определяют или специфицируют *множество допустимых альтернатив* рассматриваемой задачи оптимизации.

В общем случае ограничение представляет собой некоторую функциональную зависимость, которая связывает отдельные значения переменных друг с другом. В общем случае подобная функциональная зависимость записывается в виде некоторой функции, например $g(x, y, z)$, от исходных переменных задачи оптимизации. При этом предполагается, что данная функция, как правило, является непрерывной.

Математическая запись ограничения дополнительно предполагает требование, что значения данной функции или функций ограничены некоторым интервалом или числом. В зависимости от знака ограничения задач оптимизации используются два основных типа ограничений:

- *равенства,* которые символически записываются в виде: $g(x, y, z) = a$ или $g(x, y, z) = 0$;
- *неравенства,* которые символически записываются в виде: $g(x, y, z) \leq (\geq)\ a$ или $g(x, y, z) \leq (\geq)\ 0$.

В зависимости от свойств функции $g(x, y, z)$ в задачах оптимизации используются следующие основные типы ограничений.

– *Линейные,* в которых все функции $g(x, y, z)$ является линейными относительно всех своих переменных.
– *Нелинейные,* в которых все функции $g(x, y, z)$ является нелинейными относительно всех своих переменных.

Набор ограничений каждой задачи оптимизации сужает исходное множество ее решений или альтернатив.

В общем случае *множество допустимых альтернатив,* удовлетворяющих всем ограничениям рассматриваемой задачи оптимизации, принято обозначать через Δ_β или просто Δ. Математические свойства этого множества полностью определяются характером переменных и ограничений задачи оптимизации.

Тот факт, что некоторый набор значений переменных удовлетворяет всей совокупности ограничений задачи символически записывается в виде: $x, y, z \in \Delta_\beta$

1.4.4. Характеристика целевой функции

Целевой или *критериальной* функцией задачи оптимизации называется некоторая оценочная функция, предназначенная для количественного сравнения альтернатив с целью выбора наилучшей. Целевая функция определяется как некоторая математическая функция, функционал или оператор, что, в общем случае, записывается в виде: $f(x, y, z)$, где $f\colon \Delta_\beta \to R^1$.

В зависимости от свойств функции $f(x, y, z)$ в задачах оптимизации используются следующие основные типы целевых функций.

– *Линейные,* в которых функция $f(x, y, z)$ является линейной относительно всех своих переменных.
– *Нелинейные,* в которых функция $f(x, y, z)$ является нелинейной относительно всех своих переменных.

В зависимости от количества целевых функций рассматриваются два основных типа задач оптимизации:

– *однокритериальная* задача оптимизации, в математической модели которой присутствует единственная целевая функция;
– *многокритериальная* задача оптимизации, в математической модели которой присутствует несколько целевых функций.

В контексте математической модели задач оптимизации требование нахождения наилучшего решения конкретизируется в требование *максимизации* или *минимизации* целевой функции. Данное требование может быть записано символически в виде: $f(x, y, z) \to max$ или $f(x, y, z) \to min$. При этом максимум (минимум) целевой функции находится только среди множества допустимых альтернатив.

Решением задачи оптимизации является некоторый допустимый набор значений переменных, который доставляет максимальное или минимальное значение целевой функции на множестве допустимых альтернатив.

С учетом введенных обозначений общая математическая модель однокритериальной задачи оптимизации может быть записана символически в следующем виде:

$$f(x, y, z) \to \max_{x,y,z\in\Delta_\beta}, \text{или} \quad f(x, y, z) \to \min_{x,y,z\in\Delta_\beta}, \tag{1.1}$$

$$\text{где } \Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x, y, z) \le (=)0\}, \quad (k \in \{1,2, \dots, m\}). \tag{1.2}$$

Здесь через Δ_β обозначено множество допустимых альтернатив, которое формируется посредством сужения исходного множества альтернатив Δ с помощью совокупности ограничений, записанных в произвольной форме: $g_k(x, y, z) < 0$ или $g_k(x, y, z) = 0$.

В качестве исходного множества альтернатив Δ выступает одно из рассмотренных ранее множеств: множество действительных чисел R^1, множество целых чисел Z^1 или множество из двух чисел: B^1. Выбор этого множества определяется типом переменных, которые используются в постановке соответствующей задачи оптимизации.

С учетом введенных обозначений общая математическая модель многокритериальной задачи оптимизации может быть записана символически в следующем виде:

$$f(x, y, z) \to \max_{x,y,z\in\Delta_\beta} \quad \text{или} \quad f(x, y, z) \to \min_{x,y,z\in\Delta_\beta}, \quad (\forall i \in \{1,2, \dots, n\}), \tag{1.3}$$

$$\text{где } \Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x, y, z) \le (=)0\}, \quad (k \in \{1,2, \dots, m\}). \tag{1.4}$$

Здесь через Δ_β также обозначено множество допустимых альтернатив, которое формируется посредством сужения исходного множества альтернатив Δ. В случае $n = 2$ соответствующие задачи оптимизации называются *двухкритериалъными,* $n = 3$ — *трехкритериалъными* и т. д. Натуральное число m определяет общее количество ограничений задачи оптимизации. В математических моделях типовых задач оптимизации явно указывают исходные множества альтернатив для точной спецификации типа переменных.

Рассмотренные свойства базовых компонентов математической модели задач оптимизации позволяют выполнить общую классификацию этих задач, знание которой необходимо для правильного анализа и выбора метода для решения конкретных задач оптимизации.

Глава 2. Задачи линейного программирования

К классу задач линейного программирования относятся такие задачи однокритериальной оптимизации, в которых переменные являются непрерывными и неотрицательными, целевая функция является линейной функцией своих аргументов, а ограничения могут быть представлены в форме линейных неравенств и равенств.

Чтобы понять особенности задач данного класса и методы их решения, необходимо рассмотреть математическую постановку задачи линейного программирования в общем случае.

2.1. Общая характеристика задачи линейного программирования

При рассмотрении задач линейного программирования, следует помнить, что, с одной стороны, они являются специальным случаем общей задачи оптимизации. Тем самым для задач линейного программирования оказываются справедливыми соответствующие результаты относительно общих свойств и способов их решения, разработанные в теории решения экстремальных задач.

2.1.1. Математическая постановка задачи линейного программирования

В общем случае математическая постановка задачи линейного программирования может быть сформулирована в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ \rightarrow \max\nolimits_{x,y,z \in \Delta_\beta}, \quad (2.1)$$

где $\Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \le (=) b_k;\ x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0\}, (k \in \{1,2, \dots, m\})$. (2.2)

При этом следует принимать во внимание следующие принципиальные предположения о характере целевой функции и левых частей ограничений:

1. Целевая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предполагается линейной относительно всех своих переменных, т. е. может быть представлена в форме: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

2. Левые части ограничений $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(\forall k \in \{1,2, \dots, m\})$ также являются линейными функциями относительно своих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ т. е. могут быть представлены в форме: $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{к1}x_1 + a_{к2}x_2 + \dots + a_{кn}x_n$.

3. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ могут принимать свои значения только из множества неотрицательных действительных чисел R^1_+, т. е. x_i,- $\in R^1_+$ $(\forall i \in \{1,2,\dots,n\})$.

С учетом сделанных предположений *общая задача линейного программирования* может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти максимум линейной целевой функции *n* переменных $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^1_+$ следующего вида:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max\nolimits_{x \in \Delta_\beta}, \quad (2.3)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств и неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i & (\forall i \in \{1,2, \dots, q\}) \quad (2.4) \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k & (\forall k \in \{q+1, \dots, m\}) \quad (2.5) \end{cases}$$

В математической постановке общей задачи линейного программирования через c_i, a_{ki}, b_k $(\forall i \in \{1,2,\dots,n\})$, $(\forall k \in \{1,2,\dots,m\})$обозначены постоянные величины, которые могут принимать произвольные, не обязательно целочисленные значения, определяемые спецификой конкретной задачи линейного программирования.

В случае отсутствия ограничений типа равенств (2.4), т. е. при $q = 0$, задача линейного программирования называется *стандартной задачей линейного программирования,* которая, с учетом сделанных предположений, может быть записана в следующем виде:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max\nolimits_{x \in \Delta_\beta}, \quad (2.6)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \ldots x_n \ge 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

С другой стороны, при отсутствии ограничений типа неравенств (2.5), т. е. при $q = m$. задача линейного программирования называется *канонической* или *основной задачей линейного программирования,* которая, с учетом сделанных предположений, может быть записана в следующем виде:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \tag{2.8}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots x_n \ge 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

При рассмотрении общих особенностей задачи линейного программирования удобной оказывается стандартная форма математической постановки задачи линейного программирования (2.6) и (2.7). Анализ множества допустимых альтернатив Δ_β стандартной задачи линейного программирования (2.6) и (2.7) позволяет прийти к выводу о справедливости только одной из трех возможных ситуаций:

- Система ограничений (2.7) противоречива или несовместна, т. е. не существует ни одного набора значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют ограничениям (2.7). В этом случае задача линейного программирования не имеет решения.
- Система ограничений (2.7) не является противоречивой, однако соответствующая ей область пространства R^n является неограниченной. В этом случае задача линейного программирования не имеет решения, в случае, если линейная функция (2.6) не ограничена в неограниченной области, соответствующей множеству допустимых альтернатив Δ_β.
- Система ограничений (2.7) не является противоречивой, и при этом соответствующая ей область пространства R^n является ограниченной. В этом случае задача линейного программирования имеет решение.

В последней ситуации задача линейного программирования может иметь либо единственное решение, либо континуум решений. Континуум решений имеет место в том случае, когда линейная целевая функция оказывается параллельной функции левой части одного из ограничений.

2.2. Задача о производстве красок (Оптимальный план производства)

Задача о производстве красок отличается простотой постановки. Данный способ позволяет не только наглядно представить форму множества допустимых альтернатив, но и собственно процесс нахождения оптимального решения.

2.2.1. Общая постановка задачи производственного планирования

Задача о производстве красок является *частным случаем типовой задачи* линейного программирования, связанной с планированием производства или оптимальным выпуском продукции. Данная типовая задача была одной из первых, с которой началось развитие собственно моделей и методов линейного программирования.

Цель рассмотрения модели планирования производства состоит в определении уровней или объемов производства отдельных видов производственной деятельности, при которых оптимизируется (максимизируется или минимизируется) общий результат производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, накладываемых на использование ресурсов.

В общем случае для задачи о выпуске продукции вводятся в рассмотрение несколько видов выпускаемой предприятием продукции, на изготовление которой затрачивается несколько типов исходных материалов или ресурсов. При этом предполагается, что запасы этих материалов и ресурсов на предприятии *ограничены*.

Необходимо определить такой *объем выпускаемой продукции*, который *максимизирует* общую стоимость продукции, а использованные материалы и ресурсы не превосходят имеющихся на предприятии запасов.

При построении математических моделей задач производственного планирования в форме задачи линейного программирования следует принимать во внимание допущения ***аддитивности, пропорциональности и неотрицательности.***

Аддитивность (лат. additivus — прибавляемый) — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям, в некотором классе возможных разбиений объекта на части.

Аддитивность указывает на то, что общая величина ресурсов, потребляемых в системе всеми видами производственной деятельности, равна сумме затрат ресурсов на отдельные виды производственной деятельности. Это допущение находит отражение и при построении целевой функции.

Пропорциональность означает, что затраты ресурсов на некоторый вид производственной деятельности, а также вклад этого вида производственной деятельности в целевую функцию линейно пропорциональны его уровню.

Первые два допущения о пропорциональности и аддитивности обеспечивают строгую *линейность* соответствующих функций. В практических ситуациях действительный характер зависимостей редко бывает строго линейным. Однако допущение о линейности позволяет разработать специальные вычислительные методы, использование которых показало их практическую эффективность. Именно поэтому довольно часто задачи с нелинейными зависимостями формулируют в виде задач линейного программирования, что вполне оправдано лишь в тех случаях, когда линейная аппроксимация и соответствующий приближенный характер решений не оказывают заметного влияния на адекватность математической модели.

Допущение *неотрицательности* означает, что ни одному из видов производственной деятельности не может быть приписан отрицательный уровень. Для большинства производственных и экономических систем это допущение является естественным физическим требованием их функционирования.

Применительно к производству красок соответствующая задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом.

Некоторое производственное предприятие выпускает несколько видов красок. Для производства этих видов красок используется несколько типов исходных красителей и других химических веществ. Известен расход этих красителей и веществ для получения каждого вида краски и запасы красителей и веществ на складе предприятия, а также стоимость каждого вида краски для оптовых покупателей. Требуется определить оптимальный объем выпуска красок каждого вида, обеспечивающий максимум общей стоимости готовой продукции.

2.2.2. Математическая постановка задачи о производстве красок

Производственное предприятие выпускает два вида краски (n = 2), одна из которых предназначена для внутренних работ, а другая — для наружных работ. Для производства этих видов краски используется три типа исходных красителей и химических веществ (m = 3) — индиго, железный купорос и свежегашеная известь. На производство одной весовой единицы краски i-го вида ($i \in \{1, 2\}$) требуется a_{ij} единиц исходного красителя j-го вида ($j \in \{1, 2, 3\}$). Расход этих красителей для получения каждого вида краски приводится в следующей таблице (табл. 2.1).

Таблица 2.1. *Расход красителей для производства краски*

Красители / Виды красок	Для внутренних работ	Для наружных работ
Индиго	0,1	0,2
Железный купорос	0,2	0,1
Свежегашеная известь	0,15	0,05

Запасы исходных красителей на складе предприятия ограничены следующими значениями: индиго b_1 = 10, железный купорос b_2 = 7, свежегашеная известь b_3 = 5. Стоимость каждого вида краски для оптовых покупателей равна: c_1 = 250 и c_2= 230.

Исходными переменными математической модели задачи о производстве красок являются: x_1 — объем выпуска краски для внутренних работ и x_2^- — объем выпуска краски для наружных работ.

Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о производстве красок может быть записана в следующем виде:

$$250x_1 + 230x_2 \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \tag{2.10}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 10 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \le 7 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}05x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Ответ: F_{opt}=13300

2.3. Задача об оптимальной диете (Оптимальное смешивание)

Содержательная постановка задачи об оптимальной диете приводится в *разд. 1.2.3.* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации.

2.3.1. Математическая постановка задачи об оптимальной диете

Для математической постановки данной задачи необходимо *определить переменные* соответствующей задачи оптимизации, *задать целевую функцию* и *специфицировать ограничения*, позволяющие представить исходную задачу как стандартную *задачу линейного программирования*.

Имеется n видов продуктов питания, в которых содержится m типов питательных веществ (белки, жиры, углеводы). В одной весовой единице продукта i-го типа ($i \in \{1, 2,\ldots,n\}$) содержится a_{ij} единиц питательного вещества j-го вида ($j \in \{1, 2,\ldots,m\}$). Известна минимальная суточная потребность $b_j (j \in \{1,2,\ldots, m\})$ человека в каждом из видов питательных веществ. Задана калорийность c_i - одной весовой единицы i-го продукта $i \in \{1, 2,\ldots,n\}$). Требуется определить оптимальный состав рациона продуктов, такой, чтобы каждое питательное вещество содержалось в нем в необходимом количестве, обеспечивающем суточную потребность человека, и при этом суммарная калорийность рациона была минимальной.

Введем в рассмотрение следующие переменные: x_i, — весовое количество продукта питания i-го типа в суточном рационе. Тогда в общем случае математическая постановка задачи об оптимальной диете может быть сформулирована следующим образом.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min_{x \in \Delta_\beta}, \tag{2.12}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_3 \\ x_1, x_2, \ldots x_n \ge 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

2.3.2. Решение задачи об оптимальной диете с помощью программы MS Excel

Для решения задачи об оптимальной диете с помощью программы MS Excel необходимо задать конкретные значения параметрам исходной задачи. Для определенности предположим, что в качестве исходных типов продуктов рассматриваются: хлеб, мясо, сыр, бананы, огурцы, помидоры, виноград (n = 7), а в качестве питательных веществ рассматриваются белки, жиры, углеводы (m = 3). Калорийность одной весовой единицы каждого из продуктов следующая: c_1 = 2060, c_2 = 2430, c_3 = 3600, c_4 = 890, c_5 = 140, c_6 = 230, c_7 = 650 *ккал/кг*. Содержание питательных веществ в каждом из продуктов может быть задано в форме следующей таблицы (см. табл. 2.2).

Таблица 2.2. *Содержание питательных веществ в продуктах питания*

Продукты / Питательные вещества	Хлеб ржаной	Мясо баранина	Сыр "Российский"	Банан	Огурцы	Помидоры	Виноград	Потребность
Белки	61	220	230	15	8	11	6	100
Жиры	12	172	290	1	1	2	2	70
Углеводы	420	0	0	212	26	38	155	400

Калории	2060	2430	3600	890	140	230	650

Минимальная суточная потребность в питательных веществах следующая: в белках $b_1 = 100$, в жирах $b_2 = 70$, в углеводах $b_3 = 400$ *грамм*. x_i, — *кг*.

Не уменьшая общности решаемой задачи, можно считать, что калорийность продуктов измеряется в *ккал/кг,* суточная потребность в питательных веществах — в *граммах,* а содержание питательных веществ в продуктах — в *грамм/кг.* В этом случае оказывается возможным выполнить дополнительную проверку условий сформулированной задачи на основе рассмотрения физической размерности целевой функции и ограничений.

$$2060x_1 + 2430x_2 + 3600x_3 + 890x_4 + 140x_5 + 230x_6 + 650x_7 \to \min_{x\in\Delta_\beta},$$

$$\begin{cases} 61x_1 + 220x_2 + 230x_3 + 15x_4 + 8x_5 + 11x_6 + 6x_7 \geq 100 \\ 12x_1 + 172x_2 + 290x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 70 \\ 420x_1 + 212x_4 + 26x_5 + 38x_6 + 155x_7 \geq 400 \\ \\ x_1, x_2, \dots x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: F_{opt}=2587,140

ИДЗ 1. *Подобрать в интернете суточную потребность в калориях и питательных веществах (витамины, белки, углеводы, жиры, клетчатки) для спортсмена/водителя/артиста, составить разнообразное меню на неделю с учетом выходных. Решить задачу 7 раз на разных листах Excel.*

ИДЗ 1 сдать до 1КТ.

2.4. Задача об изготовлении стержней (Оптимальный раскрой)

Данная задача, с одной стороны, также является разновидностью типовой задачи планирования производства, а с другой стороны, по своему характеру относится к классу задач *геометрического программирования.* Задачи этого класса после некоторых предварительных преобразований могут быть сформулированы и эффективно решены с помощью модели целочисленного линейного программирования.

2.4.1. Содержательная постановка задачи

Сущность задачи об изготовлении стержней заключается в следующем. Производственное предприятие изготавливает металлические стержни трех видов фиксированной длины: 2,9 *м,* 2,1 *м* 1,5 *м* соответственно. Для изготовления этих стержней поступает партия исходного материала, который также представляет собой металлические стержни длиной 7,4 *м.* Способ изготовления стержней заключается в разрезании исходной заготовки на отрезки заданной длины (рис. 2.1).

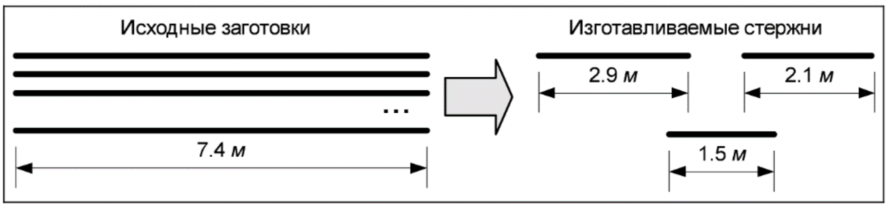


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация задачи об изготовлении стержней

Задача состоит в том, чтобы из имеющихся исходных заготовок изготовить 100 комплектов стержней требуемой длины наиболее эффективным способом разрезания исходного материала, при котором на изготовление необходимого количества комплектов стержней потребуется наименьшее количество исходных заготовок.

Особенность сформулированной задачи заключается в том, что она не может быть непосредственно преобразована в математическую модель. Для этого необходимо выполнить некоторые предварительные действия по рассмотрению способов разрезания исходного материала.

Необходимо рассмотреть *все возможные способы* разрезания исходных заготовок и уже на этой основе попытаться разработать соответствующую математическую модель задачи об изготовлении стержней.

В общем случае исходный стержень длиной 7,4 *м* может быть разрезан для получения отдельных деталей требуемой длины 8 возможными способами (табл. 2.3).

Таблица 2.3. *Способы разрезания исходной заготовки для изготовления отдельных деталей требуемой длины*

Способы	Длина деталей	Расход	Остаток

разреза	2,9 м	2,1 м	1,5 м		
1	2	0	1	7,3	0,1
2	1	2	0	7,1	0,3
3	1	1	1	6,5	0,9
4	1	0	3	7,4	0
5*	0	3	0	6,3	1,1
6	0	2	2	7,2	0,2
7	0	1	3	6,6	0,8
8*	0	0	4	6,0	1,4

Тем самым исходная задача преобразуется к следующему виду: требуется определить оптимальное число различных способов разрезания исходных заготовок, при котором будет изготовлено заданное число стержней требуемой длины, а общее количество разрезанных исходных заготовок будет минимальным.

2.4.2. Математическая постановка задачи об изготовлении стержней

Исходными переменными математической модели задачи об изготовлении стержней являются: x_i,— количество исходных заготовок, разрезанных i-м способом для изготовления отдельных деталей ($i \in \{1, 2,\ldots,8\}$).

Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи об изготовлении стержней может быть записана в следующем виде:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \to \min_{x \in \Delta_\beta}, \tag{2.14}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 100 \ \ (2{,}9\text{м}) \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 100 \ \ (2{,}1\text{м}) \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geq 100 \ \ (1{,}5\text{м}) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 - \text{целые} \end{cases} \tag{2.15}$$

Заметим, что первые три ограничения (2.15) соответствуют требованию изготовить 100 деталей каждого из трех установленных размеров. При этом левые части этих ограничений равны: b_1 = 100, b_2 = 100, b_3 = 100. Математическая модель (2.14) и (2.15) относится к классу задач целочисленного линейного программирования, которая может быть решена с помощью программы MS Excel.

Ответ: F_{opt}=90 (для способов без *)

ИДЗ 2. *Имеется материал ЛДСП размером 5,75м х 1,83м. Необходимо его раскроить оптимальном способом для производства спальных гарнитуров, состоящий из а) две тумбочки и комод, б) кровать и шкаф. Необходимо минимизировать расход ЛДСП. Решить задачу в Excel.*

ИДЗ 2 сдать до 2КТ.

2.5. Транспортная задача линейного программирования

Содержательная постановка транспортной задачи линейного программирования приводится в *разд. 1.2.4.* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации.

2.5.1. Математическая постановка транспортной задачи

В общем случае математическая постановка транспортной задачи может быть сформулирована в следующем виде. Имеется m пунктов производства или хранения и n пунктов потребления некоторого однородного продукта (например, нефть, уголь, песок, цемент и т. и.). Для каждого из пунктов задан a_i: — объем производства или запаса продукта в i-том пункте ($i \in \{1, 2,\ldots,m\}$), а для каждого пункта потребления задана b_j— потребность в продукте в j-том пункте потребления ($j \in \{1, 2,\ldots,n\}$). Известна c_{ij} — стоимость перевозки одной единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Требуется определить оптимальный план перевозок продукта, так чтобы потребность во всех пунктах потребления были удовлетворены, а суммарные затраты на транспортировку всей продукции были минимальными.

Введем в рассмотрение следующие переменные: x_{ij} — количество транспортируемого продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Тогда в общем случае математическая постановка транспортной задачи может быть сформулирована следующим образом.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x \in \Delta_\beta}, \tag{2.16}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \ (\forall i \in \{1,2,\dots,m\}) & (2.17) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \ (\forall j \in \{1,2,\dots,n\}) & (2.18) \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & (2.19) \\ x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1,2,\dots,m\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\} & (2.20) \end{cases}$$

Классическая транспортная задача линейного программирования является *сбалансированной* или *закрытой,* т. е. формулируется в форме, когда имеет место равенство общего объема производства рассматриваемого продукта общему объему его потребления. Этому условию соответствует отдельное ограничение (2.19). В противном случае, если равенство (2.19) не имеет места, то транспортная задача называется *несбалансированной* или *открытой.*

На практике встречаются различные модификации транспортной задачи.

В то же время классическая транспортная задача может быть дополнена условиями на ограничение сверху возможных значений некоторых или всех переменных: $x_{ij} \leq h_{ij}$, где h_{ij} - пропускная способность транспорта между i-м пунктом производства и j-м пунктом потребления. Как нетрудно заметить, подобная модификация приведет к включению в модель (2.16)—(2.20) дополнительных ограничений. Однако эти дополнительные ограничения не оказывают существенного влияния на процесс их решения с помощью программы MS Excel.

2.5.2. Решение транспортной задачи с помощью программы MS Excel

Для решения классической транспортной задачи с помощью программы MS Excel необходимо задать конкретные значения параметрам исходной задачи. Для определенности рассмотрим задачу оптимального планирования перевозок бензина некоторой марки между нефтеперерабатывающими заводами (НПЗ) и автозаправочными станциями (АЗС). В этом случае в качестве транспортируемого продукта рассматривается бензин, в качестве пунктов производства — 3 нефтеперерабатывающих завода *(m* = 3), а в качестве пунктов потребления — 4 автозаправочные станции (n = 4). Объемы производства, потребления и стоимость транспортировки одной тонны бензина между НПЗ и АЗС задана в форме следующей таблицы (табл. 2.4).

Таблица 2.4. *Стоимость транспортировки бензина между НПЗ и АЗС (в тыс. рублей)*

Пункты потребления /Пункты производства	**АЗС №1**	**АЗС №2**	**АЗС №3**	**АЗС №4**	**Предложение, *m***
НПЗ №1	3	5	7	11	10
НПЗ №2	1	4	6	3	14
НПЗ №3	5	8	12	7	17
Спрос, *т*	15	12	8,5	5,5	

Соответствующая математическая постановка рассматриваемой индивидуальной транспортной задачи может быть записана в следующем виде:

$$3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 11x_{14} + x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + \\ +3x_{24} + 5x_{31} + 8x_{32} + 12x_{33} + 7x_{34} \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \qquad (2.21)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 14 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 17 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 12 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 8{,}5 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5{,}5 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{1,2,3,4\} \end{cases} \qquad (2.22)$$

Ответ: F_{opt}=208,5

2.6. Транспортная задача целочисленного линейного программирования

Содержательная постановка транспортной задачи линейного программирования приводится в *разд. 1.2.4.* В настоящей главе рассматривается ее уточнение и модификация, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации в форме модели целочисленного линейного программирования.

2.6.1. Математическая постановка транспортной задачи

Если в дополнение к условиям транспортной задачи линейного программирования (2.16)—(2.20) вводится требование целочисленности всех переменных x_{ij} ($\forall\ i \in \{1, 2,\ldots,m\}$, $\forall\ j \in \{1, 2,\ldots,n\}$), то соответствующую транспортную задачу в общем случае следует отнести к классу задач целочисленного линейного программирования. Содержательно целочисленность переменных означает следующее требование: количество транспортируемого продукта или объем перевозок из i-го пункта производства в j-й пункт потребления должны принимать целочисленные значения. Это может иметь место, например, при организации перевозок автомобилями, контейнерами, коробками, ящиками, пачками, упаковками и пр., когда по условиям задачи невозможно или нецелесообразно деление продукта на более мелкие части.

Как и в транспортной задаче линейного программирования, требуется определить оптимальный план перевозок продукта, так чтобы потребность во всех пунктах потребления были удовлетворена, а суммарные затраты на транспортировку всей продукции были минимальными. Тогда, с учетом ранее введенных условных обозначений, в общем случае математическая постановка транспортной задачи в форме модели целочисленного линейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \qquad (2.23)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ (\forall i \in \{1,2,\ldots,m\}) & (2.24) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ (\forall j \in \{1,2,\ldots,n\}) & (2.25) \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & (2.26) \\ x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\} & (2.27) \\ x_{ij} - \text{целые} & (2.28) \end{cases}$$

Следует заметить, что в отличие от транспортной задачи линейного программирования (2.16)—(2.20) в математической постановке целочисленной транспортной задачи в виде (2.23)—(2.28) используется дополнительное ограничение вида (2.28). При этом общее число переменных целочисленной транспортной задачи также равно: *m-n.*

Классическая транспортная задача целочисленного линейного программирования также является *сбалансированной* или *закрытой,* т. е. формулируется в виде, когда имеет место равенство общего объема производства рассматриваемого продукта общему объему его потребления. Этому условию соответствует отдельное ограничение (2.26). В противном случае, если равенство (2.26) не имеет места, то транспортная задача называется *несбалансированной* или *открытой.*

На практике могут встречаться различные модификации целочисленной транспортной задачи. Для иллюстрации особенностей ее решения с помощью программы MS Excel рассмотрим многопродуктовую транспортную задачу целочисленного линейного программирования.

2.6.2. Решение многопродуктовой целочисленной транспортной задачи с помощью MS Excel

Содержательно многопродуктовая целочисленная транспортная задача может быть сформулирована следующим образом.

В качестве транспортируемого продукта рассматривается бензин трех марок 76, 92 и 95, в качестве пунктов производства— 2 нефтеперерабатывающих завода (m = 2), а в качестве пунктов потребления — 4 автозаправочные станции (n = 4).

Объемы производства и потребления бензина в Табл. 2.5. При этом транспортировка бензина всех марок осуществляется бензовозами грузоподъемностью 4 *т.*

Таблица 2.5. *Стоимость транспортировки бензина различных марок между НПЗ и АЗС (в тыс. рублей)*

Пункты потребления/ Пункты производства	Марка бензина	АЗС №1	АЗС №2	АЗС №3	АЗС №4	Предложение
НПЗ №1	76	2	4	5	7	100 (25)
	92	2	6	5	8	60 (15)
	95	3	5	7	11	60 (15)
НПЗ №2	76	3	4	6	5	80 (20)
	92	3	5	9	10	100 (25)
	95	5	8	12	7	60 (15)

Спрос	76	40 (10)	60 (15)	44 (11)	36 (9)	
	92	60 (15)	40 (10)	24 (6)	36 (9)	
	95	20 (5)	40 (10)	28 (7)	32 (8)	

Для математической постановки рассматриваемой трехпродуктовой транспортной задачи в форме модели целочисленного линейного программирования необходимо выполнить некоторые предварительные преобразования. Во-первых, привести в соответствие объемы производства и потребления бензина с грузоподъемностью транспортных средств. Для этого следует разделить все объемы на 4 *т*. Во-вторых, ввести в рассмотрение 3-индексные переменные: x_{ijk} ($\forall\ i \in \{1, 2\}$, $\forall\ j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\forall\ k \in \{1, 2, 3\}$), каждая из которых будет соответствовать количеству бензовозов, перевозящих бензин k-й марки от i-го НПЗ к j-й АЗС.

Тогда соответствующая математическая постановка рассматриваемой индивидуальной целочисленной транспортной задачи с учетом выполненных предварительных преобразований может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}2x_{111}+2x_{112}+3x_{113}+4x_{121}+6x_{122}+5x_{123}+\\+5x_{131}+5x_{132}+7x_{133}+7x_{141}+8x_{142}+11x_{143}+\\+3x_{211}+3x_{212}+5x_{213}+4x_{221}+5x_{222}+8x_{223}+\\+6x_{231}+9x_{232}+12x_{233}+5x_{241}+10x_{242}+7x_{243}\to\min\nolimits_{x\in\Delta_\beta},\end{gathered} \tag{2.29}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases}x_{111}+x_{121}+x_{131}+x_{141}=25\\x_{112}+x_{122}+x_{132}+x_{121}=15\\x_{113}+x_{123}+x_{133}+x_{143}=15\\x_{211}+x_{221}+x_{231}+x_{241}=20\\x_{212}+x_{222}+x_{232}+x_{242}=25\\x_{213}+x_{223}+x_{233}+x_{243}=15\\x_{111}+x_{211}=10\\x_{112}+x_{212}=15\\x_{113}+x_{213}=5\\x_{121}+x_{221}=15\\x_{122}+x_{222}=10\\x_{123}+x_{223}=10\\x_{131}+x_{231}=11\\x_{132}+x_{232}=6\\x_{133}+x_{233}=7\\x_{141}+x_{241}=9\\x_{142}+x_{242}=9\\x_{143}+x_{243}=8\\x_{ijk}\geq 0\ (\forall i\in\{1,2\},\forall j\in\{1,2,3,4\},\forall k\in\{1,2,3\})\\x_{ijk}-\text{целые}\ \ (\forall i\in\{1,2\},\forall j\in\{1,2,3,4\},\forall k\in\{1,2,3\})\end{cases} \tag{2.30}$$

Как нетрудно заметить, исходная трехпродуктовая транспортная задача (2.29) и (2.30) распадается на три независимых транспортных задачи, соответствующие трем рассматриваемым маркам бензина Поскольку задачи транспортировки различных марок бензина не связаны между собой, они могут быть решены независимо друг от друга.

Ответ: F_{opt}=563.

2.7. Задача о назначении

Содержательная постановка задачи о назначении приводится в *разд. 1.2.8.* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации в форме математической модели булева линейного программирования.

2.7.1. Математическая постановка задачи о назначении

Имеется n видов работ, которые могут быть выполнены n кандидатами, где n — некоторое натуральное число. При этом каждого кандидата следует назначить на выполнение только одной работы, а каждая работа может выполняться только одним кандидатом. Заданы эффективности c_{ij} ($\forall$ $i,j \in \{1, 2,…,n\}$) индивидуального выполнения каждым из потенциальных кандидатов всех рассматриваемых работ. Требуется распределить всех кандидатов по работам, так чтобы общая эффективность выполнения всех работ была наибольшей.

Введем в рассмотрение следующие булевы переменные: x_{ij}, которые будут соответствовать назначению кандидатов на выполнение работ. В этом случае резонно предположить, что x_{ij}=1, если i-й кандидат назначается на выполнение j-й работы, и x_{ij}= 0. если i-й кандидат не назначается на выполнение j-й работы. Тогда математическая постановка *задачи о назначении* может быть сформулирована следующим образом.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max_{x\in\Delta_\beta}, \tag{2.31}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \forall i \in \{1,2,\dots,n\} & (2.32) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \forall j \in \{1,2,\dots,n\} & (2.33) \\ x_{ij} \in \{0,1\}, (\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}) & (2.34) \end{cases}$$

В математической постановке задачи о назначении (2.31)—(2.34) ограничение (2.32) соответствует требованию назначения каждого кандидата на выполнение только одной работы, а ограничение (2.33) — требованию выполнения каждой работы только одним кандидатом. Нетрудно заметить, что общее число булевых переменных задачи о назначении равно: n^2.

Классическая задача о назначении является *симметричной,* т. е. формулируется в форме, когда имеет место равенство общего числа работ и общего числа кандидатов. Если это условие не выполняется, то задача о назначении называется *несимметричной.* Однако при решении практических задач о назначении с помощью программы MS Excel данную особенность можно не принимать во внимание.

Если вместо эффективности выполнения работ кандидатами рассматриваются *затраты*, связанные с назначением кандидатов на выполнение работ, то исходная задача о назначении будет соответствовать задаче минимизации целевой функции (2.31). В итоге задача о назначении формулируется, как задача поиска оптимального назначения, которому соответствует минимум общих затрат на выполнение работ кандидатами. При этом ограничения задачи (2.32)—(2.34) остаются без изменения.

Нетрудно заметить, что любое допустимое решение задачи о назначении удобно представить в форме так называемой *булевой матрицы,* представляющей собой матрицу размерности (n х n), элементы которой принимают только двоичные значения 0 и 1. При этом булева матрица допустимого решения должна удовлетворять следующему условию: в каждой строке и каждом столбце этой матрицы должно находиться в точности по одной 1, а все остальные элементы матрицы равны 0. Очевидно, общее число единиц в матрице допустимого решения равно *n.*

2.7.2. Решение задачи о назначении с помощью программы MS Excel

Для решения задачи о назначении с помощью программы MS Excel необходимо задать конкретные значения параметрам. Для определенности рассмотрим вариант задачи о назначении в форме минимизации общих затрат на выполнение работ. В этом случае в качестве кандидатов рассмотрим сотрудников некоторой фирмы: Андреев, Бубнов, Васильев, Григорьев и Дмитриев, а в качестве работ— вакантные должности в этой фирме: менеджер, программист, бизнес-аналитик, маркетолог и руководитель проектов. Затраты c_{ij} ($\forall$ i,j ϵ {1, 2, 3, 4, 5}) на замещение должностей кандидатами, связанные с необходимостью их предварительного обучения и стажировки, заданы в форме следующей таблицы (табл. 2.6).

Таблица 2.6. *Затраты на замещение должностей кандидатами (в тыс. рублей)*

Кандидаты/ Должности	Андреев	Бубнов	Васильев	Григорьев	Дмитриев
Менеджер	5	10	9	14	6
Программист	13	15	11	19	17
Бизнес-аналитик	7	14	12	8	10
Маркетолог	8	11	6	7	9
Руководитель проектов	15	12	17	13	16

Соответствующая математическая постановка рассматриваемой задачи о назначении может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered} 5x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 14x_{14} + 6x_{15} + 13x_{21} + 15x_{22} + 11x_{23} + 19x_{24} + 17x_{25} + \\ +7x_{31} + 14x_{32} + 12x_{33} + 8x_{34} + 10x_{35} + 8x_{41} + 11x_{42} + 6x_{43} + 7x_{44} + 9x_{45} + \\ +15x_{51} + 12x_{52} + 17x_{53} + 13x_{54} + 16x_{55} \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \end{gathered} \tag{2.35}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \\ \quad x_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i,j \in \{1,2,3,4,5\} \end{cases} \qquad (2.36)$$

Заметим, что первые 5 ограничений данной задачи соответствуют общему ограничению (2.32), следующие 5 ограничений— общему ограничению (2.33), а последнее ограничение — общему ограничению (2.34).

Ответ: F_{opt}=43.

2.8. Задача о рюкзаке с булевыми переменными

Содержательная постановка задачи о рюкзаке приводится в *разд. 1.2.7.* В данной главе рассматривается ее модификация, используемая для формальной записи условий и решения соответствующей индивидуальной задачи оптимизации.

2.8.1. Математическая постановка одномерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными

Так же как и в одномерной целочисленной задаче о рюкзаке *(см. разд. 5.2),* переносимый в рюкзаке груз может включать *n* видов предметов, при этом каждый предмет вида $i \in \{1, 2,\ldots,n\}$ обладает массой a_i, *кг.* Для каждого вида предмета турист, исходя из своих субъективных предпочтений, определяет его индивидуальную ценность c_i во время перехода. При этом общая масса всех предметов ограничена емкостью рюкзака и составляет b *кг.* Дополнительно присутствует следующее требование: каждый из предметов имеется в *единственном экземпляре.*

Требуется определить такой набор из исходных предметов, которые следует положить в рюкзак, чтобы суммарная ценность предметов была максимальной, а их общая масса не превысила допустимого фиксированного значения.

Введем в рассмотрение следующие булевы переменные: x_i, — количество предметов i-го вида, которые следует положить в рюкзак. Очевидно, в этом случае: x_i=1, если предмет i-го вида следует положить в рюкзак, и $x_i = 0$, если предмет i-го вида не следует укладывать в рюкзак. Тогда в общем случае математическая постановка *одномерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными* может быть сформулирована следующим образом.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max_{x\in\Delta_\beta}, \qquad (2.37)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b \\ \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\} \end{cases} \qquad (2.38)$$

В случае введения в рассмотрение второй характеристики видов продуктов, например, их геометрического объема, в постановку задачи (2.37) и (2.38) следует ввести дополнительное ограничение на общий объем продуктов, которые следует положить в рюкзак. Соответствующая задача получила название *двумерной* задачи о рюкзаке с булевыми переменными. В общем случае аналогичным образом может быть получено ее обобщение на *m* типов характеристик продуктов. Соответствующая задача называется *многомерной задачей о рюкзаке с булевыми переменными.*

2.8.2. Решение одномерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными с помощью MS Excel

Предположим, что имеются 6 контейнеров: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой и синий (n = 6), а в качестве их характеристики — масса контейнера в *тоннах.* При этом масса каждого из контейнеров имеет следующие значения: $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 4$, a_4=5, $a_5 = 2$, $a_6 = 3$. Общая грузоподъемность автомобиля равна: $b = 15$. Дополнительно известна стоимость каждого из контейнеров (например, в *тыс. рублей).* $c_1 = 50$, $c_2 = 60$, $c_3 = 40$, $c_4 = 50$, $c_5 = 30$, $c_6 = 40$. Требуется определить те контейнеры, которые следует погрузить на автомобиль, так чтобы обеспечить максимальную стоимость общего груза и при этом не допустить перегрузки.

Исходными переменными математической модели данной булевой задачи о рюкзаке являются переменные x_i ($\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$), каждая из которых принимает значение 1, если i -й контейнер загружается в автомобиль, и 0 — в противном случае. Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о рюкзаке может быть записана в следующем виде.

$$50x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 30x_5 + 40x_6 \to \max_{x\in\Delta_\beta}, \qquad (2.39)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 3x_6 \le 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\} \end{cases} \qquad (2.40)$$

Ответ: F_{opt}=200.

2.9. Задача водопроводчика

Содержательная постановка задачи водопроводчика приводится в *разд. 1.2.11.* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации в форме математической модели булева линейного программирования.

2.9.1. Математическая постановка задачи водопроводчика

Для разработки математической модели конкретной задачи водопроводчика с конкретной схемой расположения труб (см. рис. 1.9) необходимо пронумеровать все имеющиеся плиты от 1 до 16, а трубы от 1 до 5. Тогда исходная схема расположения труб примет следующий вид (рис. 2.2).

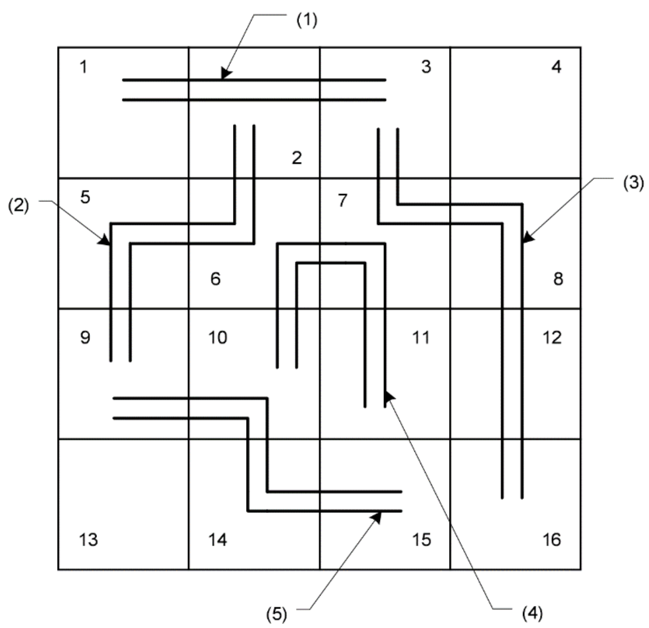


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация задачи водопроводчика

В качестве переменных математической модели задачи водопроводчика рассмотрим переменные: x_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 16\}$), которые интерпретируются следующим образом. Переменная x_i=1, если для установки вентильных перекрытий принято решение приподнять i-ю плиту, x_i=0 в противном случае, т. е. когда при выполнении работ i-я плита не приподнимается ($\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, 16\}$).

Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи водопроводчика может быть записана в следующем виде:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + \\ + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \qquad (2.41)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 + x_9 \geq 1 \\ x_3 + x_7 + x_8 + x_{12} + x_{16} \geq 1 \\ x_6 + x_7 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \\ x_9 + x_{10} + x_{14} + x_{15} \geq 1 \\ x_i \in \{0,1\}\ \forall i \in \{1,2,\dots,16\} \end{cases} \quad (2.42)$$

Заметим, что *каждой трубе* на схеме *соответствует ровно одно ограничение* (2.42), которое означает, что для получения доступа к той или иной трубе необходимо поднять, по крайней мере, одну из плит, под которыми проходит данная труба. Так, например, для установки перекрытия на первой трубе необходимо поднять плиту 1 или 2, или 3, или любую их комбинацию, чему соответствует первое ограничение (2.42). Аналогичным образом интерпретируются и остальные 4 из первых 5 ограничений данной математической модели. Целевая функция (2.41) соответствует требованию минимизации общего количества приподнимаемых плит при производстве данных работ.

Ответ: F_{opt}=3.

Глава 3. Задачи оптимизации на графах

Многие прикладные задачи оптимизации могут быть сформулированы в форме той или иной задачи оптимизации на графах. Из достаточно большого числа типовых задач оптимизации на графах в настоящей главе рассматриваются только те, которые стали в некотором смысле классическими для задач данного класса:

- задача нахождения оптимальных покрывающих деревьев;
- задача нахождения кратчайшего пути в графе;
- задача нахождения критического пути в сетевом графе;
- задача нахождения максимального потока в графе.

3.1. Общая характеристика задач оптимизации на графах

К классу задач оптимизации на графах относятся такие задачи оптимизации, которые формулируются в форме нахождения специальных объектов на графе, обеспечивающих оптимальное значение некоторой целевой функции. При этом вид целевой функции и ограничений заранее не указываются и определяются спецификой конкретной задачи оптимизации. В общем случае задачи оптимизации на графах не предполагают формулировку исходной задачи в форме задачи математического программирования, однако успех в решении соответствующих задач тесно связан с выбором удачной модели для ее математической постановки.

3.2. Задача о минимальном покрывающем дереве в графе

3.2.1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим неориентированный связный граф: $G = (V, E, h)$, в котором V - $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ — конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2,...,e_m\}$ — конечное множество ребер, $h:E \rightarrow Z_+$ — весовая функция ребер. Для математической постановки задачи удобно обозначить отдельные значения весовой функции ребер через: $c_{ij} = h(e_k)$, где ребро $e_k \in E$ соответствует паре вершин $\{v_i, v_j\} \in V$. Согласно содержательной постановке рассматриваемой задачи отдельные значения: $c_{ij} = h(\{v_i, v_j\})$ могут интерпретироваться как длина, затраты или стоимость участка (i, j) исходного графа.

Стоимость любого подмножества ребер $E_k \in E$ в графе G равна сумме весов ребер, входящих в это подмножество. Требуется определить такое подмножество ребер, которое образует покрывающее или остовное дерево в графе G и обладает минимальной стоимостью.

Для формальной записи условий задачи о минимальном покрывающем дереве в графе в виде модели булева программирования следует воспользоваться двумя условиями покрывающего дерева в графе:

- Каждая из вершин исходного графа должна иметь хотя бы одно инцидентное ей ребро, входящее в минимальное покрывающее дерево. В противном случае такие вершины в искомом дереве окажутся изолированными, и, следовательно, дерево не будет являться покрывающим.
- Общее количество ребер в минимальном покрывающем дереве должно быть в точности равно n-1, где n — общее количество вершин исходного графа. Действительно, если некоторое дерево содержит меньше n-1 ребер, то оно не будет покрывающим, если же дерево содержит больше n-1 ребер, то оно будет содержать цикл.

3.2.2. Решение задач о минимальном и максимальном дереве с помощью MS Excel

Рассмотрим задачу разработки проекта транспортной сети, которая должна соединить 7 населенных пунктов в некотором географическом районе. Данный район может быть представлен в виде схемы, формально представляющей собой неориентированный связный граф, состоящий из 7 вершин и 12 ребер (рис. 3.1). Стоимость прокладки автодороги между двумя соседними населенными пунктами, выраженная, например, в *млн. рублей,* равна значению весовой функции для каждого ребра, которое указано рядом с изображением этого ребра в графе.

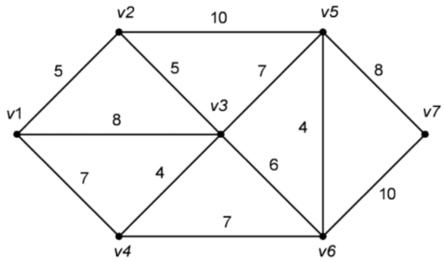


Рис. 3.1. Исходный граф индивидуальной задачи о покрывающем дереве

Требуется разработать такой проект, чтобы общая стоимость реализации проекта была минимальной. При этом должно быть выполнено обязательное условие — из любого населенного пункта по построенным автодорогам можно было бы попасть в любой другой населенный пункт данного географического района.

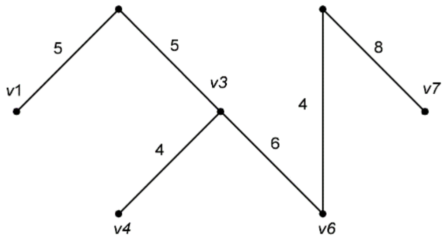
Переменными математической модели данной индивидуальной задачи о минимальном покрывающем дереве являются 12 переменных: x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{46}, x_{56}, x_{57}, x_{67}. Каждая из этих переменных x_{ij} принимает значение 1, если ребро $\{i, j\}$ входит в минимальное покрывающее дерево, и 0 — в противном случае. Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о минимальном покрывающем дереве может быть записана в следующем виде:

$$5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 5x_{23} + 10x_{25} + 4x_{34} + 7x_{35} + 6x_{36} + \\ +7x_{46} + 4x_{56} + 8x_{57} + 10x_{67} \to \min_{x \in \Delta_\beta}, \quad (3.1)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1 \\ x_{12} + x_{23} + x_{25} \geq 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 1 \\ x_{14} + x_{34} + x_{46} \geq 1 \\ x_{25} + x_{35} + x_{56} + x_{57} \geq 1 \\ x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{67} \geq 1 \\ x_{57} + x_{67} \geq 1 \\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{57} + x_{67} = 6 \\ x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{46}, x_{56}, x_{57}, x_{67} \in \{0,1\} \end{cases} \quad (3.2)$$

Ответ: общая стоимость реализации проекта будет минимальной и равна32 *млн. руб.*



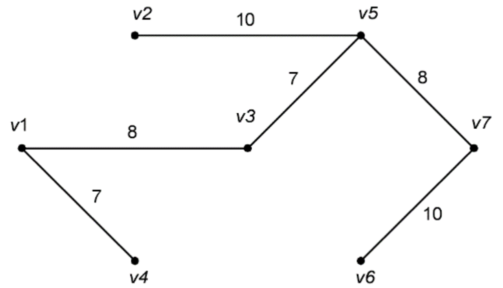
3.2.3. Решение задачи о максимальном покрывающем дереве в графе с помощью MS Excel

Задача о минимальном покрывающем дереве в графе (3.1) и (3.2) может быть легко преобразована к варианту задачи о максимальном покрывающем дереве в графе, при этом характер задачи и ее сложность не изменяются. Соответствующая содержательная задача может быть сформулирована следующим образом.

При маршрутизации пакетов передачи данных в вычислительных сетях желательно выбирать каналы передачи данных между соседними маршрутизаторами с максимальной скоростью или пропускной способностью. Именно в этом случае будет обеспечена максимальная скорость передачи данных между любыми двумя абонентами. Считается, что два абонента или узла сети соединены между собой, если существует прямой или транзитный канал связи между ними. Топология вычислительной сети и пропускная способность линий связи, выраженная, например, в *млн. бит в сек,* могут быть представлены в виде связного неориентированного графа (см. рис. 3.1). Требуется определить вариант маршрутизации узлов данной вычислительной сети с максимальной пропускной способностью.

Математическая постановка задачи о максимальном покрывающем дереве в графе аналогична математической постановке задачи о минимальном покрывающем дереве (3.1) и (3.2) за исключением того, что в выражении для целевой функции (3.1) операция нахождения минимума должна быть операцией нахождения максимума.

Ответ: общая пропускная способность оптимального варианта маршрутизации будет максимальной и равна 50 *млн. бит в сек.*



3.3. Задача о минимальном пути в графе

Содержательная постановка задачи о минимальном пути в графе приводится в *разд. 1.2.5.* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации в виде модели булева программирования.

3.3.1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим ориентированный граф: $G = (V, E, h)$, в котором V - $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ — конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2,...,e_m\}$ — конечное множество дуг, $h{:}E \rightarrow Z_+$ — весовая функция дуг. Для математической постановки задачи удобно обозначить отдельные значения весовой функции ребер через: $c_{ij} = h(e_k)$, где дуга $e_к \in E$ соответствует упорядоченной паре вершин (v_i, v_j). Согласно содержательной постановке рассматриваемой задачи значения: $c_{ij} = h(\{v_i, v_j\})$ могут интерпретироваться как длина участка, затраты или стоимость переезда из i-го города в j-й город.

Длина любого маршрута в графе равна сумме весов дуг, входящих в этот маршрут. Дополнительно в графе фиксируются две вершины: *начальная* вершина v_s и *конечная* вершина v_t. В предположении, что исходный граф G является связным, т. е. вершина v_t потенциально достижима из v_s, требуется определить маршрут минимальной длины из начальной вершины $\mathrm{v_s}$ в конечную вершину v_t.

Вводим в рассмотрение следующие булевы переменные x_{ij} которые интерпретируются следующим образом. Переменная $x_{ij}=1$, если дуга (v_i, v_j) входит в искомый маршрут минимальной длины, и $x_{ij}=0$, в противном случае, т. е. если дуга (v_i, v_j) не входит в оптимальный маршрут.

3.3.2. Решение задачи о минимальном пути в ориентированном графе с помощью MS Excel

Рассмотрим задачу нахождения минимального пути в транспортной сети, которая соединяет 8 населенных пунктов в некотором географическом районе. Район может быть задан в виде схемы, состоящий из 8 вершин и 15 дуг (рис. 3.2). Длина автодороги между двумя соседними населенными пунктами, выраженная, например, в *км.* равна для каждой дуги значению весовой функции, которое указано рядом с изображением этой дуги в графе.

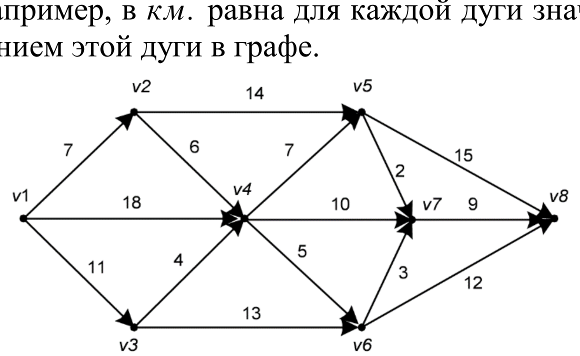


Рис. 3.2. Исходный ориентированный граф индивидуальной задачи о минимальном пути

Требуется найти маршрут, соединяющий начальный пункт 1, которому соответствует вершина $v_1=v_s$ с конечным пунктом 8, которому соответствует вершина $v_8=v_t$ так чтобы общая длина пути была минимальной.

Переменными математической модели данной индивидуальной задачи о минимальном пути в ориентированном графе являются 15 переменных x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{67} , x_{68}, x_{78}.

Каждая из этих переменных x_{ij} принимает значение 1, если дуга $(i,\ j)$ входит в минимальный путь, и 0 — в противном случае. Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о минимальном пути в ориентированном графе может быть записана в следующем виде:

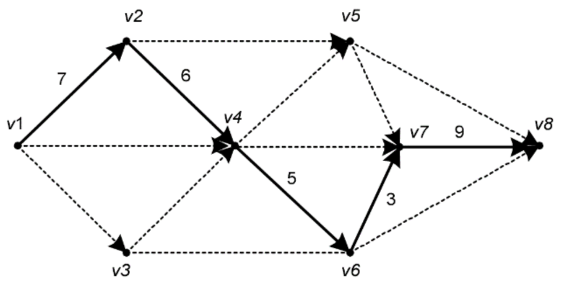
$$\begin{aligned} &7x_{12}+11x_{13}+18x_{14}+6x_{24}+14x_{25}+4x_{34}+13x_{36}+7x_{45}+\\ &+5x_{46}+10x_{47}+2x_{57}+15x_{58}+3x_{67}+12x_{68}+9x_{78}\to \min_{x\in\Delta_\beta}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\begin{cases} x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\ x_{58}+x_{68}+x_{78}=1\\ x_{12}-x_{24}-x_{25}=0\\ x_{13}-x_{34}-x_{36}=0\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}-x_{45}-x_{46}-x_{47}=0\\ x_{25}+x_{45}-x_{57}-x_{58}=0\\ x_{36}+x_{46}-x_{67}-x_{68}=0\\ x_{47}+x_{57}+x_{67}-x_{78}=0\\ x_{12},x_{13},x_{14},x_{24},x_{25},x_{34},x_{36},x_{45},\\ x_{46},x_{47},x_{57},x_{58},x_{67},x_{68},x_{78}\in\{0,1\} \end{cases} \tag{3.4}$$

Примечание. Первые два равенства – баланс для начальной и конечной вершины. Остальные 6 – для промежуточных. Входящая дуга берется со знаком +, исходящая – со знаком минус.

Ответ: общая длина пути будет минимальной и равна 30 *км*.



3.4. Задача нахождения критического пути в ориентированном графе

Хотя задача нахождения максимального пути в ориентированном графе по своему характеру во многом похожа на задачу о минимальном пути в графе, она имеет самостоятельное значение в контексте более общей прикладной задачи нахождения критического пути выполнения бизнес-процесса. В настоящем разделе рассматривается ее содержательная постановка, необходимая для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации в виде модели булева программирования.

3.4.1. Содержательная постановка задачи нахождения критического пути бизнес-процесса

Данная задача является *одной из основных при моделировании различных бизнес-процессов*, а также при планировании и управлении проектами выполнения работ самого различного целевого назначения. Сущность задачи нахождения критического пути выполнения бизнес-процесса заключается в следующем.

Многие реальные проекты, такие как строительство дома и транспортной сети города, изготовление и сборка машин и механизмов, разработка технических устройств и программного обеспечения, обработка заказов в торговле и логистике, а также процессы приготовления кофе и обучения в институте могут быть детализированы в форме выполнения большого количества различных операций или работ. Некоторые из этих операций могут выполняться одновременно или параллельно, другие — только последовательно, когда та или иная операция может начаться только после окончания других операций.

Например, при строительстве дома можно параллельно выполнять работы по внутренней отделке помещений и озеленению прилегающей к дому территории. При разработке программного обеспечения можно одновременно выполнять написание программ для одних модулей и тестирование других модулей.

В то же время последовательное выполнение операций бизнес-процесса требует согласования времени начала и окончания отдельных работ. Например, при строительстве дома выполнение работы по внутренней отделке помещений может начаться только после того, как будут закончены работы по возведению стен и крыши дома.

В общем случае модель бизнес-процессов, отражающая последовательность и логическую взаимосвязь выполнения отдельных операций или работ, может быть представлена в форме некоторого конечного ориентированного графа.

Таким образом, исходной информацией для моделирования бизнес-процессов является ориентированный граф выполнения операций, каждая дуга которого интерпретируется как отдельная операция или работа этого бизнес-процесса, а вершина — как некоторое событие, связанное с завершением выполнения тех или иных операций.

При этом временная длительность выполнения отдельных операций задается в форме веса соответствующей дуги.

Исходя из общей логики выполнения бизнес-процессов, *вводится следующее условие* — графическая модель отдельного бизнес-процесса *должна иметь единственное начальное событие,* которое инициирует начало его выполнения, *и единственное конечное событие*, которое фиксирует момент окончания его выполнения. Применительно к ориентированному графу бизнес-процесса это условие означает, что в данном графе должна быть единственная вершина, из которой *выходят* дуги, и единственная вершина, в которую *входят* дуги.

Дополнительно требуется, чтобы рассматриваемый ориентированный граф модели бизнес-процесса *не содержал циклов* и *был связным*, т. е. его конечная вершина была достижима из начальной вершины.

Ориентированный граф, удовлетворяющий перечисленным условиям, называется *сетевым графом* или просто *сетью.*

Следует заметить, что *если все операции некоторого бизнес-процесса выполняются последовательно, то его общая длительность равна алгебраической сумме интервалов времени выполнения отдельных операций. Если же операции бизнес-процесса выполняются параллельно, то общая длительность бизнес- процесса, очевидно, равна максимальному интервалу времени параллельно выполняемых операций.*

Отсюда следует вывод: *длительность выполнения бизнес-процесса, представленного в общем случае моделью сетевого графа, равна пути максимальной длины, соединяющего начальную вершину этого графа с его конечной вершиной. Такой путь получил специальное название —* ***критического пути*** *в сетевом графе.*

Таким образом, задача построения сетевого графа бизнес-процесса и нахождения критического пути в этом сетевом графе становится важным элементом моделирования бизнес-процессов.

3.4.2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим ориентированный граф: $G = (V, E, h)$, в котором V - $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ — конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ — конечное множество дуг, $h: E \to Z_+$ — весовая функция дуг. Для математической постановки задачи удобно обозначить отдельные значения весовой функции ребер через: $c_{ij} = h(e_k)$, где дуга $e_\kappa \in E$ соответствует упорядоченной паре вершин (v_i, v_j). Согласно содержательной постановке рассматриваемой задачи значения: $c_{ij} = h(\{v_i, v_j\})$ могут интерпретироваться как длина участка, затраты или стоимость переезда из i-го города в j-й город.

Применительно к задаче нахождения критического пути в сетевом графе каждая дуга (v_i, v_j) интерпретируется как отдельная операция бизнес-процесса, а значения c_{ij} — как временная длительность выполнения соответствующей операции (v_i, v_j).

Дополнительно в графе фиксируются две вершины: *начальная* вершина v_s и *конечная* вершина v_t. При этом длина любого маршрута в графе равна сумме весов дуг, входящих в этот маршрут. В предположении, что исходный сетевой граф G является связным, т. е. вершина v_t потенциально достижима из v_s и не содержит циклов, требуется определить маршрут максимальной длины из начальной вершины v_s в конечную вершину v_t.

Как и в задаче о минимальном пути в ориентированном графе, введем в рассмотрение булевы переменные x_{ij}, которые интерпретируются следующим образом. Переменная $x_{ij} = 1$, если дуга (v_i, v_j) входит в искомый маршрут максимальной длины, и $x_{ij} = 0$, в противном случае, т. е. если дуга (v_i, v_j) не входит в оптимальный маршрут. Тогда в общем случае математическая постановка задачи о максимальном маршруте в ориентированном графе или критическом пути в сети может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max_{x \in \Delta_\beta},$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется системой ограничений, которая полностью тождественна системе ограничений математической модели задачи о минимальном пути в ориентированном графе (3.4).

3.4.3. Решение задачи нахождения критического пути в сетевом графе с помощью MS Excel

Рассмотрим задачу нахождения максимального пути в сетевом графе, структура которого полностью совпадает с графом, являющимся исходным для решения задачи о минимальном пути (рис. 3.3). При этом изменится только лишь интерпретация вершин и дуг, а именно — каждая дуга данного сетевого графа будет означать отдельную операцию некоторого бизнес-процесса, а вершина— событие, связанное с моментом начала или окончания этих операций. Длительность выполнения операций, выраженная, например, в *часах,* равна значению весовой функции для каждой дуги, которое указано рядом с изображением этой дуги в графе.

Требуется найти критический путь, соединяющий начальное событие 1, которому соответствует вершина $v_1 = v_s$ с конечным событием 8, которому соответствует вершина $v_8 = v_t$ так чтобы общая длина пути была максимальной.

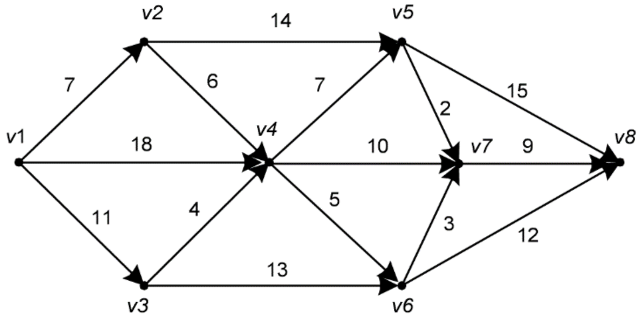


Рис. 3.3. Исходный ориентированный граф индивидуальной задачи о минимальном пути

Так же, как в задаче о минимальном пути, переменными математической модели данной индивидуальной задачи о критическом пути в сетевом графе являются 15 переменных: x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{67} , x_{68}, x_{78}.

Каждая из этих переменных x_{ij} принимает значение 1, если дуга (i,j) входит в критический путь, и 0 — в противном случае. Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о критическом пути в сетевом графе может быть записана в следующем виде:

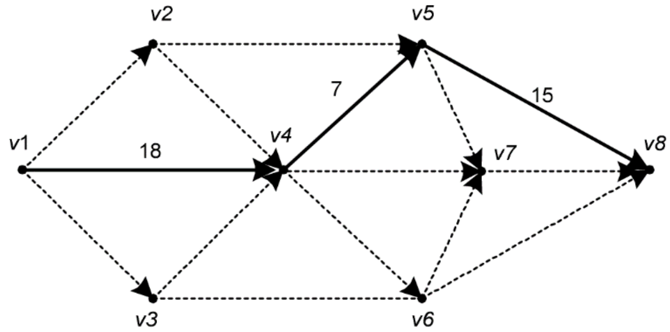
$$\begin{gathered} 7x_{12} + 11x_{13} + 18x_{14} + 6x_{24} + 14x_{25} + 4x_{34} + 13x_{36} + 7x_{45} + \\ +5x_{46} + 10x_{47} + 2x_{57} + 15x_{58} + 3x_{67} + 12x_{68} + 9x_{78} \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{58} + x_{68} + x_{78} = 1 \\ x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0 \\ x_{13} - x_{34} - x_{36} = 0 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} - x_{47} = 0 \\ x_{25} + x_{45} - x_{57} - x_{58} = 0 \\ x_{36} + x_{46} - x_{67} - x_{68} = 0 \\ x_{47} + x_{57} + x_{67} - x_{78} = 0 \\ x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{45}, \\ x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{67}, x_{68}, x_{78} \in \{0,1\} \end{cases} \tag{3.6}$$

Примечание. Первые два равенства – баланс для начальной и конечной вершины. Остальные 6 – для промежуточных. Входящая дуга берется со знаком +, исходящая – со знаком минус.

Ответ: общая продолжительность критического пути будет максимальной и равна 40 *час.,* что соответствует общей плановой продолжительности бизнес-процесса.



3.5. Задача о максимальном потоке в сети

Содержательная постановка задачи о максимальном потоке в сети приводится в разд. 1.2.10. В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации в виде модели целочисленного линейного программирования.

3.5.1 Математическая постановка задачи

Пусть $G = (V, E, h)$ — ориентированный граф, в котором $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,— конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ — конечное множество дуг, $h{:}E \to Z_+$ — весовая функция дуг, которая интерпретируется как пропускная способность дуги. Дополнительно в графе фиксируются две вершины: начальная вершина v_s, которая называется *исток,* и конечная вершина v_t, которая называется *сток.* В предположении, что исходный граф G является связным, т. е. вершина v_t потенциально достижима из v_s, и не содержит циклов, требуется определить поток максимального объема, протекающий из начальной вершины v_s в конечную вершину v_t.

Введем в рассмотрение следующие неотрицательные целочисленные переменные — x_{ij}, которые интерпретируются как величина потока, проходящего по дуге $(v_i, v_j) \in E$. Тогда в общем случае математическая постановка задачи о максимальном потоке в сети может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to \min_{x \in \Delta_\beta}, \tag{3.7}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} - \sum_{j=1}^{n} x_{it} = 0; & (3.8) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0 \ (\forall i \in \{1,2,\dots,n\}, i \neq s, i \neq t); & (3.9) \\ 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}, (\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}); & (3.10) \\ x_{ij} \in Z_+^1 \ (\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}). & (3.11) \end{cases}$$

При этом первое ограничение (3.8) требует выполнения следующего условия: величина потока, выходящего из вершины v_s (истока), должна быть равна величине потока, входящего в вершину v_t (сток). Вторая группа ограничений (3.9) гарантирует выполнение следующего условия: любой частичный поток, входящий в каждую промежуточную вершину графа, должен быть равен потоку, выходящему из этой вершины. Общее количество ограничений (3.8) и (3.9) равно *n-1*. Третья группа ограничений (3.10) требует выполнения следующего условия: величина потока, протекающего по дуге $(v_i, v_j) \in E$ должна быть неотрицательной и не должна превышать пропускной способности этой дуги c_{ij}.

Наконец, последнее ограничение (3.11) требует, чтобы все переменные принимали только неотрицательные целочисленные значения. Напомним также, что ориентированный связный граф, не содержащий циклов, принято называть сетью.

3.5.2. Решение задачи о максимальном потоке в сети с помощью программы MS Excel

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в сети, которая представляет модель системы магистральных трубопроводов, связывающих источник добычи некоторого жидкого продукта (нефти, газа) с предприятием по его переработке. Данная модель может быть представлена в виде схемы, представляющей собой ориентированный связный граф без циклов, состоящий из *6* вершин и 10 дуг (рис. 3.4). Предельные значения пропускной способности каждого участка системы равны значению весовой функции для каждой дуги, которые указаны рядом с изображением этой дуги в графе.

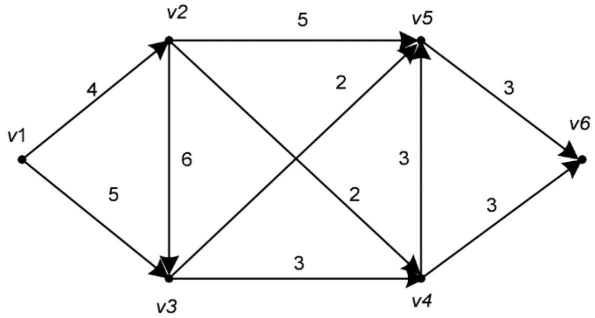


Рис. 3.4. Исходный ориентированный граф задачи о максимальном потоке в сети.

Исток (вершина $v_1 = v_s$) обладает достаточными запасами продукта, требуется определить количество транспортируемого продукта по каждому из участков трубопроводной системы до стока, (вершина $v_6 = v_t$) так чтобы количество доставленного на сток продукта было максимальным.

Переменными математической модели данной задачи о максимальном потоке в сети являются 10 переменных: x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45}, x_{46}, x_{56}. Каждая из этих переменных x_{ij} может принимать неотрицательное ***целочисленное*** значение, не превышающее пропускной способности дуги c_{ij}. Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о максимальном потоке в сети может быть записана в следующем виде:

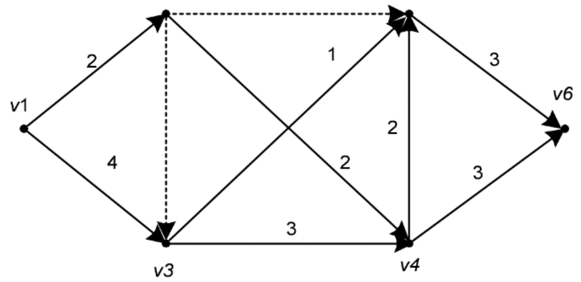
$$x_{12} + x_{13} \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \tag{3.12}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств и неравенств:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} - x_{46} - x_{56} = 0 \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0 \\ x_{25} + x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0 \\ 0 \le x_{12} \le 4;\ 0 \le x_{13} \le 5;\ 0 \le x_{23} \le 6;\ 0 \le x_{24} \le 2; \\ 0 \le x_{25} \le 5;\ 0 \le x_{34} \le 3;\ 0 \le x_{35} \le 2;\ 0 \le x_{45} \le 3; \\ 0 \le x_{46} \le 3;\ 0 \le x_{56} \le 3; \\ x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45}, x_{46}, x_{56} \in Z_+^1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Первое равенство – условие равенства потоков истока и стока. Остальные – балансы вершин.

Ответ: этом общая величина потока транспортируемого продукта для рассматриваемой сети будет максимальна и равна 6 *т/час.*



Глава 4. Задачи нелинейного программирования

К классу задач нелинейного программирования относятся такие задачи непрерывной оптимизации, в которых целевая функция является нелинейной функцией своих аргументов, а ограничения могут быть представлены как в форме линейных, так и нелинейных функций. Задачи нелинейного программирования также называют задачами *нелинейной оптимизации.* Исторически данный класс задач оптимизации был изучен ранее остальных.

4.1. Задача о коробке максимального объема

Содержательная постановка задачи о коробке максимального объема приводится в *разд. 1.2.1,* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации.

4.1.1. Математическая постановка задачи о коробке максимального объема

Для математической постановки данной задачи необходимо ввести в рассмотрение некоторые параметры, характеризующие геометрические размеры коробки. С этой целью дополним содержательную постановку задачи соответствующими параметрами. С этой целью будем рассматривать квадратную заготовку из некоторого гибкого материала, которая имеет длину стороны L (рис. 4.1). Из этой заготовки следует вырезать четыре равных квадрата со стороной r по ее углам, а полученную фигуру согнуть, так чтобы получилась коробка без верхней крышки. Задача состоит в таком выборе размера вырезаемых квадратов, чтобы в результате получилась коробка максимального объема.

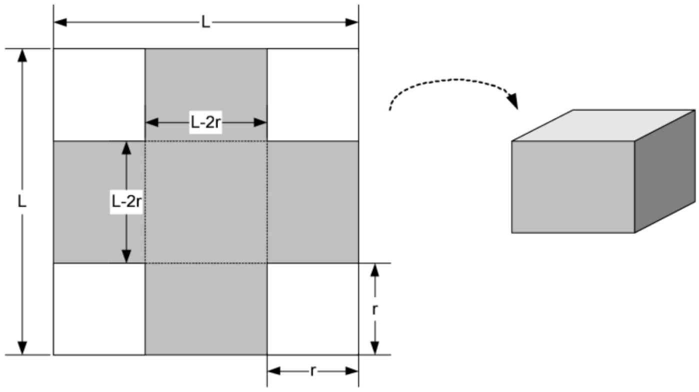


Рис. 4.1. Схема изготовления коробки из прямоугольной заготовки с указанием ее размеров

В качестве переменной следует взять длину стороны вырезаемого квадрата r, которая в общем случае принимает непрерывные действительные значения. Целевой функцией является объем полученной коробки. Поскольку длина стороны основания коробки равна: $L\text{-}2r$, а высота коробки равна r, то ее объем находится по формуле: $V(r) = (L - 2r)^2 \cdot r$. Исходя из физических соображений, значения переменной r должны быть положительными и не превышать величину половины размера исходной заготовки L, т. е. $0{,}5 \cdot L$.

С целью унификации, обозначим переменную через $x = r$. Тогда математическая постановка задачи о коробке максимального объема может быть записана в следующем виде:

$$f(x) = x(L-2x)^2 \to \max_{x\in\Delta_\beta}, \text{ где } \Delta_\beta = \{x \in R^1 | 0 \le x \le 0{,}5L\}. \quad (4.1)$$

4.1.2. Решение задачи о коробке максимального объема с помощью MS Excel

Не уменьшая общности математической постановки задачи (3.2.1), предположим: $L = 1$.

к следующему заключению. Результатом решения является оптимальное значение стороны вырезаемого квадрата: $r_{opt} = 0{,}167$, при котором изготовленная коробка будет иметь максимальный объем: $V_{max} = 0{,}074$. Напомним, что это решение соответствует длине стороны исходной заготовки, равной 1.

4.2. Задача о пожарном ведре

Содержательная постановка задачи о пожарном ведре максимального объема приводится в *разд. 1.2.2,* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи оптимизации.

4.2.1. Математическая постановка задачи о пожарном ведре

Дополним содержательную постановку этой задачи соответствующими параметрами, аналогично задаче о коробке. Имеется заготовка в форме круга радиуса R (рис. 3.9, *а).* Из заготовки следует вырезать некоторой сектор, имеющий угол α. После чего, согнув полученную фигуру и сварив шов, можно получить конус без своего основания (рис. 4.2, *б).* Необходимо так выбрать угол вырезаемого сектора, чтобы ведро оказалось максимального объема.

Необходимо определить переменные соответствующей задачи оптимизации, задать целевую функцию и специфицировать ограничения. Очевидно, в качестве переменной задачи следует взять угол вырезаемого сектора α, который, исходя из содержательной постановки задачи, может принимать непрерывные действительные значения. Целевой функцией данной задачи является объем полученного ведра или конуса. Поскольку радиус основания конуса равен *r*, а высота конуса равна *h*, то его объем находится по формуле:

$$V(\alpha) = (1/3)\,\pi\, r^2 h.$$

Сложность заключается в том, что как радиус основания, так и высота конуса являются некоторыми функциями от угла сектора, т. е. $r = r(\alpha)$ и $h = h(\alpha)$ соответственно.

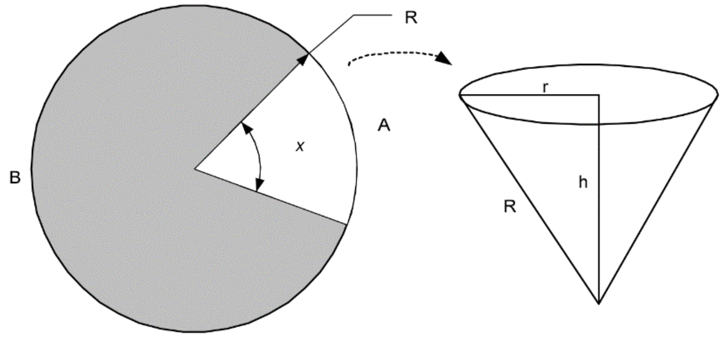


Рис. 4.2. Схема изготовления ведра из круглой заготовки с указанием ее размеров

Для математической постановки данной задачи целевую функцию необходимо преобразовать к виду, в котором установлена явная зависимость объема конуса от угла вырезаемого сектора из исходной заготовки. Из рис. 4.2, *а* видно, что длина окружности исходной заготовки равна сумме длины дуги A и длины дуги B, причем длина дуги B равна длине окружности основания конуса. С другой стороны, длина окружности исходной заготовки равна: $2\pi R$, где R — радиус исходной заготовки.

Используя несложные формулы пропорций, можно получить выражение для длины дуги A, которая равна: $2\pi R\,\alpha/360$. Откуда длина основания конуса или ведра равна: $2\pi R - 2\pi R\,\alpha/360$. Поскольку $2\pi r = 2\pi R - 2\pi R\,\alpha/360$, после несложных преобразований получим:

$$r(\alpha) = R(1 - \alpha/360).$$

Для нахождения зависимости высоты конуса от угла сектора заметим, что R, r и h образуют стороны прямоугольного треугольника (рис. 4.2, *б*). Откуда по теореме Пифагора непосредственно следует:

$$h(\alpha) = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - (1 - \frac{\alpha}{360})^2}$$

С целью унификации обозначений и удобства дальнейших рассуждений, обозначим переменную задачи оптимизации через $x = \boldsymbol{\alpha}$. Тогда математическая постановка задачи о пожарном ведре максимального объема может быть записана в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi R^3 \left(1 - \frac{x}{360}\right)^2 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{360}\right)^2} \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \qquad (4.2)$$

где $\Delta_\beta = \{x \in R^1 | 0 \le x \le 360\}$

Целевая функция данной задачи также является нелинейной, поэтому задача о ведре максимального объема относится к классу задач нелинейного программирования или нелинейной оптимизации.

4.2.2. Решение задачи о пожарном ведре максимального объема с помощью MS Excel

Не уменьшая общности математической постановки задачи (3.3.1), предположим: $R = 1$. Из вида целевой функции можно заключить, что R выступает в качестве постоянного коэффициента и так же, как параметр π, не оказывает влияния на нахождение оптимального решения.

Результатом решения является оптимальное значение угла вырезаемого сектора: $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{opt}}$= 66,061°, при котором изготовленное пожарное ведро будет иметь максимальный объем: V_{max} = 0,403. Само оптимальное решение $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{opt}}$ не зависит от радиуса исходной заготовки, в отличие от объема пожарного ведра V_{max}. Это означает, что во всех конкретных случаях для получения оптимального решения рассматриваемой задачи оптимизации следует принять $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{opt}}$ = 66,061°. Для получения же значения V_{max} следует воспользоваться формулой для целевой функции (3.3.1), т. о. задачу надо решить 1 раз.

4.3. Задача о строительстве универсама

Обе рассмотренные ранее задачи относятся к классу задач *одномерной* нелинейной оптимизации, поскольку имеют единственную переменную. Далее описывается задача о строительстве универсама, которая является примером задач *многомерной* нелинейной оптимизации.

В математической модели этой задачи используется две независимые переменные, каждая из которых представляет отдельную координату точки на плоскости.

4.3.1. Содержательная постановка задачи о строительстве универсама

Для конкретности рассмотрим один из вариантов этой задачи.

Имеется 4 жилых дома, расположенных в некотором микрорайоне города. Требуется определить местоположение для строительства универсама, так чтобы общее расстояние от построенного универсама до всех жилых домов было минимальным (рис. 4.3).

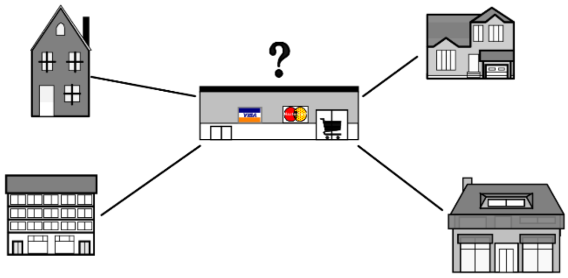


Рис. 4.3. Иллюстрация содержательной постановки задачи о строительстве универсама

4.3.2. Математическая постановка задачи о строительстве универсама

Для математической постановки задачи следует ввести некоторые обозначения для географических координат 4-х исходных жилых домов. С этой целью, введем некоторую прямоугольную систему координат, в которой исходные дома и универсам будут представлять собой отдельные точки на плоскости (рис. 4.4). Координаты исходных домов могут быть записаны как координаты соответствующих точек в виде: (x_i, y_i), где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Искомые координаты универсама, который предполагается построить, можно положить равными: (x, y). Очевидно, они служат переменными рассматриваемой задачи оптимизации, каждая из которых по своему характеру может принимать действительные значения из R^1.

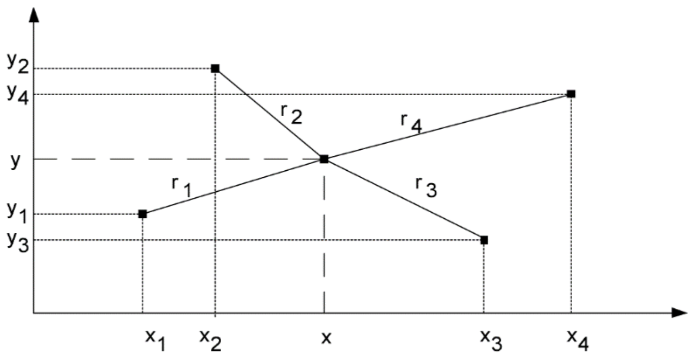


Рис. 4.4. Иллюстрация математической постановки задачи о строительстве универсама

В некоторой фиксированной прямоугольной системе координат значения переменных x и y могут быть как положительными, так и отрицательными. Тем самым задачу о строительстве универсама можно считать задачей оптимизации без ограничений.

В качестве целевой функции данной задачи будем рассматривать сумму расстояний от искомой точки (x, y) до каждой из заданных точек $(x_i\ y_j,)$, $(\forall\ i \in \{1, 2, 3, 4\})$, рассчитанных по формуле Евклида. Каждое отдельное расстояние в этом случае равно: $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда общее расстояние будет определяться выражением: $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$.

Таким образом, математическая постановка задачи о строительстве универсама может быть записана в следующем виде:

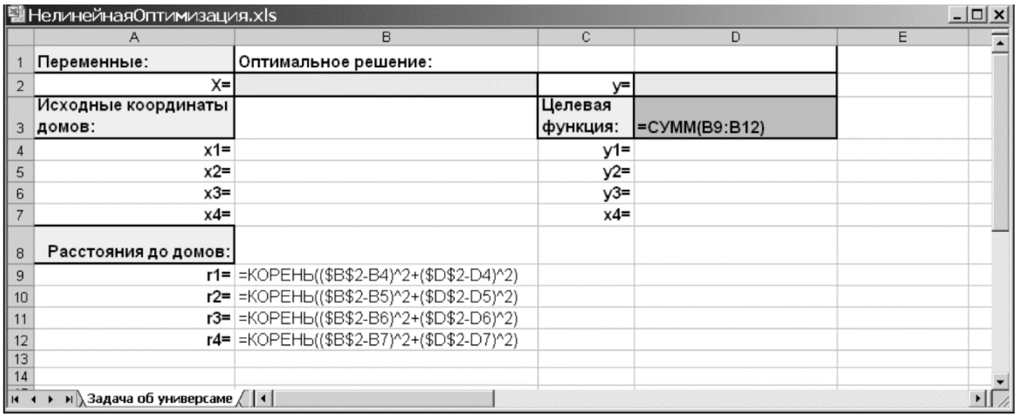
$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{4} \sqrt{(x - x_i)^2 - (y - y_i)^2} \to \min_{x,y \in \Delta}, \qquad (4.3)$$

где $\Delta = \{x, y \in R^1\}$.

Поскольку целевая функция данной задачи является нелинейной, задача о строительстве универсама относится к классу задач нелинейного программирования без ограничений.

4.3.3. Решение задачи о строительстве универсама с помощью MS Excel

Результатом решения задачи для четырех жилых домов с координатами (1, 2), (3, 10), (25, 3) и (12, 9) является оптимальное расположение универсама с координатами $x^* = 10{,}048$ и $y^* = 7{,}762$, при которых общее расстояние от универсама до жилых домов будет минимальным и равно значению: $f(x^*, y^*) = 32{,}125$. Допустимая точность решения задается в каждом конкретном случае отдельно, исходя из специфики задачи.


НелинейнаяОптимизация.xls

	A	B	C	D	E
1	Переменные:	Оптимальное решение:			
2	X=		y=		
3	Исходные координаты домов:		Целевая функция:	=СУММ(B9:B12)	
4	x1=		y1=		
5	x2=		y2=		
6	x3=		y3=		
7	x4=		x4=		
8	Расстояния до домов:				
9	r1=	=КОРЕНЬ(($B$2-B4)^2+($D$2-D4)^2)			
10	r2=	=КОРЕНЬ(($B$2-B5)^2+($D$2-D5)^2)			
11	r3=	=КОРЕНЬ(($B$2-B6)^2+($D$2-D6)^2)			
12	r4=	=КОРЕНЬ(($B$2-B7)^2+($D$2-D7)^2)			
13					
14					

Задача об универсаме

Рис. 4.5. Лист MS Excel с решением задачи.

Глава 5. Задачи многокритериального программирования

К классу задач многокритериального линейного программирования относятся такие задачи непрерывной оптимизации, в которых, с одной стороны, имеется несколько целевых функций, а с другой стороны, все целевые функции являются линейными функциями своих аргументов. При этом все ограничения также могут быть представлены в форме линейных функций.

5.1. Задачи многокритериальной оптимизации.

В общем случае под задачей многокритериальной оптимизации понимается такая задача оптимизации, в которой имеется несколько целевых функций. При этом по аналогии с обычными задачами оптимизации ограничения могут присутствовать, — и тогда соответствующая задача многокритериальной оптимизации называется задачей с ограничениями; либо отсутствовать, — и тогда соответствующая задача многокритериальной оптимизации называется задачей без ограничений. Поскольку задачи многокритериальной оптимизации без ограничений являются частным случаем соответствующих задач с ограничениями, в дальнейшем, если дополнительно не отмечено, рассматриваются только задачи с ограничениями. Более строгое определение данного класса задач можно получить на основе рассмотрения общей математической постановки задачи многокритериальной оптимизации, которое приводится далее.

5.1.1. Математическая постановка задачи многокритериальной оптимизации

В общем случае математическая постановка задачи многокритериальной оптимизации с одной переменной может быть сформулирована в следующем виде:

$$f_i(x) \to \max_{x \in \Delta_\beta} \quad \text{или } f_i(x) \to \min_{x \in \Delta_\beta} \quad \forall i \in L = \{1,2,\dots l\}, \tag{5.1}$$

$$\text{где } \Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x) \le (=) 0\}, (k \in \{1,2,\dots l\}). \tag{5.2}$$

При этом не вводится никаких дополнительных предположений о характере целевой функции и левых частей ограничений. В случае $I = 1$ задача многокритериальной оптимизации становится обычной задачей оптимизации вида (1.1) и (1.2). В общем случае задачу оптимизации вида (5.1) и (5.2) называют также задачей *l-критериальной* оптимизации, задачей оптимизации с l критериями или просто задачей многокритериальной оптимизации. В частном случае при $l = 2$ соответствующую задачу оптимизации часто называют задачей *двухкритериальной* оптимизации или задачей оптимизации с двумя критериями. В приложениях двухкритериальные задачи оптимизации встречаются наиболее часто.

Принципиальным отличием задач многокритериальной оптимизации от задач оптимизации с единственной целевой функцией является само понятие решения. Дело в том, что при формулировке и анализе задач многокритериальной оптимизации понятие решения в традиционном смысле может отсутствовать или не иметь смысла. В практических задачах нахождение оптимального решения по одному из критериев, как правило, не соответствует оптимальному решению по другим критериям. Тем самым на практике имеет место *противоречивость* критериальных функций, связанная с невозможностью найти оптимальное допустимое решение задачи (5.1) и (5.2) сразу по всем целевым функциям.

В связи с этим как не вспомнить о желании обычных покупателей приобретать вещи наилучшего качества за наименьшую цену. Аналогичная ситуация встречается при выполнении проектов, когда заказчик требует выполнить некоторые работы за наименьшее время при наименьшей стоимости, а исполнитель заинтересован не только в максимальном финансировании проекта, но и в более продолжительном его выполнении. Тем самым конфликт интересов на практике может быть связан с многокритериальным характером соответствующих задач оптимизации. Можно даже высказать утверждение, что бесконфликтные задачи многокритериальной оптимизации не представляют ни практического ни математического интереса, поскольку решение в этом случае получается тривиальным образом.

В общем случае понятие решения задачи многокритериальной оптимизации (5.1) и (5.2) тесно связано с анализом множества допустимых альтернатив. С этой целью на множестве допустимых альтернатив вводится некоторое специальное отношение, получившее название *отношение доминирования по Парето.* Оно названо в честь итальянского экономиста В. Парето, который впервые ввел его в рассмотрение при изучении экономических задач.

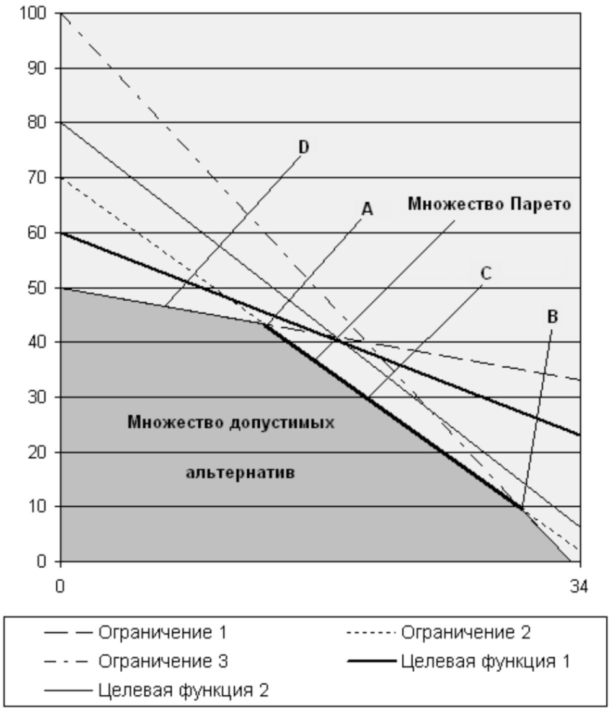


Рис. 5.1. Множество Парето для двухкритериальной задачи.

В общем случае, все недоминируемые по Парето альтернативы являются эквивалентными между собой с точки зрения исходной постановки задачи многокритериальной оптимизации (5.1) и (5.2). Для выбора единственной альтернативы, которая должна служить итоговым решением задачи многокритериальной оптимизации, необходимы некоторые дополнительные предположения о свойствах искомого решения или о предпочтениях лиц или экспертов, принимающих окончательное решение. При этом в отдельных случаях подобные предположения могут включаться в исходную постановку задачи (5.1) и (5.2).

В общем случае понятие решения задачи многокритериальной оптимизации включает в себя в качестве составного элемента предварительное определение множества недоминируемых альтернатив и последующий анализ этого множества с целью выбора окончательной единственной альтернативы в качестве итогового решения задачи многокритериальной оптимизации. Поскольку нахождение окончательного решения возможно только при наличии дополнительных предположений относительно свойств этого решения, заданных в форме предпочтения лиц или экспертов, принимающих решения, то в качестве базового решения задач многокритериальной оптимизации принимается нахождение множества недоминируемых альтернатив Δ_{β}^{nd}.

Таким образом, множество недоминируемых альтернатив может служить как окончательным решением задач многокритериальной оптимизации в случае отсутствия дополнительных предположений о свойствах окончательного решения, так и основой для принятия окончательного решения в случае наличия подобных предположений. Именно по этой причине при решении практических задач многокритериальной оптимизации, когда необходимо получение некоторого окончательного решения поставленной задачи, следует дополнить постановку задачи (5.1) и (5.2) информацией относительно свойств этого решения. В противном случае получение окончательного единственного решения оказывается принципиально невозможным, о чем следует помнить всем системным аналитикам, приступающим к решению задач многокритериальной оптимизации.

5.1.2. Метод уступок для решения задач многокритериальной оптимизации

Метод уступок основан на введении некоторого предварительного упорядочения целевых функций по важности и допустимых отклонений от их оптимальных значений с последующим решением однокритериальных задач оптимизации известными аналитическими или алгоритмическими методами. Поскольку данный метод имеет в некотором смысле универсальный характер, он может быть описан независимо от класса задач оптимизации, которые могут быть решены с его помощью.

Не уменьшая общности дальнейшего изложения, рассмотрим постановку задачи многокритериальной оптимизации в следующей форме:

$$f_i(x) \to \min_{x \in \Delta_\beta} \quad \forall i \in L = \{1,2, \dots l\}, \tag{5.3}$$

$$\text{где } \Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x) \geq 0\}, (k \in \{1,2, \dots m\}). \tag{5.4}$$

Дополнительно предполагается, что все критериальные функции *линейно упорядочены* по важности, например, в порядке возрастания их индексов. В этом случае целевая функция $f_i(x)$ является наиболее важной, а целевая функция $f_l(x)$— наименее важной. Если это условие не выполняется, то следует выполнить переиндексацию целевых функций, так чтобы постановка задачи многокритериальной оптимизации (5.3) и (5.4) соответствовала этому требованию.

Наконец, для применения метода уступок должно быть задано множество положительных действительных чисел: $\theta = \{\delta_1, \delta_2, \dots \delta_l\}$, каждое из которых δ_i $(\forall i \in L)$ интерпретируется как величина *допустимой уступки* по целевой функции $f_i(x)$.

Алгоритм метода уступок, ориентированный на решение задач многокритериальной оптимизации в постановке (5.3) и (5.4), имеет итеративный характер и заключается в выполнении следующих действий:

Шаг 1. *Предварительное задание исходных данных.* В качестве индекса целевой функции установить i = 1, а в качестве множества допустимых альтернатив принять исходное множество Δ_β, образуемое системой ограничений (5.4). После этого следует перейти к выполнению действий шага 2.

Шаг 2. *Решение однокритериальной задачи.* Одним из методов решить однокритериальную задачу оптимизации: $f_i(x) \to \min_{x \in \Delta_\beta}$. Найденное оптимальное значение целевой функции обозначим через: $b_i = f_i^{opt}$. После этого следует перейти к выполнению действий шага 3.

Шаг 3. *Проверка условия окончания расчетов.* Если выполняется условие: $i = l$, то следует закончить выполнение алгоритма, приняв в качестве результата решения исходной задачи многокритериальной оптимизации значение: $x_{opt} = \arg\min f_i^{opt}$. Если данное условие не выполнено, т. е. $i < l$, то увеличить i на 1 и перейти к выполнению действий шага 4.

Шаг 4. *Формирование нового множества допустимых альтернатив.* С этой целью следует к предыдущему множеству допустимых альтернатив Δ_β добавить дополнительное ограничение: $f_{i-1}(x) \leq b_{i-1} + \delta_{i-1}$, которое интерпретируется как уступка относительно оптимального значения этой целевой функции. Полученное новое множество Δ_β считать за базовое множество допустимых альтернатив для целевой функции $f_i(x)$. После этого следует перейти к выполнению действий шага 2.

Рассмотренный алгоритм метода уступок может быть изображен графически в форме следующей диаграммы деятельности языка UML (рис. 5.2).

Нетрудно заметить, что в силу конечности общего количества целевых функций для исходной постановки задачи многокритериальной оптимизации (5.3) и (5.4), рассмотренный алгоритм метода уступок является конечным в случае конечности метода, который применяется для решения однокритериальных задач оптимизации.

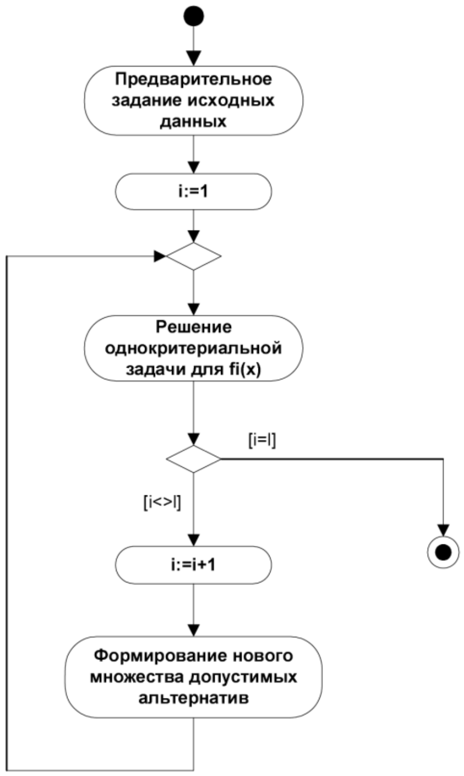


Рис. 5.2. Диаграмма деятельности метода уступок для решения многокритериальных задач оптимизации

5.1.3. Метод минимального отклонения от идеальной точки

Метод минимального отклонения от идеальной точки является разновидностью общего метода свертки целевых функций, однако существенно отличается от него по характеру интерпретации итогового результата

Основная идея метода заключается в том, чтобы предварительно найти так называемую идеальную точку задачи многокритериальной оптимизации, а после этого решить некоторую новую задачу однокритериальной оптимизации. При этом в качестве новой задачи оптимизации рассматривается задача минимизации отклонения от найденной идеальной точки в некоторой заданной метрике. Полученный результат принимается за окончательное решение исходной задачи многокритериальной оптимизации.

Под *идеальной точкой* задачи многокритериальной оптимизации в общей постановке (5.3) и (5.4) без каких бы то ни было дополнительных предположений понимается совокупность оптимальных значений: $f_1^{opt}, f_2^{opt}, \dots f_l^{opt}$ отдельных целевых функций на исходном множестве допустимых альтернатив Δ_β. При этом самой альтернативы, которой бы соответствовал набор значений $f_1^{opt}, f_2^{opt}, \dots f_l^{opt}$ как правило, не существует, или же она не принадлежит множеству допустимых альтернатив Δ_β. Именно во втором случае *"идеальной точкой"* называют саму альтернативу x^* для которой выполняются условия: $f_1^{opt} = f_1(x^*),\ f_2^{opt} = f_2(x^*), \dots f_l^{opt} = f_l(x^*)$

В качестве метрики, используемой для расчета количественного отклонения от идеальной точки, наиболее часто применяется метрика Евклида

Алгоритм метода минимального отклонения от идеальной точки, ориентированный на решение задач многокритериальной оптимизации в постановке (5.3) и (5.4), имеет итеративный характер и заключается в выполнении следующих действий:

Шаг 1. *Предварительное нахождение идеальной точки.* Одним из методов решить совокупность однокритериальных задач оптимизации: $f_1(x) \to \min_{x \in \Delta_\beta} (\forall\, i \in L)$. Найденное оптимальное значение для каждой целевой функции обозначить через: $b_i = f_i^{opt} (\forall\, i \in L)$. После этого следует перейти к выполнению действий шага 2.

Шаг 2. *Формирование новой целевой функции.* В качестве новой целевой функции следует рассмотреть функцию: $f(x) = (f_1(x) - b_i)^2 + (f_2(x) - b_2)^2 + \dots + (f_l(x) - b_l)^2$, которая интерпретируется как отклонение от идеальной точки. После этого следует перейти к выполнению действий шага 3.

Шаг 3. *Решение новой задачи оптимизации.* Одним из методов решить новую однокритериальную задачу оптимизации: $f(x) \to \min_{x \in \Delta_\beta}$. Найденное оптимальное значение принять в качестве результата решения исходной задачи многокритериальной оптимизации: $x_{opt} = \arg\min f(x)$. На этом следует закончить выполнение алгоритма.

Рассмотренный алгоритм метода минимального отклонения может быть изображен графически в форме следующей диаграммы деятельности языка UML (рис. 5.3).

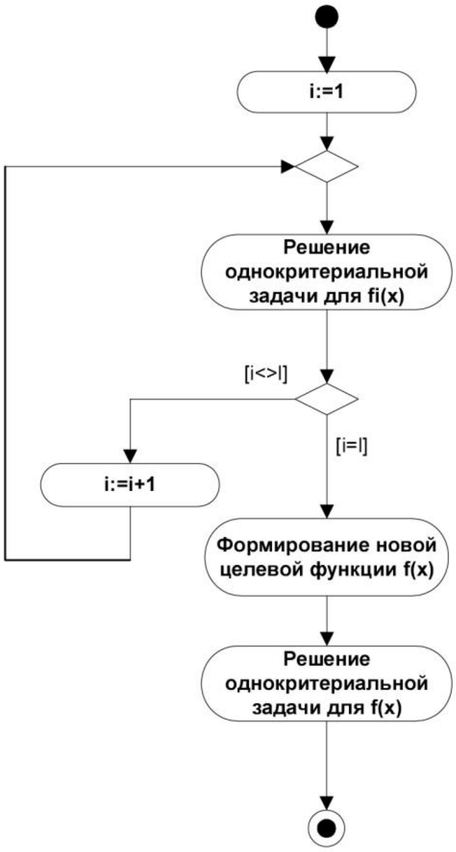


Рис. 5.3. Диаграмма деятельности метода минимального отклонения для решения многокритериальных задач оптимизации

5.2. Задача об оптимальной диете с двумя целевыми функциями

Содержательная постановка задачи об оптимальной диете приводится в *разд. 1.2.3,* а методы решения однокритериальной задачи рассматриваются в *разд. 2.3.* В настоящей главе рассматривается ее уточнение, необходимое для формальной записи условий соответствующей задачи многокритериальной оптимизации.

5.2.1. Математическая постановка задачи и подходы к ее решению

Для математической постановки данной задачи с двумя целевыми функциями необходимо определить переменные соответствующей задачи многокритериальной оптимизации, задать целевые функции и специфицировать ограничения, позволяющие представить исходную задачу как стандартную задачу многокритериального линейного программирования. В общем случае задача об оптимальной диете с двумя целевыми функциями может быть сформулирована следующим образом.

Имеется n видов продуктов питания, в которых содержится m типов питательных веществ (белки, жиры, углеводы). В одной весовой единице продукта i-го типа ($i \in \{1,2,\dots,n\}$) содержится a_{ij}единиц питательного вещества j-го вида ($j \in \{1,2,\dots,m\}$). Известна минимальная суточная потребность b_j ($j \in \{1,2,\dots,m\}$) человека в каждом из видов питательных веществ. Задана калорийность c_i и стоимость d_i одной весовой единицы i-го продукта ($i \in \{1,2,\dots,n\}$). Требуется определить оптимальный состав рациона продуктов такой, чтобы каждое питательное вещество содержалось в нем в необходимом количестве, обеспечивающем суточную потребность человека, и при этом суммарная калорийность и стоимость рациона была минимальной.

Введем в рассмотрение следующие переменные: x_i - весовое количество продукта питания i-го типа в суточном рационе. Тогда в общем случае математическая постановка задачи об оптимальной диете может быть сформулирована следующим образом.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \quad (5.5)$$

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \quad (5.6)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Хотя математически задача об оптимальной диете с двумя целевыми функциями формулируется как задача о минимизации целевых функций, это не имеет принципиального значения для ее последующего решения. В связи с этим следует помнить, что, с учетом сделанного ранее замечания, всегда можно перейти от задачи максимизации целевой функции к эквивалентной ей задаче минимизации целевой функции и наоборот.

В качестве основных подходов к решению задач многокритериального линейного программирования, ориентированных на использование программы MS Excel, рассмотрим метод уступок и метод минимизации отклонения от идеальной точки.

5.2.2. Решение многокритериальной задачи об оптимальной диете с помощью программы MS Excel методом уступок

Для решения задачи об оптимальной диете с помощью программы MS Excel необходимо задать конкретные значения параметрам исходной задачи. Для определенности предположим, что в качестве исходных типов продуктов рассматриваются: хлеб, мясо, сыр, бананы, огурцы, помидоры, виноград (n = 7), а в качестве питательных веществ рассматриваются белки, жиры, углеводы ***(****m* = 3). Калорийность одной весовой единицы каждого из продуктов следующая: c_1 = 2060, c_2 = 2430, c_3 = 3600, c_4 = 890, c_5 = 140, c_6 = 230, c_7 = 650 *ккал/кг*. Стоимость одной весовой единицы каждого из продуктов следующая: $d_1 = 12, d_2 = 100, d_3 = 160, d_4 = 24, d_5 = 40, d_6 = 30, d_7 = 80$. Содержание питательных веществ в каждом из продуктов может быть задано в форме следующей таблицы (см. табл. 2.2).

Таблица 5.1. *Содержание питательных веществ в продуктах питания*

Продукты / Питательные вещества	Хлеб ржаной	Мясо бара нина	Сыр "Россий ский"	Банан	Огурцы	Помидоры	Виноград	Потреб ность
Белки	61	220	230	15	8	11	6	100
Жиры	12	172	290	1	1	2	2	70
Углеводы	420	0	0	212	26	38	155	400
Калории	2060	2430	3600	890	140	230	650	
Стоимость	12	100	160	24	40	30	80	

Минимальная суточная потребность в питательных веществах следующая: в белках b_1 = 100, в жирах b_2 = 70, в углеводах b_3 = 400 *грамм*. x_i, — *кг.*

Не уменьшая общности решаемой задачи, можно считать, что калорийность продуктов измеряется в *ккал/кг,* суточная потребность в питательных веществах — в *граммах,* а содержание питательных веществ в продуктах — в *грамм/кг.* В этом случае оказывается возможным выполнить дополнительную проверку условий сформулированной задачи на основе рассмотрения физической размерности целевой функции и ограничений.

Решение данной задачи многокритериальной оптимизации методом уступок будет состоять из 2-х этапов.

На первом этапе необходимо решить обычную задачу оптимизации, используя в качестве критериальной функции целевую функцию (5.5).

Результатом решения двухкритериальной задачи об оптимальной диете на первом этапе является найденное значение первой целевой функции: $f_1^{opt} \cong 2587{,}140$ *ккал,* причем стоимость этой диеты составляет приблизительно 84 *руб.*

Предположим, что, исходя из медицинских рекомендаций, оказывается возможной уступка по первой целевой функции, равная 100 *ккал.* Тем самым можно перейти ко второму этапу решения данной задачи оптимизации методом уступок.

С этой целью следует рассмотреть дополнительное ограничение следующего вида:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 \leq 2690, \qquad (5.8)$$

в котором правая часть равна значению суммы: $f_1^{opt} + 100$, а знак ограничения выбран таким образом, чтобы соответствовать решению задачи минимизации целевой функции.

На втором этапе решаем оптимизационную задачу со второй целевой функцией.

Результатом решения задачи об оптимальной диете являются найденные оптимальные значения переменных: $x_1 \cong 0{,}952, x_2 \cong 0, x_3 \cong 0{,}202, x_4 \cong 0, x_5 \cong 0, x_6 \cong 0, x_7 \cong 0,$ которым соответствуют значения целевых функций: $f_1^{opt} \cong 2688{,}998$ и $f_2^{opt} \cong 43{,}744.$

5.2.3. Решение двухкритериальной задачи о диете с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения

Для решения задачи об оптимальной диете с двумя целевыми функциями с помощью программы MS Excel рассмотренным ранее методом минимального отклонения от идеальной точки будем использовать те же конкретные значения параметров рассматриваемой конкретной задачи о диете.

Для решения данной задачи с помощью программы MS Excel в книге с именем Многокритериальная оптимизация создадим новый рабочий лист с именем Задача о диете №2. Решение данной задачи многокритериальной оптимизации методом минимального отклонения от идеальной точки будет состоять из 2-х этапов. E1а первом этапе необходимо решить две обычных задачи оптимизации, используя в качестве критериальных функций, соответственно, целевые функции (5.5) и (5.6).

Для решения этой задачи выполним следующие подготовительные действия, которые во многом аналогичны действиям, рассмотренным в *разд. 5.2.2* при решении двухкритериальной задачи о диете методом уступок.

После задания ограничений и первой целевой функции можно приступить к поиску численного решения. После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено количественное решение однокритериальной задачи об оптимальной диете на первом этапе является найденное значение первой целевой функции: $f_1^{opt} \cong 2587{,}140$ *ккал*.

После задания ограничений и второй целевой функции можно приступить к поиску численного решения по второму критерию. После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено соответствующее количественное решение однокритериальной задачи об оптимальной диете на первом этапе является найденное значение второй целевой функции: $f_2^{opt} \cong 43{,}744$ *руб.* Заметим, что это значение соответствует оптимальному значению второй целевой функции, полученному при решении данной задачи о диете методом уступок.

Формируем итоговую целевую функцию вида:

$$f(x) = (f_1(x) - b_i)^2 + (f_2(x) - b_2)^2 + \cdots + (f_l(x) - b_l)^2 \rightarrow min, \qquad \text{где } b_i = f_i^{opt}.$$

После задания ограничений и целевой функции на втором этапе можно приступить к поиску окончательного решения двухкритериальной задачи о диете.

Результатом решения задачи об оптимальной диете методом минимального отклонения от идеальной точки являются найденные оптимальные значения переменных: $x_1 \cong 0{,}172, x_2 \cong 0{,}163, x_3 \cong 0{,}132, x_4 \cong 1{,}546, x_5 \cong 0, x_6 \cong 0, x_7 \cong 0,$ которым соответствуют значения целевых функций: $f_1^{opt} \cong 2602{,}02$ и $f_2^{opt} \cong 76{,}627.$

На примере решения данной задачи многокритериальной оптимизации следует обратить внимание на проблему соизмеримости абсолютных значений отдельных целевых функций и на проблему определения физической размерности итоговой целевой функции.

Причиной первой из проблем является различная субъективная значимость 1 единицы количественного значения различных целевых функций. Так, например, применительно к рассматриваемой задаче с точки зрения субъекта, планирующего выбор продуктов для своей диеты, 1 *ккал* рациона продуктов может быть вовсе не тождествен 1 *руб.* их стоимости. В то же время методы свертки целевых функций, разновидностью которых является метод минимального отклонения от идеальной точки, игнорируют данное обстоятельство, результатом этого может стать неадекватное решение той или иной задачи многокритериальной оптимизации.

Вторая проблема связана с тем, что если для исходных критериальных функций, как правило, известна их физическая размерность (например, *ккал,руб.),* то для итоговой целевой функции, которая представляет собой ту или иную свертку исходных, определить физическую размерность невозможно. Как результат— вопрос: «Что мы оптимизируем в итоге?» остается без ответа, если попытаться дать на него содержательный ответ.

5.2.4. Решение двухкритериальной задачи о диете с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки

Для решения задачи об оптимальной диете с двумя целевыми функциями с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки на основе задания весов отдельных целевых функций будем использовать те же конкретные значения параметров рассматриваемой ранее задачи о диете. Дополнительно следует задать количественные значения *весов* исходным целевым функциям, которые удовлетворяют условиям, отмеченным в *разд. 5.1.2*. Если предположить, что с точки зрения субъективных предпочтений лица, принимающего решение, первый критерий менее важен, чем второй, то такими весами могут быть, например, $\alpha_1 = 0{,}2$ и $\alpha_2 = 0{,}8$.

Сформируем итоговую ЦФ вида:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_l f_l(x) \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \tag{5.9}$$

$$\text{где } \Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x) \leq (=) 0\}, (k \in \{1,2,\dots,m\}). \tag{5.10}$$

При этом значения $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$, называемые *весовыми коэффициентами целевых функций,* должны удовлетворять следующему условию: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in [0,1]$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l = 1$.

Результатом решения задачи об оптимальной диете методом аддитивной свертки на основе задания весов отдельных целевых функций являются найденные оптимальные значения переменных: $x_1 \cong 0{,}757, x_2 \cong 0, x_3 \cong 0{,}209, x_4 \cong 0{,}386, x_5 \cong 0, x_6 \cong 0, x_7 \cong 0,$ которым соответствуют значения целевых функций: $f_1^{opt} \cong 2655{,}393$ и $f_2^{opt} \cong 51{,}749$.

5.3. Задача о рюкзаке с двумя целевыми функциями

Содержательная постановка задачи о рюкзаке приводится в *разд. 1.2.*7, а способы ее решения — в *разд. 2.8.* В настоящей главе рассматривается вариант постановки и решения двухкритериальной задачи о рюкзаке методом уступок и методом минимального отклонения от идеальной точки. Заметим, что этот вариант задачи многокритериальной оптимизации несколько отличается по содержанию, чем рассмотренная ранее одномерная задача о рюкзаке.

5.3.1. Математическая постановка двухкритериальной задачи о рюкзаке

В общем случае переносимый в рюкзаке груз может включать *n* видов предметов, при этом каждый предмет вида $i \in \{1,2,..., n\}$ обладает некоторой массой c_i, например, в *кг,* и объемом d_i например, в *дм* или *литрах.* Для каждого вида предмета турист, исходя из своих субъективных предпочтений, определяет его индивидуальную ценность a_i,: во время перехода. Ценность может быть определена с точки зрения калорийности, если в качестве предметов берутся продукты питания. При этом общая ценность всех предметов не должна быть ниже некоторой заданной величины, например, *b.*

Требуется определить количество предметов каждого вида, которые следует положить в рюкзак, чтобы их общая масса и объем были минимальными, а ценность была бы не ниже фиксированного значения.

Для решения задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel необходимо задать конкретные значения параметрам исходной задачи. Для определенности предположим, что в качестве исходных видов предметов рассматриваются продукты питания: хлеб, сухари, тушеная говядина, лосось в масле, сыр, сушеные бананы, сахар рафинад ($n = 7$), а в качестве их характеристик — объем и масса каждого продукта. Субъективная ценность для туриста *одного экземпляра* каждого из продуктов следующая: $a_1 = 20$, $a_2 = 30$, $a_3 = 50$, $a_4 = 30$, $a_5 = 40$, $a_6 = 20$, $a_7 = 70$. Известна масса одного экземпляра каждого из продуктов: $c_1 = 0{,}8$ *кг,* $c_2 = 0{,}4$ *кг,* $c_3 = 0{,}3$ *кг,* $c_4 = 0{,}2$ *кг,* $c_5 = 0{,}5$ *кг,* $c_6 = 0{,}4$ *кг,* $c_7 = 0{,}6$ *кг* и объем одного экземпляра каждого из продуктов: $d_1 = 1{,}2$ л, $d_2 = 1{,}5$ л, $d_3 = 0{,}4$ л, $d_4 = 0{,}3$ л, $d_5 = 0{,}8$ л, $d_6 = 0{,}9$ л, $d_7 = 0{,}5$ л.

Предполагается, что общая ценность продуктов в рюкзаке не должна быть ниже величины 2000.

Исходными переменными математической модели одномерной задачи о рюкзаке являются: x_i,— количество экземпляров продуктов /-го вида, которые следует положить в рюкзак. Тогда математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о рюкзаке может быть записана в следующем виде.

$$0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}5x_5 + 0{,}4x_6 + 0{,}6x_7 \to \mathrm{mix}_{x \in \Delta_\beta}, \qquad (5.11)$$

$$1{,}2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}8x_5 + 0{,}9x_6 + 0{,}5x_7 \to \mathrm{mix}_{x \in \Delta_\beta}, \qquad (5.12)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 30x_4 + 40x_5 + 20x_6 + 70x_7 \geq 2000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 - \text{целые} \end{cases} \qquad (5.13)$$

Данная задача относится к классу задач многокритериального целочисленного линейного программирования, которая может быть решена с помощью рассмотренных ранее методов уступок и минимального отклонения от идеальной точки. При этом общая схема данных методов останется прежней, изменятся лишь особенности поиска решений соответствующих однокритериальных задач оптимизации.

5.3.2. Решение двухкритериальной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel методом уступок

Решение данной задачи многокритериальной оптимизации методом уступок будет состоять из 2-х этапов. На первом этапе необходимо решить обычную задачу оптимизации, используя в качестве критериальной функции первую целевую функцию (5.11) в предположении, что она является более важной, чем вторая целевая функция.

Результатом решения двухкритериальной задачи о рюкзаке на первом этапе является найденное значение первой целевой функции: f_1^{opt}= 12. Анализ найденного решения показывает, что общая масса груза будет равна 12 *кг.* Ценность этого груза, состоящего из 40 банок тушеной говядины, в точности составит 2000.

Предположим, что, исходя из субъективных предположений туриста, оказывается возможной уступка по первой целевой функции, равная 3 *кг.* Тем самым можно перейти ко второму этапу решения данной задачи оптимизации методом уступок.

С этой целью следует рассмотреть дополнительное ограничение следующего вида:

$$0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}5x_5 + 0{,}4x_6 + 0{,}6x_7 \leq 15, \qquad (5.14)$$

в котором правая часть равна значению суммы: f_1^{opt} +3, а знак ограничения выбран таким образом, чтобы соответствовать решенной задачи минимизации по первой целевой функции.

После задания в поиске решения дополнительного ограничения и новой целевой функции (5.12) на втором этапе можно приступить к поиску окончательного решения двухкритериальной задачи о рюкзаке.

Результатом решения двухкритериальной задачи о рюкзаке являются найденные оптимальные значения переменных: x_1= 0, x_2 = 0, x_3= 17, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 6, x_7 = 16, которым соответствуют значения целевых функций: f_1^{opt} = 14,9 и f_2^{opt}= 15,1.

Анализ найденного решения показывает, что в поход следует взять 17 банок тушеной говядины, 1 банку лосося в масле и 16 пачек сахара рафинада, совсем отказавшись от всего остального. При этом общая ценность груза составит 2000, общая масса продуктов — 14,9 *кг,* а общий объем — 15,1л.

5.3.3. Решение двухкритериальной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения

Для решения задачи о рюкзаке с двумя целевыми функциями с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения от идеальной точки будем использовать те же конкретные значения параметров рассматриваемой конкретной задачи о рюкзаке.

Решение данной задачи многокритериальной оптимизации методом минимального отклонения от идеальной точки будет состоять из 2-х этапов. На первом этапе необходимо решить две обычных задачи оптимизации, используя в качестве критериальных функций, соответственно, целевые функции (5.11) и (5.12).

Для решения этой задачи выполним следующие подготовительные действия, которые во многом аналогичны действиям, рассмотренным в *разд. 5.3.2,* при решении двухкритериальной задачи о рюкзаке методом уступок.

После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено количественное решение. Результатом решения однокритериальной задачи о рюкзаке на первом этапе являются найденное значение первой целевой функции: $f_1^{opt} = 12$.

После задания ограничений и второй целевой функции можно приступить к поиску численного решения по второму критерию. После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено соответствующее количественное решение. Результатом решения однокритериальной задачи о рюкзаке на первом этапе является найденное значение второй целевой функции: $f_2^{opt} = 14{,}5$.

Формируем итоговую целевую функцию:

$$f(x) = (f_1(x) - 12)^2 + (f_2(x) - 14{,}5)^2 \rightarrow min,$$

где $f_i(x)$ – целевые функции (5.11), (5.12).

После задания ограничений и итоговой целевой функции на втором этапе можно приступить к поиску окончательного решения двухкритериальной задачи о рюкзаке.

Результатом решения двухкритериальной задачи о рюкзаке методом минимального отклонения от идеальной точки являются найденные оптимальные значения переменных: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 33$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 5$, которым соответствуют значения целевых функций: $f_1^{opt} = 12{,}9$ и $f_2^{opt} = 15{,}7$.

Анализ найденного решения показывает, что с точки зрения заданных критерием массы и объема, туристу в поход следует взять 33 *банки* тушеной говядины и 5 *пачек* сахара рафинада. В этом случае содержательный анализ результатов решения двухкритериальной задачи о рюкзаке выявляет недостаток метода минимального отклонения от идеальной точки, связанный с формированием более однообразного состава продуктов, которые следует взять в поход. В этом контексте метод уступок дает более разнообразный набор, в котором дополнительно появляется 1 *банка* лосося в масле.

5.3.4. Решение двухкритериальной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки

Для решения двухкритериальной задачи о рюкзаке с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки на основе задания весов отдельных целевых функций будем использовать те же значения параметров рассмотренной ранее конкретной задачи о рюкзаке. Дополнительно следует задать количественные значения *весов* исходным целевым функциям. Если предположить, что с точки зрения субъективных предпочтений лица, принимающего решение, первый критерий менее важен, чем второй, то такими весами могут быть, например, $\alpha_1 = 0{,}2$ $\alpha_2 = 0{,}8$.

Для решения этой задачи выполним действия, которые во многом аналогичны действиям, рассмотренным в *разд. 5.3.2* при решении двухкритериальной задачи о рюкзаке методом уступок.

Формируем новую целевую функцию:

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \rightarrow min,$$

где $f_i(x)$ – целевые функции (5.11), (5.12).

Результатом решения двухкритериальной задачи о рюкзаке методом аддитивной свертки на основе задания весов отдельных целевых функций являются найденные оптимальные значения переменных: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 29$, которым соответствуют значения целевых функций: $f_1^{opt} = 17{,}4$ и $f_2^{opt} = 14{,}5$.

Анализ найденного решения показывает, что оно в точности соответствует оптимальному решению по второй целевой функции. В этом случае содержательный анализ результатов решения двухкритериальной задачи о рюкзаке выявляет недостаток метода аддитивной свертки, особенно явно проявляющийся при решении задач целочисленного линейного программирования.

5.4. Двухкритериальная задача о назначении

Содержательная постановка задачи о назначении приводится в *разд. 1.2.8,* а способы ее решения — в *разд.2.7.* В настоящей главе рассматривается вариант постановки двухкритериальной задачи о назначении в форме математической модели многокритериального булева программирования и особенности ее решения методом уступок, методом минимального отклонения от идеальной точки и методом аддитивной свертки целевых функций.

5.4.1. Математическая постановка двухкритериальной задачи о назначении

Для двухкритериальной задачи о назначении вводятся в рассмотрение две характеристики, одна из которых по-прежнему связана с затратами на подготовку кандидатов, а вторая — с эффективностью в форме прибыли, которая связана с работой кандидата в соответствующей должности. Для разработки математической модели индивидуальной двухкритериальной задачи о назначении следует задать конкретные значения соответствующих характеристик.

Для определенности рассмотрим двухкритериальной вариант индивидуальной задачи о назначении в форме минимизации общих затрат на подготовку кандидатов и максимизации общей прибыли при выполнении ими работ. В этом случае в качестве кандидатов рассмотрим 5 сотрудников некоторой фирмы: это Андреев, Бубнов, Васильев, Григорьев и Дмитриев, а в качестве работ — 5 вакантных должностей в этой фирме: менеджер, программист, бизнес-аналитик, маркетолог и руководитель проектов. При этом затраты c_{ij} ($\forall$ $i,j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) на замещение должностей кандидатами, связанные с необходимостью их предварительного обучения и стажировки, аналогичны рассмотренным в *разд. 2.7* и заданы в форме следующей таблицы (см. табл. 5.2).

Отдельные значения ожидаемой прибыли кандидатов при работе в должностях d_{ij} ($\forall$ $i,j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) заданы в форме следующей таблицы (табл. 5.3).

Требуется определить такое назначение кандидатов на вакантные должности, при котором общие затраты на их подготовку будут минимальными, а общая прибыль при их работе в соответствующих должностях будет максимальной.

Таблица 5.2. *Затраты на замещение должностей кандидатами (в тыс. рублей)*

Кандидаты/ Должности	Андреев	Бубнов	Васильев	Григорьев	Дмитриев
Менеджер	5	10	9	14	6
Программист	13	15	11	19	17
Бизнес-аналитик	7	14	12	8	10
Маркетолог	8	11	6	7	9
Руководитель проектов	15	12	17	13	16

Таблица 5.3. *Ожидаемая прибыль от работы кандидатов в должностях (в тыс. рублей)*

Кандидаты/ Должности	Андреев	Бубнов	Васильев	Григорьев	Дмитриев
Менеджер	150	95	90	210	100
Программист	185	200	170	140	175
Бизнес-аналитик	125	110	140	115	105
Маркетолог	80	180	85	100	135
Руководитель проектов	110	145	230	125	220

В качестве переменных математической модели двухкритериальной задачи о назначении рассмотрим следующие булевы переменные: $x_{ij} \in \{0, 1\}$, которые будут соответствовать назначению кандидатов на выполнение работ. В этом случае $x_{ij} = 1$ означает, что i-й кандидат назначается на выполнение j-й работы, и $x_{ij} = 0$, если i-й кандидат не назначается на выполнение j-й работы. Тогда математическая постановка *двухкритериалъной задачи о назначении* может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}5x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 14x_{14} + 6x_{15} + 13x_{21} + 15x_{22} + 11x_{23} + 19x_{24} + 17x_{25} + \\ +7x_{31} + 14x_{32} + 12x_{33} + 8x_{34} + 10x_{35} + 8x_{41} + 11x_{42} + 6x_{43} + 7x_{44} + 9x_{45} + \\ +15x_{51} + 12x_{52} + 17x_{53} + 13x_{54} + 16x_{55} \to \min_{x \in \Delta_\beta},\end{gathered} \tag{5.15}$$

$$\begin{gathered}150x_{11} + 95x_{12} + 90x_{13} + 210x_{14} + 100x_{15} + 185x_{21} + 200x_{22} + 170x_{23} + 140x_{24} + 175x_{25} + \\ +125x_{31} + 110x_{32} + 140x_{33} + 115x_{34} + 105x_{35} + 80x_{41} + 180x_{42} + 85x_{43} + 100x_{44} + 135x_{45} + \\ +110x_{51} + 145x_{52} + 230 + 125x_{54} + 220x_{55} \to \min_{x \in \Delta_\beta},\end{gathered} \tag{5.16}$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \\ \quad x_{ij} \in \{0,1\} \; \forall i, j \in \{1,2,3,4,5\} \end{cases} \tag{5.17}$$

Математическая модель (5.15)—(5.17) относится к классу задач многокритериального булева программирования и может быть решена с помощью рассмотренных ранее методов решения задач этого класса При этом общая схема данных методов останется прежней, изменятся лишь особенности поиска решений соответствующих однокритериальных задач оптимизации с помощью программы MS Excel.

5.4.2. Решение двухкритериальной задачи о назначении с помощью программы MS Excel методом уступок

Для решения данной задачи с помощью программы MS Excel в книге с именем Многокритериальная булева оптимизация создадим рабочий лист с именем Задача о назначении. Решение данной задачи многокритериальной оптимизации методом уступок будет состоять из 2-х этапов. На первом этапе необходимо решить обычную задачу оптимизации, используя в качестве критериальной функции первую целевую функцию (5.15) в предположении, что она является более важной, чем вторая целевая функция.

Результатом решения рассматриваемой задачи о назначении являются найденные оптимальные значения переменных: x_{15}= 1, x_{23} = 1, x_{31}= 1, x_{44} = 1, x_{52} = 1, остальные переменные равны 0. Найденному оптимальному решению соответствует минимальное значение целевой функции f_1^{opt} = 43 *тыс. руб.*

Предположим, что, исходя из экономических требований, оказывается возможной уступка по первой целевой функции, равная 10 *тыс. руб.* Тем самым, можно перейти ко второму этапу решения данной задачи оптимизации методом уступок.

С этой целью следует рассмотреть дополнительное ограничение следующего вида:

$$\begin{aligned}&5x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 14x_{14} + 6x_{15} + 13x_{21} + 15x_{22} + 11x_{23} + 19x_{24} + 17x_{25} + \\&+7x_{31} + 14x_{32} + 12x_{33} + 8x_{34} + 10x_{35} + 8x_{41} + 11x_{42} + 6x_{43} + 7x_{44} + 9x_{45} + \\&+15x_{51} + 12x_{52} + 17x_{53} + 13x_{54} + 16x_{55} \le 53,\end{aligned} \tag{5.18}$$

в котором правая часть равна значению суммы: $f_{opt}+10$, а знак ограничения выбран таким образом, чтобы соответствовать решенной задаче минимизации по первой целевой функции.

Далее решаем задачу со второй целевой функцией (5.16) и ограничениями (5.17), (5.18).

Результатом решения рассматриваемой задачи о назначении являются найденные оптимальные значения переменных: x_{11}= 1, x_{23} = 1, x_{34}= 1, x_{42} = 1, x_{55} = 1, остальные переменные равны 0.Найденному решению соответствуют значения целевых функций: f_1^{opt}= 51 и f_2^{opt} = 835.

Анализ найденного решения показывает, что при замещении вакантных должностей в рассматриваемой фирме следует на должность менеджера назначить сотрудника Андреева, на должность программиста — Васильева, на должность бизнес-аналитика— Григорьева, на должность маркетолога — Бубнова и, наконец, на должность руководителя проектов — Дмитриева. При этом общие затраты на обучение и стажировку сотрудников составят 51 *тыс. рублей,* а общая прибыль от работы этой группы составит 835 *тыс. рублей.*

5.4.3. Решение двухкритериальной задачи о назначении с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения

Для решения задачи о назначении с двумя целевыми функциями с помощью программы MS Excel методом минимального отклонения от идеальной точки будем использовать те же конкретные значения параметров рассматриваемой индивидуальной задачи о назначении.

Решение данной задачи многокритериальной оптимизации методом минимального отклонения от идеальной точки будет состоять из 2-х этапов. На первом этапе необходимо решить две обычных задачи оптимизации, используя в качестве критериальных функций, соответственно, целевые функции (5.15) и (5.16).

Для решения этой задачи выполним следующие подготовительные действия, которые во многом аналогичны действиям, рассмотренным в *разд. 5.4.2* при решении двухкритериальной задачи о назначении методом уступок.

После задания ограничений и первой целевой функции можно приступить к поиску численного решения. После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено количественное решение. Результатом решения однокритериальной задачи о назначении на первом этапе является найденное значение первой целевой функции: f_1^{opt} = 43.

После задания ограничений и второй целевой функции можно приступить к поиску численного решения по второму критерию. После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено соответствующее количественное решение. Результатом решения однокритериальной задачи о назначении на первом этапе является найденное значение второй целевой функции: f_2^{opt} = 935.

Формируем итоговую целевую функцию:

$$f(x) = (f_1(x) - 43)^2 + (f_2(x) - 935)^2 \rightarrow min,$$

где $f_i(x)$ – целевые функции (5.15), (5.16).

После задания ограничений и итоговой целевой функции на втором этапе можно приступить к поиску окончательного решения двухкритериальной задачи о назначении.

Результатом решения рассматриваемой задачи о назначении являются найденные оптимальные значения переменных: x_{11}= 1, x_{23} = 1, x_{34}= 1, x_{42} = 1, x_{55} = 1, остальные переменные равны 0.Найденному решению соответствуют значения целевых функций: f_1^{opt}= 51 и f_2^{opt} = 835.

Анализ найденного решения показывает, что оно полностью совпадает с решением, найденным ранее с помощью метода уступок.

Далее приводится описание метода аддитивной свертки на основе задания весов отдельных целевых функций. Данный метод также может быть использован для решения двухкритериальной задачи о назначении.

5.4.4. Решение двухкритериальной задачи о назначении с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки

Для решения задачи о назначении с двумя целевыми функциями с помощью программы MS Excel методом аддитивной свертки на основе задания весов отдельных целевых функций будем использовать те же значения параметров рассматриваемой ранее конкретной задачи о назначении. Дополнительно следует задать количественные значения *весов* исходным целевым функциям. Если предположить, что с точки зрения предпочтений директора фирмы, принимающего решение о назначении на должности, оба критерия равноценны, то такими весами являются значения: α_1= 0,5 α_2 = 0,5.

Для решения этой задачи выполним действия, которые во многом аналогичны действиям, рассмотренным в *разд. 5.4.2* при решении двухкритериальной задачи о назначении методом уступок.

Формируем новую целевую функцию:

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) \; + \alpha_2 f_2(x) \rightarrow min,$$

где $f_i(x)$ – целевые функции (5.15), (5.16).

Результатом решения рассматриваемой задачи о назначении являются найденные оптимальные значения переменных: x_{11}= 1, x_{23} = 1, x_{34}= 1, x_{45} = 1, x_{52} = 1, остальные переменные равны 0.Найденному решению соответствуют значения целевых функций: f_1^{opt}= 45 и f_2^{opt} = 715.

Анализ найденного решения показывает, что оно отличается от решений, найденных ранее с помощью метода уступок и метода минимального отклонения. При этом значение первой ЦФ у данного решения лучше, а значение второй ЦФ — хуже, чем у найденных ранее решений.

В данном случае можно также заметить, что шкалирование критериев не позволяет избавиться от недостатка метода аддитивной свертки, связанного с неравноценным характером влияния абсолютных значений отдельных целевых функций на итоговый результат, особенно явно проявляющийся при решении задач булева программирования. В этом случае можно порекомендовать дополнительно использовать масштабирующий коэффициент 0,1 для второй целевой функции, что позволит выровнять порядок ее значений относительно первой целевой функции. Выполнить соответствующие расчеты и сравнить полученные результаты студентам предлагается самостоятельно в качестве упражнения.

Литература

1. Леоненков А. В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel. — СПб.: БХВ- Петербург, 2005. — 704 с.: ил.
2. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 - СПб.: Санкт-Петербург, 1997.-384с.
3. Трусов А. Ф. Excel 2007 для менеджеров и экономистов: логистические, производственные и оптимизационные расчеты (+CD). — СПб.: Питер, 2009. — 256 с.: ил.
4. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL / Практикум: Учебное пособие для вузов. - М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. - 136 с.
5. Васильев А. Н. Финансовое моделирование и оптимизация средствами Excel 2007 (+CD). — СПб.: Питер, 2009. — 320 с.: ил.
6. Хамухин А.А. Решение оптимизационных задач в среде Microsoft Excel.: Издательство ТПУ, 2011. - 45 с.

7. Урубков А.Р.Курс MBA по оптимизации управленческих решений. Практическое руководство по использованию моделей линейного программирования / А. Р. Урубков. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2006.— 176 с.
8. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1986. — 320 с.
9. Алексеев О. Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. - М.: Наука, 1987. - 248 с.
10. Балашевич В. А. Математические методы в управлении производством. — Минск: Высшая школа, 1976. — 250 с.
11. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. — М.: Радио и связь, 1988. - 128 с.