Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

В.А. Семиглазов

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работе по направлению 43.03.01 «Сервис» Профиль «Информационный сервис»

Томск 2017

Компьютерное моделирование управленческих решений: Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работе / Семиглазов В.А. – Томск, Кафедра ТУ, ТУСУР, 2017г. – 36 с.

Рассматриваются методы и алгоритмы практического решения типовых управленческих задач основных классов. Описываются теоретические основы и практические особенности постановки и решения соответствующих задач. Для типовых задач оптимизации предлагаются насколько способов их решения. Учебно-методическое пособие содержит методическую основу для практической и самостоятельной работы студентов направления 43.03.01 Информационный сервис.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Надстройка MS Excel «Поиск решения»

1. Решение задач линейного программирования (ЗЛП)

Поиск решения — это надстройка Excel, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если в меню Сервис (для пакета MS Office 2003) отсутствует команда Поиск решения, значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите команду Сервис → Надстройки и активизируйте надстройку Поиск решения. Если же этой надстройки нет в диалоговом окне Надстройки, необходимо обратиться к панели управления Windows, щелкнуть на пиктограмме **Установка и удаление программ** и с помощью программы установки Excel (или Office) установить надстройку Поиск решения.

Для пакета MS Office 2007 Поиск решения находится на вкладке ленты Данные, в группе Анализ. Если его там нет, то необходимо раскрыть главное меню Excel (Круглая кнопка в левом верхнем угле программы) и нажать кнопку внизу окна – Параметры Excel. Раскрываем раздел Надстройки. Далее в поле Управление выбираем Надстройки Excel и нажимаем кнопку Перейти…

В открывшемся окне выбираем нужные надстройки и нажимаем ОК.

После выбора команды Сервис → Поиск решения появится диалоговое окно Поиск решения.

Основные параметры диалогового окна Поиск решения:

- Установить целевую ячейку;
- Изменяя ячейки;
- Ограничения.

Сначала нужно заполнить поле **Установить целевую ячейку.** Во всех задачах для средства **Поиск решения** оптимизируется результат в одной из ячеек рабочего листа. Целевая ячейка связана с другими ячейками этого рабочего листа с помощью формул. Средство **Поиск решения** использует формулы, которые дают результат в целевой ячейке. Можно выбрать поиск наименьшего или наибольшего значения для целевой ячейки или установить конкретное значение.

Второй важный параметр средства **Поиск решения** — это параметр **Изменяя ячейки.** Здесь указываются ячейки, значения в которых будут изменяться для того, чтобы оптимизировать результат в целевой ячейке. Для поиска решения можно указать до 200 изменяемых ячеек. К этим ячейкам предъявляется два основных требования: они не должны содержать формул и изменение их значений должно отражаться на изменении результата в целевой ячейке. Другими словами, целевая ячейка зависит от изменяемых ячеек.

Третий параметр, который нужно вводить на вкладке **Поиск решения, —** это **Ограничения.**

Для решения задачи необходимо:

1) указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (установить *изменяемые ячейки);*
2) ввести исходные данные;
3) ввести зависимость для целевой функции;
4) ввести зависимости для ограничений;
5) запустить команду Поиск решения;
6) назначить ячейку для целевой функции (установить *целевую ячейку);*
7) ввести ограничения;
8) ввести параметры для решения ЗЛП.

Пример 1

Планирование выпуска продукции пошивочного предприятия (задача о костюмах).

Намечается выпуск двух видов костюмов — мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат, на мужской— 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человекодень трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человекодней трудозатрат.

Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского — 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

Решение.

Экономико-математическая модель задачи

Переменные: x_1 — число женских костюмов; x_2 — число мужских костюмов.

Целевая функция: $f(X) = 10x_1 + 20x_2 \longrightarrow \max$.

Ограничения:

$x_1 + 3{,}5x_2 < 350$ (ограничение по шерсти);

$2x_1 + 0{,}5x_2 < 240$ (ограничение по лавсану);

$x_1 + x_2 < 150$ (ограничение по труду);

$x_2 > 60$ (ограничение по мужским костюмам);

$x_1 > 0$ (ограничение по женским костюмам).

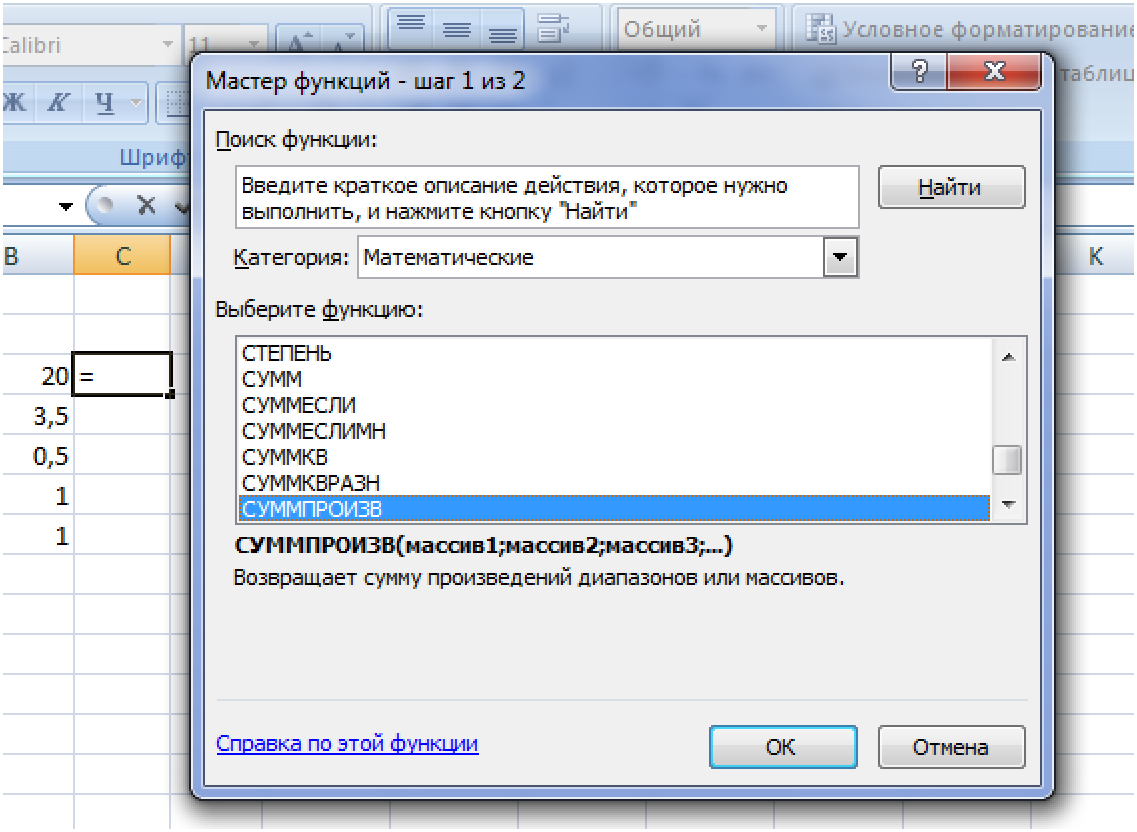
1. **Указать адреса ячеек**, в которые будет помещен результат решения (установить изменяемые ячейки). Обозначьте через x_1, x_2 количество костюмов каждого типа. В нашей задаче оптимальные значения вектора $X = (x_1, x_2)$ будут помещены в ячейках А2:В2, а оптимальное значение целевой функции — в ячейке С3.

2. **Ввести исходные данные. Введите исходные данные задачи, как показано на рис.**

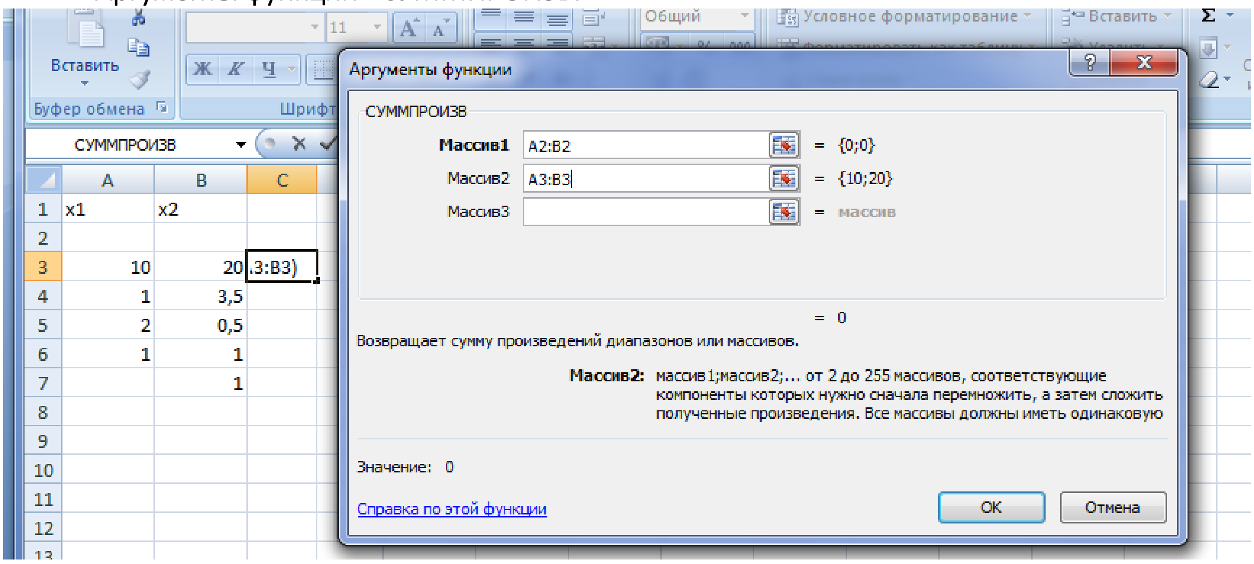
	A	B	C	D	E
1	x1	x2			
2					
3	10	20			
4	1	3,5		350	
5	2	0,5		240	
6	1	1		150	
7		1		60	
8					

3. **Ввести зависимость для целевой функции.**

– Поместите курсор в ячейку С3, произойдет выделение ячейки.
– Поместите курсор на кнопку Мастер функций, расположенную на панели инструментов.
– Введите Enter. На экране появится диалоговое окно Мастер функций — шаг 1 из 2.
– В окне Категория выберите категорию Математические.



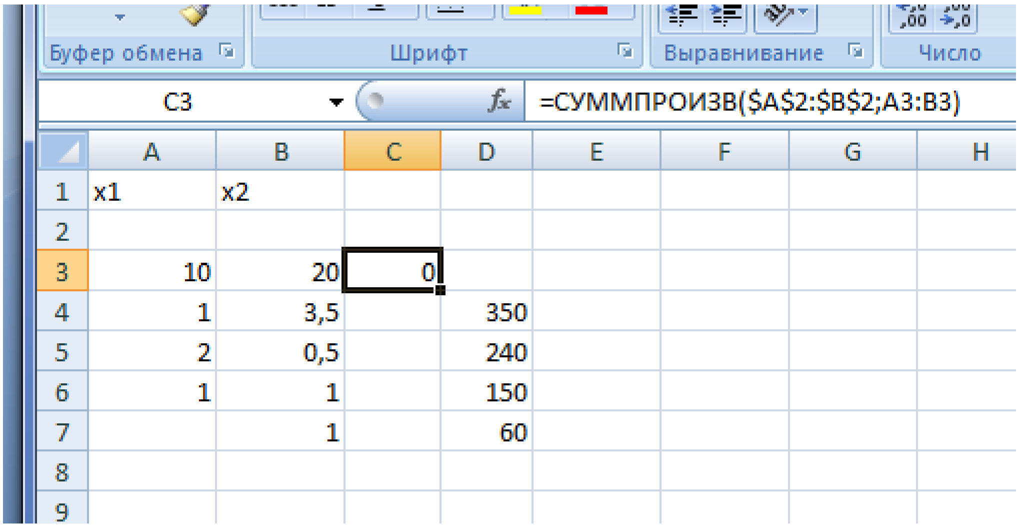
– В окне функции выберите строку СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно Аргументы функции - СУММПРОИЗВ.



– В строку Массив 1 введите A2:B2.
– В строку Массив 2 введите A3:B3.

Примечание. Адреса ячеек во все диалоговые окна удобно вводить не с клавиатуры, а помещая курсор мыши в ячейки, чьи адреса следует ввести.

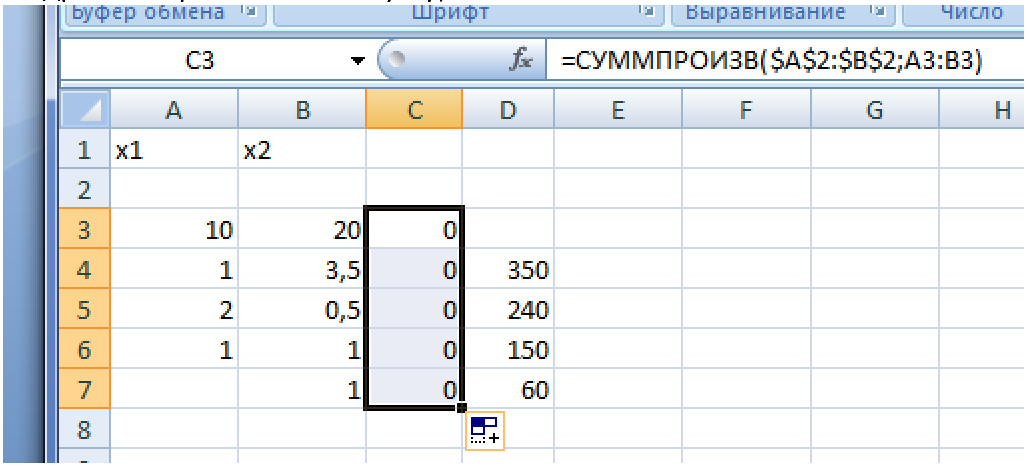
Массив 1 будет использоваться при вводе зависимостей для ограничений, поэтому на этот массив надо сделать *абсолютную ссылку* (A2:B2-относительная; $A$2:$B$2 - абсолютная)*:*



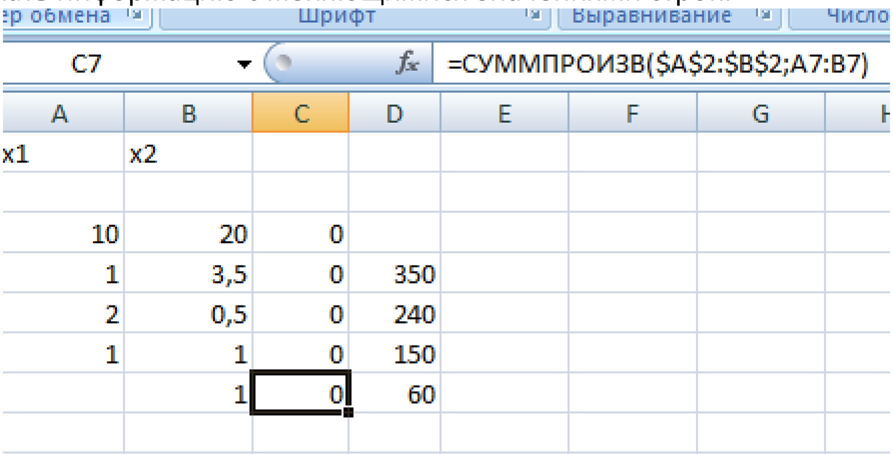
На рис. показано, что в ячейку С3 введена функция.

4. **Ввести зависимости для ограничений.**

Содержимое ячейки С3 скопируйте в ячейки С4—С7 (растягивая черную рамку С3 за квадратик в правом нижнем углу):

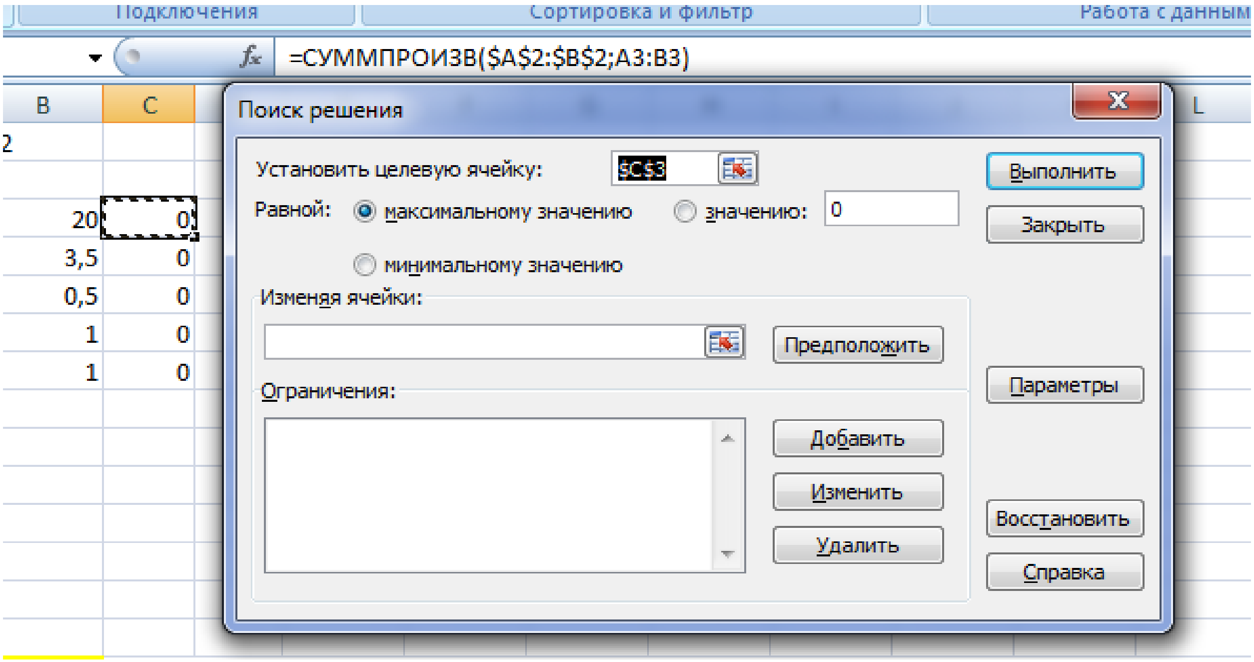


Содержимое ячеек С4—С7 необходимо проверить. Они обязательно должны содержать информацию с меняющимися значениями строк:



5. **Запустить команду Поиск Решения.**

– В строке Меню указатель мыши поместите на Сервис (В Excel 2007 Поиск решения находится на вкладке Ленты инструментов **Данные** в разделе Анализ).
– В развернутом меню выберите команду Поиск решения. Появится диалоговое окно Поиск решения:



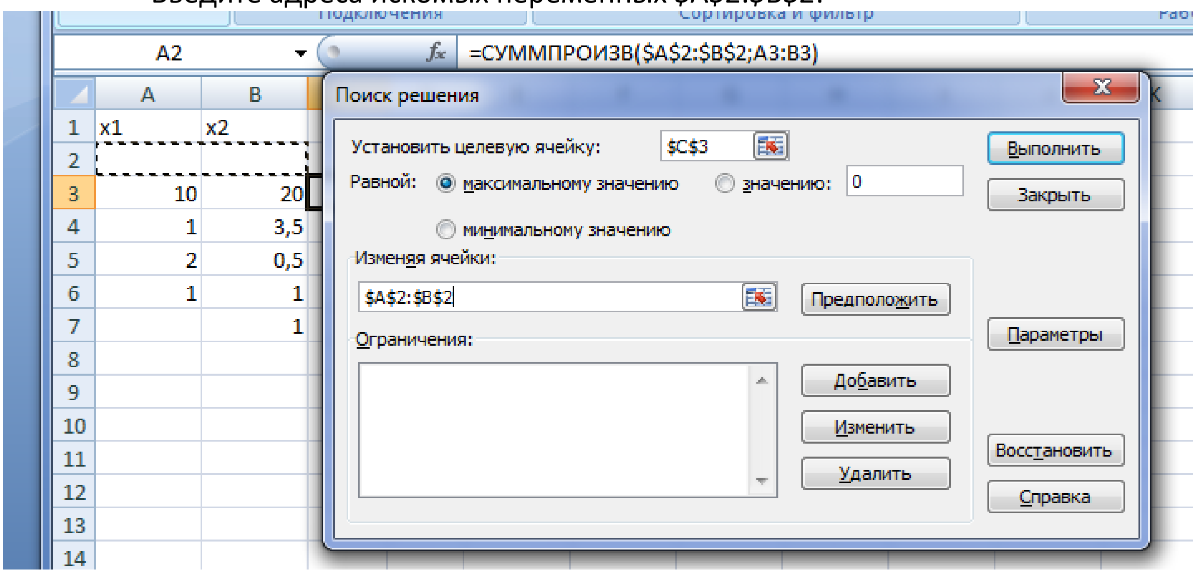
6. Назначить ячейку для целевой функции.

Поясним смысл элементов окна Поиск решения на примере нашей задачи.

- **Установить целевую ячейку** — определяет целевую ячейку, значение которой необходимо либо максимизировать, либо минимизировать, либо сделать равным конкретному значению.
  - Поместите курсор в строку Установить целевую ячейку. Сюда необходимо внести адрес ячейки, содержащей целевую функцию.

Введите адрес ячейки $C$3. Для того чтобы сделать это, щелкните мышью на той ячейке рабочего листа, где содержится целевая функция, — C3. Вокруг C3 появится движущийся пунктирный контур, а в поле окна — соответствующий адрес.

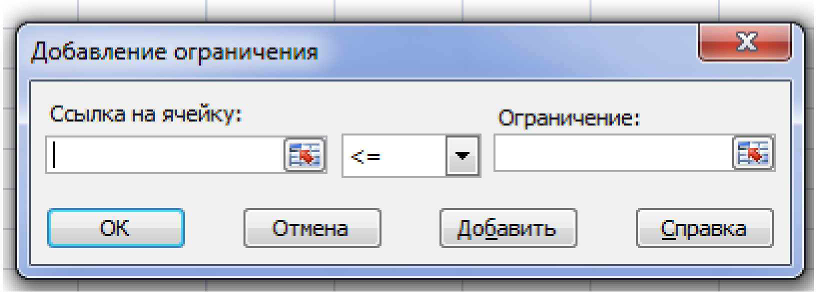
  - Введите тип целевой функции в зависимости от условия задачи. Для этого отметьте, чему равна целевая функция — Максимальному значению или Минимальному значению.
- **Изменяя ячейки** — определяет изменяемые ячейки. Изменяемая ячейка — это ячейка, которая может быть изменена в процессе поиска решения для достижения нужного результата. Допускается задание до 200 изменяемых ячеек.
  - Поместите курсор в строку Изменяя ячейки.
  - Введите адреса искомых переменных $A$2:$B$2:



– Предположить — отыскивает все неформульные ячейки, прямо или непрямо зависящие от формулы в окне Установить целевую ячейку, и помещает их ссылки в окно Изменяя ячейки.
– Ограничения — перечисляет текущие ограничения в данной задаче.
– Добавить — выводит диалоговое окно Добавление ограничения, в котором можно добавить ограничения к текущей задаче.
– Изменить — выводит диалоговое окно Изменение ограничения, в котором можно модифицировать имеющиеся ограничения.
– Удалить — удаляет выделенное ограничение.

7. **Ввести ограничения.**

Поместите указатель мыши на кнопку **Добавить.** На экране появится диалоговое окно **Добавление ограничения**:



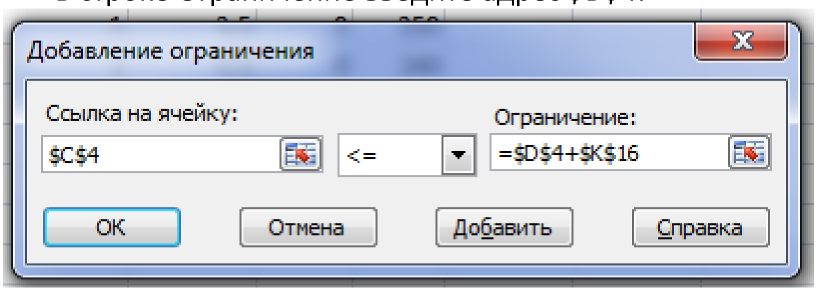
Excel воспринимает ограничения в виде ссылок на ячейки, в которых содержатся соответствующие формулы, при этом левая часть ограничения представляет собой, как правило, *ссылку на формулу,* а правая — *значение:* число или ссылку на ячейку, содержащую значение. Адреса ячеек должны содержать символ $. Если определяется интервал ячеек, то он должен быть той же формы и тех же размеров, что и интервал в окне **Ссылка на ячейку.**

Поясним смысл элементов окна Добавление ограничения.

- **Ссылка на ячейку** — определяет ячейку или интервал ячеек, чьи значения необходимо ограничить.

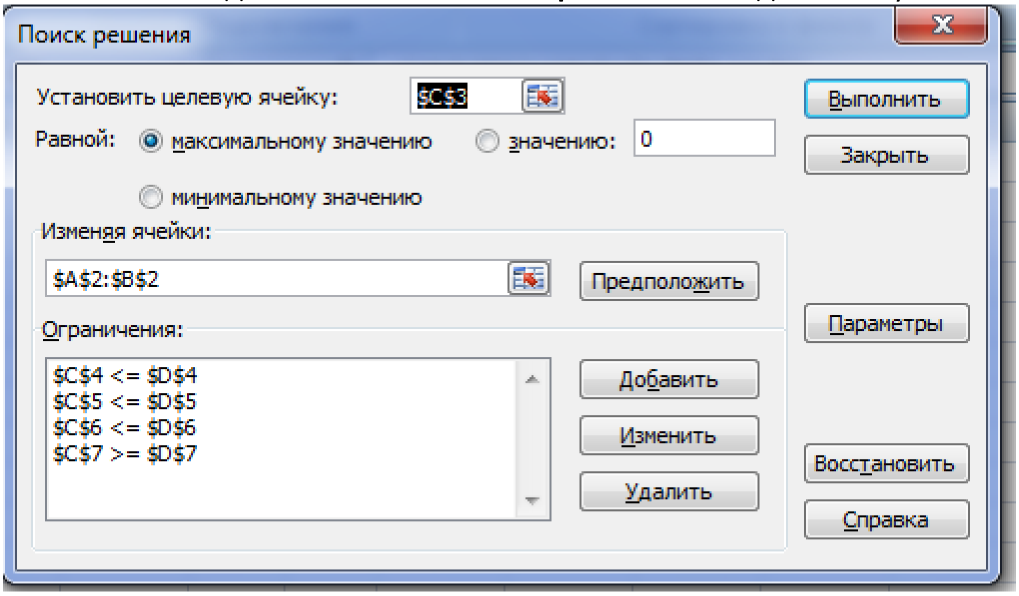
- **Ограничение** — определяет условие, налагаемое на содержимое окна Ссылка на ячейку.

– В строке Ссылка на ячейку введите адрес $C$4.
– Введите знак ограничения: выберите из списка отношение, которое нужно установить между ячейкой (или интервалом) и ограничением, которое нужно ввести в окне справа от списка. Можно выбрать < = , = , > = , или «цел». Если вы выбрали «цел» для указания на то, что переменная должна быть целочисленной, то слово «Целое» появится в окне справа от списка.
– В строке Ограничение введите адрес $D$4:



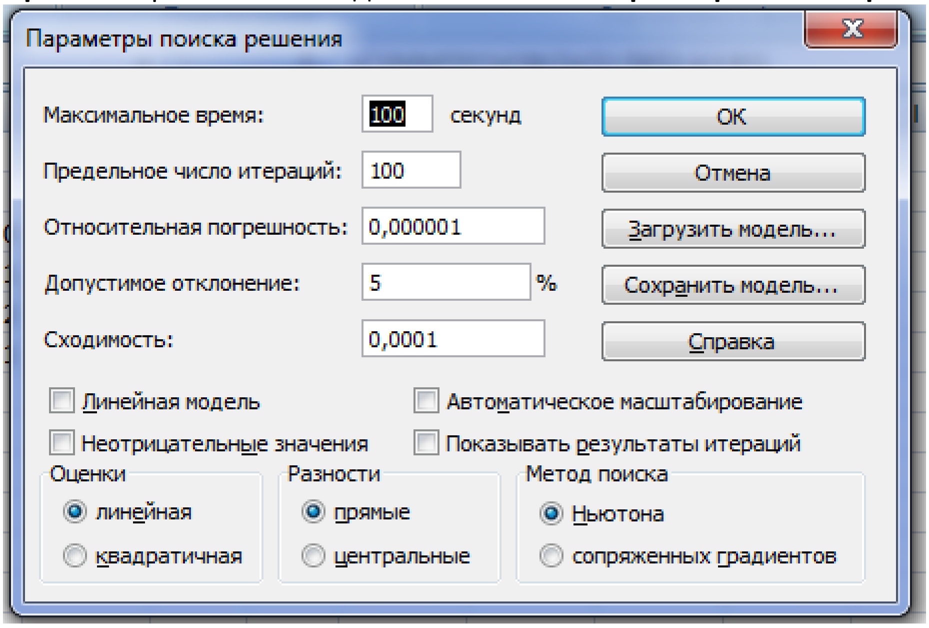
– Поместите указатель мыши на кнопку Добавить. На экране вновь появится диалоговое окно Добавление **ограничения,**
– Введите остальные ограничения задачи по описанному выше алгоритму.

– После того как введены все ограничения, нажмите кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно **Поиск решения** с введенными условиями:



8. Ввести параметры для решения задачи линейного программирования.

В диалоговом окне **Поиск решения** поместите указатель мыши на кнопку **Параметры.** На экране появится диалоговое окно **Параметры поиска решения:**



С помощью команд, находящихся в этом окне, можно вводить условия для решения задач оптимизации всех классов. Можно определять параметры для линейных и нелинейных задач. Каждый из параметров в диалоговом окне имеет значение по умолчанию, подходящее для большинства задач.

Поясним смысл элементов окна Параметры поиска решения.

- Максимальное время — служит для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время (в секундах), не превышающее 32767; значение 100, используемое по умолчанию, подходит для большинства простых задач.

- Предельное число итераций — ограничивает время, требующееся для процесса отыскания решения, путем ограничения числа итераций. Это значение должно быть положительным целым числом до 32 767.

- Относительная погрешность—контролирует точность ответов, получаемых при поиске решений. Число, вводимое в это поле:

- используется при определении того, удовлетворяет ли значение ячейки Ограничение нужному равенству или находится ли оно в указанных границах;
- должно быть дробным числом от 0 до 1 (не включая концы);
- имеет значение по умолчанию, равное 0,000001;
- указывает на меньшую точность, если число введено с меньшим количеством десятичных знаков (например, 0,0001).

Вообще говоря, чем большая точность определяется (чем меньше число), тем больше времени понадобится для поиска решения. Можно существенно ускорить поиск, если установить исходное значение, достаточно близкое к искомому решению.

- Допустимое отклонение — служит для задания величины отклонения от оптимального решения, если изменяемые ячейки ограничены множеством целых чисел. Чем выше отклонение (допустимое отклонение в процентах), тем быстрее процесс решения. Установка отклонения не играет роли, если не введены целочисленные ограничения.

- Сходимость — применяется только к нелинейным задачам. Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле Сходимость, поиск прекращается. Параметр принимает значения от 0 до 1. Лучшую сходимость характеризует большее количество десятичных знаков, например: 0,0001 соответствует меньшему относительному изменению по сравнению с 0,01. Лучшая сходимость требует больше времени на поиск оптимального решения.

- Линейная модель — ускоряет процесс отыскания решения. Команда может быть использована только, если все связи в модели линейны.

- Показывать результаты итераций —прерывает поиск решения и показывает результаты после каждой итерации. - Автоматическое масштабирование — включает автоматический масштаб. Это полезно, когда параметры ввода (Изменяя ячейки) и вывода(Установить целевую ячейку и Ограничения) сильно различаются по величине; например, максимизация прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемым в миллионах рублей.

- Оценки — определяет подход, используемый для получения исходных оценок основных переменных в каждом одномерном поиске:

- линейная — использует линейную экстраполяцию вдоль касательного вектора;
- квадратичная — Использует квадратичную экстраполяцию, что дает лучшие результаты для нелинейных задач.

- Разности — определяет способ вычисления производной при оценке Частных производных целевых и ограничивающих функций:

- прямые — такой способ дифференцирования установлен по умолчанию;
- центральные — требует больше вычислений на рабочем листе, но может помочь в тех случаях, когда получено сообщение о том, что Поиск решения не может улучшить решение.

- Метод поиска — определяет, какой алгоритм используется при каждой итерации. Нужно указать один из методов:

- Ньютона — установлен по умолчанию. Обычно требует больше памяти, чем метод сопряженного градиента, но меньшее число итераций;
- сопряженного градиента — требует меньше памяти, чем метод Ньютона, но обычно более число итераций для достижения конкретного уровня точности. Если объем вычислений достаточно велик и важно экономно использовать память, то целесообразно применять этот метод.

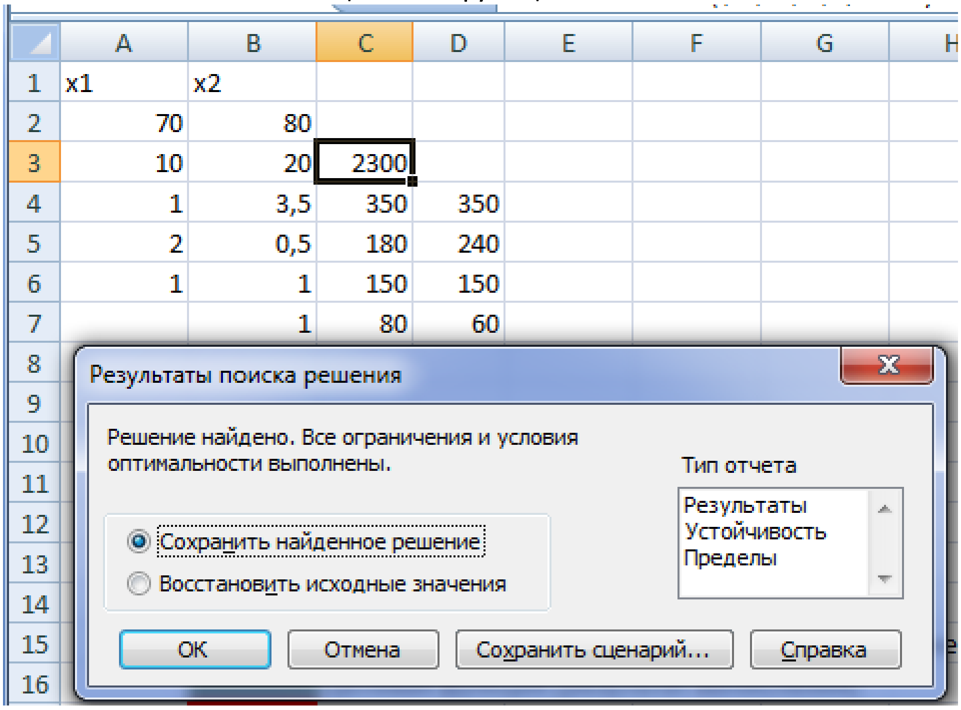
- Загрузить модель — выводит окно диалога Загрузить модель, в котором можно указать, какую именно модель нужно загрузить.

- Сохранить модель — выводит окно диалога Сохранить модель, в котором можно указать, где именно нужно сохранить данную модель. Используйте кнопку Сохранить модель только в том случае, если нужно сохранить более чем одну модель Поиска решения вместе с данным рабочим листом. Первая модель Поиска решения автоматически сохраняется вместе с рабочим листом.

- Установите флажки в окнах Линейная модель (это обеспечит Применение симплекс-метода) и Неотрицательные значения.
- Поместите указатель мыши на кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно Поиск решения.
- Поместите указатель мыши на кнопку Выполнить.

- Выполнить — запускает процесс решения определенной задачи.

Через непродолжительное время появятся диалоговое окно Результаты поиска решения и исходная таблица с заполненными ячейками А3:В3 для значений x_1 и ячейкой С3 с максимальным значением целевой функции:



Диалоговое окно Результаты поиска решения выводит результаты последнего вычисления, используя значения ячеек, наиболее близкие к Нужному решению. Когда Поиск решения завершает попытки отыскания решения, то на экран вверху диалогового окна Результаты поиска решения выводится сообщение о завершении.

Поясним смысл элементов окна Результаты поиска решения.

- Сохранить найденное решение — принимает решение, найденное Поиском решения, и подставляет найденные значения в соответствующие ячейки.

- Восстановить исходные значения — восстанавливает исходные значения в изменяемых ячейках.

- Тип отчета — создает указанный тип отчета. Каждый отчет появляется на отдельном листе рабочей книги.

- Результаты — перечисляет изменяемые ячейки и ячейку в окне Установить целевую ячейку вместе с исходным и конечным значением. Также показывает ограничения и информацию о них.
- Устойчивость — показывает, насколько чувствительно решение к

изменениям коэффициентов в целевой функции или правых частей ограничений. Для нелинейных моделей отчет предоставляет двойственные значения (нормированные градиенты и множители Лагранжа), для линейных моделей — включает нормируемую стоимость, теневые цены и ограничения на изменение правой стороны равенства.

– Пределы — перечисляет изменяемые ячейки вместе с соответствующими значениями, ячейку в окне Установить целевую ячейку, верхние и нижние пределы и целевые значения. Нижний предел есть наименьшее значение, которое может находиться в изменяемой ячейке, если фиксировать остальные ячейки и удовлетворить все ограничения. Верхний предел есть наибольшее значение. Целевое значение есть значение ячейки в окне. Установить целевую ячейку, когда значение изменяемой ячейки достигает наименьшего или наибольшего предела.

Если указать тип отчета **Результаты,** можно получить дополнительную информацию об оптимальном решении:

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$3		0	2300

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$A$2	x1	0	70
$B$2	x2	0	80

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$C$7		80	$C$7>=$D$7	не связан.	20
$C$5		180	$C$5<=$D$5	не связан.	60
$C$6		150	$C$6<=$D$6	связанное	0
$C$4		350	$C$4<=$D$4	связанное	0

Ответ. Необходимо сшить 70 женских и 80 мужских костюмов, чтобы получить максимальную прибыль в 2300 денежных единиц.

2. Решение задач целочисленного программирования (ЦП)

Под задачей целочисленного программирования (ЦП) понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения. В том случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют *целочисленной задачей линейного программирования,* если же хотя бы одна зависимость нелинейна, — *целочисленной **задачей нелинейного** программирования.*

Особый интерес к задачам ЦП вызван тем, что во многих практических задачах необходимо находить целочисленное решение ввиду дискретности ряда значений искомых переменных, к их числу относятся следующие задачи:

– оптимизация раскроя;
– оптимальное проектирование машин и оборудования;
– оптимизация системы сервиса и технического обслуживания машинно-тракторного парка.

Задачи оптимизации, в результате решения которых искомые значения переменных должны быть целыми числами, называются **задачами дискретного (целочисленного) программирования:**

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\,(min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1, n},$$

$$x_j - \text{ целые}, \quad j = \overline{1, p}\; (p \leq n).$$

Если *p = n,* то задачу называют ***полностью целочисленной,*** если *p < n,* то ***частично целочисленной.***

Существуют различные методы решения задач дискретного программирования (дискретной оптимизации). Наиболее часто используется *метод ветвей и границ.* Именно этот метод реализован в программе поиск решения пакета Excel.

Дискретная оптимизация средствами Excel проводится аналогично решению соответствующих непрерывных задач. Основное отличие заключается во вводе при оформлении диалогового окна **Поиск решения** *требования целочисленности* соответствующих переменных (при этом в режиме **Параметры** устанавливается тип задачи — линейная или нелинейная).

Исходя из требования целочисленности, в случае дискретной оптимизации возможен вызов только одного Отчета **по результатам.**

Пример 2

Задача производства неделимой продукции (оптимизация производственной программы мебельного предприятия). Мебельное предприятие выпускает книжные полки, тумбу под телевизоры и три вида наборов мебели. Характеристики каждого вида продукции приведены в табл. При условии получения максимальной прибыли объем товарной продукции в денежном выражении должен составить не менее 459,31 тыс. руб.

Оптимизировать производственную программу предприятия.

Показатель	*Вид продукции*				
	Набор мебели			*Книжные полки*	*Тумба под телевизор*
	1	2	3		
Оптовая цена, тыс. руб.	7,2	14,3	26,9	0,243	1,5
Прибыль от реализации, тыс. руб.	2,4	4,5	8,9	0,06	0,45

Ситуация со сбытом продукции сложилась следующая. Книжными полками рынок насыщен, поэтому торговые организации уменьшили объем договоров до 10 тыс. шт. Тумбы для телевизоров могут быть реализованы в объемах от 4 до 7 тыс. шт., наборы мебели вида 2 — от 7 до 10 тыс. шт. Спрос на наборы мебели видов 1 и 3 неограничен, и требуется не менее 10 тыс. шт. Предприятие имеет технологическое оборудование, количество которого и нормы затрат времени на изготовление единицы продукции каждого вида приведены в след. табл. Предприятие работает в две смены, эффективное время работы каждой машины — 3945 ч.

Наименование оборудования	*Количество, шт.*	*Вид продукции*				
		Набор мебели			*Книжные полки*	*Тумба под телевизор*
		1	2	3		
Линия раскроя древесно-стружечных плит	2	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042.
Гильотинные ножницы	1	0,045	0,080	0,158	0,011	0,035
Линия облицовки	2	0,132	0,184	0,428	0,020	0,060
Линия обрезки кромок	2	0,057	0,082	0,230	0,010	0,028
Лаконаливная машина	2	0,063	0,090	0,217	0,010	0,032
Полировальные станки	4	0,170	0,280	0,620	0,020	0,096

Тема 1. Оптимизация плана производства

Задача 1.

Нефтеперерабатывающая установка может работать в двух различных режимах. При работе в первом режиме из одной тонны нефти производится 300 кг темных и 600 кг светлых нефтепродуктов; при работе во втором режиме – 700 кг темных и 200 кг светлых нефтепродуктов. Ежедневно на этой установке необходимо производить 110 т. темных и 70 т. светлых нефтепродуктов. Это плановое задание необходимо ежедневно выполнять, расходуя минимальное количество нефти.

Исходные данные		
1-й режим	0,3 т -тёмн. н/прод.	0,6 т- св. н/прод.
2-й режим	0.7 т-тёмн. н/прод.	0.2 т св. н/прод.
Необходимо :	110 т-тёмн. н/прод..	70 т-св. н/прод.

Вопросы:

1. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать в первом режиме?
2. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать во втором режиме?
3. Каков минимальный ежедневный расход нефти?
4. На сколько тонн увеличится ежедневный минимальный расход нефти, если потребуется производить в день 80 т светлых нефтепродуктов?

Решение

Примем за X_1- количество нефти для 1-го режима; X_2- количество нефти для 2-го режима.

Начальные значения переменных: $X_{1,0} = X_{2,0} = 1$ (Необходимо задать для начальной итерации численного метода).

Целевая функция примет вид: $Z = X_1 + X_2 \rightarrow min$

Система ограничений:

$$\begin{Bmatrix} 0{,}3X_1 + 0{,}7X_2 \geq 110 \\ 0{,}6X_1 + 0{,}2X_2 \geq 70 \\ X_1 > 0;\ \ X_2 > 0 \end{Bmatrix}$$

Заготовка для решения задачи в электронных таблицах MS Excel содержится в файле «Тема 1. Оптимизация плана производства.xls».

Задача 2.

Фирма производит два типа химикатов. На предстоящий месяц она заключила контракт на поставку следующего количества этих химикатов:

Тип химикатов	Продажи по контракту, т
1	100
2	120

Производство фирмы ограничено ресурсом времени работы двух химических реакторов. Каждый тип химикатов должен быть обработан сначала в реакторе 1, а затем в реакторе 2. Ниже в таблице приведен фонд рабочего времени, имеющийся у каждого реактора в следующем месяце, а также время на обработку одной тонны каждого химиката в каждом реакторе.

Реактор	Время на обработку 1 т. химикатов, ч		Фонд времени, ч
	Типа 1	Типа 2	
1	4	2	300
2	3	6	400

Из-за ограниченных возможностей, связанных с существующем фондом времени на обработку химикатов в реакторах, фирма не имеет достаточных мощностей, чтобы выполнить обязательства по контракту. Выход заключается в следующем: фирма должна купить какое-то количество этих химикатов у других производителей, чтобы использовать эти закупки для выполнения контракта. Ниже приводится таблица затрат на производство химикатов самой фирмой и на закупку их со стороны:

Тип химикатов	Затраты на производство, т.руб./т	Затраты на покупку, тыс.руб./т
1	35	45
2	56	66

Цель фирмы состоит в том, чтобы обеспечить выполнение контракта с минимальными издержками. Это позволит ей максимизировать прибыль, так как цены на химикаты уже оговорены контрактом. Другими словами, фирма должна принять решение: сколько химикатов каждого типа производить у себя, а сколько – закупать со стороны для того, чтобы выполнить контракт с минимальными издержками.

Вопросы:

1. Сколько химикатов типа 1 следует производить фирме?
2. Сколько химикатов типа 2 следует производить фирме?
3. Сколько химикатов типа 1 следует закупать со стороны?
4. Сколько химикатов типа 2 следует закупать со стороны?
5. Каковы минимальные издержки на выполнение контракта?
6. Следует ли изменить объем закупок химикатов типа 2 со стороны, если их цена возрастет до 75 тыс.руб. за тонну?
7. На сколько возрастут минимальные издержки, если фонд времени работы реактора 2 сократится с 400 до 300 ч.?

Задача 3

Василий Иванов – владелец небольшого мебельного цеха. Он производит столы трех моделей: А, В и С. Каждая модель требует определенных затрат времени на выполнение трех операций: производство заготовок, сборка и покраска.

Василий имеет возможность продать все столы, которые он изготовит. Более того, модель С может быть продана и без покраски (Модель $C_{бп}$). При этом прибыль уменьшается на 200 руб. за штуку. Василий нанимает нескольких рабочих, которые работают у него по совместительству, так что количество часов, отводимое на каждый вид работ, изменяется от месяца к месяцу.

Постойте модель линейного программирования, которая помогла бы Иванову найти такую программу выпуска продукции, чтобы прибыль в следующем месяце была максимальная. Предполагается, что по каждому виду работ возможны трудозатраты до 100 ч. В следующей таблице указаны время (в часах), необходимое для выполнения операций по производству столов каждой модели, и прибыль (в руб.), которая может быть получена от реализации каждого изделия.

Модель	Производство заготовок, час	Сборка, час	Покраска, час	Прибыль, руб.
A	5	2	5	450
B	1	2	5	400
C	7	5	6	500
$C_{бп}$	4	5	0	300

Вопросы:

1. Какую максимальную прибыль может получить Василий в течение месяца?
2. Сколько столов модели А следует производить?
3. Следует ли продавать неокрашенные столы модели С?
4. На сколько увеличится максимальная прибыль, если допустимый объем трудозатрат на этапе сборки возрастет на 10 %?
5. На какую минимальную величину должна возрасти прибыль от производства и продажи окрашенного стола модели С, чтобы стало выгодно их производить?

Задача 4.

После предпринятой рекламной кампании фирма «Давидко» испытывает необыкновенный рост спроса на два типа мангалов для приготовления шашлыков на открытом воздухе – газовые и угольные. Фирма заключила контракт на ежемесячную поставку в магазины 300 угольных и 300 газовых мангалов.

Производство мангалов ограничивается мощностью следующих трех участков: производства деталей, сборки и упаковки. В таблице показано, сколько человекочасов затрачивается на каждом участке на каждую единицу продукции, а также приведен допустимый ежемесячный объем трудозатрат:

Фирма «Давидко» не может обеспечить выполнение контракта своими силами. Поэтому она провела переговоры с другим производителем, который в настоящее время располагает избыточными мощностями. Этот производитель согласился поставлять фирме «Давидко» в любом количестве угольные мангалы по 3 тыс. руб. за штуку и газовые мангалы по 5 тыс.руб. за штуку. Эти цены превышают себестоимость мангалов на заводе фирмы «Давидко» на 1,5 тыс. руб за каждый угольный мангал и на 2 тыс.руб. за каждый газовый мангал.

Задача фирмы «Давидко» состоит в том, чтобы найти такое соотношение закупаемых и производимых мангалов, которое обеспечило бы выполнение контракта с минимальными общими затратами.

Участок	Трудозатраты на 1 мангал.час.		Фонд времени,чел.часы
	Угольный	Газовый	
Производство	5	8	2600
Сборка	0,8	1,2	400
Упаковка	0,5	0,5	200
Контракт на шт.	300	300	

Стоимость, тыс.руб	3	5	(покупные)
Себестоимость,тыс.руб.	1,5	3	(собственные)

Вопросы:

1. Каковы минимальные издержки на выполнение контракта?
2. Сколько угольных мангалов следует ежемесячно производить фирме «Давидко»?
3. Сколько газовых мангалов следует ежемесячно производить?
4. Сколько газовых мангалов следует приобретать?
5. Следует ли сохранить объемы закупок газовых мангалов, если компания, выполняющая заказы для фирмы «Давидко», поднимет цену на них до 5,5 тыс.руб?

Тема 2. Оптимальное смешивание

Задача 1

Сочинский винзавод производит две марки сухого вина: «Черный лекарь» и «Букет роз». Оптовые цены, по которым реализуется готовая продукцию, соответственно 68 и 57 руб. за литр. Ингредиентами для приготовления этих вин является белое, розовое и красное сухие вина, закупаемые в Краснодаре. Эти вина стоят соответственно 70, 50 и 40 руб. за литр. В среднем на сочинский винзавод поставляется ежедневно 2 000 л. белого , 2 500 л. розового и 1 200 л. красного вина.

В вине «Черный лекарь» должно содержаться 60 % белого вина и не более 20 % красного. Вино «букет роз» должно содержать не более 60 % красного и не менее 15 % белого.

Определите рецепты смешения ингредиентов для производства вин «черный лекарь» и «букет роз», обеспечивающие заводу максимальную прибыль.

Ингредиенты	Стоимость, руб.	Объём поставки, л.	Состав вина «Чёрный лекарь»"	Состав вина «Букет роз»
Белое вино	70	2000	≥ 60%	≤ 60%
Красное вино	40	1200	≤ 20%	≥ 15%
Розовое вино	50	2500	?	?
Стоимость гот. прод.			68 руб.	57 руб.

Вопросы:

1. Какую максимальную прибыль можно получить за один день?
2. Сколько литров вина «черный лекарь» следует производить ежедневно?
3. Сколько процентов белого вина должен содержать «черный лекарь»?
4. Сколько литров вина «Букет роз» следует производить ежедневно?
5. Сколько процентов розового вина должен содержать «Букет роз»?
6. На сколько возрастет прибыль винзавода, если поставки красного вина удастся увеличить до 1300 л. в день?
7. На сколько уменьшится прибыль винзавода, если поставки белого вина сократятся до 1 800 л?

Решение

Примем за X_{11}- количество белого вина в «Черном лекаре»;

X_{12}- количество розового вина в «Черном лекаре»;

X_{13}- количество красного вина в «Черном лекаре»;

X_{21} - количество белого вина в «Букете роз»;

X_{22} - количество розового вина в «Букете роз»;

X_{23} - количество красного вина в «Букете роз».

Начальные значения переменных: $X_{11,0} = X_{12,0} = X_{13,0} = X_{21,0} = X_{22,0} = X_{23,0} = 1$ (Необходимо задать для начальной итерации численного метода).

Целевая функция примет вид:

$$Z = (68-70)X_{11} + (68-50)X_{12} + (68-40)X_{13} + (57-70)X_{21} + (57-50)X_{22} + (57-40)X_{23} \rightarrow max$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} \le 2000 \\ X_{12} + X_{22} \le 2500 \\ X_{13} + X_{23} \le 1200 \\ 0{,}6(X_{11} + X_{12} + X_{13}) \le X_{11} \\ 0{,}2(X_{11} + X_{12} + X_{13}) \ge X_{13} \\ 0{,}6(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \ge X_{23} \\ 0{,}15(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \le X_{21} \\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0;\ X_3 \ge 0;\ X_4 \ge 0 \end{cases}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} \le 2000 \\ X_{12} + X_{22} \le 2500 \\ X_{13} + X_{23} \le 1200 \\ -0{,}4X_{11} + 0{,}6X_{12} + 0{,}6X_{13} \le 0 \\ -0{,}2X_{11} - 0{,}2X_{12} + 0{,}8X_{13} \le 0 \\ -0{,}6X_{21} - 0{,}6X_{22} + 0{,}4X_{23} \le 0 \\ -0{,}85X_{21} + 0{,}15X_{22} + 0{,}15X_{23} \le 0 \\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0;\ X_3 \ge 0;\ X_4 \ge 0 \end{cases}$$

Заготовка для решения задачи в электронных таблицах MS Excel содержится в файле «Тема 2. Оптимальное смешивание.xls».

Задача 2

Животноводческая фирма имеет возможность закупать корма четырех видов по различным ценам. В кормах содержатся питательные вещества трех видов, необходимые для кормления коровы. Составьте еженедельный рацион кормления коровы, обеспечивающий с минимальными затратами нормы содержания питательных веществ.

Данные, необходимые для составления рациона, приведены в следующей таблице (содержание вещества в кормах указано в килограммах на тонну)

Корм / Вещество	1	2	3	4	Норма содержания в рационе, кг.
A	20	40	60	10	Не менее 5
B	30	10	0	20	Не менее 3, не более 4
C	50	90	40	60	Не менее 8, не более 10
цена	180	200	250	100	

Вопросы:

1. Какое количество корма 1 следует закупать для составления еженедельного кормления коровы?
2. Какое количество корма 4 следует закупать для составления еженедельного рациона кормления коровы?
3. Каков общий вес еженедельного рациона коровы?
4. Каковы минимальные затраты на покупку кормов для еженедельного рациона одной коровы?

5. На сколько возрастут затраты, если еженедельный рацион должен содержать не менее 6 кг вещества А?
6. До какой величины должна возрасти цена на корм 4, чтобы использование этого корма оказалось невыгодным?

Задача 3.

Мощности завода позволяют произвести в текущем месяце ингредиенты для производства удобрений в следующем количестве: 10т. нитратов, 15 т фосфатов и 12 т. поташа. В результате смешения этих активных ингредиентов с инертными, запасы которых не ограничены, на заводе могут быть получены четыре типа удобрений.

Удобрение 1 содержит 5 % нитратов, 10 % фосфатов и 5 % поташа.

Удобрение 2 содержит 5 % нитратов, 10 % фосфатов и 10 % поташа.

Удобрение 3 содержит 10 % нитратов, 10 % фосфатов и 10 % поташа.

Удобрение 4 содержит 10 % нитратов, 5 ; фосфатов и 10 % поташа.

Цены на удобрение соответственно 400, 500, 400 и 450 руб. за тонну. Объем спроса на удобрения практически не ограничен.

Стоимость производства одной тонны нитратов 360 руб., фосфатов 240 руб. и поташа 200 руб.

Инертные ингредиенты закупаются заводом по цене 100 руб. за тонну.

На текущий месяц завод уже заключил контракт на поставку 10 т удобрения 3.

Определите, какие удобрения и в каком количестве их следует производить, чтобы в текущем месяце завод получил максимальную прибыль?

Количество удобрений		X_1	X_2	X_3	X_4	(X3≥10 т.)
Нитраты	360руб	0,05	0,05	0,1	0,1	≤10
Фосфаты	240руб	0,1	0,1	0,1	0,05	≤15
Поташ	200руб	0,05	0,1	0,1	0,05	≤12
Цена удобрений		400	500	400	450	X1;X2;X4≥0

Пример расчёта прибыли 1т. Удобрения 1 :400-(0,05*360+0,1*240+0,05*200+0,8*100) = 268 руб.

Вопросы:

1. Сколько удобрения 1 следует производить?
2. Сколько всего следует производить удобрений?
3. Какова максимальная прибыль?
4. НА сколько изменилась бы прибыль, если бы заказчик отказался от контракта на поставку удобрения 3?

Тема 3. Оптимальный раскрой

ИДЗ 2. *Имеется материал ЛДСП размером 5,75м х 1,83м. Необходимо его раскроить оптимальном способом для производства спальных гарнитуров, состоящий из а) две тумбочки и комод, б) кровать и шкаф. Имеется 100 листов ЛДСП. Необходимо максимизировать количество комплектов мебели. Решить задачу в Excel. Ответ представить в виде чертежа с размерами элементов гарнитура в окне ответа, и файл Excel, пристегнутого к ответу.*

Задача 1.

Изготовление парников из металлических стержней.

При изготовлении парников используется материал в виде металлических стержней длиной 220 см. Этот материал разрезается на стержни длиной 120, 100 и 70 см. Для выполнения заказа требуется изготовить 80 стержней длиной 120 см, 120 стержней длиной 100 см. и 102 стержня длиной 70 см.

Необх. длина стержней	Количество стержней
120 см	80
100 см	120
70 см	102
Длина исходных стержней=220 см	

Вопросы:

1. Сколько существует рациональных способов раскроя?
2. Какое минимальное количество материала следует разрезать, чтобы выполнить заказ?
3. Сколько способов раскроя следует использовать при выполнении заказа?

Решение

Способ раскроя	Количество заготовок длинны			Величина отходов, см.
	120 см.	100 см.	70 см.	
1	1	1	0	0
2	1	0	1	30
3	0	2	0	20
4	0	1	1	50
5	0	0	3	10

Примем за X_1- количество стержней, разрезанных способом 1;
X_2- количество стержней, разрезанных способом 2;
X_3 - количество стержней, разрезанных способом 3;
X_4 - количество стержней, разрезанных способом 4;
X_5 - количество стержней, разрезанных способом 5
Начальные значения переменных: $X_{1,0} = X_{2,0} = X_{3,0} = X_{4,0} = X_{5,0} = 1$ (Необходимо задать для начальной итерации численного метода).
Целевая функция примет вид: $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \to min$
Система ограничений:

$$\left\{\begin{matrix} X_1 + X_2 \geq 80 \\ X_1 + 2X_3 + X_4 \geq 120 \\ X_2 + X_4 + 3X_5 \geq 102 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0;\ X_4 \geq 0;\ X_5 \geq 0 \end{matrix}\right\}$$

Заготовка для решения задачи в электронных таблицах MS Excel содержится в файле «Тема 3. Оптимальный раскрой.xls».

Задача 2.

Из прямоугольного листа стали размером 100*60 см необходимо изготовить квадратные заготовки со сторонами 50, 40 и 20 см. Эти заготовки нужны в качестве перегородок при изготовлении пластмассовых коробок для хранения инструментов. Чтобы сделать одну коробку, нужно иметь четыре заготовки со стороной 50 см, шесть заготовок со стороной 40 см. и двенадцать – со стороной 20 см. На складе находится 100 листов материала.

Вопросы:

1. Сколько существует рациональных способов раскроя?
2. Какое максимальное количество коробок можно изготовить при условии, что оставшиеся заготовки можно использовать для следующей партии коробок?

3. Сколько рациональных способов раскроя следует использовать?
4. Сколько листов материала нужно, чтобы изготовить одну коробку?

Задача 3.

Существует три рациональных способа раскроя единицы материала А на заготовки трех типов. Эти же заготовки могут быть получены двумя рациональными способами при раскрое единицы материала В. Количество заготовок, получаемых каждым из этих способов, показано в следующей таблице:

Заготовки используются для производства бытовой техники. В комплект поставки входят четыре заготовки первого типа, три заготовки второго типа и семь – третьего типа. На складе имеется 100 единиц материала А и 300 единиц материала В.

Заготовка	Материал А (100 ед)			Материал В (300 ед)		Количество заготовок в комплекте
	Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4	Способ 5	
1	0	2	9	1	5	4
2	4	3	2	5	4	3
3	10	6	0	8	0	7

Вопросы:
1. Сколько рациональных способов раскроя следует использовать?
2. Какое максимальное число комплектов заготовок можно изготовить из имеющегося материала в предположении, что оставшиеся заготовки можно использовать при выполнении следующего заказа?
3. Сколько единиц материала А следует раскраивать третьим способом?
4. Какое максимальное число комплектов заготовок можно изготовить из имеющегося материала, если число заготовок второго типа в комплекте увеличится до семи?

Тема 4. Планирование финансов

Задача 1

Петр Перфилов – управляющий компанией, которая только что заключила контракт на покупку нового оборудования для консервирования овощей. В соответствии с договором компания должна выплатить поставщику в общей сложности 750 тыс. руб. Причем 150 тыс. руб. необходимо уплатить через 2 месяца, а остальные 600 тыс. через 6 мес. после того, как оборудование будет поставлено и испытано. Петр считает, что сразу после подписания договора следует образовать целевой фонд и использовать эти средства для вложения денег под проценты. Поскольку такие инвестиции породят дополнительную наличность к тому времени, когда придется вносить деньги за оборудование. Петр понимает, что целевой фонд должен быть меньше, чем 750 тыс.руб. А вот сколько именно – зависит от имеющихся возможностей инвестирования.

Проанализировав варианты, Петр решил сосредоточиться на 12 возможных способах вложения денег под проценты. Виды вкладов, их продолжительность, возможные сроки вложения и проценты по вкладу приведены в следующей таблице.

Вид вклада	Срок вклада, мес	Моменты вложения (начиная с месяца)	Процент по вкладу
A	1	1, 2, 3, 4, 5, 6	1,5
B	2	1, 3, 5	3,5
C	3	1, 4	6,0
D	6	1	11,0

Данные о возможностях вложений и возврата денег (в руб.) предоставлены в следующей таблице.

Вклад	Начало месяца						
	1	2	3	4	5	6	7
А в месяце 1	1,0	1,015					
А в месяце 2		1,0	1,015				
А в месяце 3			1,0	1,015			
А в месяце 4				1,0	1,015		
А в месяце 5					1,0	1,015	
А в месяце 6						1,0	1,015
В в месяце 1	1,0		1,035				
В в месяце 3			1,0		1,035		
В в месяце 5					1,0		1,035
С в месяце 1	1,0			1,06			
С в месяце 4				1,0			1,06
D в месяце 1	1,0						1,11

С учетом этих возможностей необходимо минимизировать размер целевого фонда, обеспечивающего оплату оборудования.

Вопросы:

1. Каков минимальный размер целевого фонда, позволяющий сделать необходимые выплаты?
2. Какова стоимость в начальный момент времени одного рубля, который надо выплатить в начале седьмого месяца (через шесть месяцев)?
3. Какова стоимость в начальный момент времени одного рубля, который надо выплатить в начале пятого месяца (через четыре месяца)?

Решение

Примем за A_i- размер вклада А в месяце i;

B_i- размер вклада В в месяце i;

C_i- размер вклада С в месяце;

D_i - размер вклада D в месяце;

Y - размер целевого фонда.

Начальные значения переменных: $A_i = B_i = C_i = D_i = Y = 1$ (Необходимо задать для начальной итерации численного метода).

Целевая функция примет вид: $Z = Y \to min$

Система ограничений:

$$\left\{\begin{array}{c} Y - A_1 - B_1 - C_1 - D_1 = 0 \\ 1{,}015A_1 - A_2 = 0 \\ 1{,}015A_2 + 1{,}035B_1 - A_3 - B_3 = 150 \\ 1{,}015A_3 + 1{,}06C_1 - A_4 - C_4 = 0 \\ 1{,}015A_4 + 1{,}035B_3 - A_5 - B_5 = 0 \\ 1{,}015A_5 - A_6 = 0 \\ 1{,}015A_6 + 1{,}035B_5 + 1{,}06C_4 + 1{,}11D_1 = 600 \\ A_i \geq 0;\ B_i \geq 0;\ C_i \geq 0;\ D_i \geq 0;\ Y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Заготовка для решения задачи в электронных таблицах MS Excel содержится в файле «Тема 4. Планирование финансов.xls».

Задача 2

У Василия Иванова есть 50 тыс.руб, которые можно инвестировать. Необходимо максимизировать денежную наличность к концу шестимесячного периода. Возможные виды инвестиций представлены в следующей таблице.

Вид вклада	Срок вклада, мес.	Возможные моменты вложения (начало месяца)	Процент по вкладу
A	1	1,2,3,4,5,6	0,017
B	2	1,2	0,035
C	3	3,4	0,065
D	6	1	0,115

Составьте модель линейного программирования для определения максимального размера дохода, который может получить Василий Иванов через полгода, использовав имеющиеся у него возможности для вложения 50 тыс.руб.

Вопросы:

1. Каков максимальный размер дохода через полгода?
2. Какой максимальный доход можно получить через полгода от вложения одного рубля в начальный момент времени?
3. Какой максимальный размер дохода можно получить через полгода, если средний риск в каждый момент времени не должен превышать 6?
4. Какова «плата» за снижение риска (в руб.)?
5. В начале четвертого месяца василий предполагает вложить еще 20 тыс.руб. На сколько возрастет его доход через полгода с учетом риска?

Задача 3

Константин Иванов – управляющий компанией «Золотой колос», специализирующейся на выпуске пива. Компания закупила оборудование для выпуска популярного сорта пива «Двойное золото».

Стоимость оборудования 900 тыс. руб. В соответствии с условиями контракта 200 тыс. руб. необходимо выплатить через 2 месяца, когда оборудование будет поставлено, а оставшиеся 700 тыс.руб. – через шесть месяцев, когда оборудование будет смонтировано.

Чтобы расплатиться полностью, Константин предполагает тотчас же образовать целевой фонд, который можно использовать на инвестиции. Поскольку такие инвестиции породят дополнительную наличность к тому времени, когда придется вносить деньги за оборудование. Константин знает, что ему следует отложить меньше, чем 900 тыс.руб. А вот сколько именно – зависит от имеющихся возможностей инвестирования.

Константин решил сосредоточиться на 12 возможностях инвестирования.

Данные для задачи финансового планирования представлены в таблице.

Вид вклада	Срок вклада	Моменты вложения, мес.	% по вкладу
A	1	1,2,3,4,5,6	1,7
B	2	1,3,5,	3,5
C	3	1,4,	5,5
D	6	1	10,5

Составьте модель линейного программирования для определения минимального размера целевого фонда, позволяющего сделать необходимые выплаты.

Вопросы

1. Каков минимальный размер целевого фонда, позволяющий сделать необходимые выплаты без учета риска?
2. Какова стоимость в начальный момент времени одного рубля, который надо выплатить в начале седьмого месяца (через шесть месяцев)?

3. Каков минимальный размер целевого фонда, позволяющий сделать необходимые выплаты, если средний риск в каждый момент времени не должен превышать 6?
4. Какова «плата» за снижение риска (в руб)?

Тема 5. Транспортная задача

Задача 1

Компания, занимающаяся добычей железной руды, имеет четыре карьера $C_1 \div C_4$ Производительность карьеров соответственно 170, 130, 170 и 200 тыс. т ежемесячно. Железная руда направляется на три принадлежащие этой компании обогатительные фабрики $S_1 \div S_3$ мощности которых соответственно 250, 150 и 270 тыс. т в месяц.

Транспортные затраты (в тыс. руб.) на перевозку 1 тыс. т руды с карьеров на фабрики указаны в следующей таблице:

Фабрика / Карьер	S_1	S_2	S_3
C_1	7	3	5
C_2	5	4	6
C_3	4	5	6
C_4	6	2	5

Определите план перевозок железной руды на обогатительные фабрики, который обеспечивает минимальные совокупные транспортные издержки.

Вопросы:

1. Сколько руды следует перевозить с карьера C_1 на обогатительную фабрику S_2?
2. Сколько руды следует перевозить с карьера C_4 на обогатительную фабрику S_3?
3. Какова общая минимальная стоимость перевозок?
4. Стало известно, что поставки с карьера C_1 на обогатительную фабрику S_2 нужно ограничить объемом 50 тыс. т. К тому же из-за плохого состояния дороги перевозки с карьера C_4 на обогатительную фабрику S_3 невозможны. Определите новый план перевозок, учитывающий эти условия. На сколько возрастет стоимость перевозок?
5. Сколько руды следует перевозить с карьера C_4 на обогатительную фабрику S_2 с учетом дополнительной информации?

Решение

Фабрика	j=1	j=2	j=3	Предложение
Карьер	Стоимость пер-ки			
i=1	7	3	5	170
i=2	5	4	6	130
i=3	4	5	6	170
i=4	6	2	5	200
Спрос	250	150	270	

Обозначения:

X_{ij} - количество продукта, перевозимого из пункта i в пункт j;

a_i - предложения продукта в пункте i;

b_j - спрос на продукт в пункте –j;

C_{ij} - затраты на транспортировку продукта из i в j.

Начальные значения переменных: $X_{ij} = 1$ (Необходимо задать для начальной итерации численного метода).

Целевая функция примет вид:

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33} + C_{41}X_{41} + C_{42}X_{42} + C_{43}X_{43} \rightarrow min$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 170 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 130 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = 170 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} = 200 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 250 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 150 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 270 \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Заготовка для решения задачи в электронных таблицах MS Excel содержится в файле «Тема 5. Транспортная задача.xls».

Задача 2

Используя в целом все параметры задачи 1, предположим, что на карьере 4 произошло перепроизводство (избыток) руды на 50 т. Переизбыток руды требует для своего хранения дополнительные площади, что приводит к штрафам карьеров за каждую тонну хранимой руды в соответствии с данными в таблице приложения.

Как перераспределить объёмы вывозимой руды с каждого карьера с тем, чтобы снизить общие издержки карьеров за транспортировку руды?

Задача 3

Используя в целом данные задачи 1, предположим, что фабрики недозаказали необходимого им количества руды, производственные мощности простаивают из-за дефицита руды, а фабрики несут потери, что отражается в виде штрафов.

Как перераспределить поставки руды между фабриками, чтобы снизить общие расходы по доставке руды? Предполагается, что фабрики и карьеры входят в один общий холдинг.

Тема 6. Задачи о назначениях

В процессе управления производством зачастую возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ, например: подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложений между различными проектами научно-технического развития, распределение экипажей самолетов между авиалиниями.

Задачу о назначениях можно сформулировать следующим образом. Необходимо выполнить N различных работ. Для их выполнения можно привлечь рабочих. Каждый рабочий за определенную плату готов выполнить любую работу. Выполнение любой работы следует поручить одному рабочему. Требуется так распределить работы между рабочими, чтобы общие затраты на выполнение всех работ были минимальными.

После того как вы выполните задания, предлагаемые в этой теме, вы будете уметь определять и использовать для экономического анализа:

- задачу о назначениях в стандартной форме;
- открытую задачу о назначениях;
- таблицу задачи о назначениях;
- матрицу назначений;
- эффективность назначений.

Модели

Пусть *m* — количество работ.

Задача о назначениях в стандартной форме. При рассмотрении задачи о назначениях в стандартной форме предполагается, что количество рабочих равно количеству работ.

Обозначения:

c_{ij} — показатель эффективности назначения i-го рабочего на j-й работе, например издержки выполнения i-м рабочим j-й работы;

x_{ij} — переменная модели (x_{ij} = 1, если i-й рабочий используется на j-й работе, и x_{ij}= 0 в противном случае).

Модель задачи о назначениях:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots m, \tag{2а}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots m, \tag{2б}$$

$$x_{ij} \geq 0, \;\; i = 1, \dots m; \quad j = 1, \dots m. \tag{3}$$

Здесь (1) — целевая функция (минимум издержек на выполнение всех работ);

(2) — система ограничений, отражающая следующие условия:

а) каждая работа должна быть выполнена одним рабочим;

б) каждый рабочий может быть привлечен к одной работе;

(3) — условия неотрицательности переменных.

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях с = $\{c_{ij}\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений. Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов:

Работа Рабочий	1	2	…	j	…	m
1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1j}	…	C_{1m}
2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2j}	…	C_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
i	C_{i1}	C_{i2}	…	C_{ij}	…	C_{im}
…	…	…	…	…	…	…
m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mj}	…	C_{mm}

Результатом решения задачи о назначениях (1)—(3) является вектор $x^* = \{x_{ij}^*\}$, компоненты которого — целые числа.

Оптимальный план задачи о назначениях (1)—(3) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица. Такую матрицу иногда называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (1), соответствующее оптимальному плану, называют *эффективностью назначений.*

Задача о назначениях в открытой форме. Задача о назначениях в открытой форме возникает тогда, когда количество рабочих *не равно* количеству работ. В этих случаях задача может быть преобразована в задачу, сформулированную в стандартной форме.

Пусть, например, количество рабочих n превышает количество работ m.

Введем дополнительные фиктивные работы с индексами j=m+1,..., n. Коэффициенты таблицы назначений c_{ij}, i = 1,...n; j = m + 1,… n, положим равными нулю. В этом случае получаем задачу, сформулированную в стандартной форме. Если в оптимальном плане этой задачи x_{ij}^*= 1 при j= m + 1, ...n, то исполнитель i назначается на выполнение фиктивной работы, т.е. остается без работы. Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к стандартной форме. Поэтому эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

Следует особо отметить, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой количество пунктов производства совпадает с количеством пунктов потребления, а все величины спроса и величины предложения равны.

Задача 1

Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают шесть квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого разработки программ. Эти оценки приведены в следующей таблице:

Программа / Программист		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	
Галкин	i=1	46	59	24	62	67	
Палкин	i=2	47	56	32	55	70	
Малкин	i=3	44	52	19	61	60	
Чалкин	i=4	47	59	17	64	73	
Залкин	i=5	43	65	20	60	75	
Кузьмин	i=6	41	53	28	54	68	

Выполнение каждого из пяти заказов фирма решила поручить одному программисту. Ясно, что один из программистов не получит заказа.

Каждому программисту, которому будет поручено выполнять, фирма предложила оплату 1 тыс. руб. в день. Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на разработку программ были минимальными.

Вопросы:

1. Чему равны минимальные издержки фирмы на выполнение всех пяти заказов?
2. Какую программу следует поручить Малкину?
3. Какую программу следует поручить Залкину?
4. Кто из программистов не получит заказа?
5. Стало известным, что не все программисты согласились с условиями оплаты, обосновывая это тем, что имеют разную квалификацию. В результате была достигнута договоренность о следующих размерах оплаты в день (в тыс. руб.):

Программист	Размер оплаты
Галкин	1
Палкин	2
Малкин	1,5
Чалкин	2
Залкин	1,5
Кузьмин	2

Изменится ли распределение работ между программистами при новых условиях оплаты труда? Каковы будут в этом случае общие минимальные издержки?

6. Кто из программистов при новых условиях не получит заказа?

Решение

Обозначения: i – программист; j – программа;

X_{ij} – i-й программист, разрабатывающий j-ю программу;

C_{ij} - затраты на разработку i-м программистом j-й программы.

Начальные значения переменных: $X_{ij} = 1$ (Необходимо задать для начальной итерации численного метода).

Целевая функция примет вид:

$$
\begin{aligned}
Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{14}X_{14} + C_{15}X_{15} + C_{16}X_{16} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} \\
+ C_{24}X_{24} + C_{25}X_{25} + C_{26}X_{26} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35} \\
+ C_{36}X_{36} + C_{41}X_{41} + C_{42}X_{42} + C_{43}X_{43} + C_{44}X_{44} + C_{45}X_{45} + C_{46}X_{46} + C_{51}X_{51} \\
+ C_{52}X_{52} + C_{53}X_{53} + C_{54}X_{54} + C_{55}X_{55} + C_{56}X_{56} + C_{61}X_{61} + C_{62}X_{62} + C_{63}X_{63} \\
+ C_{64}X_{64} + C_{65}X_{65} + C_{66}X_{66} \rightarrow min
\end{aligned}
$$

Система ограничений:

$$
\begin{Bmatrix}
X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} = 1 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} = 1 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{36} = 1 \\
X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} = 1 \\
X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} + X_{56} = 1 \\
X_{61} + X_{62} + X_{63} + X_{64} + X_{65} + X_{66} = 1 \\
X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} = 1 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} + X_{62} = 1 \\
X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} + X_{63} = 1 \\
X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} + X_{64} = 1 \\
X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} + X_{65} = 1 \\
X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} + X_{66} = 1 \\
X_{ij} \geq 0
\end{Bmatrix}
$$

Заготовка для решения задачи в электронных таблицах MS Excel содержится в файле «Тема 6. Задачи о назначениях.xls».

Задача 2

Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают пять квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого разработки программ. Эти оценки приведены в следующей таблице:

Программа / Программист		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6
Галкин	i=1	46	59	24	62	67	35
Палкин	i=2	47	56	32	55	70	45
Малкин	i=3	44	52	19	61	60	50
Чалкин	i=4	47	59	17	64	73	42
Залкин	i=5	43	65	20	60	75	48

Выполнение каждого из шести заказов фирма решила поручить одному программисту. Ясно, что один из заказов не будет выполнен.

Каждому программисту, которому будет поручено выполнять, фирма предложила оплату 1 тыс. руб. в день. Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на разработку программ были минимальными.

Задача 3

Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают пять квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого разработки программ. Эти оценки приведены в следующей таблице:

Программа / Программист	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5

Галкин	i=1	46	59	24	62	67
Палкин	i=2	47	56	32	55	70
Малкин	i=3	44	52	19	61	60
Чалкин	i=4	47	59	17	64	73
Залкин	i=5	43	65	20	60	75

Выполнение каждого из пяти заказов фирма решила поручить одному программисту.

Каждому программисту, которому будет поручено выполнять, фирма предложила оплату 1 тыс. руб. в день. Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на разработку програм были минимальными.

Тема 7. Задачи с булевыми переменными. Логическая взаимосвязь

Введение:
1) X_{IJ} - булевые переменные, могут принимать значения только 0 или 1.
2) 1--Истина (наличие, согласие, благоприятность, да) 0—Ложь (отсутствие, несогласие, нет).
3) Взаимообусловленность.
Проект X_i может быть включён, если включён проект X_j . $X_i \le X_j$. $(X_i \to X_j)$.
4) Взаимоисключения.
Может быть включён проект либо X_i либо проект X_j : $X_i + X_j \le 1$. $(X_i \, V \, X_j)$/
5) В ограничениях X_i и X_j принимают значение: "= двоичное".

Задача 1

Для реконструкции машиностроительного предприятия было представлено 10 проектов, каждой из которых характеризуется четырьмя агрегированными показателями: затратами труда, энергии, материалов, денежных средств, а также ежегодной прибылью в случае реализации проекта. Соответствующие данные и объем имеющихся ресурсов приведены в таблице:

	Проект	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ресурсы
Ai	Труд н.час	50	60	30	40	80	70	50	20	40	50	300
Bi	Энергия т.кВч	4	4	2	5	5	2	3	6	6	3	24
Ci	Материалы млн	3	2	4	5	3	2	4	2	2	3	20
Ei	Ден сред млн	7	5	9	6	4	3	7	2	4	5	30
Pi	Прибыль млн	9	8	8,5	8,8	9	8	9	8,7	8,9	8	max

При выборе проектов необходимо учесть ряд ограничений технологического характера:
1) одновременно может быть реализовано не более семи проектов;
2) проекты 5 и 8 исключают друг друга;
3) проект 1 может быть реализован лишь при условии реализации проекта 2;
4) проект 4 может быть реализован лишь при условии реализации хотя бы одного из двух проектов: либо Проекта 3, либо проекта 10.

Решение

Целевая функция: $\sum P_i \cdot X_i \to max$

Ограничения:

$\sum A_i \cdot X_i \le 300$ $\sum B_i \cdot X_i \le 24$ $\sum C_i \cdot X_i \le 20$ $\sum E_i \cdot X_i \le 30$

$\sum X_i \le 7$ $X_5 + X_8 \le 1$ $X_1 - X_2 \le 0$ $X_4 - X_3 - X_{10} \le 0$

X_i *- Двоичные*

Задача 2

Имеется 10 работ ($A_1 \div A_{10}$), каждая из которых характеризуется тремя технико-экономическими показателями:

a_i - трудозатраты;

b_i - размер ожидаемых капиталовложений;

p_i - ожидаемый экономический эффект.

Исходные данные приведены в следующей таблице:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
a_i	3	3	3	4	4	2	4	3	6	5
b_i	4	3	2	4	6	4	3	5	3	4
p_i	3	7	5	6	8	4	7	4	7	6

Общие трудозатраты не должны превышать 20. Общий объем капиталовложений не должен превышать 20. Определите, какие из 10 работ следует выполнить, чтобы максимизировать ожидаемый экономических эффект, учитывая следующие условия взаимообусловленности и взаимоисключения:

а) $\begin{array}{c} A_1 \rightarrow A_7 \vee A_4 \\ \downarrow \\ A_{10} \vee A_2 \end{array}$

б) $\begin{array}{c} A_3 \\ \downarrow \\ A_5 \vee A_8 \vee A_9 \rightarrow A_6 \end{array}$

Тема 8. Сетевой анализ проектов

Метод оценки и проверки планов (PERT) и метод критического пути (СРМ) были разработаны в 1950-х гг. для управления сложными проектами. СРМ появился в 1957 г. для организации строительства и ремонта химических заводов Дюпона. PERT разрабатывался независимо для нужд военно-морского флота и появился в 1958 г.

Алгоритм методов СРМ и PERT:

определить основные работы по проекту и их продолжительность;

установить связи между работами;

вычертить сеть, содержащую все работы;

рассчитать критический путь (самый продолжительный).

Главное различие в методах состоит в том, что в СРМ продолжительность работы — детерминированная величина, а в PERT — случайная.

В PERT используются три временных оценки для каждой работы; пессимистическая *(tп)*, наиболее вероятная (t_{HB}) и оптимистическая *(t_0)*. Тогда ожидаемая продолжительность работы определяется как:

$$t_{ож} = (t_п + 4t_{нв} + t_{ож})/6$$

Отклонение времени выполнения работы:

$$\sigma = (t_о - t_п)/6$$

Сетевой график (сеть) состоит из дуг и узлов (вершин). Дуге соответствует выполняемая работа (обозначается стрелкой); вершине — событие, т. е. состояние перед и после работы (обозначается кружком).

Исходные данные, необходимые для составления сети, представляют в форме таблицы, которая включает последовательность работ и продолжительность выполнения каждой работы.

По исходным данным таблицы 1 строится сетевой график, на котором числа над дугами показывают продолжительность каждой работы. События будем обозначать порядковыми номерами. Два события отметим особо: начальное — состояние, с которого начинается весь комплекс работ; конечное — состояние, которым завершается комплекс работ.

Рассмотрим оптимизацию сетевого графика на примере анализа проекта по освоению нового оборудования на производстве. Для этого откроем задачу № 20 из второй части курса в приложении MS Excel.

В табл.1представлен перечень работ по проекту, продолжительность работ в условных временных единицах, которая отражает время перехода из одного узла (вершины) в другой, связанный с ним дугой (см. Рис 1)

На рис 1 номерами 1 – 4 обозначены вершины – узлы, которые отмечают окончание этапов отдельных работ проекта: 1 – начало работ, 2 – закуплено оборудование, 3 – разработана технология и проведён монтаж оборудования, 4 – обучен персонал и произведён пуск линии – окончание проекта (см. табл.2). Если в вершину сходится несколько дуг, это значит, что этот этап знаменует окончание нескольких работ к определённому моменту времени.

Каждый узел характеризуется определённым моментом времени наступления события T_i к которому должны быть завершены все работы по входящим в него дугам и определяемым наиболее продолжительной работой с учётом времени предыдущих этапов.

Каждая из дуг характеризуется длительностью работ (красные цифры); им соответствуют обозначения tij (см. табл. 1). В табл. 3 рассмотрены три пути в сетевом графике, которые ведут от первого узла к четвёртому, отличающиеся по продолжительности; самый продолжительный путь называется критическим. В табл. 4 рассчитаны моменты времени *Tij* для каждого из узлов с учётом продолжительности работ *tij* . Для моментов времени *T3 и T4* выбирается наибольшее время; *T4 = 11* - есть критический путь. Неоднозначность моментов времени *T3* и *T4* обусловлено тем, что в узлы 3 и 4 приходит по две дуги, что приводит к тому, что по более коротким путям образуется резерв времени, обозначенный, как *rij*. Произведём подсчёт резервного времени для каждой из дуг сетевого графика в разделе «Резервы времени работ». Резервы времени на графике обозначены синим цветом.

Используя понятие резервного времени, можно описать формулы для определения времени работ по каждой из дуг графика (напомним, что эти времена нам известны *tij* из исходных данных Табл. 1) и, таким образом сформировать «Структуру сети».

Перейдём теперь к решению задачи. Существует две постановки задачи. Первая – полагая, что проект начинает выполняться в момент времени *T1 = 0,* определить минимальное время окончания проекта *T4* (продолжительность критического пути).Вторая – зная директивное (назначенное) время окончание проекта T4, необходимо определить максимальное время задержки начала работ над проектом - *T1*. Соответственно двум постановкам задач можно сформулировать две целевые функции: *T4 → мин* и *T1 → макс.*

Перечень переменных для обеих задач одинаков – это набор моментов времени *Ti* и набор резервов времени *rij*, исходя из конкретного сетевого графика.

Ограничения формируются из уравнений «Структуры сети» без правой части уравнений. Правая часть используется в Поиске решения при формировании ограничений **Добавить.** Ограничения для первой постановки дополняются условием *T1= 0 и T4 = T директивное* – для второй.

После решения задачи обратите внимание, что критический путь проходит по последовательным (связанным) дугам с нулевым резервом.

Задача 1

Для повышения производительности труда и снижения производственных издержек предприятие решило закупить новую производственную линию. Для запуска новой линии необходимо разработать новую технологию, провести монтаж оборудования, обучить персонал и затем провести пуск линии. Продолжительность в неделях и порядок всех работ представлены в таблице.

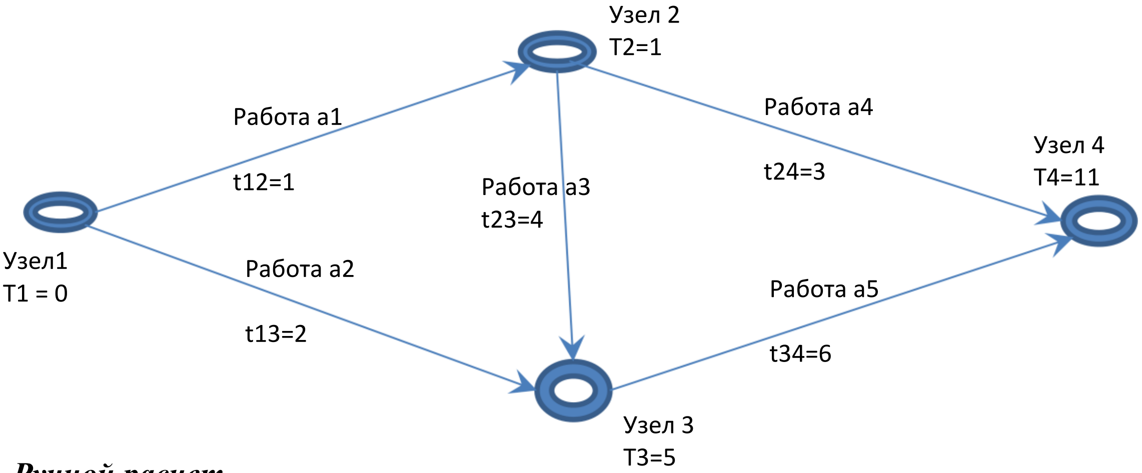
Необходимо построить сетевой график проекта, определить резервы каждой из работ,

А) общую продолжительность проекта (критический путь),

Б) время начала проекта при директивном времени его окончании через 15 недель.

Работа	Содержание работ	Предвар. работа	Продолжительность	Обознач.
a1	Закупка оборудования		1	t12
a2	Разработка технологии		2	t13
a3	Монтаж оборудования	a1	4	t23

а4	Обучение персонала	а1	3	t24
а5	Пуск линии	а2, а3, а4	6	t34



Ручной расчет.

Определим события:

Событие	Время
Начало работ	T1
Обороруудование получено	T2
Технология разработана	T3
Обучение персонала, Запуск	T4

Определим возможные пути из T1 в T:

Путь	Последов. Работ	Продолжительность
1	1--2--4	1+3=4
2	1--2--3--4	1+4+6=11
3	1--3--4	2+6=8

Определим время наступления событий:

Длительности до событий	Макс. время
T1 = 0	T1=0
T2=T1+t12 =0+1=1	T2=1
T3=>T1+t13=0+2=2 т.е. T3=2	T3=5
T3=>T2+t23=1+4=5 т.е. T3=5	
T4=>T2+t24=1+3=4 т.е.T4=4	T4=11
T4=>T3+t34=5+6=11 т.е.T4=11	

Определим резервы времени работ:

r12 = T2-T1-a1 = 1-1 = 0

r13 = T3-T1-a2 = 5-0-2 = 3

r24 = T4-T2-a4 = 11-1-3 = 7

r23 = T3-T2-a3 = 5-1-4 = 0

r34 = T4-T3-a5 = 11-5-6=0

Решение – это Критический путь – путь с нулевым резервом: T1--T2--T3--T4 1+4+6=11

Решение А.

Переменные:

T1 T2 T3 T4 r12 r13 r23 r24 r34

Целевая функция:

Z = T4→min

Структура сети (ограничения):

(T2-T1)-r12=t12
(T3-T1)-r13=t13
(T3-T2)-r23=t23
(T4-T2)-r24=t24
(T4-T3)-r34=t34
T1=0

Решение Б.

Переменные:

T1 T2 T3 T4 r12 r13 r23 r24 r34

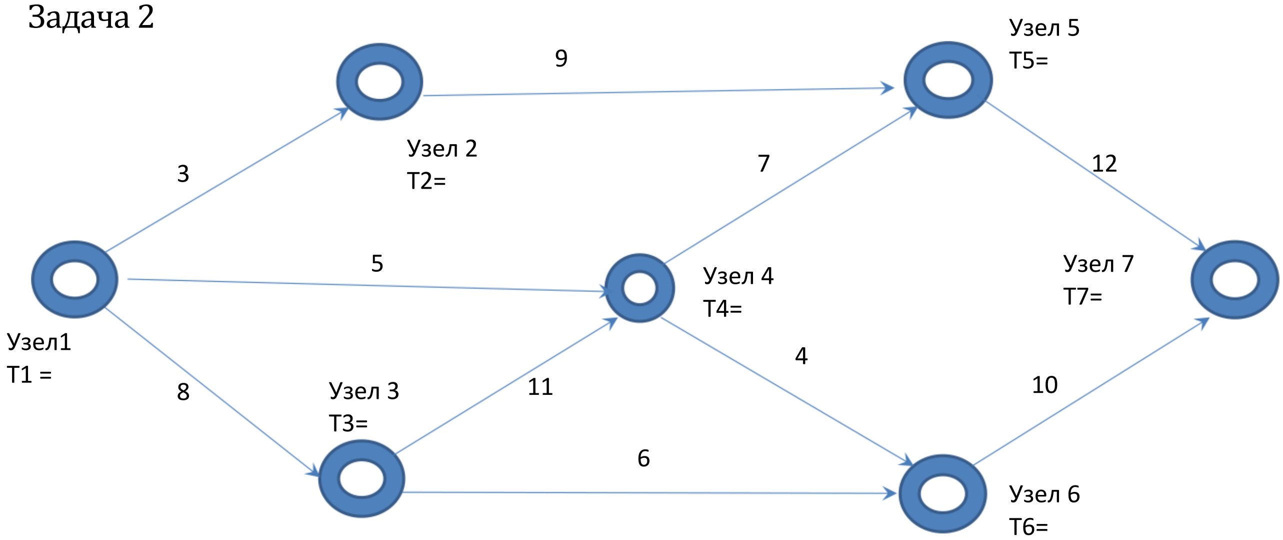
Целевая функция:

Z = T1→max

Структура сети (ограничения):

(T2-T1)-r12=t12
(T3-T1)-r13=t13
(T3-T2)-r23=t23
(T4-T2)-r24=t24
(T4-T3)-r34=t34
T4=15

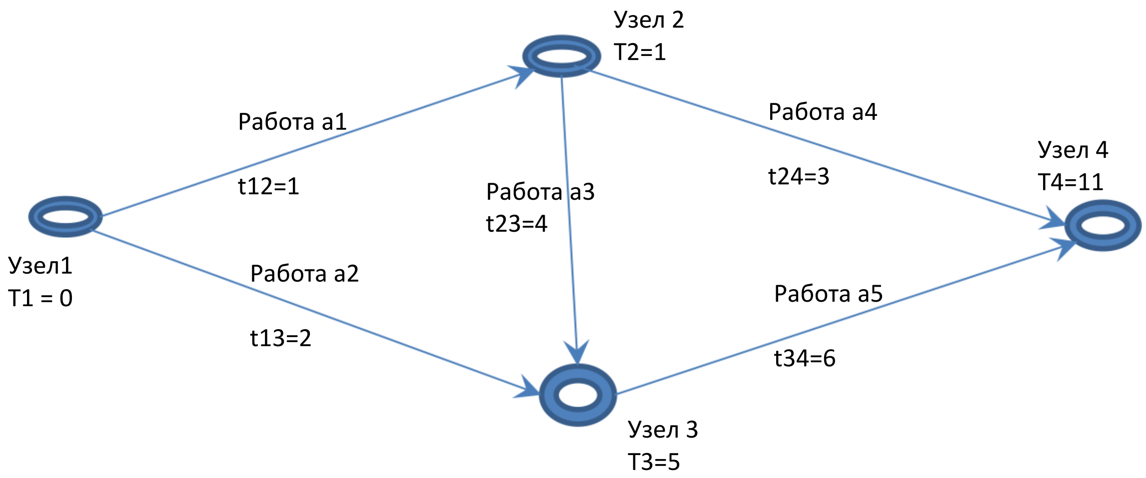
Задача 2



Тема 9. Анализ затрат на реализацию проекта

Задача 1

tij обозн. вр.работ	Содерж. Работ	Прод-ть	Миним прод	Yij - Возм. сокращение	Норм стоим	Максим стоим	Зydij. - Уд. затраты
t12	Закупка оборуд.	1	1	0	1000	1000	0
t13	Разр. технологии	2	1	1	2000	3000	1000
t23	Монтаж обор.	4	3	1	4000	6000	2000
t24	Обучен. Персон.	3	2	1	3000	4500	1500
t34	Пуск линии	6	4	2	5000	6500	750



На сколько минимально возрастёт стоимость проекта за счёт необходимого сокращения по времени его выполнения ?

Событие	Время
Начало работ	T1
Обор-е получено	T2
Технология раз-а	T3
Обуч пер; Запуск	T4

Путь	Последов. Работ	Продолжительность
1	1--2--4	1+3=4
2	1--2--3--4	1+4+6=11
3	1--3--4	2+6=8

Длительности до событий	Макс. время
T1 = 0	T1=0
T2=T1+t12 =0+1=1	T2=1
T3=>T1+t13=0+2=2 т.е. T3=2	T3=5
T3=>T2+t23=1+4=5 т.е. T3=5	
T4=>T2+t24=1+3=4 т.е.T4=4	T4=11
T4=>T3+t34=5+6=11 т.е.T4=11	

Решение.

Переменные.

T1	T2	T3	T4	Y12	Y13	Y23	Y24	Y34

Целевая функция.

Целевая функция направлена на минимизацию дополнительных расходов за счёт сокращения сроков выполнения проекта, т.е $Z = \sum \text{Зуд}_{ij} Y_{ij} \to min$:

$$Z = \text{Зуд}_{12}Y_{12} + \text{Зуд}_{13}Y_{13} + \text{Зуд}_{23}Y_{23} + \text{Зуд}_{24}Y_{24} + \text{Зуд}_{34}Y_{34} \to min$$

Ограничения.

Время достижения пункта Ti равно времени достижения предыдущего пункта Ti-1, плюс время, необходимое для выполнения работы и минус время возможного сокращения Yij.

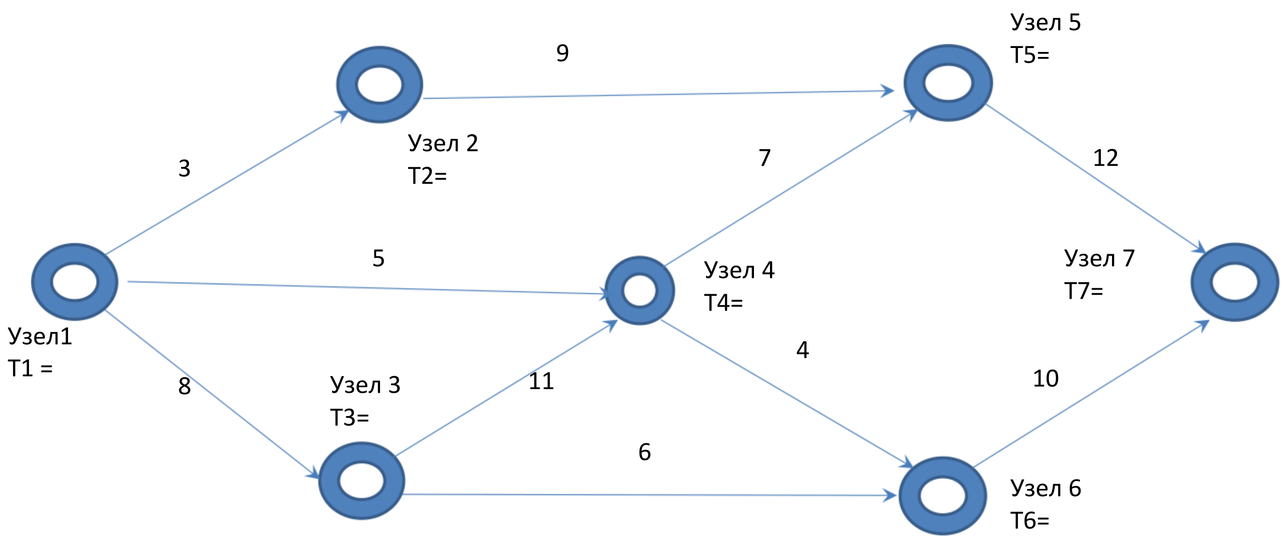
T1=0
T1+t12-Y12<=T2
T1+t13-Y13<=T3
T2+t23-Y23<=T3
T2+t24-Y24<=T4
T3+t34-Y34<=T4

Время возможного сокращения Yij не может превышать разности времени работ Тнормij - Тминij .

Y12<=0
Y13<=1
Y23<= 1
Y24<= 1
Y34<= 2

Второй вариант –T1=0;   T4=8

Задача 2



Литература

1. Компьютерное моделирование управленческих решений: Учебное пособие / Семиглазов В.А. – Томск, Кафедра ТУ, ТУСУР, 2017г. – 59 с.
2. Леоненков А. В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel. — СПб.: БХВ- Петербург, 2005. — 704 с.: ил.
3. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 - СПб.: Санкт-Петербург, 1997.-384с.
4. Трусов А. Ф. Excel 2007 для менеджеров и экономистов: логистические, производственные и оптимизационные расчеты (+CD). — СПб.: Питер, 2009. — 256 с.: ил.
5. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL / Практикум: Учебное пособие для вузов. - М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. - 136 с.
6. Васильев А. Н. Финансовое моделирование и оптимизация средствами Excel 2007 (+CD). — СПб.: Питер, 2009. — 320 с.: ил.
7. Хамухин А.А. Решение оптимизационных задач в среде Microsoft Excel.: Издательство ТПУ, 2011. - 45 с.
8. Урубков А.Р.Курс MBA по оптимизации управленческих решений. Практическое руководство по использованию моделей линейного программирования / А. Р. Урубков. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2006.— 176 с.
9. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1986. — 320 с.
10. Алексеев О. Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. - М.: Наука, 1987. - 248 с.
11. Балашевич В. А. Математические методы в управлении производством. — Минск: Высшая школа, 1976. — 250 с.
12. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. — М.: Радио и связь, 1988. - 128 с.