Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Учебное пособие

Томск
Издательство Томского государственного университета
систем управления и радиоэлектроники
2017

Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С.

Элементарные функции и их графики: учеб. Пособие / И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2017. – 98 с.

Приведены определения, свойства и графики основных элементарных функций, а также правила линейных преобразований графиков функций. Особое внимание уделено графикам гармонических колебаний.

При подготовке второго издания пособие было переработано и дополнено.

Учебное издание

Гриншпон Ирина Эдуардовна
Гриншпон Яков Самуилович

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ
И ИХ ГРАФИКИ**

Учебное пособие
Компьютерная верстка Я.С. Гриншпона
Подписано в печать . . . Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. …... Заказ . Тираж экз.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. 8 (3822) 533018.

Введение

При изучении различных явлений мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, связанных между собой так, что значения одних переменных величин (независимых переменных) определяют значения других переменных величин (зависимых переменных или функций). Например, размеры сторон треугольника вполне определяют его площадь, при изменении радиуса круга меняется его площадь. При изменении скорости тела изменяется путь, пройденный телом за данный промежуток времени, при изменении сопротивления проводника изменяется сила тока в цепи, объем данного газа при определенной температуре обусловливается его давлением, удлинение данного металлического стержня определяется его температурой и т.д. Подобные закономерности и послужили источником понятия функции. Встречаются зависимости не только от одной, но и от нескольких величин. Например, площадь прямоугольника зависит от двух величин (длины и ширины), а объем параллелепипеда от трех (длина, ширина, высота). Такие зависимости приводят к понятию функции нескольких переменных.

Отвлекаясь от конкретного смысла переменных, математика рассматривает абстрактные переменные величины, изучает их взаимосвязи.

Понятие переменой величины (функции) является одним из центральных понятий математического анализа. Оно является для математики и ее приложений, связанных с изучением переменных величин, таким же фундаментальным, как понятие числа для арифметики.

Как и остальные понятия математики, понятие функции сложилось не сразу, а прошло долгий путь развития.

Впервые понятие функции было введено в знаменитом труде математика и философа Рене Декарта «Геометрия» (1637 г.) под названием «переменная величина». В геометрическом и механическом понимании это понятие интерпретируется у Исаака Ньютона (1671 г.). Под функцией он понимал переменную величину, которая изменяется с течением времени. Эту величину Ньютон называл «флюентой». Термин «функция» (от латинского functio – исполнение) впервые ввел в 1673 году немецкий математик Готфрид Лейбниц в письме к Гюйгенсу. У Лейбница функция связывалась с геометрическим образом (под функцией он понимал отрезок, длина которого меняется по какому-нибудь определенному закону). В работах Декарта, Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции носило по существу интуитивный характер и не было связано ни с геометрическими, ни с механическими представлениями. В XVIII веке функцию стали рассматривать как формулу, связывающую одну переменную с другой. Швейцарский математик Иоганн Бернулли в 1718 году определил функцию следующим образом: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». В 1755 году в «Дифференциальном исчислении» Леонард Эйлер дает общее определение функции: «Когда некоторые количества зависят друг от друга таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называют функцией вторых».

Современное определение функции как зависимости одной переменной величины от другой было дано в работах Николая Ивановича Лобачевского и чешского математика Бернарда Больцано.

Введение переменной в математику оказало решающее влияние на развитие математической науки. Кроме количественных соотношений между постоянными величинами, математика смогла изучать процессы, связанные с изменением величин и движением.

Когда складывался общий подход к понятию функции, и для функции потребовалось обозначение, тогда и появился символ «$f(x)$». Этот символ ввел в 1733 году французский математик Клод Клеро.

Среди всего многообразия функций исторически выделились функции, отличающиеся своей простотой и наиболее широкой областью применения. Это простейшие элементарные функции, основное значение которых состоит в том, что они составляют базу для изучения более сложных функций, являясь в большинстве своем составными элементами последних.

К элементарным функциям относятся основные элементарные функции и те, которые можно образовать из них с помощью конечного числа операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций.

Элементарные функции подразделяют на алгебраические и трансцендентные. Алгебраической называют функцию, в которой над аргументом производится конечное число алгебраических действий. К ним относятся: целая рациональная функция (многочлен); дробно-рациональная функция (отношение двух многочленов); иррациональная функция (среди действий над аргументом есть извлечение корня). К трансцендентным функциям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Знание основных элементарных функций, их свойств и графиков не менее важно, чем знание таблицы умножения. Они как фундамент, на них все основано, из них все строится и к ним все сводится.

Изучение свойств функций и их графиков занимает значительное место в курсе математики. Причем не только в курсах математического и функционального анализа, и в других разделах высшей математики, но и в большинстве узкопрофессиональных предметов. Например, в экономике – функции полезности, издержек, функции спроса, предложения и потребления..., в радиотехнике – функции управления и функции отклика, в статистике – функции распределения..., в информатике – логические функции… Чтобы облегчить изучение специальных функций, нужно знать свойства основных элементарных функций и научиться свободно оперировать их графиками.

Наиболее часто в приложениях встречаются линейные функции. Многие физические законы выражаются, и притом достаточно точно, линейными функциями. Например, длина l тела с хорошим приближением рассматривается как линейная функция его температуры: $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где α – коэффициент линейного расширения, l_0 – длина тела при $t = 0$. Если t – время, а S – расстояние от движущейся материальной точки до точки отчета в момент времени t, то линейная функция $S(t) = vt + S_0$ описывает равномерное движение точки со скоростью v, число S_0 обозначает расстояние от материальной точки до точки отсчета в начальный момент времени $t_0 = 0$. Количество теплоты, необходимое для нагревания тела массы m до температуры T градусов $Q(T) = cm(T - T_0)$, где c – удельная теплоемкость вещества, T_0 – начальная температура тела, также описывается линейной функцией.

Возможность приближенно считать равномерными различные изменения, хотя бы на малых участках, и простота линейной функции делают ее очень употребительной.

В других случаях необходимо применение иных функциональных зависимостей. Например, если тело бросить с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, то траектория движения тела описывается уравнением $y(x) = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - x^2 \cdot \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$. Графиком этого уравнения является парабола с направленными вниз ветвями, о чем говорит знак «–» перед квадратом переменной.

Еще несколько примеров из физики.

Сила человека ограничена. Примером приспособления, позволяющего преобразовать силу человека в бóльшую силу, является рычаг. Выигрыш в силе, получаемый с помощью рычага, определяется отношением плеч приложенных сил. В этом состоит правило рычага. Обозначим силы через F_1 и F_2, а плечи сил – через l_1 и l_2 соответственно. Тогда правило рычага можно представить в виде следующей формулы: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{l_2}{l_1}$, то есть во сколько раз выигрываешь в силе, во столько раз проигрываешь в расстоянии. График $k_F\left(k_l\right)$ зависимости отношения сил $k_F = \frac{F_1}{F_2}$ от отношения соответствующих плеч $k_l = \frac{l_1}{l_2}$ представляет собой гиперболу. Так как сила и длина рычага положительны, то рассматривается только одна ветвь гиперболы, находящаяся в первой четверти.

Закон Бойля-Мариотта $V = \frac{c}{P}$ показывает, что при постоянных температуре и массе газа зависимость между давлением P и объемом V состоит в обратной пропорциональности этих величин. График такой зависимости представляет собой гиперболу. Физический закон Бойля-Мариотта соответствует случаю, когда P и V положительны; он описывается ветвью гиперболы, находящейся в первой четверти.

Скачок развития технологий, который мы наблюдаем последние десятилетия, вызвал ускорение прогресса во множестве разных областей. Это привело к неожиданным технологическим и социальным изменениям, происходящим не только между поколениями, но и внутри них. Будущее разворачивается уже не линейно, а экспоненциально.

В отличие от линейного роста, который является результатом многократно добавления постоянной, экспоненциальный рост – это многократное умножение. Если линейный рост – это стабильная во времени прямая линия, то линия экспоненциального роста похожа на взлет. Чем большее значение принимает величина, тем быстрее она растет дальше.

Отметим, что начальный темп экспоненциального роста медленный и постепенный, его трудно отличить от линейного роста.

В последнее время развитие технологий идет по экспоненте: с каждым десятилетием, с каждым годом мы умеем несравнимо больше, чем раньше.

Экспоненциальный рост – это возрастание величины, когда скорость роста пропорциональна значению самой величины. В случае дискретной области определения с равными интервалами экспоненциальный рост ещё называют геометрическим ростом или геометрическим распадом (значения функции образуют геометрическую прогрессию).

Примером экспоненциального роста величины являются сложные проценты. Сложным процентом принято называть процесс, когда проценты прибыли прибавляются к основной сумме и в дальнейшем сами участвуют в создании новой прибыли (вклад с капитализацией процентов). Пусть в банк положили S_0 рублей на n лет под p% годовых (будем считать, что проценты на вклад начисляются один раз в год). Тогда на момент закрытия вклада итоговая сумма $S(n) = S_0(1+0,01p)^n$. Если считать, что проценты начисляются непрерывно, то сумма накопленных денежных средств будет такой $S(t) = S_0 \cdot e^{0,01pt}$.

Приведем несколько примеров экспоненциального спада физических величин.

Давление воздуха в зависимости от высоты находится по формуле $P(h) = P_0 e^{-kh}$, где P_0 – давление на уровне моря, h – высота над уровнем моря, P – давление на высоте h.

После открытия явления радиоактивности оказалось, что мгновенная скорость распада в каждый момент времени пропорциональна количеству вещества (чем больше имеется атомов вещества, тем больше их распадается). Количество радиоактивного вещества, оставшегося к моменту времени t, составляет $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где m_0 – первоначальное количество вещества, m – количество вещества в момент времени t, T – период полураспада, то есть промежуток времени, за который масса вещества уменьшается вдвое.

Многие процессы в окружающем нас мире по истечении некоторого времени более или менее точно повторяются. К таким явлениям относятся колебательные процессы, которые окружают нас на каждом шагу. Это механические колебания (например, колебания маятника, струны), электромагнитные колебания (радиоволны, звуковые и световые волны). Электромагнитные колебания и волны занимают особое место среди различных физических явлений. Почти вся электротехника, радиотехника и оптика базируются на понятиях гармонических колебаний.

Колебательные процессы описываются обычно тригонометрическими функциями, изменяющимися периодически. Например, если вывести из равновесия подвешенную пружину, растянув её в пределах упругости, то её точка M будет совершать вертикальные колебания, выражающиеся довольно точно законом $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, где x – отклонение точки M от положения равновесия, t – время, а числа A, ω и α – некоторые постоянные, определяемые материалом, размерами и степенью начального растяжения пружины.

Для успешного усвоения программы по высшей математике студент должен иметь достаточную математическую базу. В этом пособии систематизированы сведения о функциях, которые изучались в школе на протяжении всего курса математики. В нем рассматриваются основные элементарные функции, приводятся их свойства, строятся графики. Излагается построение графиков линейной, квадратичной и дробно-линейной функций. Рассматриваются линейные преобразования графиков функций: параллельный перенос графиков, их сжатие и растяжение по осям, симметрии относительно осей координат. Рассматриваются также гармонические колебания и строятся графики гармоник.

Рассмотрение элементарных функций продиктовано необходимостью повторения и закрепления знаний студентов по данному разделу математики и подготовки их к успешному изучению математического анализа.

§ 1. Множества. Операции над множествами. Числовые множества

Множество – одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется. Объекты, составляющие множество, называют его ***элементами***. Множества обозначают заглавными латинскими буквами: $A, B, C, X, \ldots$, их элементы – прописными буквами: $a, b, c, x, \ldots$ или буквами с индексами $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Множество, не содержащее ни одного элемента, называют ***пустым*** и обозначают $\varnothing$.

Чтобы задать множество, необходимо знать, какие объекты принадлежат множеству, а какие нет. Если множество содержит немного элементов, то его можно задать, перечислив все его элементы. Если множество задано списком, то его элементы записывают в фигурных скобках через точку с запятой. Множество цифр можно записать следующим образом: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}$; множество натуральных чисел, меньших 30 и кратных 5, – $B = \{5; 10; 15; 20; 25\}$; множество дней недели – $C = \{$понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье$\}$.

Однако задать множество списком можно только тогда, когда оно содержит конечное число элементов (но и это неудобно, если число элементов множества велико). Существует универсальный способ задания множеств. Множество может быть задано с помощью ***характеристического свойства***, то есть такого свойства, которым обладают все элементы множества, и не обладают объекты, не принадлежащие множеству. Задание множества с помощью характеристического свойства записывают следующим образом: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ – характеристическое свойство.

Приведем несколько примеров:

1. Если $A = \{x \mid x - \text{натуральное число}, x < 4\}$, то $A = \{1; 2; 3\}$.

2. Пусть B – множество остатков от деления натуральных чисел на 7. Тогда $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

3. Если D – множество действительных чисел, не меньших пяти и не больших девяти, то D – отрезок [5; 9].

Рассмотрим два множества A и B. Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то говорят, что B – ***подмножество*** множества A. Этот факт записывают так: $B \subset A$. Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества. Каждое непустое множество A имеет хотя бы два подмножества – само множество A и пустое множество.

Пусть даны два множества A и B.

Пересечением (***произведением***) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B. Обозначают пересечение множеств $A \cap B$:

$$A \cap B = \{\, x \,|\, x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Объединением (***суммой***) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Обозначают объединение множеств $A \cup B$:

$$A \cup B = \{\, x \,|\, x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Обозначают разность множеств $A \setminus B$:

$$A \setminus B = \{\, x \,|\, x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Декартовым произведением множеств A и B называется множество, состоящее из всех возможных упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Обозначают декартово произведение множеств $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}.$$

Заметим, что в определении декартова произведения множеств речь идет об упорядоченных парах, то есть $(a, b) \neq (b, a)$ при $a \neq b$.

Декартово произведение множества A само на себя называют ***декартовым квадратом*** множества A, то есть $A \times A = A^2$.

Элементами множества могут быть различные объекты – числа, слова, геометрические фигуры, функции и т. д. В математике особую роль играют ***числовые множества***, то есть множества, элементами которых являются числа.

Например: $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0$ – множество натуральных чисел и ноль ($\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$), $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbf{Q}$ – множество рациональных чисел, $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел.

Напомним, что натуральными называют числа, используемые при счете предметов, то есть $\mathbf{N}=\{1; 2; 3; 4; 5;\ldots\}$. Целыми считают натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число ноль. Таким образом, $\mathbf{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4;\ldots\}$. Рациональные числа – это обыкновенные дроби с целым числителем и натуральным знаменателем: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$. Любое рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, причем такое представление единственно (исключая рассмотрение случая периодической дроби с девяткой в периоде).

Все десятичные дроби (в том числе и бесконечные непериодические) образуют множество действительных чисел. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют ***иррациональными***. Иррациональные числа можно записать в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

Действительные числа изображают точками на координатной прямой (числовой оси). Точка O, соответствующая числу 0, разбивает координатную прямую на два луча: положительный и отрицательный. Число, изображением которого на координатной прямой является точка M, называется ***координатой*** точки M. Если $x_1 < x_2$, то точка с координатой x_1 лежит левее точки с координатой x_2.

Особое значение в математике имеют подмножества множества **R**, называемые числовыми промежутками: ***отрезок*** $[a; b]$ – множество точек x, удовлетворяющих условию $a \le x \le b$; ***интервал*** $(a; b)$ – множество точек x, удовлетворяющих условию $a < x < b$; ***полуинтервалы*** $[a; b)$ и $(a; b]$ – множества точек x, удовлетворяющих условиям $a \le x < b$ и $a < x \le b$ соответственно; бесконечные промежутки $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ – множества точек x, удовлетворяющих условиям $x > a$, $x < b$, $x \ge a$, $x \le b$ соответственно.

Во многих определениях и теоремах курса математического анализа используется понятие модуля.

Модулем числа a называется само число a, если оно неотрицательно, и число, противоположное a, если a отрицательно, то есть $|a| = a$ при $a \ge 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$.

Сформулируем основные свойства модуля: 1) $|a| \ge 0$;

2) $|a| \ge a,\ |a| \ge -a$; 3) $|a| = \max\{a; -a\}$;

4) $|a+b| \le |a| + |b|$; 5) $|a-b| \ge \big||a| - |b|\big|$;

6) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; 7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Геометрический смысл модуля числа a – это расстояние на числовой прямой от точки 0 до точки a. Тогда при $a > 0$ неравенство $|x| < a$ эквивалентно двойному неравенству $-a < x < a$ и задает на прямой интервал $(-a; a)$, а неравенство $|x| > a$ задает объединение лучей $(-\infty; -a) \cup (a; \infty)$.

Множество точек числовой прямой, удовлетворяющих условию $x \in (a-r; a+r)$, называется ***окрестностью*** точки a радиуса r. Окрестность можно записать также через двойное неравенство $a - r < x < a + r$ или неравенство с модулем $|x - a| < r$.

Кроме числовых множеств, то есть подмножеств множества $\mathbf{R}$, важную роль в теории числовых функций играют подмножества декартова квадрата $\mathbf{R}^2$. Элементы множества $\mathbf{R}^2$ изображаются точками на ***координатной плоскости***, то есть плоскости, на которой задана точка *O*, называемая началом координат, и две числовые оси *Ox* и *Oy*, проходящие через точку *O*. Как правило, оси *Ox* и *Oy* выбирают так, чтобы они были перпендикулярны друг другу. В этом случае, говорят о ***декартовой системе координат*** на плоскости, и ось *Ox* называют ***осью абсцисс***, а ось *Oy* – ***осью ординат***.

§ 2. Понятие функции

Определение 2.1. *Пусть даны два множества X и Y и пусть указано правило, по которому каждому элементу x множества X поставлено в соответствие единственное значение y из множества Y. Это соответствие называется*

функцией (***отображением***) *и обозначается* $f: X \to Y$ *или* $y = f(x)$.

Переменная x называется независимой или ***аргументом***, переменная y – зависимой или ***функцией***. Множество X называется ***областью определения*** функции и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, которые принимает переменная y (это подмножество множества Y), называется ***областью изменения*** (***областью значений***) функции и обозначается $E(f)$.

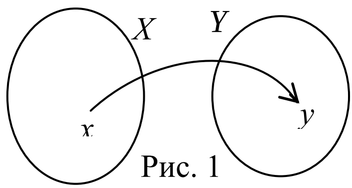


Рис. 1

Функция считается заданной, если:

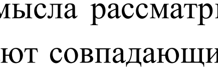
а) задана область определения функции X;

б) задана область значений функции Y;

в) известно правило (закон) соответствия, причем каждому значению аргумента $x \in X$ поставлено в соответствие **единственное** значение функции $y \in Y$.

Часто при задании функции задают только правило соответствия, не описывая при этом множества X и Y. В таких случаях подразумевается, что область определения X известна из физического или математического смысла рассматриваемого соответствия, а множество Y считают совпадающим с областью значений функций.

В технической литературе встречается определение функции как устройства, на вход которого подается x, а на выходе получается y.



Если $x_0 \in X$, то число $f(x_0)$ называют ***значением*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Две функции называются равными, если они имеют одинаковые области определения и каждому значению аргумента они ставят в соответствие одно и тоже число, то есть $f(x)=g(x)$, если $D(f)=D(g)$ и $f(x_0)=g(x_0)$ для всех $x_0 \in D(f)$.

Наиболее распространенный способ задания функции – ***аналитический***, то есть с помощью формулы. Например, функцию, ставящую в соответствие каждому неотрицательному числу x его квадратный корень, можно записать в виде $y=\sqrt{x}$ или $f(x)=\sqrt{x}$. Этот способ задания функции компактен, содержит полную информацию о свойствах функции и наиболее удобен при проведении расчетов. Если не сделано специальной оговорки, то за область определения функции берут все значения аргумента, для которых указанные в формуле действия выполнимы. Например, область определения функции $f(x)=\sqrt{x}$ все неотрицательные значения x, то есть $D(f)=[0;+\infty)$, а для функции $g(x)=\dfrac{3x+5}{x-4}$ – область определения все действительные значения x, кроме $x=4$, то есть $D(g)=\mathbf{Z}\backslash\{4\}$. Заметим, что область определения функции может задаваться условиями решаемой задачи или физическим смыслом изучаемого явления. Например, для функции $S=x^2$, задающей площадь квадрата со стороной x, область определения $D(S)=(0;+\infty)$. При падении тела с высоты H под действием силы тяжести область определения функции $y(t) = H - 0{,}5gt^2$, описывающей это движение, – множество $D(y) = \left[0; \sqrt{2Hg^{-1}}\right]$.

Иногда для разных значений x функция задается разными формулами (например, такая ситуация наблюдается для функций, содержащих модули). В этом случае используют обозначение:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1, \\ f_2(x), & x \in X_2, \\ & \ldots \\ f_n(x), & x \in X_n, \end{cases}$$

причем $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = D(f)$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

На практике часто используют ***табличный*** способ задания функции. При этом способе задания функции приводится таблица, в которой для имеющихся значений аргумента указываются соответствующие значения функции. Табличный способ важен потому, что он является основным при описании реальных зависимостей, возникающих при проведении различных экспериментов. С математической точки зрения табличное задание функции неполно, так как оно позволяет найти значение функции только для тех значений аргумента, которые заданы в таблице. Однако оно позволяет высказать предположение об аналитическом представлении функции, и, применяя различные методы приближенных вычислений, найти это представление.

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $(x, f(x))$, называется ***графиком*** функции

$y = f(x)$. Графическое представление функции удобно для непосредственного восприятия ее особенностей, описания свойств. Однако графический способ неудобен при выполнении расчетов.

Функции можно также задавать ***словесно***. Например, функция Дирихле задается таким описанием: значение функции равно 1, если x рационально, и 0, если x иррационально.

Приведем некоторые интересные примеры функций:

1. Функция $y = f(x)$ каждому положительному числу x ставит в соответствие число $y = 1$, каждому отрицательному числу x ставит в соответствие число $y = -1$ и $y(0) = 0$ (рис. 2а). Эта функция называется ***знаком*** числа x и обозначается $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

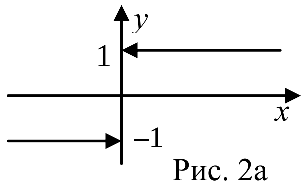


Рис. 2а

2. Функция $y = f(x)$ каждому числу $x \in [n; n+1)$, где $n \in \mathbf{Z}$, ставит в соответствие число n (рис. 2б). Эта функция называется ***целой частью*** числа x и обозначается $y = [x]$.

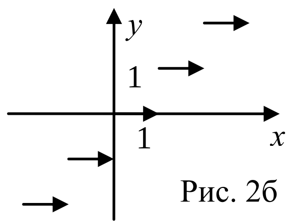


Рис. 2б

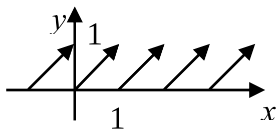


Рис. 2в

3. Функция $y = f(x)$ каждому числу $x \in [n; n+1)$, где $n \in \mathbf{Z}$, ставит

в соответствие число $x-n$ (рис. 2в). Эта функция называется ***дробной частью*** числа x и обозначается $y=\{x\}$.

4. ***Функция Хевисайда*** – специальная математическая функция, значение которой равно нулю для отрицательных аргументов и единице для неотрицательных аргументов: $y=\chi(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$

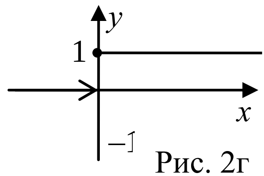


Рис. 2г

(рис. 2г). Функция широко используется в теории управления и обработке сигналов для представления сигналов, включающихся в определенный момент и остающихся включенными постоянно.

5. Функция ***модуля*** или ***абсолютного значения*** $y=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ (рис. 2д).

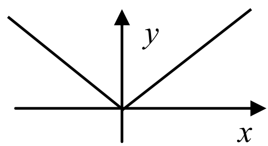


Рис. 2д

Функции, приведенные в примерах 1–5, несмотря на свою простоту, элементарными не являются.

§ 3. Сложная функция

Познакомимся с понятием ***суперпозиции функций***, которое состоит в том, что в качестве аргумента одной функции используется другая функция, то есть из функций $z=f(x)$ и $y=g(z)$ получают функцию $y=F(x)$.

Определение 3.1. *Пусть задано три множества X, Y, Z и две функции* $f:X\to Z$ *и* $g:Z\to Y$, *причем* $E(f)\subset D(g)$. *Функция* $F:X\to Y$ *называется* ***суперпозицией (композицией) функций*** $f(x)$ и $g(z)$ *или* ***сложной***

функцией, *если выполняется соотношение* $F(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

Например: $z=f(x)=x^3+9x+7$, $y=g(z)=\sqrt[3]{z}$. Тогда сложная функция $y=g(f(x))=\sqrt[3]{x^3+9x+7}$. Чтобы найти значение сложной функции, подставляют сначала заданное значение x_0 во внутреннюю функцию и находят ее значение $z_0=f(x_0)$, а затем уже вычисляют соответствующее значение функции $y_0=g(z_0)$.

При выполнении суперпозиции функций считают, что множество значений внутренней функции $f(x)$ содержится в области определения внешней функции $g(z)$.

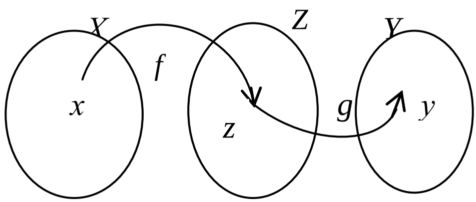


Рис. 3

Сложную функцию можно составить из большего числа более простых функций.

Пример 1. Сложную функцию $f(x)=\sqrt{\log_2\cos x}$ представьте в виде цепочки элементарных функций.

Решение. Будем последовательно выполнять операции, которые заданы в формуле: $z=\cos x$, $t=\log_2 z$, $y=\sqrt{t}$. Следовательно, заданная в условии задачи функция является суперпозицией трех основных элементарных функций. ◊

Пример 2. Даны функции $y=\sqrt{3z+8}$, $z=t^7$, $t=\sin u$, $u=2x$. Запишите сложную функцию $y=f(x)$.

Решение. Подставляя последовательно функции одну в другую, получим сложную функцию $y=\sqrt{3\sin^7 2x+8}$. ◊

§ 4. Обратная функция

Пусть функция $y=f(x)$, определенная на множестве *X*, такова, что любым двум различным значениям аргумента *x* ставит в соответствие различные значения *y*, то есть, если $x_1 \neq x_2$, то $y_1=f(x_1)\neq f(x_2)=y_2$. Эта функция устанавливает взаимнооднозначное соответствие между областью своего определения X и областью изменения *Y*.

Действительно, каждой точке $x\in X$ ставится в соответствие единственное $y\in Y$. При этом каждой точке $y\in Y$ соответствует единственное $x\in X$, такое, что $y=f(x)$. Та- Таким образом, на множестве *Y* определена функция f^{-1}, которая называется ***обратной*** к функции *f*. Область определения обратной функции – множество *Y*, область значений – множество *X*. Графики функции $y=f(x)$ и обратной к ней функции $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 4б). Для обратных функций верно соотношение $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$.

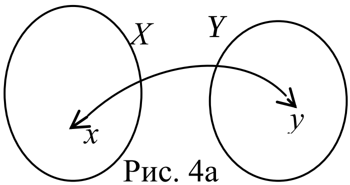


Рис. 4а

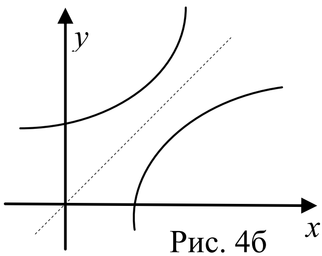


Рис. 4б

Для нахождения обратной функции необходимо из равенства $y = f(x)$ выразить x через y, и в полученном выражении $x = f^{-1}(y)$ букву x заменить буквой y, букву y – буквой x.

Пример 3. Имеют ли функции $f(x) = 0{,}5(7x+3)$ и $g(x) = x^4 + 1$ обратные? Если да, то найдите их.

Решение. Выразим x из формулы $y = 0{,}5(7x+3)$. Получим $x = \dfrac{2y-3}{7}$. Обозначив аргумент через x, а функцию через y, получим $y = \dfrac{2x-3}{7}$, то есть функция $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-3}{7}$ является обратной к функции $f(x) = 0{,}5(7x+3)$.

Функция $g(x) = x^4 + 1$ не имеет обратной, так как она не является взаимнооднозначной. Действительно, $g(-1) = g(1) = 2$. ◊

Пример 4. Являются ли функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$ взаимообратными?

Решение. Нет, так как $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x$. Однако, если данные функции рассматривать только при $x \geq 0$, то есть считать $D(f) = [0; +\infty)$, то эти функции становятся взаимообратными.
◊

§ 5. Свойства функций

В данном параграфе будут приведены определения основных свойств числовых функций числового аргумента, то есть будут рассматриваться функции $f(x)$, для которых $D(f) \subset \mathbf{R}$ и $E(f) \subset \mathbf{R}$.

Определение 5.1. Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение 5.2. Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно убывающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Определение 5.3. *Функция $y = f(x)$ называется* ***неубывающей*** *на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее или равное значение функции.*

Определение 5.4. *Функция $y = f(x)$ называется* ***невозрастающей*** *на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \geq f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее или равное значение функции.*

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие функции называют монотонными.

Монотонные функции обладают следующими свойствами:

1) сумма двух монотонно возрастающих (монотонно убывающих) функций является монотонно возрастающей (монотонно убывающей) функцией;

2) произведение двух положительных монотонно возрастающих (монотонно убывающих) функций является монотонно возрастающей (монотонно убывающей) функцией;

3) если функция $y = f(x)$ монотонно возрастающая (монотонно убывающая), то функция $y = -f(x)$ монотонно убывающая (монотонно возрастающая);

4) если положительная функция $y = f(x)$ является монотонно возрастающей (монотонно убывающей), то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является монотонно убывающей (монотонно возрастающей);

5) если функция $y = f(x)$ монотонна на всей области определения, то она имеет обратную функцию;

6) если функция $z = g(x)$ монотонно возрастает (монотонно убывает) на множестве *X*, а функция $y = f(z)$ монотонно возрастает (монотонно убывает) на множестве $g(X)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ монотонно возрастает (монотонно убывает) на множестве *X*.

Пример 5. Функцию $f(x) = x^2 + 3x - 5$ исследуйте на монотонность при $x \in [0; \infty)$.

Решение. Пусть $0 \le x_1 < x_2$. Тогда разность $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 + 3x_2 - 5) - (x_1^2 + 3x_1 - 5) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 3) > 0$.

Следовательно, $f(x_1) < f(x_2)$ и функция $f(x)$ является возрастающей. ◊

Заметим, что функции $y=[x]$, $y=\operatorname{sgn} x$ и $y=\chi(x)$ являются неубывающими на всей числовой прямой, а функция $y=\{x\}$ возрастает на каждом промежутке $[n; n+1)$, где $n\in\mathbf{Z}$. Функция $y=|x|$ убывает при $x\le 0$ и возрастает при $x\ge 0$.

Определение 5.5. *Функция $y=f(x)$ называется* ***ограниченной сверху*** *на множестве $X\subset D(f)$, если существует такое число M, что значение функции в любой точке не превосходит этого числа, то есть для любого $x\in X$ выполняется неравенство $f(x)\le M$.*

Определение 5.6. *Функция $y=f(x)$ называется* ***ограниченной снизу*** *на множестве $X\subset D(f)$, если существует такое число m, что значение функции в любой точке не меньше этого числа, то есть для любого $x\in X$ выполняется неравенство $f(x)\ge m$.*

Ограниченная сверху и снизу на множестве *X* функция называется ограниченной на этом множестве. Другими словами, если функция $f(x)$ ограничена на множестве *X*, то существуют такие числа *m* и *M*, что $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in X$. Условие ограниченности можно также записать в виде $|f(x)|\le M$ для некоторого положительного числа *M*.

Пример 6. Является ли функции $f(x)=\sqrt{9+8x-x^2}$ ограниченной?

Решение. Область определения функции найдем из условия $9+8x-x^2\ge 0$, то есть $D(f)=[-1;9]$. Преобразуем подкоренное выражение $9+8x-x^2=9-(16-8x+x^2)+16=$ $=25-(x-4)^2$, значит $f(x)=\sqrt{25-(x-4)^2}$. Имеем $f(x)\geq 0$, так как корень арифметический. С другой стороны $f(x)\leq\sqrt{25}=5$. Следовательно, функция ограничена и сверху и снизу, причем $0\leq f(x)\leq 5$. ◊

Заметим, что функции $y=\operatorname{sgn}x$, $y=\{x\}$, $y=\chi(x)$ ограничены на всей области своего определения, а функция $y=|x|$ ограничены снизу, но не ограничены сверху.

Определение 5.7. *Точка* $x_0\in D(f)$ *называется точкой* ***максимума*** *функции* $y=f(x)$*, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек* $x\neq x_0$ *из этой окрестности выполняется неравенство* $f(x)<f(x_0)$.

Определение 5.8. *Точка* $x_0\in D(f)$ *называется точкой* ***минимума*** *функции* $y=f(x)$*, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек* $x\neq x_0$ *из этой окрестности выполняется неравенство* $f(x)>f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называют точками ***экстремума*** функции.

Заметим, что функция в области своего определения может иметь несколько точек максимума или минимума.

Пример 7. Докажите, что точка $x_0=3$ является точкой максимума для функции $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-12x+19}$.

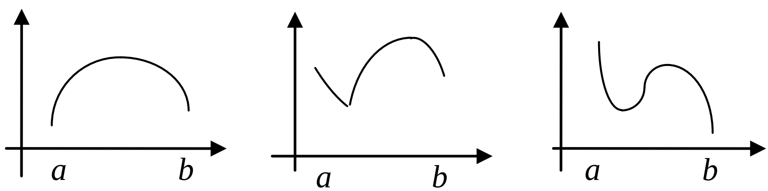
Решение. Областью определения функции является вся числовая прямая, так как знаменатель $2x^2-12x+19$ всегда отличен от нуля ($D=-8$). Преобразуем знаменатель $2x^2-12x+19=2(x-3)^2+1$. Значит, $f(x)=1$ при $x=3$ и $f(x)<1$ при $x\neq 3$. Что и означает наличие максимума в точке $x_0=3$. ◊

Заметим, что точка $x_0=0$ является точкой минимума для функций $y=|x|$ и $y=x^2$.

Определение 5.9. *Будем говорить, что в точке* $x_0\in X\subset D(f)$ *функция* $y=f(x)$ *принимает* ***наибольшее*** *на множестве X значение, если для всех точек* $x\in X$ *справедливо неравенство* $f(x)\le f(x_0)$.

Определение 5.10. *Будем говорить, что в точке* $x_0\in X\subset D(f)$ *функция* $y=f(x)$ *принимает* ***наименьшее*** *на множестве X значение, если для всех точек* $x\in X$ *справедливо неравенство* $f(x)\ge f(x_0)$.

Если множество X представляет собой отрезок $[a; b]$, то наибольшее или наименьшее значения функция принимает, либо в точке экстремума, либо на конце отрезка.



Говорят, что множество X ***симметрично относительно начала координат***, если для любой точки $x\in X$ противоположная точка $-x\in X$.

Определение 5.11. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***четной****, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и* $f(-x) = f(x)$ *для любого* $x \in D(f)$.

Определение 5.12. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***нечетной****, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и* $f(-x) = -f(x)$ *для любого* $x \in D(f)$.

График четной функции имеет ось симметрии. Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику четной функции, т. е. $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = f(x_0)$, то $-x_0 \in D(f)$, $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$ и точка $M_1(-x_0; y_0)$ принадлежит графику этой функции. Следовательно, он симметричен относительно оси ординат. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то функция $f(x)$ четная.

График нечетной функции имеет центр симметрии. Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику нечетной функции, т. е. $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = f(x_0)$, то $-x_0 \in D(f)$, $f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0$ и точка $M_1(-x_0; -y_0)$ принадлежит графику этой функции. Следовательно, он симметричен относительно начала координат. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно начала координат, то функция $f(x)$ нечетная.

Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называют ***функциями общего вида***.

Четные и нечетные функции обладают следующими свойствами:

1) сумма двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная);

2) произведение двух четных (нечетных) функций есть функция четная; произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная;

3) если нечетная функция $f(x)$ определена в нуле, то $f(0)=0$;

4) пусть функция $f(x)$ определена на множестве X таком, что если $x\in X$, то и $-x\in X$, тогда функция $g(x)=f(x)+f(-x)$ четная, а функция $h(x)=f(x)-f(-x)$ нечетная.

5) всякая функция, определенная на множестве X, симметричном относительно начала координат, может быть представлена в виде суммы двух функций, определенных на X, причем одна из этих функций является четной, а другая – нечетной.

В качестве таких функций можно взять четную функцию $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ и нечетную функцию $f_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Пример 8. Какая из функций $f_1(x)=2x^4-7x^2+4$ и $f_2(x)=x^3\cos x-\sin 2x$ является четной, а какая – нечетной.

Решение. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены для всех действительных значений x.

$f_1(-x)=2(-x)^4-7(-x)^2+4=2x^4-7x^2+4=f_1(x)$, следовательно, функция $f_1(x)$ четная.

$f_2(-x)=(-x)^3\cos(-x)-\sin 2(-x)=-x^3\cos x+\sin 2x=-f_2(x)$,
следовательно, функция $f_2(x)$ нечетная. ◊

Пример 9. Проверьте, будет ли функция $f(x)=3^{2x^2+5}-x^5+7x^3-5$ четной или нечетной?

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой.

$f(-x)=3^{2(-x)^2+5}-(-x)^5+7(-x)^3-5=3^{2x^2+5}+x^5-7x^3-5$. Получили, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной. Функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы четной $f_1(x)=3^{2x^2+5}-5$ и нечетной $f_2(x)=7x^3-x^5$ функций. ◊

Пример 10. Пусть $h(x)=\dfrac{2f(x)+4g(x)}{f(x)g(x)-4}$ и известно, что функция $f(x)$ – четная, функция $g(x)$ – нечетная, Найдите значение функции $h(x)$ в точке *a*, если и $f(a)=-1,\ g(a)=5$.

Решение. Выразим значение функции $h(x)$ в точке $-a$:

$$h(-a)=\frac{2f(-a)+4g(-a)}{f(-a)g(-a)-3}=\frac{2f(a)+4(-g(a))}{f(a)(-g(a))-3}=\frac{2f(a)-4g(a)}{-f(a)g(a)-3}.$$

Следовательно, $h(-a)=\dfrac{2\cdot(-1)-4\cdot 3}{-(-1)\cdot 5-3}=\dfrac{-14}{2}=-7$. ◊

Пример 11. Функция $f(x)=x^2+3x+7$ определена на луче $[0;+\infty)$. Можно ли эту функцию доопределить на всю числовую прямую так, чтобы она была: а) четной, б) нечетной?

Решение. а) Пусть $g(x)$ – четная функция, совпадающая с функцией $f(x)$ при $x \geq 0$. Тогда для отрицательных x должно выполняться равенство $g(x) = f(-x) = x^2 - 3x + 7$. Таким образом, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 7, & x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 7, & x < 0 \end{cases}$ или более кратко $g(x) = x^2 + 3|x| + 7$.

б) Так как при $x = 0$ функция $f(x)$ принимает значение равное 7, то доопределить ее нечетным образом на всю числовую прямую нельзя (свойство 3).

Однако если бы функция $f(x) = x^2 + 3x + 7$ была определена на луче (0; +∞), то ее можно было бы доопределить на всю числовую прямую нечетным образом, положив $f(x) = -x^2 + 3x + 7$ для всех отрицательных x и $f(0) = 0$. Тогда $D(f) = \mathbf{R}$ и точка $x = 0$ является точкой разрыва построенной таким образом нечетной функции. ◊

Заметим, что функция $y = \operatorname{sgn} x$ является нечетной, а функция $y = |x|$ является четной.

Определение 5.13. *Функция* $y = f(x)$ *называется **периодической**, если существует такое число* $T > 0$*, что для любого* $x \in D(f)$ *точка* $x + T \in D(f)$ *и справедливо равенство* $f(x+T) = f(x)$.

Наименьшее из положительных чисел T в определении 5.13 называют ***главным периодом***. Периодическая функция имеет бесконечно много периодов, все они кратны числу T.

Пример 12. Функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T=5$ и на отрезке $[-1;4]$ задана формулой $f(x)=x^2-3x+1$. Найдите $2f(13)-3f(-18)$.

Решение. Используя периодичность функции $f(x)$, получим $f(13)=f(3+2\cdot 5)=f(3+2T)=f(3)=3^2-9+1=1$,

$f(-18)=f(2-4\cdot 5)=f(2-4T)=f(2)=2^2-6+1=-1$. ◊

Заметим, что функция $y=\{x\}$ является периодической с главным периодом $T=1$.

Для каждой точки $x_0\in D(f)$ обозначим через $\Delta x(x_0)=x-x_0$ ***приращение аргумента*** в точке x_0, а через $\Delta y(x_0)=f(x)-f(x_0)$ ***приращение функции***, соответствующее данному приращению аргумента. Заметим, что для возрастающих функций знаки приращений аргумента и функции одинаковы, а для убывающих – противоположны.

Определение 5.14. *Функция $y=f(x)$ называется* ***непрерывной*** *в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x(x_0)$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y(x_0)$. Точка, в которой функция не является непрерывной, называется* ***точкой разрыва*** *функции.*

К точкам разрыва также относят граничные точки области определения.

Например, функция $y=\dfrac{x^2}{x}$ имеет разрыв при $x=0$ и совпадает с функцией $y=x$ при остальных значениях x.

Заметим, что функция $y=|x|$ является непрерывной на всей числовой оси; функция $y=\operatorname{sgn} x$ непрерывна везде, кроме нуля; функции $y=[x]$ и $y=\{x\}$ имеют разрывы во всех целых точках.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках своих областей определения. График непрерывной функции, областью определения которой является числовой промежуток, можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

Во многих случаях построение графика функции облегчается, если предварительно построить его асимптоты.

Асимптотой графика функции называется прямая такая, что расстояние от точек графика до этой прямой стремится к нулю при удалении точек графика в бесконечностьАсимптоты бывают вертикальные (параллельные оси Oy, их уравнение $x=x_0$), горизонтальные (параллельные оси Ox, их уравнение $y=b$) и наклонные (их уравнение $y=kx+b$).

Все введенные в этом параграфе определения используются при исследовании функций и построении графиков.

§ 6. Основные элементарные функции

В этом параграфе мы рассмотрим основные элементарные функции. Для каждой функции запишем ее свойства и начертим график.

Степенные функции $y=x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$. Рассмотрим несколько частных случаев степенной функции.

Функции $y = x^{2n}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbf{R}$. Они принимают только неотрицательные значения, $E(f) = [0; +\infty)$. Функции являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. Эти функции ограничены снизу. В точке $x = 0$ они имеют минимум и принимают наименьшее значение, равное 0, сверху функции не ограничены. Функции $y = x^{2n}$ возрастают на промежутке $[0; +\infty)$ и убывают на промежутке $(-\infty; 0]$ (рис. 5).

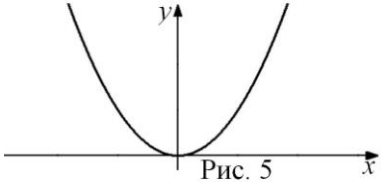


Рис. 5

Функции $y = x^{2n-1}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbf{R}$. Множества их изменения – также вся числовая ось $E(f) = \mathbf{R}$, то есть эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. График функции при $n > 1$ приведен на рис. 6 (при $n = 1$ – график функции прямая).

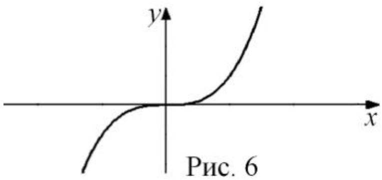


Рис. 6

Функции $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для всех значений x, отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Они принимают только положительные значения $E(f) = (0; +\infty)$. Эти функции ограничены снизу, но они не принимают свое наименьшее значение. Функции

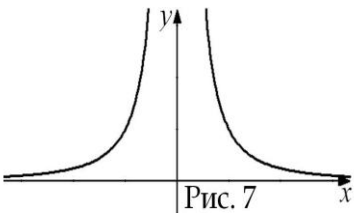


Рис. 7

являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. При $x > 0$ функции убывают, при $x < 0$ функции возрастают. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций (рис. 7).

Заметим, что если $0 < x < 1$, то $x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots$, то есть графики функций с большим показателем степени расположены ближе к оси *Ox*, чем графики с меньшим показателем степени. Если же $x > 1$, то $x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$, то есть графики функций с меньшим показателем степени расположены ближе к оси *Ox*, чем графики с большим показателем степени.

Функции $y = x^{-2n+1} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для всех значений *x*, отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Множества их изменения также все значения *y*, отличные от 0, то есть $E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. Функции убывают на интервалах (–∞; 0) и (0; +∞). Точка $x = 0$ – точка разрыва функции. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций (рис. 8).

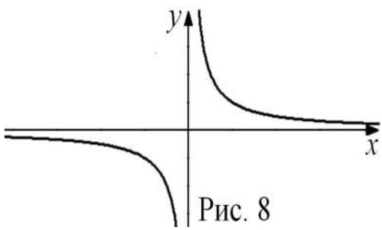


Рис. 8

Функции $y=\sqrt[2n]{x}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для всех неотрицательных значений x, то есть $D(f)=[0;+\infty)$. Множества их изменения также все неотрицательные значения y, то есть $E(f)=[0;+\infty)$. Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху. Наименьшее значение $y=0$ функции принимают при $x=0$. Функции возрастают на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти (рис. 9).

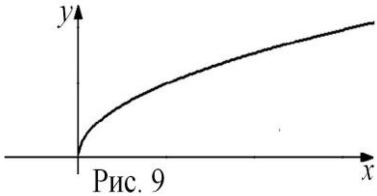


Рис. 9

Функции $y=x^{2n}$ и $y=\sqrt[2n]{x}$ взаимно обратные при $x \geq 0$, а значит, их графики симметричны относительно биссектрисы первой четверти.

Функции $y=\sqrt[2n-1]{x}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для всех значений x, то есть $D(f)=\mathbf{R}$[1]. Множества их изменения – также все значения y, то есть $E(f)=\mathbf{R}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции возрастают на всей области сво-

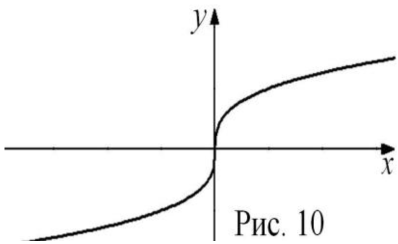


Рис. 10

[1] Функция с дробным показателем $y=x^{\frac{1}{2n-1}}$, где $n \in \mathbf{N}$, определена только при неотрицательных значениях x, в отличие от функции $y=\sqrt[2n-1]{x}$, определенной при всех действительных значениях x, и принимает неотрицательные значения. График этой функции расположен в первой четверти, где совпадает с графиком функции $y=\sqrt[2n-1]{x}$.

его определения. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат (рис. 10).

Функции $y = x^{2n-1}$ и $y = \sqrt[2n-1]{x}$ взаимно обратные. Их графики симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четвертей.

Функции $y = \dfrac{1}{\sqrt[2n]{x}}$ $(n \in \mathbf{N})$. Функции определены для всех положительных значений *x*, то есть $D(f) = (0; +\infty)$. Множества их изменения – также все положительные значения *y*, то есть $E(f) = (0; +\infty)$. Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху, но они ни в одной точке не принимают своего наименьшего значения. Функции убывают на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций (рис. 11).

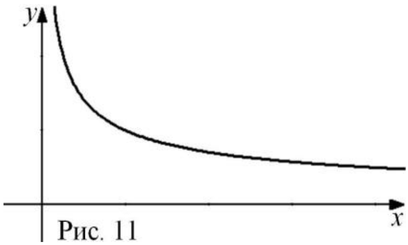


Рис. 11

Функции $y = x^{-2n}$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt[2n]{x}}$ взаимно обратные при $x > 0$, и их графики симметричны относительно биссектрисы первой четверти.

Функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n-1]{x}}$ $(n\in\mathbf{N})$. Функции определены для всех значений *x*, отличных от 0, то есть $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$[2]. Множества их изменения – также все значения *y*, отличные от 0, то есть $E(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. Функции убывают на интервалах (–∞; 0) и (0; +∞). Точка $x=0$ – точка разрыва функции. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций (рис. 12).

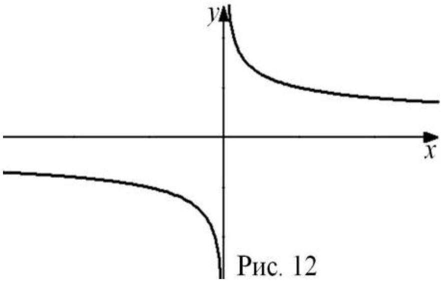
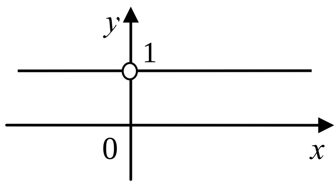


Рис. 12

Функции $y=x^{-2n+1}$ и $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n-1]{x}}$ взаимно обратные. Их графики симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четвертей.



Функция $y=x^0=1$ определена для всех действительных

---

[2] Функция с дробным показателем $y=x^{-\frac{1}{2n-1}}$, где $n\in\mathbf{N}$, определена только при положительных *x*, в отличие от функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n-1]{x}}$, определенной при всех не равных нулю действительных значениях *x*, и принимает положительные значения. График этой функции расположен в первой четверти, где совпадает с графиком функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n-1]{x}}$.

значений $x \neq 0$. График этой функции прямая $y = 1$ с выколотой точкой (0; 1).

Если α – дробное положительное число, то степенная функция $y = x^{\alpha}$ определена на промежутке [0; +∞), то есть $D(f) = [0; +\infty)$ и принимает на этом промежутке неотрицательные значения, то есть $E(f) = [0; +\infty)$. Эта функция непрерывна, возрастает на всей области своего определения. Она ограничена снизу, принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$ и не ограничена сверху.

Если α – дробное отрицательное число, то степенная функция $y = x^{\alpha}$ определена на промежутке (0; +∞), то есть $D(f) = (0; +\infty)$ и принимает на этом промежутке положительные значения, то есть $E(f) = (0; +\infty)$. Эта функция непрерывна, убывает на всей области своего определения. Она ограничена снизу $y > 0$, не ограничена. Оси координат являются асимптотами графика такой функции.

Тригонометрические функции.

Функция $y = \sin x$. Область определения функции – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \leq 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Функция $y = \sin x$ является периодической, ее период $T = 2\pi$. Функция $y = \sin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на

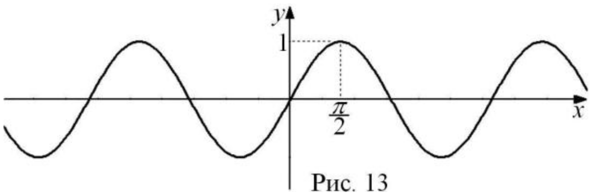


Рис. 13

каждом промежутке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ ($n \in \mathbf{Z}$) и убывает на каждом промежутке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m\right]$ ($m \in \mathbf{Z}$). График этой функции называется ***синусоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной 2π, например $[0; 2\pi]$, а затем копировать его (рис. 13).

Функция $y = \cos x$. Область определения функции вся числовая прямая: $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \le 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = 2\pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \cos x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

($k \in \mathbf{Z}$). Функция $y = \cos x$ является периодической, ее период $T = 2\pi$. Функция $y = \cos x$ является четной, ее график симметричен относительно оси ординат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ ($n \in \mathbf{Z}$) и убывает на каждом промежутке $[2\pi m; \pi + 2\pi m]$ ($m \in \mathbf{Z}$). График этой функции называется ***косинусоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной 2π, например $[0; 2\pi]$, а затем копировать его (рис. 14).

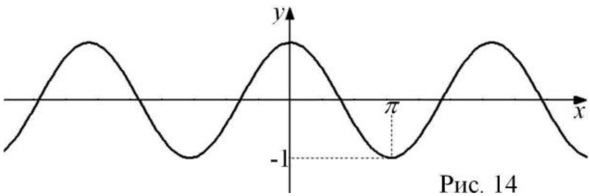


Рис. 14

Функция $y = \operatorname{tg} x$. Область определения функции все действительные значения *x*, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$):

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z} \right\}$. Множество ее изменения – вся числовая прямая, $E(f) = \mathbf{R}$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. График функции $y = \operatorname{tg} x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Функция $y = \operatorname{tg} x$

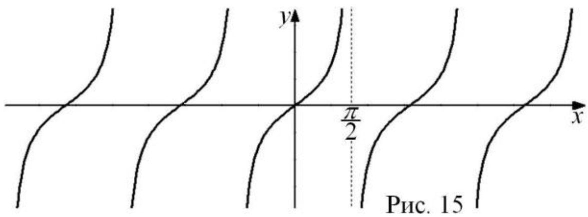


Рис. 15

является периодической, ее период $T=\pi$. Функция $y=\operatorname{tg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ ($n\in\mathbf{Z}$), в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$) функция имеет разрывы. Прямые $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$) являются вертикальными асимптотами графика функции. График этой функции называется ***тангенсоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной π, например $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а затем копировать его (рис. 15).

Функция $y=\operatorname{ctg}x$. Область определения функции все действительные значения *x*, кроме $x=\pi m(m\in\mathbf{Z})$: $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{\pi m, m\in\mathbf{Z}\}$. Множество ее изменения – вся числовая прямая, $E(f)=\mathbf{R}$. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не принимает ни наименьшее, ни наибольшее значения. График функции $y=\operatorname{ctg}x$ пересекает ось абсцисс в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$).

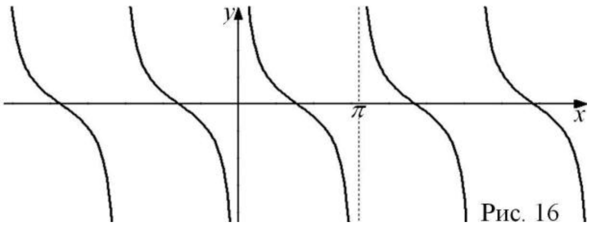


Рис. 16

Функция $y = \mathrm{ctg}x$ является периодической, ее период $T = \pi$. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она убывает на каждом промежутке $(\pi n; \pi + \pi n)$ ($n \in \mathbf{Z}$), в точках $x = \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) функция имеет разрывы. Прямые $x = \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) являются вертикальными асимптотами графика функции. График этой функции называется ***котангенсоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной π, например $(0; \pi)$, а затем копировать его (рис. 16).

Обратные тригонометрические функции.

Напомним определения обратных тригонометрических выражений. ***Арксинусом*** числа *a* называется угол α такой, что $\sin\alpha = a$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. ***Арккосинусом*** числа *a* называется угол α такой, что $\cos\alpha = a$ и $\alpha \in [0; \pi]$. ***Арктангенсом*** числа *a* называется угол α такой, что $\mathrm{tg}\alpha = a$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. ***Арккотангенсом*** числа *a* называется угол α, такой, что $\mathrm{ctg}\alpha = a$ и $\alpha \in (0; \pi)$.

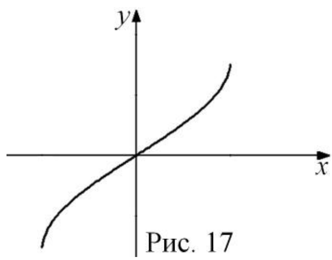


Рис. 17

Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \sin x$, на которой синус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \arcsin x$ каждому значению синуса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \arcsin x$ – отрезок [–1; 1], множество изменения – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = -1$, наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = 1$. Функция $y = \arcsin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения. График функции $y = \arcsin x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y = \sin x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 17).

Функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \cos x$, на которой косинус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $[0; \pi]$. Функция $y = \arccos x$ каждому

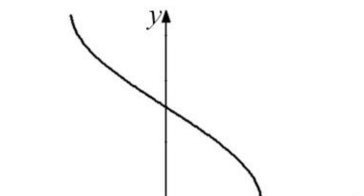


Рис. 18

значению косинуса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \arccos x$ – отрезок [–1; 1], множество изменения – отрезок $[0; \pi]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = 0$ функция принимает в точке $x = 1$, наибольшее значение $y = \pi$ функция принимает в точке $x = -1$. Функция $y = \arccos x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. График функции $y = \arccos x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y = \cos x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 18).

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y = \operatorname{tg} x$, на которой тангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ каждому значению тангенса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$, множество изменения – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но

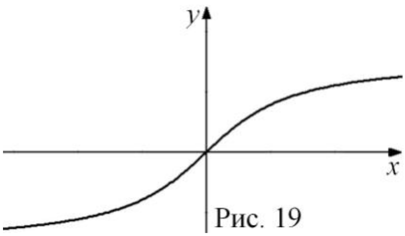


Рис. 19

она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y = \mathrm{arctg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения. Прямые $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами графика функции. График функции $y = \mathrm{arctg}x$ симметричен ветви графика функции $y = \mathrm{tg}\,x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 19).

Функция $y = \mathrm{arcctg}x$ является обратной к функции $y = \mathrm{ctg}x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y = \mathrm{ctg}x$, на которой котангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $(0;\pi)$. Функция $y = \mathrm{arcctg}x$ каждому значению котангенса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \mathrm{arcctg}x$ – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$, множество изменения – интервал $(0;\pi)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y = \mathrm{arcctg}x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами графика функции.

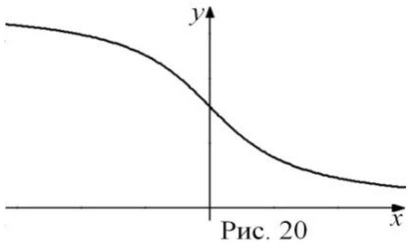


Рис. 20

График функции $y = \mathrm{arcctg}x$ симметричен ветви графика функции $y = \mathrm{ctg}x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 20).

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Область определения функции – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$. Функция принимает только положительные значения: $E(f) = (0; +\infty)$. Функция ограничена снизу и не ограничена сверху. Она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений, не имеет точек экстремума. Показательная функция не является ни четной, ни нечетной. График функции пересекает ось ординат в точке $(0; 1)$, ось абсцисс он не пересекает. При $a > 1$ функция является возрастающей (рис. 21), а при $0 < a < 1$ – убывающей (рис. 22) на всей области определения. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика показательной функции.

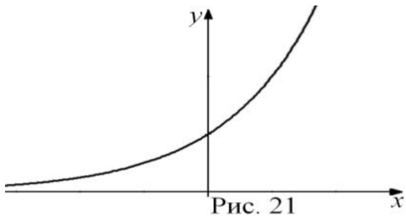


Рис. 21

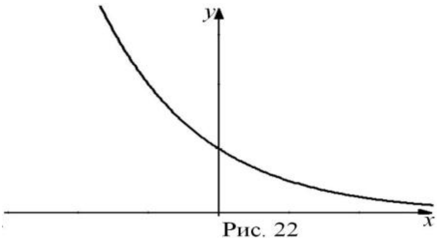


Рис. 22

В математике и ее приложениях наиболее часто используется показательная функция, основание которой равно числу *e*. Функцию $y = e^x$ называют ***экспонентой***.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Логарифмическая функция является обратной к показательной. Поэтому ее область определения – множество положительных чисел, $D(f)=(0;+\infty)$, область изменения – множество действительных чисел, $E(f)=\mathbf{R}$. Функция не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений, не имеет точек экс-

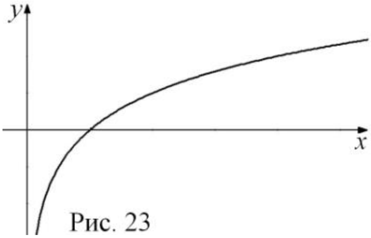


Рис. 23

тремума. Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной. График функции пересекает ось абсцисс в точке $(1;0)$, ось ординат график не пересекает. При $a>1$ функция является возрастающей (рис. 23), а при $0<a<1$ – убывающей (рис. 24) на всей области определения. Ось *Oy* является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции. График функции $y=\log_a x$ симметричен графику функции

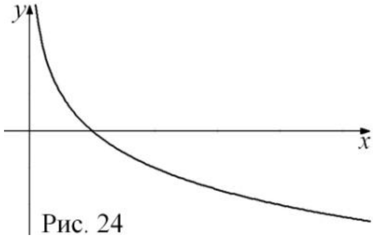


Рис. 24

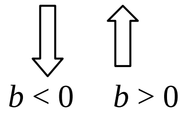
$y=a^x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей.

Логарифмическую функцию, основание которой равно *e*, называют ***натуральным логарифмом*** и обозначают $y=\ln x$.

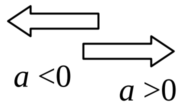
§ 7. Линейные преобразования графиков функций

В этом параграфе мы рассмотрим основные линейные преобразования графиков функций – параллельный перенос графика функции, растяжение (сжатие) графика функции и симметрии относительно осей координат.

1. Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy, то есть построение графика вида $y = f(x) + b$. Если $b > 0$, то ординаты всех точек графика функции увеличиваются на b единиц, а если $b < 0$, то ординаты всех точек графика функции уменьшаются на $|b|$ единиц.



2. Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox, то есть построение графика вида $y = f(x - a)$. Если $a > 0$, то график функции сдвигается на a единиц вправо, а если $a < 0$, то график функции сдвигается на $|a|$ единиц влево.



Пример 13. Задан график функции $y = f(x)$ (рис. 25). Постройте графики функций $y = f(x) - 2$ и $y = f(x - 2)$.

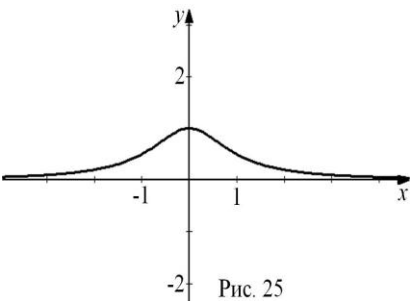


Рис. 25

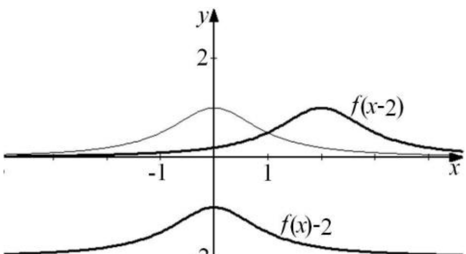


Рис. 26

Решение. Перенесем заданный график функции на две единицы вниз или вправо соответственно (рис. 26). ◊

3. Построение графика функции $y = f(x-a)+b$ осуществляется последовательным выполнением параллельных переносов графика функции $y = f(x)$ вдоль осей координат.

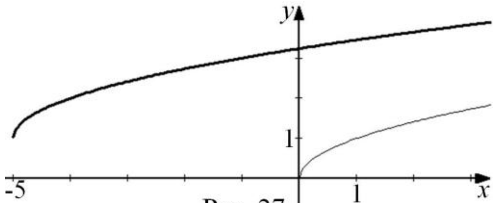
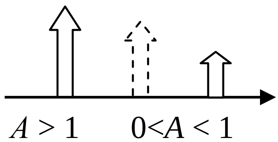


Рис. 27

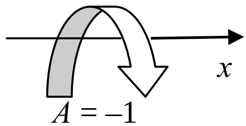
Пример 14. Постройте график функции $y = \sqrt{x+5}+1$.

Решение. Известный график степенной функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 9) перенесем на единицу вверх и на пять единиц влево (рис. 27). ◊

4. «Растяжение» графика функции $y = f(x)$ от оси *Ox*, то есть построение графика функции $y = Af(x)$. Если $A > 1$, то ордината каждой точки графика увеличивается в *A* раз (растяжение графика функции от оси *Ox*) и уменьшается в $\frac{1}{A}$ раз, если $0 < A < 1$ (сжатие графика функции к оси *Ox*).



5. Симметрия относительно оси *Ox*, то есть построение графика функции $y = -f(x)$. При этом каждая точка графика функции отображается в точку, симметричную относительно оси *Ox*.



6. Построение графика функции $y = Af(x)$, если $A < 0$, проводится как последовательное выполнение двух преобра-

зований – симметрии относительно оси Ox и растяжения от оси Ox.

Пример 15. Задан график функции $y = f(x)$ (рис. 25). Постройте графики функций $y = 3f(x)$ и $y = -0{,}5f(x)$.

Решение. График функции $y = 3f(x)$ получим растяжением в три раза графика функции $y = f(x)$ от оси Ox. Чтобы построить график функции $y = -0{,}5f(x)$ необходимо исходный график сначала отразить относительно оси Ox, а затем сжать его в два раза вдоль оси Oy (рис. 28). ◊

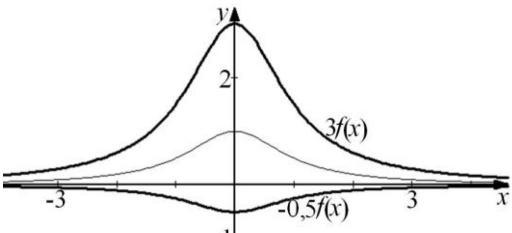
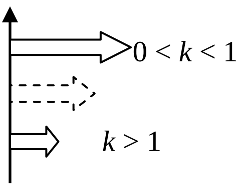
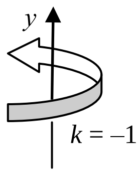


Рис. 28

7. «Сжатие» графика функции $y = f(x)$ к оси Oy, то есть построение графика функции $y = f(kx)$. При $k > 1$ абсциссы точек графика функции уменьшаются в k раз, происходит сжатие графика функции к оси Oy. При $0 < k < 1$ абсциссы точек графика функции увеличиваются в $\frac{1}{k}$ раз, происходит растяжение графика функции от оси Oy.



8. Симметрия относительно оси Oy, то есть построение графика функции $y = f(-x)$. При этом каждая точка графика функции отображается в точку, симмет-



ричную ей относительно оси *Oy*.

9. Построение графика функции $y = f(kx)$, если $k < 0$, проводится как последовательное выполнение двух преобразований – симметрии относительно оси *Oy* и сжатия к оси *Oy*.

Пример 16. Задан график функции $y = f(x)$ (рис. 25). Постройте графики функций $y = f(2x)$ и $y = f(-0,5x)$.

Решение. График функции $y = f(2x)$ строится путем сжатия графика функции $y = f(x)$ в два раза к оси *Oy*. Для построения графика функции $y = f(-0,5x)$ нужно симметрично отразить график исходной функции относительно оси *Oy* и растянуть его вдоль оси *Ox* в два раза (рис. 29).

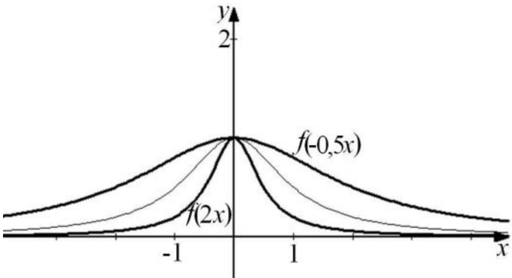


Рис. 29

Заметим, что, так как график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси *Oy*, то есть функция $f(x)$ является четной, то отражение относительно *Oy* не меняет вид графика.◊

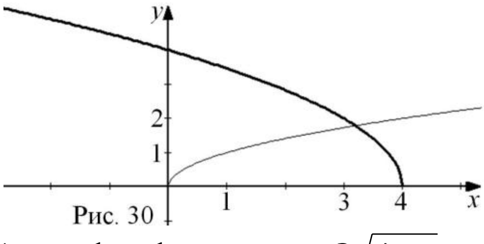


Рис. 30

Пример 17. Постройте график функции $y = 2\sqrt{4 - x}$.

Решение. Запишем функцию в виде $y = 2\sqrt{-(x-4)}$. Следовательно, построение графика производится последовательным выполнением преобразований известного графика функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 9): симметричное отражение относительно оси *Oy*, параллельный перенос на четыре единицы вправо и растяжение графика от оси *Ox* в два раза (рис. 30). ◊

§ 8. Линейные и квадратичные функции

Линейная функция $y=kx+b$. Функция определена на всей числовой прямой, $D(f)=\mathbf{R}$. Множество ее изменения – также множество всех действительных чисел, $E(f)=\mathbf{R}$ (если $k\neq 0$). Функция не ограничена. Она не имеет точек экстремума. При $k>0$ функция является возрастающей, при $k<0$ – убывающей. При $k=0$ функция является постоянной. Графиком линейной функции является прямая. Угловой коэффициент k прямой равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс, $k=\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 31). Из аксиом геометрии известно, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости. Поэтому для построения графика линейной функции достаточно задать две точки.

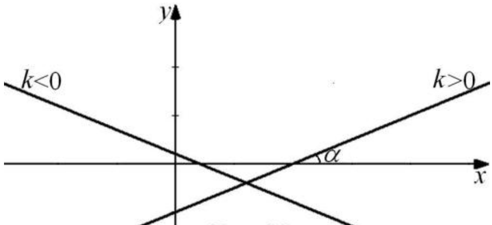


Рис. 31

Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Функция определена на всей числовой прямой. Графиком квадратичной функции является парабола.

Для построения графика квадратичной функции целесообразно преобразовать формулу, выделив полный квадрат:

$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x - x_0)^2 + y_0$, где

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Таким образом, получаем, что вершина параболы находится в точке с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. График квадратичной функции симметричен относительно прямой $x = x_0$.

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. В точке x_0 функция имеет минимум и принимает в этой точке наименьшее значение. При $x > x_0$ функция возрастает, при $x < x_0$ функция убывает. В этом случае квадратичная функция ограничена снизу и не ограничена сверху.

При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. В точке x_0 функция имеет максимум и принимает в этой точке наибольшее значение. При $x > x_0$ функция убывает, при $x < x_0$ функция возрастает. В этом случае квадратичная функция ограничена сверху и не ограничена снизу.

Если дискриминант соответствующего квадратного уравнения положителен, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках. Если дискриминант равен нулю, то парабола касается оси абсцисс. Если дискриминант отрицателен, то парабола расположена выше оси абсцисс, если $a > 0$, и ниже оси абсцисс, если $a < 0$.

Пример 18. Постройте графики функций $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = 2x - x^2 - 2$.

Решение. Вершина параболы $y = x^2 - 2x - 3$ имеет координаты $x_0 = 1$ и $y_0 = -4$. Так как старший коэффициент $a = 1$ положителен, то ветви параболы направлены вверх. Также, решив уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$, можно найти точки пересечения с осью абсцисс: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ (рис. 32).

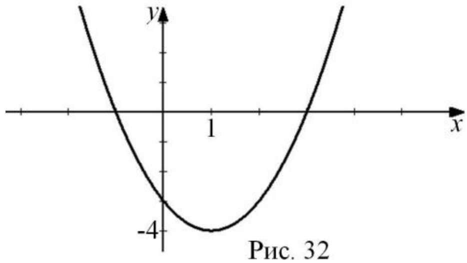


Рис. 32

Для параболы $y = 2x - x^2 - 2$ аналогично получаем, что $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$, и ветви ее направлены вниз. Данная парабола не имеет точек пересечения с осью абсцисс, так как дискриминант соответствующего квадратного уравнения отрицателен (рис. 33). ◊

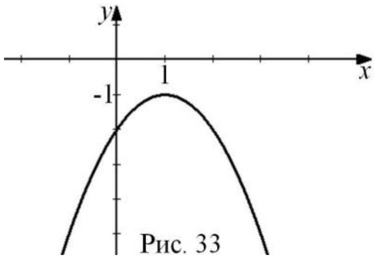


Рис. 33

§ 9. Построение графиков дробно-линейных функций

Функция вида $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq 0$ и $ad \neq bc$, называется ***дробно-линейной***. Графиком этой функции является гипербола.

Частным случаем дробно-линейной функции является функция обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$. График этой функции состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. При $k > 0$ гипербола расположена в первой и третьей четвертях, при $k < 0$ – во второй и четвертой четвертях.

Пример 19. Постройте график функции $y = \dfrac{3x+10}{2x+4}$.

Решение. Выделим целую часть дроби
$$y = \frac{3x+10}{2x+4} = \frac{3x+6+4}{2x+4} = \frac{1{,}5(2x+4)+4}{2x+4} = 1{,}5 + \frac{2}{x+2}.$$
Таким образом, уравнение, которым задается график функции, примет вид $y = 1{,}5 + \dfrac{2}{x+2}$. График заданной функции получается из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ сдвигом на 2 единицы по оси Ox влево, растяжением вдоль оси Oy в 2 раза и сдвигом на 1,5 единицы по оси Oy вверх.

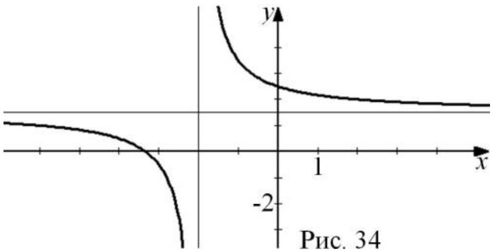


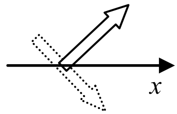
Рис. 34

Заметим, что график функции не пересекает прямые $x = -2$ и $y = 1{,}5$, хотя и приближается к ним достаточно близко. График заданной дробно-линейной функции имеет две асимптоты – вертикальную $x = -2$ и горизонтальную $y = 1{,}5$. Построение графика удобно начинать именно с нахождения асимптот: для нахождения вертикальной асимптоты приравниваем знаменатель дроби нулю, а для нахождения горизонтальной асимптоты выделяем целую часть дроби (рис. 34). ◊

Построение графика произвольной дробно-линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ выполняется по алгоритмам, разобранным в примере 19.

§ 10. Построение графиков функций, содержащих модуль

По определению $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$. Исходя из этого, получаем, что график функции $y=|x|$ состоит из двух лучей: $y=x$ при неотрицательных x и $y=-x$ при отрицательных x. Построение этого графика можно проводить также, используя преобразование симметрии относительно оси Ox.



Так как модуль любого выражения неотрицателен, то все точки графика $y=|f(x)|$ расположены выше оси абсцисс, или на оси абсцисс. Из этого следует, что для получения графика функции $y=|f(x)|$ все точки графика функции $y=f(x)$, лежащие выше или на оси Ox, нужно оставить на месте, а все точки, лежащие ниже оси Ox, отобразить симметрично относительно этой оси.

Пример 20. Постройте график функции $y=|x-3|-4$.

Решение. Построение графика будем выполнять последовательно.

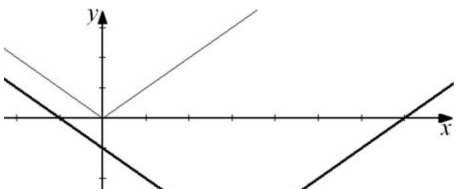
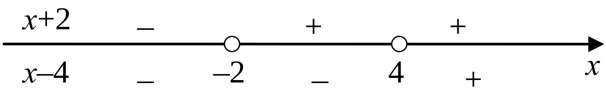


Рис. 35

Сначала строим график функции $y=|x|$. Затем сдвигаем его на 3 единицы вправо и на 4 единицы вниз. Заметим, что при этом вершина графика окажется в точке с координатами $x_0=3$ и $y_0=-4$ (рис. 35). ◊

Пример 21. Постройте график функции $y=|x-4|+0,5|x+2|-4$.

Решение. Разобьем числовую ось точками -2 и 4, в которых подмодульные выражения обращаются в ноль, на промежутки и определим знаки подмодульных выражений на каждом из промежутков



Следовательно,

$$y=\begin{cases}-1,5x-1, & x\le -2,\\ 1-0,5x, & -2\le x\le 4,\\ 1,5x-7, & x\ge 4.\end{cases}$$

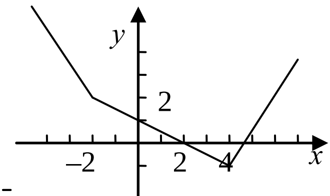


Рис.35б

График искомой функции состоит из трех частей, построенных на каждом из полученных промежутков (рис. 35б). ◊

Пример 22. Постройте график функции $y=\left|x^2-3x-4\right|$.

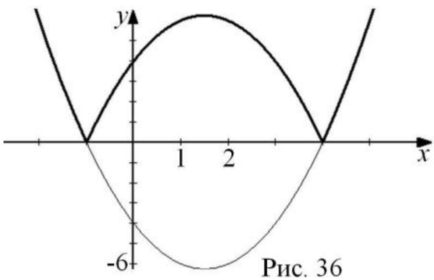


Рис. 36

Решение. Построение графика будем выполнять последовательно. Сначала строим график функции $y=x^2-3x-4$ как параболу с вершиной в точке $x_0 = 1{,}5$, $y_0 = -6{,}25$ и ветвями, направленными вверх. Затем точки графика, расположенные ниже оси *Ox*, – это точки, у которых координата *x* принадлежит интервалу $(-1; 4)$, – отображаем симметрично относительно этой оси (рис. 36). ◊

Пример 23. Постройте график функции $y = 2x^2 - 4|x| + 1$.

Решение. Функция $y = 2x^2 - 4|x| + 1$ – четная. Ее график симметричен относительно оси *Oy*, причем при неотрицательных *x* он совпадает с параболой $y = 2x^2 - 4x + 1$, имеющей вершину $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ и ветви, направленные вверх. Сначала построим часть данной параболы при неотрицательных *x*, а затем полученную кривую симметрично отобразим относительно оси *Oy* (рис. 37). ◊

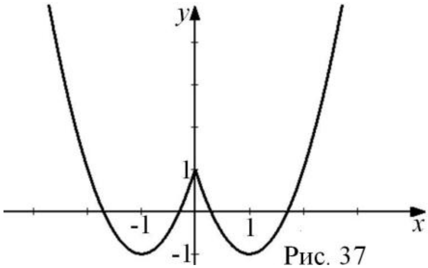


Рис. 37

§ 11. Гармонические колебания

Тригонометрические функции используются для описания различных колебательных процессов: колебания груза, подвешенного на пружине, вокруг положения равновесие, закон изменения переменного тока в цепи, колебания маятника, распространение звуковых и цветовых волн и т.д.

Формулы $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, с помощью которых описываются такие процессы, называются формулами ***гармонических колебаний***. Положительная величина A называется ***амплитудой*** колебания, положительная величина ω – ***частотой*** колебания, величина φ – ***начальной фазой*** колебания. Амплитуда характеризует размах колебания, частота – количество колебаний в единицу времени.

Построение графиков гармонических колебаний (гармоник) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ производится в несколько этапов.

Рассмотрим алгоритм построения графика функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$: а) строим график функции $y = \sin x$; б) строим график функции $y = \sin(x + \varphi)$, сдвигая график функции $y = \sin x$ на $|\varphi|$ единиц по оси *Ox* (если $\varphi > 0$, то сдвигаем влево, если $\varphi < 0$, то сдвигаем вправо); в) строим график функции $y = \sin(\omega x + \varphi)$, сжимая его в ω раз к оси *Oy*; г) строим график функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, растягивая его в A раз от оси *Ox*.

Заметим, что функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, описывающие гармонические колебания, являются периодическими с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Они ограничены сверху и снизу, их наибольшее и наименьшее значения равны $\pm A$.

Пример 24. Постройте график гармонического колебания $y = 3\cos\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Решение. Для этой гармоники амплитуда $A = 3$, частота – $\omega = 2$, начальная фаза – $\varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Строим график функции $y = \cos x$; сдвигаем на $\dfrac{2\pi}{3}$ единиц по оси Ox вправо; сжимаем график к оси Oy в 2 раза; растягиваем от оси Ox в 3 раза (рис. 38). ◊

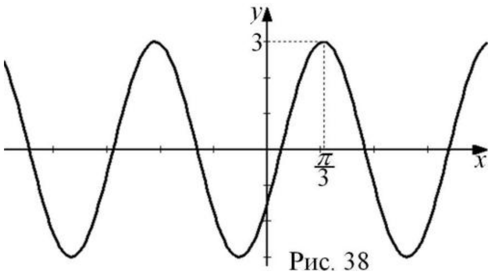


Рис. 38

Пример 25. Постройте график гармонического колебания $y = 3\cos 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Преобразуем формулу, раскрыв в аргументе косинуса скобки: $y = 3\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

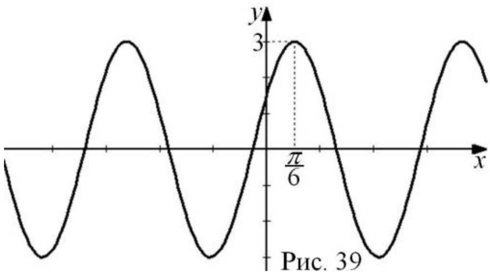


Рис. 39

Следовательно, для этой гармоники амплитуда $A = 3$, частота – $\omega = 2$, начальная фаза – $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$.

Строим график функции $y = \cos x$; сдвигаем график на $\dfrac{\pi}{3}$ единиц по оси Ox вправо; сжимаем график к оси Oy в 2 раза; растягиваем от оси Ox в 3 раза (рис. 39). ◊

Пример 26. Постройте график гармонического колебания $y=-3\cos 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Эта формула не задает гармоническое колебание, так как $A=-3<0$. Применив формулу приведения $\cos(x+\pi)=-\cos x$, преобразуем формулу к виду: $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. Следовательно, для этой гармоники амплитуда $A=3$, частота – $\omega=2$, начальная фаза – $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Строим график функции $y=\cos x$; сдвигаем на $\frac{\pi}{3}$ единиц по оси *Ox* влево; сжимаем график к оси *Oy* в 2 раза; растягиваем от оси *Ox* в 3 раза (рис. 40). ◊

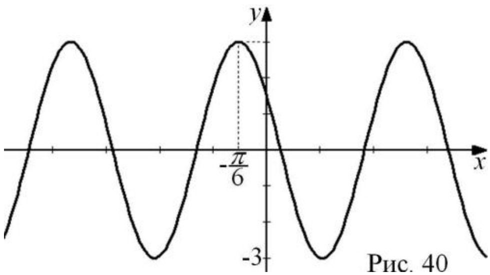


Рис. 40

§12. Упражнения

1. Найдите области определения функций:

а) $y=\frac{x+1}{x^2-7x+6}$; б) $y=\sqrt{14-5x-x^2}$;

в) $y=\frac{x-7}{\sqrt{x^2-9x+20}}$; г) $y=\frac{\sqrt{10+3x-x^2}}{x}$;

д) $y=\frac{x+5}{x^3-9x}$; е) $y=\sqrt{(x+1)(x^2-4x-12)}$;

ж) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-6}}$; з) $y=\sqrt{\dfrac{x-11}{5+4x-x^2}}$;

и) $y=\sqrt{x+5}+\sqrt{2-x}$; к) $y=\sqrt{x^2-7x+6}+\sqrt{2x+7}$;

л) $y=\sqrt{8+2x-x^2}-\sqrt{x}$; м) $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x+7}{9-x}}$;

н) $y=\sqrt{\dfrac{x+8}{x-3}}$; о) $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+8}}$;

п) $y=\dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x-3}}$; р) $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+8}}$.

2. Найдите области определения функций:

а) $y=\log_3(2x+5)$; б) $y=\log_2(45+7x-x^2)$;

в) $y=\lg|x^2-2x-8|$; г) $y=|\lg x|-1$;

д) $y=\sqrt{\log_2(x^2-5x+5)}$; е) $y=\sqrt{2^{x^2-2x}-8}$;

ж) $y=\sqrt{\log_2(x^2-4x+5)-3}$; з) $y=\sqrt{0,5^{x^2-5x+1}-8}$;

и) $y=\sqrt{\log_{1/6}(x^2-3x+2)-1}$; к) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{5}$.

3. Найдите множества изменения функций:

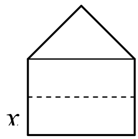
а) $y=x^2-10x+17$; б) $y=\sqrt{12+4x-x^2}$;

в) $y=\log_2(x^2-6x+13)$; г) $y=4\sin 2x$;

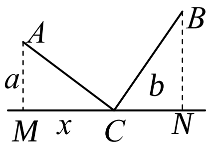
д) $y=-5\sin x+2$; е) $y=3\cdot 2^{4x+1}-7$.

4. Выразите площадь и периметр прямоугольного треугольника, катеты которого равен 4, а гипотенуза равна x, как функцию от x. Найдите область определения этой функции.

5. В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник с основанием x. Выразите площадь этого прямоугольника как функцию от x. Найдите область определения этой функции.
6. В круг радиуса R вписан прямоугольник, основание которого равно x. Выразите площадь этого прямоугольника как функцию от x.
7. Выразите объем V кругового цилиндра, полная поверхность которого равна S, как функцию от его высоты H.
8. Окно имеет форму прямоугольника с основанием a и высотой h с расположенным над ним равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой a. Обозначим через $S(x)$ – площадь части окна, лежащей ниже прямой параллельной основанию окна на расстоянии x от его основания. Найдите выражение для $S(x)$.



9. Два пункта A и B находятся в стороне от железной дороги. Строится шоссе от пункта A до станции C на железной дороге и от станции C до пункта B. Выразите длину шоссе как функцию расстояния от M до C.



10. Будут ли равными функции, заданные уравнениями:

а) $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$ и $y=x-6$; б) $y=\sqrt[3]{x^3}$ и $y=x$;

в) $y=\sqrt{x^{10}}$ и $y=x^5$; г) $y=\sqrt{x^{10}}$ и $y=|x^5|$.

11. Докажите, что функции $y=\dfrac{3x+2}{2x+3}$ и $y=\dfrac{2-3x}{2x-3}$ являются взаимно обратными.

12. Найдите функцию, обратную функции:

а) $y=\dfrac{4x+1}{x-4}$; б) $y=\dfrac{x+7}{x-2}$; в) $y=x^3+1$.

13. Какие из данных функций будут четными, какие нечетными:

а) $y=x^4-3x^2-7$; б) $y=2x^5+7x^3-8x$;

в) $y=x\cdot\sin x+2\cos x$; г) $y=\sqrt{x^2+9}+2|x|$;

д) $y=(x^2+x)\cdot\cos x$; е) $y=\lg\dfrac{x-1}{x+1}$.

14. Найдите значение функции $h(x)$ в точке a, если известно, что функция $f(x)$ – четная, а функция $g(x)$ – нечетная и

а) $h(x)=\dfrac{3f(x)-5f(-x)}{2g(x)+4g(-x)}$, если $f(a)=3, g(a)=-1$;

б) $h(x)=\dfrac{2f(x)+3g(-x)+3f(-x)}{f(x)+g(-x)}$, если $f(a)=-1, g(a)=3$.

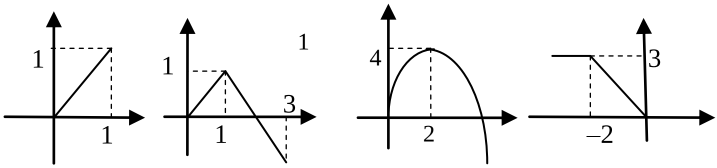
15. Пусть функция $f(x)$ – нечетная и при всех неотрицательных значениях x совпадает с функцией $g(x)=x(x-3)(3x+2)$. Найдите значение функции $h(x)=\dfrac{2f(x)+3g(x)}{f(x)-g(x)}$ в точке $a=-2$.

16. Пусть функция $f(x)$ – нечетная и при всех неотрицательных значениях x совпадает с функцией $g(x)=x(x+1)(2x-7)(3x-1)$. Найдите число корней уравнения $f(x)=0$.

17. Пусть функция $f(x)$ – четная и при всех неотрицательных значениях x совпадает с функцией $g(x)=x(x-5)^2(3x+2)(4x-9)$. Найдите число корней уравнения $f(x)=0$.

18. Пусть функция $f(x)$ – четная и при всех неотрицательных значениях x совпадает с функцией $g(x)=(x-4)(x+3)(2x+1)$. Найдите значение функции $h(x)=\dfrac{f(x)+2g(x)}{f(x)+g(x)+16}$ в точке $a=-1$.

19. На рисунке показана часть графика функции $y=f(x)$.



Постройте график функции $y=f(x)$, если известно, что а) она четная; б) она нечетная.

20. Докажите, что функция $y=\dfrac{2x+7}{7x+2}$ является монотонной на промежутке $x\in[0;+\infty)$.

21. Докажите, что функция $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$ является монотонной на промежутке $x\in[1;+\infty)$.

22. Докажите, что функция $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-2x+4}$ является ограниченной на всей числовой прямой.

23. Докажите, что функция $y=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2-5x+18}$ является ограниченной на всей числовой прямой.

24. Докажите, что функция $y=\log_2(x^2-6x+17)$ является ограниченной снизу на всей числовой прямой.

25. Определите, какие функции будут периодическими и найдите их периоды:

а) $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=5\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$;

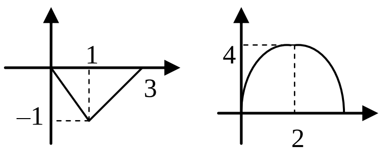
в) $y=2\,\mathrm{tg}\left(3x-\frac{5\pi}{12}\right)$; г) $y=\mathrm{ctg}\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

26. Пусть функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T=4$. Известно, что $f(3)=5$. Найдите $f(11)$ и $3f(15)-f(-5)$.

27. Пусть функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T=5$ и на промежутке $[-1;4)$ совпадает с функцией $g(x)=x^2-2x-1$. Найдите значение функции $f(x)$ в точке $a=27$.

28. Пусть функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T=6$ и на промежутке $(-1;5]$ совпадает с функцией $g(x)=x^2+x-7$.

Найдите $3f(15)-2f(6)$.



29. На рисунке показана часть графика периодической функции $y=f(x)$ на отрезке, равном её периоду. Постройте график этой функции.

30. Представьте сложную функцию в виде цепочки элементарных функций:

а) $y=\sqrt{x^5-7x^4-x+1}$; б) $y=\sqrt[3]{2^{x^2-x+5}+17}$;

в) $y=\sin(\sqrt{x^4-4x+9})$;   г) $y=\sqrt{\cos\sqrt[5]{x^5+4x+2}}$;

д) $y=\lg(1+2^{\sqrt{2x+1}})$;   е) $y=\sin^6(\log_3(x^2+4))$.

31. Составьте суперпозиции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:

а) $f(x)=x^3+1,\ g(x)=x^2-1$; б) $f(x)=\cos 2x,\ g(x)=x^2$;

в) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+3x+15$;

г) $f(x)=x^{-2},\ g(x)=2x^2-x+31$.

32. Найдите линейную функцию, которая при $x=4$ принимает значение $y=7$, а при $x=1$ значение $y=-5$.

33. Найдите значения коэффициентов k и b линейной функции $y=kx+b$, если известно, что ее график параллелен графику функции $y=-2x+3$ и проходит через точку $(1,-4)$.

34. Найдите значения коэффициентов k и b линейной функции $y=kx+b$, если известно, что ее график перпендикулярен графику функции $y=4x-3$ и проходит через точку $(-1, 5)$.

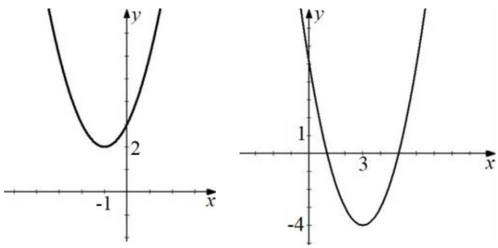
35. а) Прямая $y=\dfrac{5}{18}x+\dfrac{1}{3}$ проходит через две точки с целыми координатами: $A(6; 2)$ и $B(-12; -3)$. Есть ли на этой прямой еще точки с целыми координатами?

б) Известно, что прямая $y=kx+b$ проходит через две точки с целыми координатами. Есть ли на этой прямой еще точки с целыми координатами?

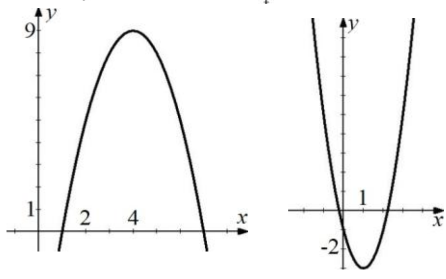
в) Приведите пример линейной функции, график которой не проходит ни через одну точку с целыми координатами.

г) Приведите пример линейной функции, график которой не проходит только через одну точку с целыми координатами.

36. Приведите примеры функций, отображающих отрезок [2; 3] на отрезок [4; 1]?
37. Какая функция отображает отрезок [1; 2] на отрезок [1; 8] и отрезок [1; 3] на отрезок [1; 27]?
38. Вершина параболы $y = x^2 + bx + c$ находится в точке $A(3; -1)$. Найдите b и c.
39. Точки $A(3; -4)$ и $B(-1; 4)$ принадлежат графику квадратичной функции $y = x^2 + bx + c$. Найдите b и c.
40. Точки $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$ и $C(4; -9)$ принадлежат графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Найдите a, b и c.
41. График какой функции получится, если параболу $y = x^2$ сначала сдвинуть по оси OX на 3 единицы вправо, а затем растянуть от оси OY в два раза? График какой функции получится, если эти преобразования выполнить в обратном порядке?
42. На сколько нужно сдвинуть график функции $y = x^2 - 3x + 2$ вдоль осей Ox и Oy, чтобы получить график функции $y = x^2 + x + 1$?



43. На рисунке изображены графики квадратичных функций $y = x^2 + bx + c$. Найдите b и c.
44. На рисунке изображены графики квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$. Найдите a, b и c.



45. Точки $A(1; -1)$ и $B(-3; -7)$ принадлежат графику гиперболы $y = \frac{k}{x} + b$. Найдите k и b.

46. Постройте графики функций:

а) $y = (x+2)^2 - 3$; б) $y = (x-2)^2 - 5$;

в) $y = -(x-4)^2 + 7$; г) $y = 0,5(x-2)^2 + 1$.

47. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 7x + 2$; б) $y = 2x^2 - 10x - 1,5$;

в) $y = -x^2 + 4x + 6$; г) $y = 0,5x^2 - 3x - 3$;

д) $y = -x^2 - 6x + 1$; е) $y = -0,5x^2 + 2x + 5$.

48. Постройте графики функций:

а) $y = 2\sqrt{3x-1}$; б) $y = \sqrt{4x+10} - 3$;

в) $y = 2 + \sqrt{3-x}$; г) $y = 2\sqrt{x+5} - 3$;

д) $y = 2 - \sqrt{x+4}$; е) $y = 3 - \sqrt{2x+9}$.

49. Постройте графики функций:

а) $y = 2\sqrt{3x-1}$; б) $y = \sqrt{4x+10} - 3$;

в) $y = 2 + \sqrt{3-x}$; г) $y = 2\sqrt{x+5} - 3$;

д) $y = 2 - \sqrt{x+4}$; е) $y = 3 - \sqrt{2x+9}$.

50. Постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{4x-1}{x+3}$; б) $y = \dfrac{2x+5}{x-2}$; в) $y = \dfrac{3x+5}{x-4}$;

г) $y = \dfrac{5-4x}{x-4}$; д) $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$; е) $y = \dfrac{7-2x}{x+2}$.

26. Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$; б) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

51. в) $y=\dfrac{7-2x}{x+2}$; г) $y=\dfrac{6-x-x^2}{x^2+x-2}$.

52. Постройте графики функций:

а) $y=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ 0{,}5x-1, & x\geq 0\end{cases}$; б) $y=\begin{cases}2x-5, & x<2\\ 0{,}5x-2, & x\geq 2\end{cases}$;

в) $y=\begin{cases}4-x, & x<-1\\ 4+x, & x>-1\end{cases}$; г) $y=\begin{cases}x+3, & x<1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$;

д) $y=\begin{cases}2x-4, & x<1\\ 4-x, & x\geq 1\end{cases}$; е) $y=\begin{cases}|x|, & x<-1\\ x+2, & x>-1\end{cases}$.

53. Постройте графики функций:

а) $y=\begin{cases}x-4, & x<0\\ x^2-4, & x\geq 0\end{cases}$; б) $y=\begin{cases}x+3, & x<-1\\ x^2-2x-1, & x\geq -1\end{cases}$;

в) $y=\begin{cases}1-x, & x<2\\ x^2-4x+3, & x\geq 2\end{cases}$; г) $y=\begin{cases}x^2+5x+6, & x<-1\\ 1-x, & x\geq -1\end{cases}$;

д) $y=\begin{cases}1-x^2, & x<1\\ x^2-4x+3, & x\geq 1\end{cases}$; е) $y=\begin{cases}x^2+6x+4, & x<-1\\ x^2-2x-1, & x>-1\end{cases}$.

54. Постройте графики функций:

а) $y=0{,}5|x+4|-3$; б) $y=5-|x-3|$;

в) $y=5-2|x+1|$; г) $y=3|x-1|-4$;

д) $y=-0{,}5|x+2|+1$; е) $y=|2-3x|-4$.

55. Постройте графики функций:

а) $y=|x^2-7x+10|$; б) $y=|x^2-x-6|$;

в) $y=|x^2-7x+12|$; г) $y=|x^2-3x-10|$;

д) $y=|x^2-2x-8|$; е) $y=|x^2+3x-4|$.

56. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 2|x| - 4$; б) $y = x^2 - 4|x| - 1$;

в) $y = x^2 + 2|x| - 3$; г) $y = x^2 - 6|x| + 1$;

д) $y = x^2 - 8|x| + 4$; е) $y = x^2 - 6|x| + 2$.

57. Постройте графики функций:

а) $y = |x^2 - 7|x| + 6|$; б) $y = |x^2 - 3|x| - 4|$;

в) $y = |x^2 - 6|x| + 5|$; г) $y = |x^2 + 2|x| - 8|$;

д) $y = |x^2 - 6|x| + 8|$; е) $y = |x^2 - |x| - 6|$.

58. Постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{6}{|x|} - 1$; б) $y = \dfrac{-4}{|x|} + 3$; в) $y = \dfrac{2}{|x| - 3} + 1$.

59. Постройте графики функций:

а) $y = 3 \cdot 2^x - 1$; б) $y = 0{,}5^{2x+3} - 6$;

в) $y = 2^{0{,}5x} - 4$; г) $y = \log_2(x+3) - 1$;

д) $y = -\log_{0{,}5}(x+5)$; е) $y = \log_3(2x-1) + 4$.

60. Постройте графики функций:

а) $y = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$; б) $y = \begin{cases} -0{,}5x + 2, & x < 2 \\ \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$;

в) $y = \begin{cases} x + 7, & x < -3 \\ x^2 - 5, & -3 \leq x \leq 2 \\ 1 - x, & x > 2 \end{cases}$; г) $y = \begin{cases} 0{,}5^x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 4 \\ \log_2 x, & x > 4 \end{cases}$.

61. Постройте графики функций:

а) $y = 2^{|x|}$; б) $y = 2^{|x-1|} - 4$; в) $y = 2^{|x|-1} - 3$;

г) $y = |2^{x+3} - 6|$; д) $y = |2^{|x|} - 4|$.

62. Постройте графики функций:

а) $y=|\log_2 x|$; б) $y=|\log_{0,5} x|$; в) $y=\log_2|x|$;

г) $y=1+\log_2|x-3|$; д) $y=|\log_2(x+1)|-2$;

е) $y=|\log_2(x+1)|-2$; ж) $y=1+\log_2|x-3|$.

63. Постройте графики функций:

а) $y=3\cos\dfrac{x}{3}$; б) $y=-\sin 2x-1$;

д) $y=3\sin\dfrac{x}{2}-2$; е) $y=2\cos 3x+3$;

ж) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$; з) $y=2\sin^2 x+1$.

64. Постройте графики функций:

а) $y=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y=-\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

в) $y=2\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$; г) $y=3\cos\left(3x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

д) $y=4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$; е) $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

ж) $y=1{,}5\cos\left(4x+\dfrac{5\pi}{3}\right)$; з) $y=4\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

65. Постройте графики функций:

а) $y=\sin|x|$; б) $y=|\sin x|$; в) $y=|\operatorname{tg} x|$;

г) $y=2|\cos x|-1$; д) $y=4\sin|x|-2$.

66. Постройте графики функций:

а) $y=|x-4|+|x+4|$; б) $y=|x-3|-|x+3|$;

в) $y=2|x-4|+|x-1|$; г) $y=|x+1|-2|x-2|$;

д) $y = 2|x+2| - |x-3| - 4$; е) $y = |x+2| - 2|x-4| + 1$.

67. Постройте графики функций:

а) $y = \big||x+2| - 5\big|$; б) $y = \big|2|x-3| - |x+1|\big|$;

в) $y = \big||x-4| - |x+4|\big|$; г) $y = \Big|\big||x-1| - 2\big| - 2\Big|$.

68. Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{|x|}$; б) $y = 2^{\log_2 x}$;

в) $y = x^{\log_x 2}$; г) $y = 2^{\log_2 |x|}$;

д) $y = \arcsin(\sin x)$; е) $y = \arccos(\cos x)$.

69. Постройте графики функций[3]:

а) $y = \log_{1/2}(x-1) + \log_2(x^2 - 2x + 1)$;

б) $y = \log_{1/2}(x-1) + \log_2 \sqrt{4x^2 - 8x + 4}$;

в) $y = \log_{1/2} \dfrac{|x-1|}{4} + \log_2(x^2 - 2x + 1)$.

70. Постройте графики функций:

а) $y = \sin x + |\sin x|$; б) $y = 2|\sin x| \cdot \cos x$;

в) $y = \dfrac{|\sin x|}{\cos x}$; г) $y = |\sin x| + 2\sin x$.

71. Постройте графики функций:

а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

Указание. Примените формулу вспомогательного аргумента $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi)$, где угол φ определяется из соотношений $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

[3] При построении графиков учитывайте свойства входящих в формулу функций, например, область определения логарифма или множество значений арксинуса.

§ 13. Историческая справка

Аполлоний Пергский (262 до н.э.-190 до н.э.) – древнегреческий математик, один из трёх великих геометров античности, живших в III веке до н.э. Аполлоний прославился в первую очередь монографией «Конические сечения», в которой дал общую теорию эллипса, параболы и гиперболы. Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых. Он ввёл и другие математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: асимптота, абсцисса, ордината, аппликата.

Архимед (287 до н.э.-212 до н.э.) – древнегреческий математик, физик и инженер из Сиракуз. Сделал множество открытий в геометрии. Заложил основы механики, гидростатики. Работы Архимеда относились почти ко всем областям математики того времени: ему принадлежат исследования по геометрии, арифметике, алгебре. Он развил учение о конических сечениях, дал геометрический способ решения кубических уравнений вида $x^2(a \pm x) = b$, корни которых он находил с помощью пересечения параболы и гиперболы. Архимед провёл и полное исследование этих уравнений. Однако главные математические достижения Архимеда касаются проблем, которые сейчас относят к области математического анализа. Архимед нашёл общий метод вычисления площадей или объёмов, использовав бесконечно малые величины. Идеи Архимеда легли впоследствии в основу интегрального исчисления. Огромное значение для развития математики имело вычисленное Архимедом отношение длины окружности к диаметру. В работе «Об измерении круга» Архимед дал своё знаменитое приближение для числа $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Свое имя в историю математики вписали три поколения семьи Бернулли, но самыми известными из них стали два брата – Якоб и Иоганн, а также сын Иоганна – Даниил.

Якоб Бернулли (*Jakob Bernoulli*) (1655-1705) – швейцарский математик. Внес существенный вклад в разработку основ дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, теории вероятностей и вариационного исчисления. Решил проблему Лейбница о форме кривой, по которой точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные отрезки (Лейбниц и Гюйгенс уже установили, что это полукубическая парабола, но лишь Якоб Бернулли доказал это средствами нового анализа, выведя и проинтегрировав дифференциальное уравнение). Якоб исследовал также циклоиду, цепную линию, и особенно логарифмическую спираль, его именем названа лемниската Бернулли. Якоб Бернулли ввел значительную часть современных понятий теории вероятностей, доказал закон больших чисел (названный так позднее Пуассоном), составил таблицу фигурных чисел, указал их свойства и на основании отмеченных свойств нашел формулы для сумм степеней натуральных чисел. Имя Якоба носит важное в комбинаторике распределение Бернулли. В 1690 году Якоб Бернулли впервые опубликовал исследование сложного процента, в котором обосновал существование предельной выгоды, которую оценил как большую 2,5 но меньшую 3. Его главный труд «Искусство предположений» (Ars conjectandi), посвященный теории вероятностей, был опубликован лишь в 1713.

Иоганн Бернулли (*Johann Bernoulli*) (1667-1748) – швейцарский математик, младший брат Якоба Бернулли. Математику изучал под руководством брата. Иоганн Бернулли внес большой вклад в разработку дифференциального и интегрального исчислений (совместно с Лейбницем), теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, геометрии и механики. Он вывел правило раскрытия неопределенности (носящее имя Лопиталя), разработал методы интегрирования рациональных дробей, вычисления площадей плоских фигур, дал определение понятия функции как аналитического выражения, составленного из переменных и постоянных величин. Иоганну принадлежит первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений. Задача о брахистохроне (кривой, по которой материальная точка быстрее всего скатится из одной заданной точки в другую), предложенная Иоганном, дала толчок развитию вариационного исчисления. Он поставил и другую классическую задачу вариационного исчисления о геодезических линиях, нашел их характерное геометрическое свойство, а позднее вывел их дифференциальное уравнение. Одним из учеников Иоганна был Леонард Эйлер.

В честь Якоба и Иоганна Бернулли назван кратер на Луне.

Даниил Бернулли (*Daniel Bernoulli*)(1700-1782) – швейцарский математик и физик, сын Иоганна Бернулли. Даниил опубликовал ряд исследований по теории вероятностей, теории рядов, численным методам решения алгебраических уравнений и дифференциальным уравнениям. Он первым применил математический анализ к задачам теории вероятностей и математической статистики для решения ряда практически важных задач. В работе «Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей» сформулировал основы механики жидкости, ввел понятия работы и коэффициента полезного действия, сформулировал закон сохранения энергии, рассмотрел уравнение стационарного движения идеальной жидкости (уравнение Бернулли), изложил идеи кинетической теории газов. Даниил ввёл понятие гармонического колебания, сформулировал принцип суперпозиции колебаний. Даниила Бернулли считают, наряду с Д’Аламбером и Эйлером, основателем математической физики.

Бернард Больцано (*Bernard Bolzano*) (1781-1842) – чешский математик, философ. Больцано первым выдвинул идею арифметической теории действительного числа, дал первый пример непрерывной функции, не имеющей производной, доказал возможность сколь угодно точного приближения многочленами произвольной функции, непрерывной на отрезке. Он явился предшественником Кантора в исследовании бесконечных множеств.

Христиан Гюйгенс ван Зейлихем (*Christiaan Huygens*) (1629–1695) – нидерландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель. Один из основоположников теоретической механики и теории вероятностей. Внёс значительный вклад в оптику, молекулярную физику, астрономию, геометрию, часовое дело.

Рене Декарт (де’Карт, *Rene Descartes* 1596–1650) – французский математик, философ, механик и физик, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

В 1637 году вышел в свет главный философско-математический труд Декарта «Рассуждение о методе, позволяющем направлять свой разум и отыскивать истину в науках». В этой книге излагалась аналитическая геометрия, а в приложениях – многочисленные результаты в алгебре, геометрии, оптике (закон преломления света) и многое другое. Декарт переработал математическую символику Виета, с этого момента близкую к современной.

Символическую алгебру Декарт называл «Всеобщей математикой», и писал, что она должна объяснить «всё относящееся к порядку и мере».

Создание аналитической геометрии позволило перевести исследование геометрических свойств кривых и тел на алгебраический язык, то есть анализировать уравнение кривой в некоторой системе координат. Достоинства нового метода были исключительно велики, и Декарт продемонстрировал их в той же книге. В приложении «Геометрии» были даны методы решения алгебраических уравнений (в том числе геометрические и механические), классификация алгебраических кривых. Новый способ задания кривой – с помощью уравнения – был решающим шагом к понятию функции. Декарт формулирует «правило знаков» для определения числа положительных корней уравнения, хотя и не доказывает его.

Декарт исследовал алгебраические функции (многочлены), а также ряд «механических» (спирали, циклоида).

Декартом сформулировал (хотя и не доказал) основную теорему алгебры «число вещественных и комплексных корней многочлена равно его степени», хотя не рассматривал комплексные числа на равных правах с вещественными.

Физические исследования Декарта относятся главным образом к механике и оптике (законы распространения света, отражения и преломления, объяснение радуги.).

Георг Кантор (*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*) (1845-1918) немецкий математик. Кантор заложил основы современной математики. Кантор известен, как создатель теории множеств. Он ввел понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств, дал определения бесконечного и вполне упорядоченного множеств, доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных, определил понятия кардинальных и порядковых чисел и их арифметику.

Алекси Клод Клеро (*Alexis Claude Clairaut*) (1713–1765) – французский математик, механик и астроном. Клеро ввёл понятия криволинейного интеграла, полного дифференциала функции нескольких независимых переменных. На примере одного дифференциального уравнения 1-го порядка (уравнение Клеро) ввел понятие общего и особого решений дифференциального уравнения 1-го порядка. Клеро разработал теорию движения Луны, провел исследования фигуры Земли, доказав ряд фундаментальных для высшей геодезии теорем. Исследуя возмущения Солнца, Клеро пришел к выводу, что любую четную функцию можно разложить в ряд. Он первым предложил формулу тригонометрической интерполяции функций, нашёл способ приближённого решения «задачи трёх тел».

В честь учёного назван лунный кратер Clairaut.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (*Gottfried Wilhelm von Leibniz*) (1646-1716) – немецкий математик, физик, философ. Основной заслугой Лейбница в области математики является создание (вместе с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления. Лейбниц дал определение дифференциала и интеграла, вывел правила дифференцирования, поиска экстремумов и точек перегиба, показал взаимнообратный характер дифференцирования и интегрирования, вывел правила дифференцирования трансцендентных функций, положившие начало интегрированию рациональных дробей. Ему принадлежат термины «дифференциал», «дифференциальное исчисление», «дифференциальное уравнение», «функция», «переменная», «постоянная», «координаты», «абсцисса», «алгоритм».

Лейбниц сделал немало открытий и в других областях математики: в комбинаторике, в алгебре (начала теории определителей), в геометрии. В работе «Об искусстве комбинаторики» Он предвосхитил некоторые моменты современной математической логики, выдвинул идею о применении в логике математической символики и построении логических исчислений, поставил задачу логического обоснования математики.

Лейбниц сыграл важную роль в истории создания электронно-вычислительных машин: он предложил использовать для целей вычислительной математики бинарную систему счисления, писал о возможности машинного моделирования функций человеческого мозга.

В языкознании Лейбницу принадлежит историческая теория происхождения языков, их генеалогическая классификация. Им в основном создан немецкий философский и научный лексикон.

По просьбе Петра I Лейбниц разработал проекты развития образования и государственного управления в России и проект учреждения Петербургской академии наук.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) – русский математик, ректор Казанского университета. Основываясь на утверждении, что при определенных условиях прямые, которые кажутся нам параллельными, могут пересекаться, Лобачевский пришел к выводу о возможности создания новой, непротиворечивой геометрии. В качестве альтернативы аксиоме параллельности Евклида Лобачевский предлагает другую аксиому: на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходит более чем одна прямая, не пересекающая данную. Геометрия Лобачевского действует в пространстве близких к скорости света скоростей. Поскольку ее существование было невозможно представить в реальном мире, ученый назвал ее «воображаемой геометрией». Наиболее полно геометрия Лобачевского изложена в работе «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Разработанная Лобачевским новая геометрия не включает в себя евклидову геометрию, однако евклидова геометрия может быть из неё получена.

Лобачевский вошел в историю математики не только как гениальный геометр, но и как автор фундаментальных работ в области алгебры, теории бесконечных рядов и приближенного решения уравнений.

Исаак Ньютон (*Isaac Newton*) (1642-1727) – английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии». Одновременно с Лейбницем разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета и многие другие математические и физические теории. В своей книге Ньютон ясно определил базовые понятия механики, сформулировал три закона механики. С работами Ньютона связана новая эпоха в физике и математике. Изложение принципов анализа Ньютон опубликовал в работе «О квадратуре кривых» (1704). Ньютон считал основным и общим методом анализа функций разложение в ряд. Он использовал ряды для вычисления таблиц, решения уравнений (в том числе дифференциальных), исследования поведения функций. Ньютон сумел получить разложение для всех стандартных на тот момент функций. Большое внимание Ньютон уделял приближённому решению уравнений. Он не только достаточно полно разработал анализ, но и сделал попытку строго обосновать его принципы.

В письме к Пардизу Ньютон сформулировал «золотое правило науки»: «Лучшим и наиболее безопасным методом должно быть сначала прилежное исследование свойств вещей и установление этих свойств с помощью экспериментов, а затем постепенное продвижение к гипотезам, объясняющим эти свойства. Гипотезы могут быть полезны лишь при объяснении свойств вещей, но нет необходимости взваливать на них обязанности определять эти свойства вне пределов, выявленных экспериментом… ведь можно изобрести множество гипотез, объясняющих любые новые трудности».

Пьер Ферма (*Pierre de Fermat*)(1601-1665) – французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист. Самое знаменитое его утверждение «Великая теорема Ферма»: «Для любого натурального $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решения в натуральных числах». Ферма разработал методы отыскания максимумов и минимумов, правила дифференцирования и интегрирования степеней с дробными показателями, дал классификацию кривых в зависимости от порядка их уравнения. Независимо от Паскаля Ферма разработал основы теории вероятностей. Именно с переписки Ферма и Паскаля отсчитывает свою историю эта наука.

Оливер Хевисайд (*Oliver Heaviside*) (1850-1925) – английский инженер, математик и физик. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал понятие вектора и векторный анализ, создал операторный метод для решения линейных дифференциальных уравнений. Хевисайд ввёл функцию, названную его именем и используемую для моделирования электрического тока в цепи. Важным вкладом Хевисайда в математику стало создание операционного исчисления. Операционное исчисление получило широкое применение при решении целого ряда задач в различных областях физики: в теории теплопроводности и диффузии, при изучении электрических цепей и линий связи, в задачах распространения радиоволн.

Леонард Эйлер (*Leonhard Euler*) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук. С точки зрения математики, XVIII век – это век Эйлера. Эйлер оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук, он создал несколько новых математических дисциплин – теорию чисел, вариационное исчисление, теорию комплексных функций, дифференциальную геометрию. Эйлер внёс существенный вклад в теорию и методы приближенных вычислений. В его работах используются математическая символика, сохранившаяся до наших дней. Эйлер – автор более чем 850 работ (включая два десятка фундаментальных монографий). Почти полжизни Эйлер провёл в России и внёс существенный вклад в становление российской науки.

Литература

1. Абрамов А.М. Избранные вопросы математики. Факультативный курс. / А.М. Абрамов, Н.Я. Виленкин, Г.В. Дорофеев. – М.: Просвещение, 1980. – 193 с.
2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант. – М.: Наука, 1965. – 657 с.
3. Бохан К.А. Курс математического анализа, т.1. / К.А. Бохан, И.А. Егорова, К.В. Лащенов. – М.: Просвещение, 1972. – 511 с.
4. Гельфанд И.М. Функции и графики. (основные приемы) / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, Э.Э. Шноль – М.: МЦНМО, 2015. – 120 с.
5. Гусев В.А. Математика. Справочные материалы / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.
6. Зорич В.А. Математический анализ. ч. I. / В.А. Зорич – М.: МЦНМО, 2002. –664 с.
7. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
8. Колмогоров А.Н. Что такое функция? // Журнал «Квант». – М: Наука, 1970, №1, с. 27-36.
9. Колмогоров А.Н. Что такое график функции? // Журнал «Квант». – М: Наука, 1970, №2, с. 3-13.
10. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор. – М.: Изд-во Просвещение, 2008. – 416 с.

11. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Астрель, АСТ, 2001. – 656 с.
12. Никольский С.М. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений. / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2001. – 381 с.
13. Никольский С.М. Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений. / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2001. – 448 с.
14. Потапов М.К., Алгебра, тригонометрия и элементарные функции / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. – М.: Высшая школа, 2001. – 735 с.
15. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И. Алгебра и анализ элементарных функций. / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. – М.: Наука, 1981. – 560 с.
16. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. / Д.Я. Стройк. – М.: Изд-во «Наука», 1990. – 256 с.
17. Туманов С.И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования. / С.И. Туманов. – М.: Просвещение, 1970. – 864 с.
18. Факультативный курс по математике. Учебное пособие для 7-9 классов средней школы. / И.Л. Никольская. – М.: Изд-во «Просвещение», 1991. – 383 с.
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.1. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – 616 с.

20. Шувалова Э.З. Повторим математику / Э.З. Шувалова, Б.Г. Агафонов, Г.И. Богатырев. – М.: Высшая школа, 1974. – 519 с.
21. Энциклопедический словарь юного математика / Составитель Савин А. П. – М.: Педагогика, 1989. – 352 с.
22. Студопедия: [Электронный ресурс]. URL: http://studopedia.ru/
23. Малкова А.Г. Подготовка к ЕГЭ по математике: [Электронный ресурс]. URL: http://ege-study.ru/
24. Одинцов О.Г. Методы решения задач по высшей математике: [Электронный ресурс]. URL: http://1cov-edu.ru/

Оглавление