Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра экономики

И. В. Подопригора

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

**Методические указания по выполнению
лабораторных работ**

2016

Корректор: Осипова Е. А.

Подопригора И. В.
Математические модели в экономике: методические указания по выполнению лабораторных работ. — Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2016. — 47 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данных методических указаниях рассмотрены основные типы задач линейного программирования и оценки эффективности управления запасами, даны рекомендации по построению их математических моделей и поиску оптимальных решений средствами табличного редактора Microsoft Excel.

В целях более эффективного усвоения учебного материала пособие состоит из лабораторных работ, разбитых по типам задач.

В рамках лабораторных работ представлены подробные методики и конкретные примеры решения одноиндексных и двухиндексных задач линейного программирования с различными видами ограничений, а также примеры поиска оптимальных характеристик управления запасами.

Каждая лабораторная работа включает в себя 20 вариантов учебных задач определенного типа, а также список примерных вопросов для защиты работы, охватывающих как теоретические положения, так и конкретные варианты заданий.

Выбранный способ изложения учебного материала позволяет использовать данное пособие как в учебных целях, так и для решения практических задач с использованием Microsoft Excel.

Выбор варианта лабораторных работ

Выбор варианта лабораторных работ осуществляется по общим правилам с использованием следующей формулы:

$$V = (N \times K) \text{ div } 100,$$

где V — искомый номер варианта,

N — общее количество вариантов,

div — целочисленное деление,

при $V = 0$ выбирается максимальный вариант,

K — код варианта.

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MICROSOFT EXCEL

1.1 Цель работы

Приобретение навыков решения задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel.

1.2 Инструкция по использованию Microsoft Excel для решения задач линейного программирования [5]

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. Ввести условие задачи:

a) ***создать экранную форму для ввода условия задачи:***

- переменных,
- целевой функции (ЦФ),
- ограничений,
- граничных условий;

b) ***ввести исходные данные в экранную форму***:

- коэффициенты ЦФ,
- коэффициенты при переменных в ограничениях,
- правые части ограничений;

c) ***ввести зависимости из математической модели в экранную форму***:

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) ***задать ЦФ*** (в окне «**Поиск решения**»):

- целевую ячейку,

- направление оптимизации ЦФ;

e) ***ввести ограничения и граничные условия*** (в окне **«Поиск решения»**):

- ячейки со значениями переменных,
- граничные условия для допустимых значений переменных,
- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2. Решить задачу:

a) ***установить параметры решения задачи*** (в окне **«Поиск решения»**);

b) ***запустить задачу на решение*** (в окне **«Поиск решения»**);

c) ***выбрать формат вывода решения*** (в окне **«Результаты поиска решения»**).

1.3 Одноиндексные задачи линейного программирования

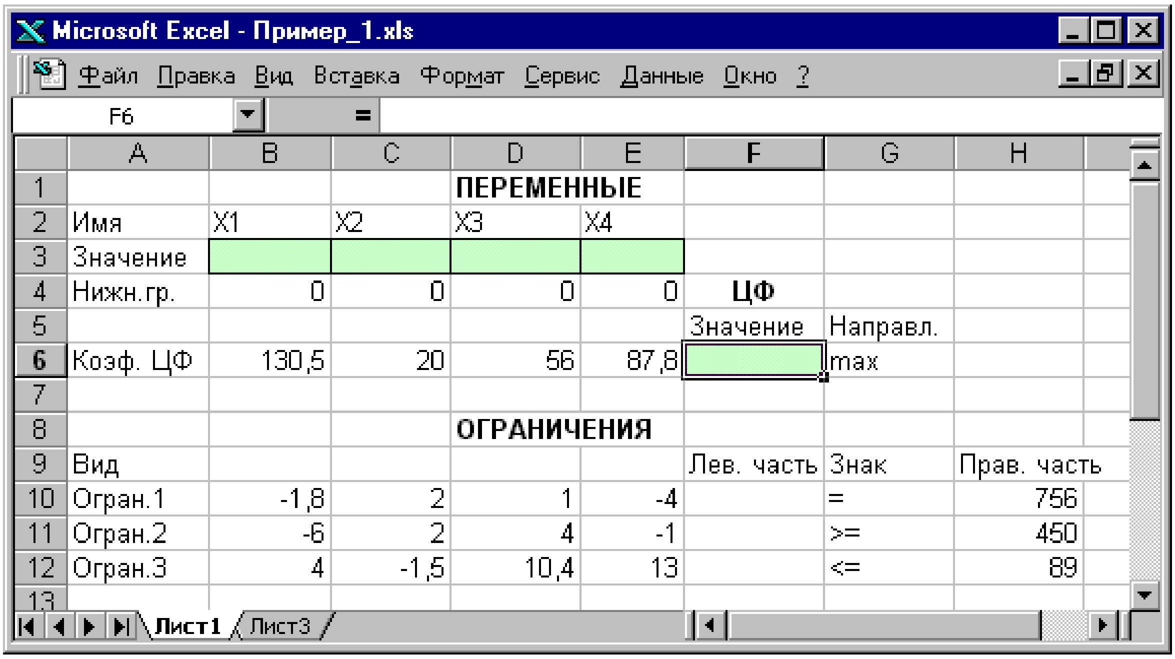
Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$L(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \rightarrow \max;$$
$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи.

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рисунке 1.1.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89
13								

Рис. 1.1 — Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рисунке 1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки **B3** (x_1), **C3** (x_2), **D3** (x_3), **E3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ($c_1 = 130{,}5$), **C6** ($c_2 = 20$), **D6** ($c_3 = 56$), **E6** ($c_4 = 87{,}8$), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ($b_1 = 756$), **H11** ($b_2 = 450$), **H12** ($b_3 = 89$) и т. д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести **формулу,** по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4. \tag{1.2}$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис. 1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как **сумму произведений** каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3. \tag{1.3}$$

Чтобы задать формулу (1.3), необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу **«Enter»**

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6), (1.4)

где символ **$** перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ **:** означает, что в формуле будут использованы **все** ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6 и E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис. 1.2).

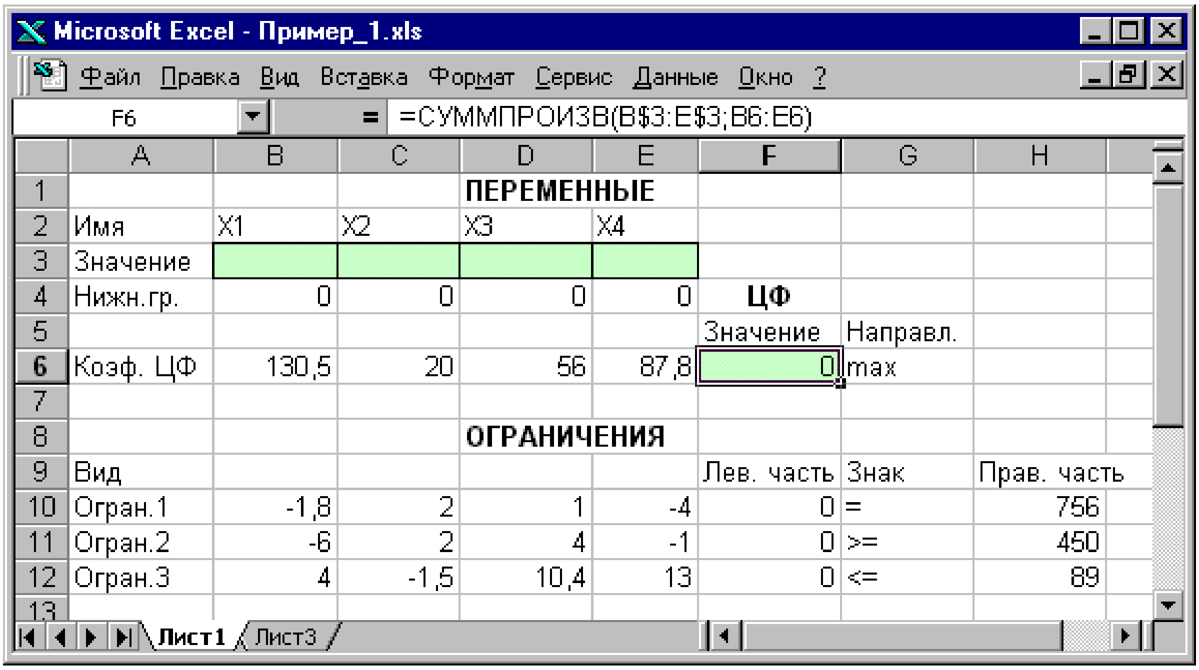


Рис. 1.2 — Экранная форма задачи (1.4) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима **«Вставка функций»,** который можно вызвать из меню **«Вставка»** или при нажатии кнопки « f_x » на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле **F6**;
- нажав кнопку « f_x », вызовите окно **«Мастер функций — шаг 1 из 2»**;
- выберите в окне **«Категория»** категорию **«Математические»**;
- в окне **«Функция»** выберите функцию **СУММПРОИЗВ**;
- в появившемся окне **«СУММПРОИЗВ»** в строку **«Массив 1»** введите выражение **B$3:E$3**, а в строку **«Массив 2»** — выражение **B6:E6** (рис. 1.3);
- после ввода ячеек в строки **«Массив 1»** и **«Массив 2»** в окне **«СУММПРОИЗВ»** появятся числовые значения введенных массивов (см. рис. 1.3), а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

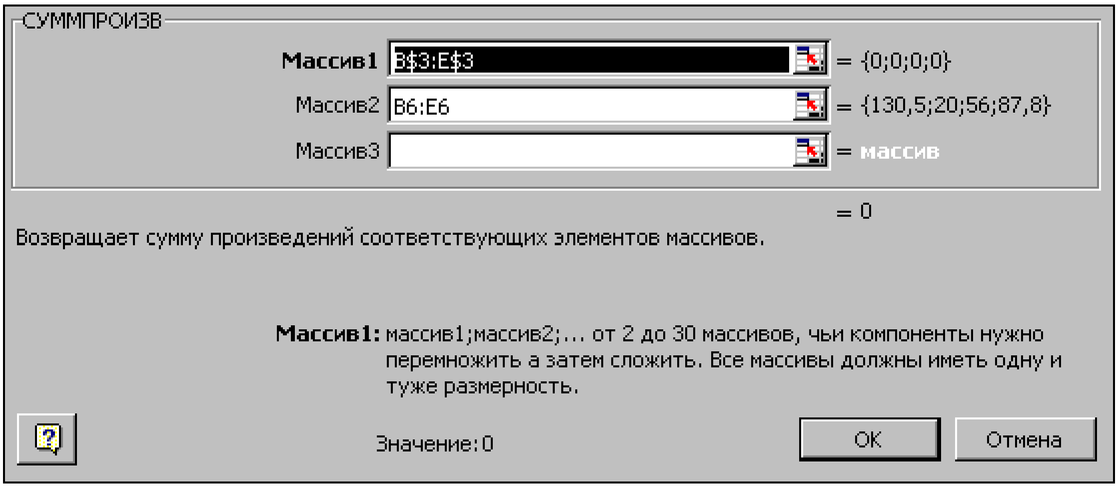


Рис. 1.3 — Ввод формулы для расчета ЦФ

в окно **«Мастер функций»**

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10** — 1-е ограничение**; B11, C11, D11, E11** — 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12** — 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 — Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1{,}8x_1+2x_2+x_3-4x_4$ или $B10\cdot B3+C10\cdot C3+D10\cdot D3+E10\cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)**
$-6x_1+2x_2+4x_3-x_4$ или $B11\cdot B3+C11\cdot C3+D11\cdot D3+E11\cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)**
$4x_1-1{,}5x_2+10{,}4x_3+13x_4$ или $B12\cdot B3+C12\cdot C3+D12\cdot D3+E12\cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)**

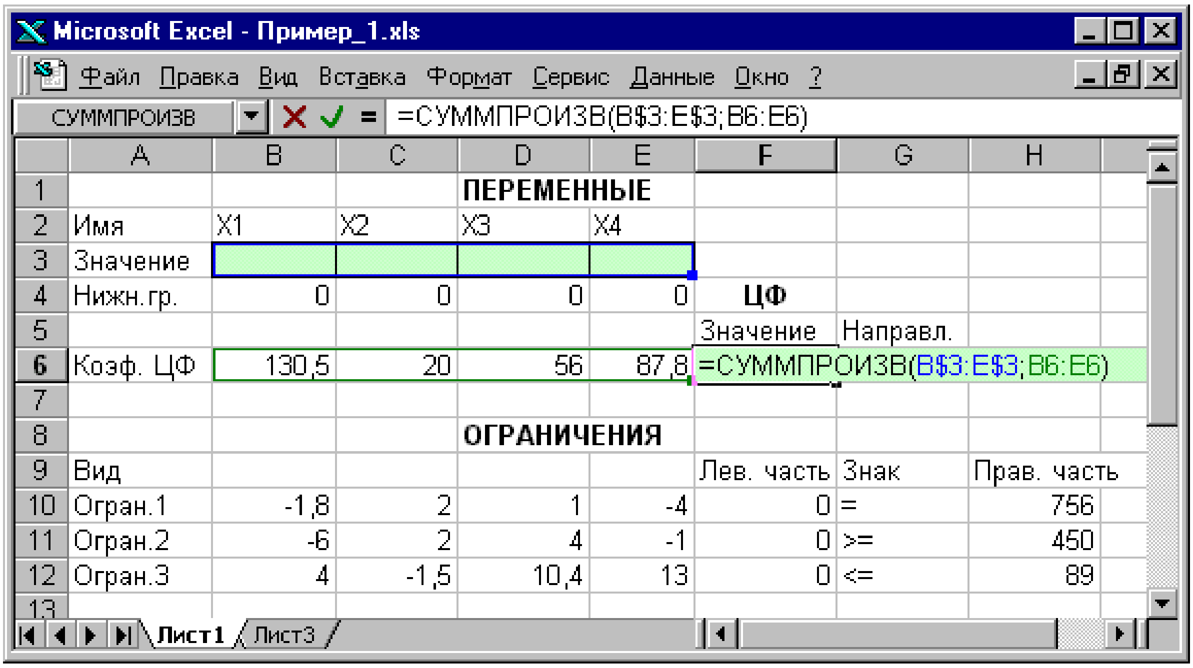
Как видно из таблицы 1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и скопировать в буфер содержимое ячейки **F6**;

- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в **F10, F11** и **F12,** и вставлять в эти поля содержимое буфера (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис. 1.2).

Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 1.4 и 1.5).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)		
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89

Рис. 1.4 — Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку F6

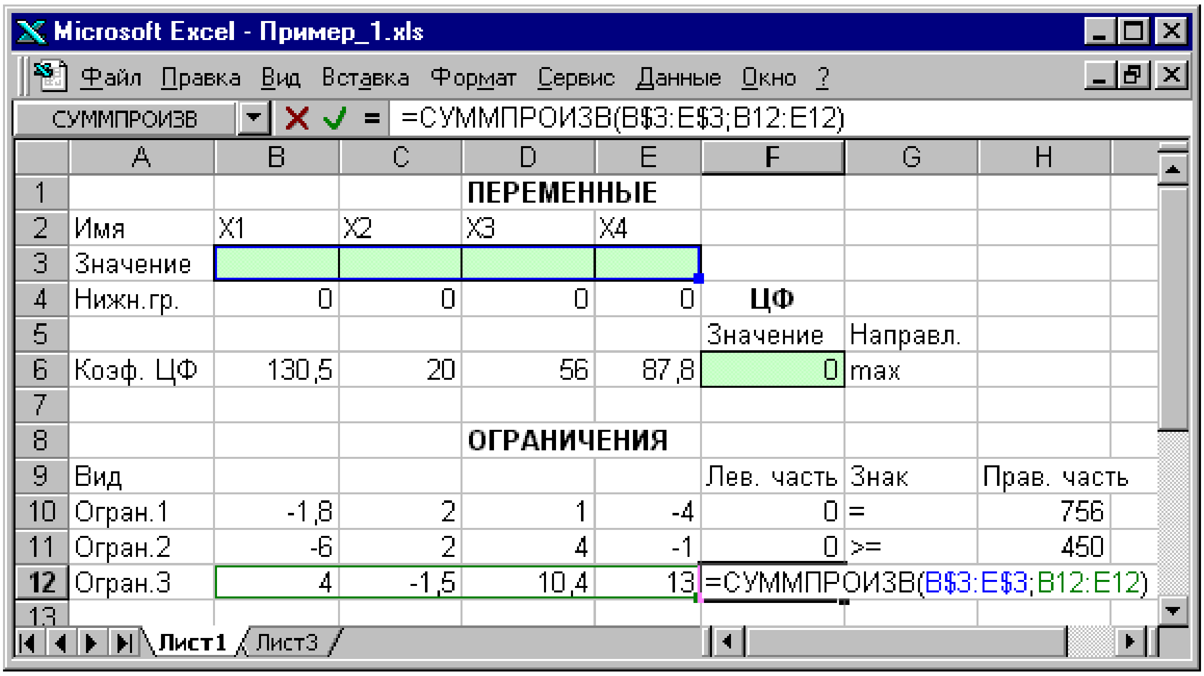


Рис. 1.5 — Проверка правильности введения формулы в ячейку **F12** для левой части ограничения 3

Задание ЦФ

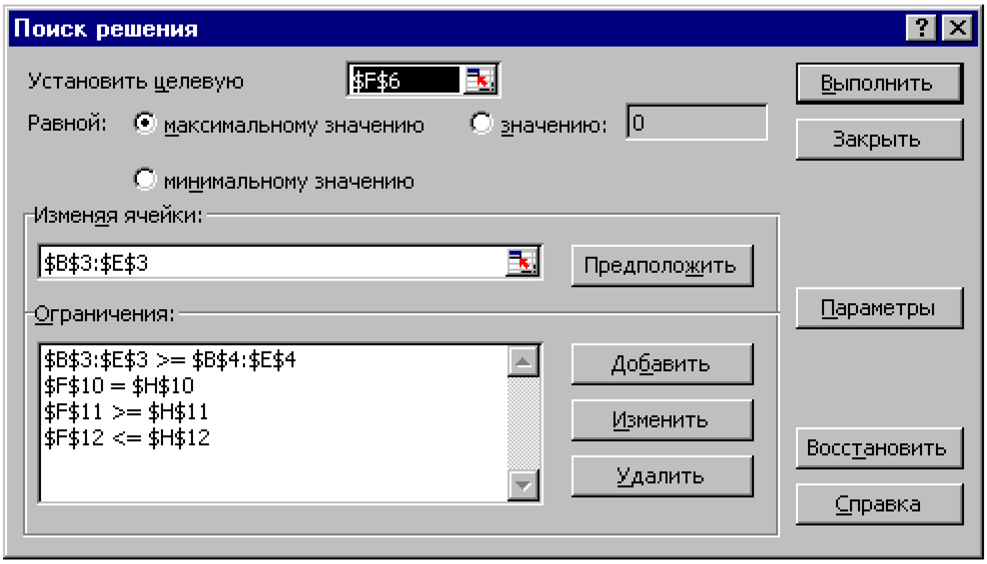


Рис. 1.6 — Окно **«Поиск решения»** задачи (1.1)

Дальнейшие действия производятся в окне **«Поиск решения»**, которое вызывается из меню **«Сервис»** (рис. 1.6):

- поставьте курсор в поле **«Установить целевую ячейку»**;
- введите адрес целевой ячейки **$F$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;
- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке **«максимальному значению»**.

Ввод ограничений и граничных условий

Задание ячеек переменных

В окно **«Поиск решения»** в поле **«Изменяя ячейки»** впишите адреса **$B$3:$E$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле **«Изменяя ячейки»** и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис. 1.1).

- Нажмите кнопку **«Добавить»**, после чего появится окно **«Добавление ограничения»** (рис. 1.7).
- В поле **«Ссылка на ячейку»** введите адреса ячеек переменных **$B$3:$E$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите $\geq$.
- В поле **«Ограничение»** введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **$B$4:$E$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

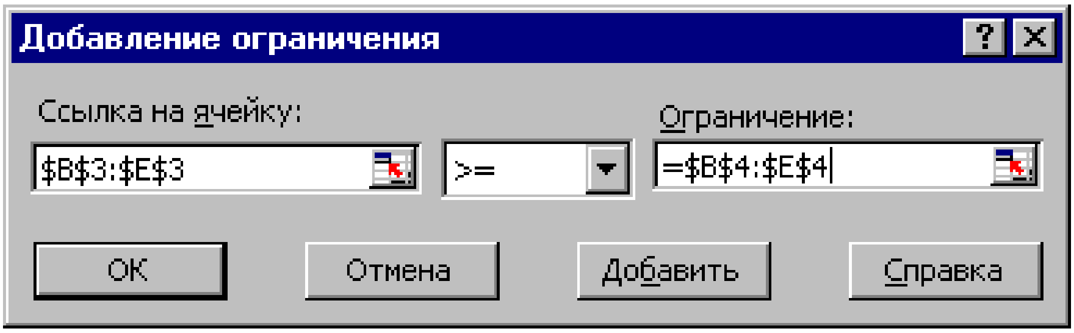


Рис. 1.7 — Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

Задание знаков ограничений ≤, ≥, =

- Нажмите кнопку **«Добавить»** в окне **«Добавление ограничения»**.
- В поле **«Ссылка на ячейку»** введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **$F$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1.1) выберите в поле знака необходимый знак, например '='.
- В поле **«Ограничение»** введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **$H$10**.
- Аналогично введите ограничения: **$F$11>=$H$11, $F$12<=$H$12**.
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **OK**.

Окно **«Поиск решения»** после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рисунке 1.6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки **«Изменить»** или **«Удалить»** (см. рис. 1.6).

Решение задачи

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне **«Поиск решения».** Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку **«Параметры»** и заполнить некоторые поля окна **«Параметры поиска решения»** (рис. 1.8).

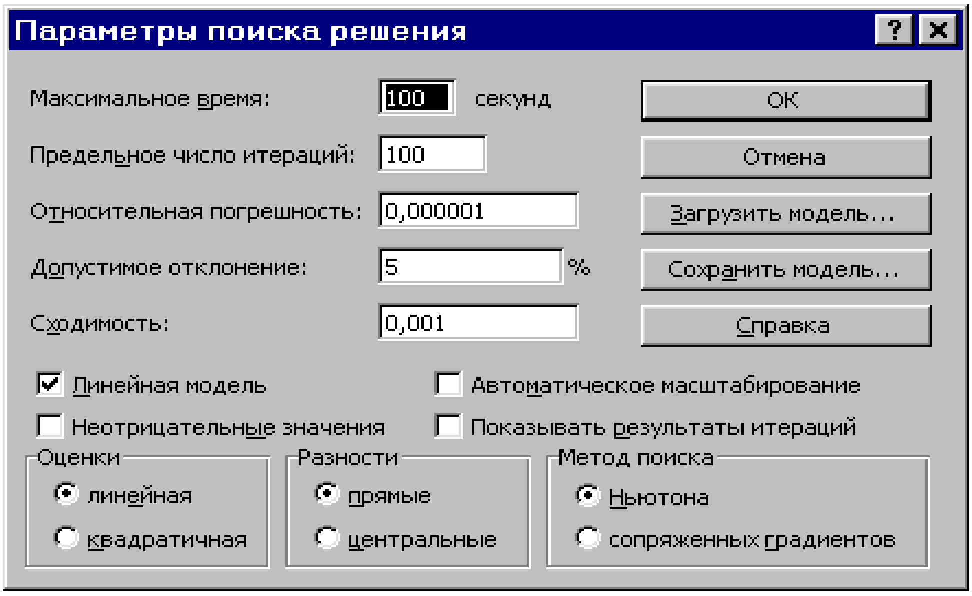


Рис. 1.8 — Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр **«Максимальное время»** служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр **«Предельное число итераций»** служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр **«Относительная погрешность»** служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр **«Допустимое отклонение»** служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр **«Сходимость»** применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка **«Линейная модель»** обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки **«ОК»**.

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна **«Поиск решения»** путем нажатия кнопки **«Выполнить».**

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно **«Результаты поиска решения»** с одним из сообщений, представленных на рисунках 1.9, 1.10 и 1.11.

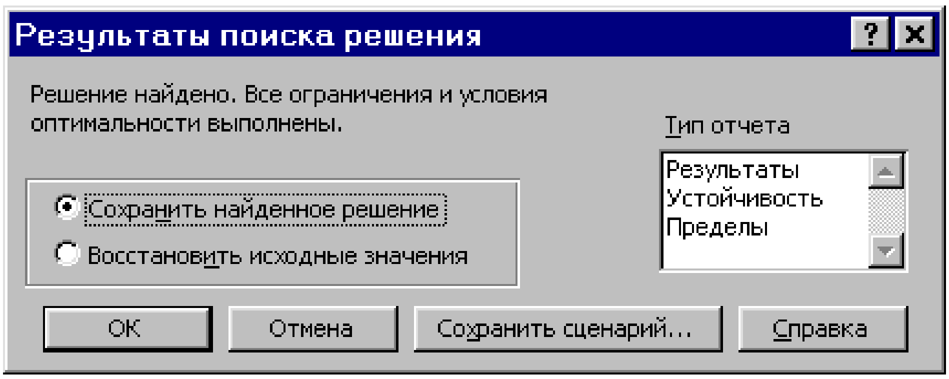


Рис. 1.9 — Сообщение об успешном решении задачи

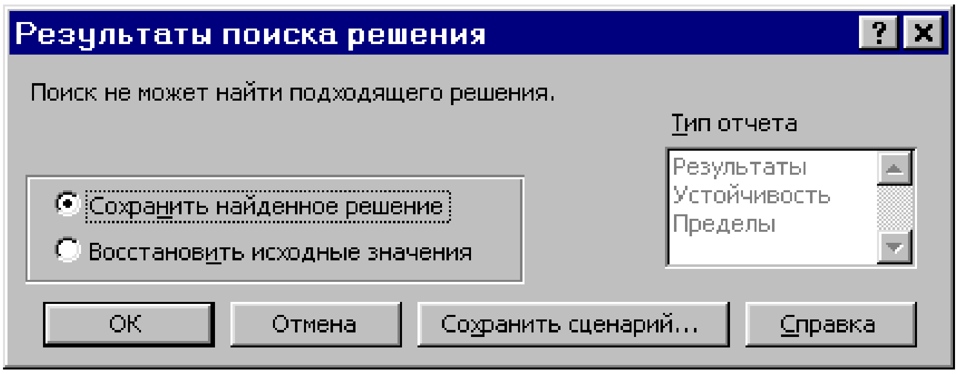


Рис. 1.10 — Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

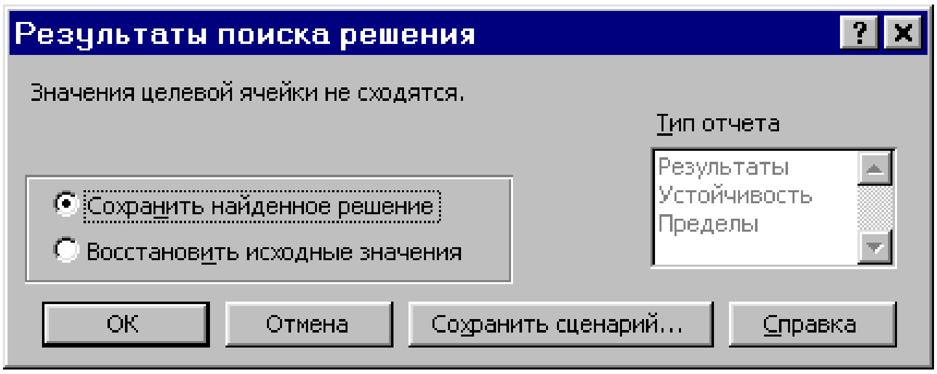
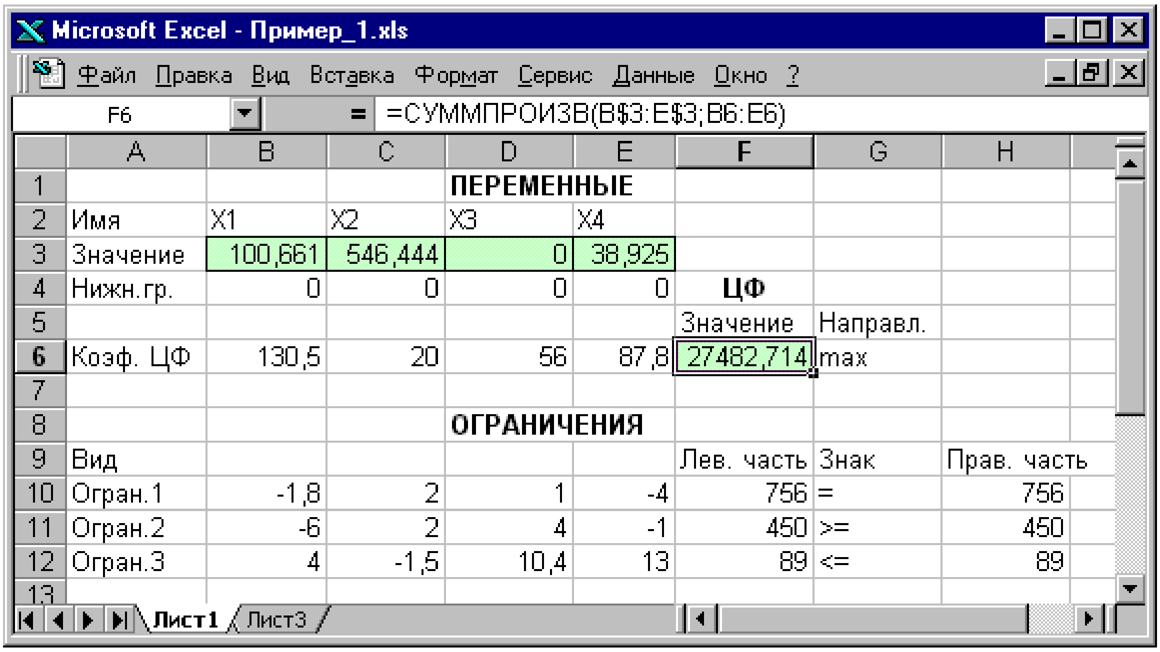


Рис. 1.11 — Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рисунках 1.10 и 1.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

Если при заполнении полей окна **«Поиск решения»** были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра **«Относительная погрешность»** не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т. д.

В окне **«Результаты поиска решения»** представлены названия трех типов отчетов: **«Результаты», «Устойчивость», «Пределы»**. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку **«OK»**. После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 1.12).


Microsoft Excel - Пример_1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

F6 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925			
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,714	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89
13								

Лист1 / Лист3

Рис. 1.12 — Экранная форма задачи (1.4) после получения решения

Возможные ошибки при вводе условий задач ЛП

Если при решении задачи ЛП выдается сообщение о невозможности нахождения решения, то возможно, что причина заключается в ошибках ввода условия задачи в Excel. Поэтому, прежде чем делать вывод о принципиальной невозможности нахождения оптимального решения задачи, ответьте на вопросы из таблицы 1.4.

1.4 Двухиндексные задачи линейного программирования

Двухиндексные задачи ЛП вводятся и решаются в Excel аналогично одноиндексным задачам. Специфика ввода условия двухиндексной задачи ЛП состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов ЦФ.

Рассмотрим решение двухиндексной задачи, суть которой заключается в оптимальной организации транспортных перевозок штучного товара со складов в магазины (табл. 1.2).

Таблица 1.2 — Исходные данные транспортной задачи

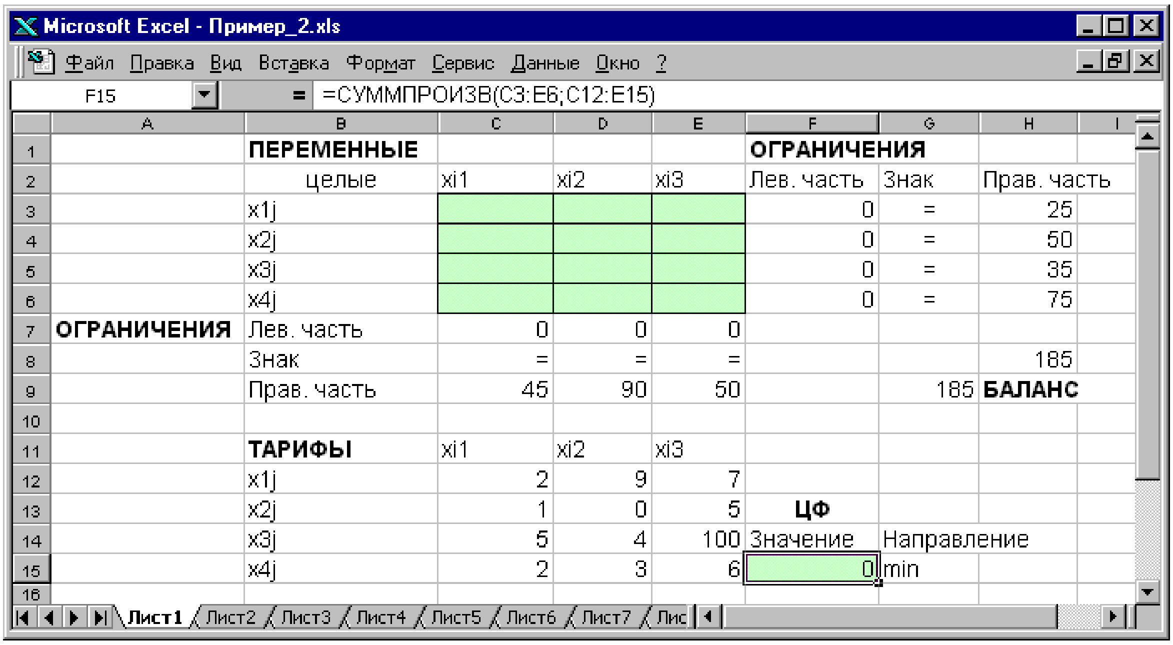
Тарифы, руб./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запасы, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потребности, шт.	45	90	50	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид:

$$L(X) = 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\ + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\ \forall x_{ij} \ge 0, \forall x_{ij} \text{ — целые } \left(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,3} \right). \end{cases} \qquad (1.5)$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи (1.5) и ее решение представлены на рисунках 1.13, 1.14, 1.15 и в таблице 1.3.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**ПЕРЕМЕННЫЕ**				**ОГРАНИЧЕНИЯ**		
2		целые	xi1	xi2	xi3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		x1j				0	=	25
4		x2j				0	=	50
5		x3j				0	=	35
6		x4j				0	=	75
7	**ОГРАНИЧЕНИЯ**	Лев. часть	0	0	0			
8		Знак	=	=	=			185
9		Прав. часть	45	90	50		185	**БАЛАНС**
10								
11		**ТАРИФЫ**	xi1	xi2	xi3			
12		x1j	2	9	7			
13		x2j	1	0	5	**ЦФ**		
14		x3j	5	4	100	Значение	Направление	
15		x4j	2	3	6	0	min	

Рис. 1.13 — Экранная форма двухиндексной задачи (1.5) (курсор в целевой ячейке **F15**)

Таблица 1.3 — Формулы экранной формы задачи (1.5)

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	**C3:E6**
Формула в целевой ячейке **F15**	**=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)**
Ограничения по строкам в ячейках **F3, F4, F5, F6**	**=СУММ(C3:E3)** **=СУММ(C4:E4)** **=СУММ(C5:E5)** **=СУММ(C6:E6)**
Ограничения по столбцам в ячейках **C7, D7, E7**	**=СУММ(C3:C6)** **=СУММ(D3:D6)** **=СУММ(E3:E6)**
Суммарные запасы и потребности в ячейках **H8, G9**	**=СУММ(H3:H6)** **=СУММ(C9:E9)**

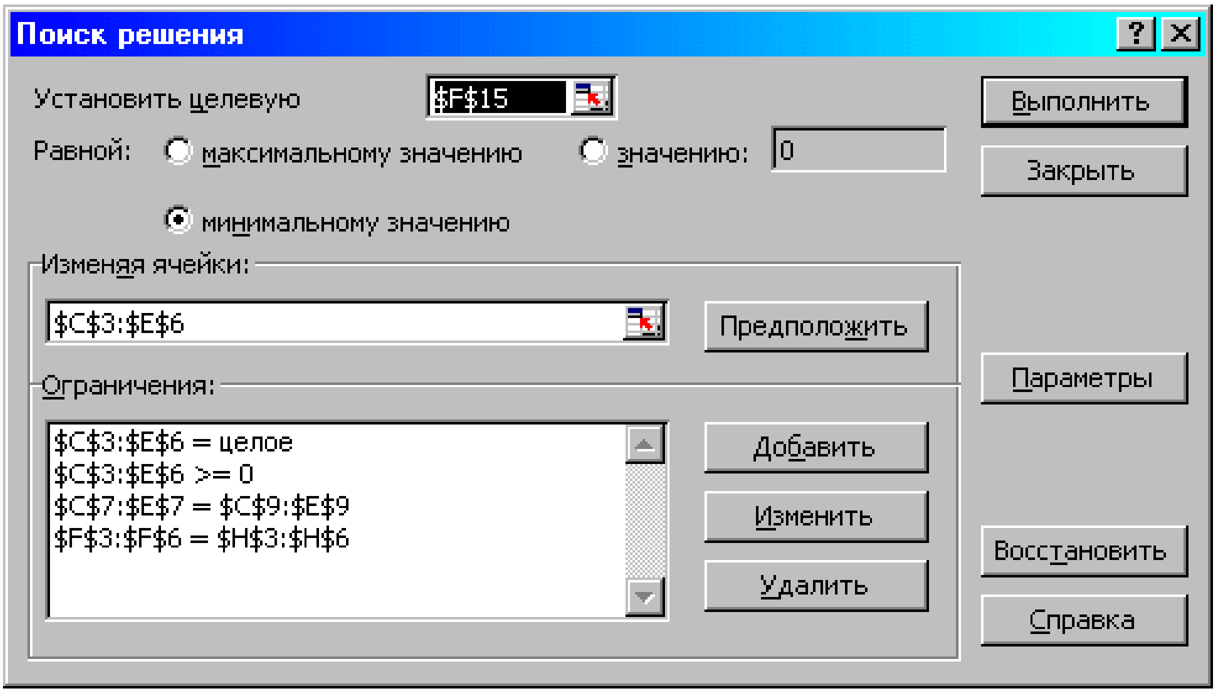


Рис. 1.14 — Ограничения и граничные условия задачи (1.5)

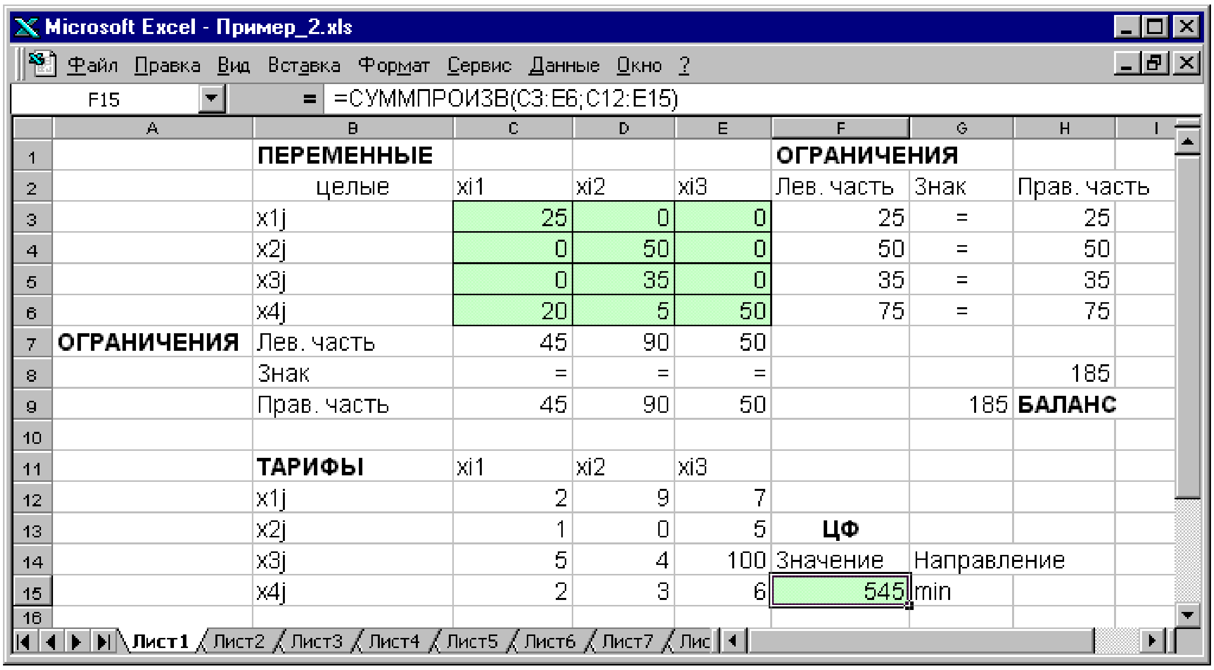


Рис. 1.15 — Экранная форма после получения решения задачи

(курсор в целевой ячейке **F15**)

1.5 Варианты заданий лабораторной работы № 1

Вариант 1

Используя MS Excel, найти решение для модели ЛП, соответствующей заданному варианту.

Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции. На рисунке 1.16 показана технологическая схема производства изделий.

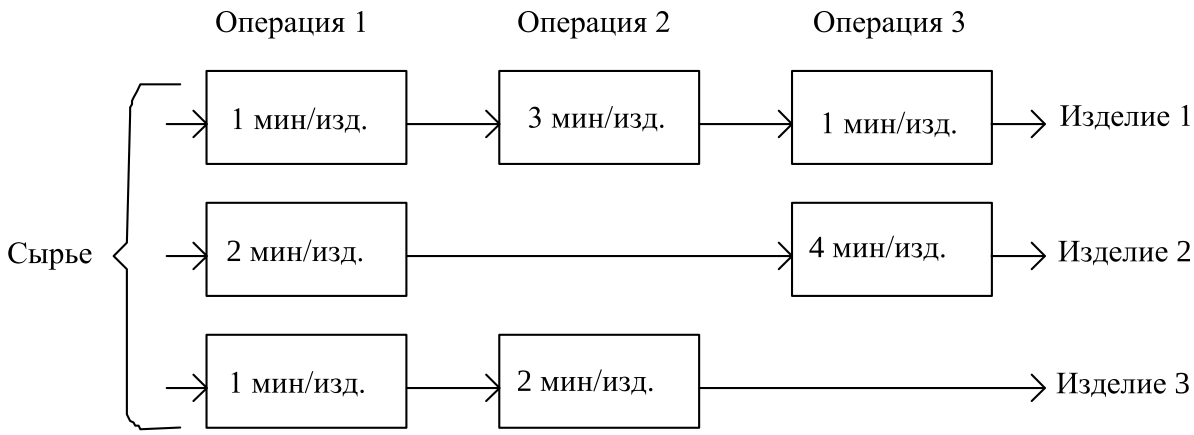


Рис. 1.16 — Технологическая схема производства

Фонд рабочего времени ограничен следующими предельными значениями: для первой операции — 430 мин; для второй операции — 460 мин; для третьей операции — 420 мин. Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 рублей соответственно.

Постройте математическую модель, позволяющую найти наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции.

Вариант 2

При изготовлении изделий $И_1$ и $И_2$ используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия $И_1$ требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия $И_2$ требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия $И_1$ составляет 6 руб. и от единицы изделия $И_2$ — 16 руб.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Вариант 3

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров — не менее 70 и витаминов — не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ — 2 руб., $П_2$ — 3 руб.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

Вариант 4

В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5 $м^3$ коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 $м^3$ еловых и 7,5 $м^3$ пихтовых лесоматериалов. Для приготовления листов фанеры по 100 $м^2$ требуется

5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 160 руб., а со 100 м^2 фанеры — 600 руб.

Постройте математическую модель для нахождения плана производства, максимизирующего доход.

Примечание. При построении модели следует учесть тот факт, что пиломатериалы могут быть реализованы только в виде неделимого комплекта размером 2,5 м^3, а фанера — в виде неделимых листов по 100 м^2.

Вариант 5

С вокзала можно отправлять ежедневно курьерские и скорые поезда.

Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в таблице. 1.4.

Таблица 1.4 — Исходные данные

Характеристики парка вагонов	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Число вагонов в поезде, шт.:					
курьерском	1	–	5	6	3
скором	1	1	8	4	1
Вместимость вагонов, чел.	–	–	58	40	32
Наличный парк вагонов, шт.	12	8	81	70	27

Постройте математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума.

Вариант 6

Служба снабжения завода получила от поставщиков 500 стальных прутков длиной 5 м. Их необходимо разрезать на детали A и B длиной соответственно 2 и 1,5 м, из которых затем составляются комплекты. В каждый комплект входят 3 детали A и 2 детали B. Характеристики возможных вариантов раскроя прутков представлены в таблице 1.5.

Таблица 1.5 — Характеристики возможных вариантов раскроя прутков

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./пруток		Отходы, м/пруток
	A	B	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектность, шт./компл.	3	2	

Постройте математическую модель задачи, позволяющую найти план раскроя прутков, максимизирующий количество комплектов.

Примечание. В ЦФ могут входить не все переменные задачи.

Вариант 7

Малое предприятие выпускает детали A и B. Для этого оно использует литье, подвергаемое токарной обработке, сверлению и шлифованию. Производительность станочного парка предприятия по обработке деталей A и B приведена в таблице 1.6.

Таблица 1.6 — Исходные данные задачи

Станки	Производительность, шт./ч		Стоимость станочного времени, руб./ч
	A	B	
Токарные	25	40	20
Сверлильные	28	35	14
Шлифовальные	35	25	17,5
Цена детали, руб.:			
покупная	2	3	
продажная	5	6	

Предполагая, что спрос на любую комбинацию деталей A и B обеспечен, постройте математическую модель для нахождения плана их выпуска, максимизирующего прибыль.

Вариант 8

В плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типов Д-1, Д-2, Д-3 и Д-4. Данные о типах домов приведены в таблице. 1.7.

Таблица 1.7 — Плановое количество квартир

Тип квартир	Тип дома			
	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
Однокомнатные	10	18	20	20
Двухкомнатные	40	30	20	–
Трехкомнатные	60	90	10	–
Четырехкомнатные	20	10	–	10
Плановая себестоимость, тыс. д. е.	800	550	360	450

Годовой план ввода жилой площади составляет соответственно 800, 1000, 900 и 200 квартир указанных типов. На жилищное строительство утвержден объем капиталовложений в размере 40 млн д. е. Определить оптимальный план строительства на финансовый год.

Вариант 9

Один из цехов машиностроительного предприятия выпускает изделия двух видов: корпуса и задвижки. Для производства этих изделий требуются три вида сырья: алюминий, сталь и пластмасса. На выпуск одного корпуса расходуется 20 кг алюминия, 10 кг стали и 5 кг пластмассы. На выпуск одной задвижки расходуется 5 кг алюминия, 5 кг стали и 20 кг пластмассы. Запасы ресурсов ограничены: за рабочую смену цех может израсходовать не более 200 кг алюминия, 250 кг стали и 500 кг пластмассы.

Выпуск одного корпуса приносит предприятию прибыль в размере 100 денежных единиц (д. е.), одной задвижки — 300 д. е.

Требуется составить оптимальный план работы цеха, т. е. найти, сколько корпусов и задвижек требуется выпускать, чтобы получить максимальную прибыль (при соблюдении ограничений на ресурсы).

Вариант 10

Предприятие производит мелкие детали для промышленных изделий и продает их через 5 посреднических фирм по цене 2,50 д. е. за штуку. Коммерческие прогнозы указывают, что объем месячных поставок составит: посреднику 1 — 3 000 штук, посреднику 2 — 3 000 штук, посреднику 3 — 10 000 штук, посреднику 4 — 5 000 штук, посреднику 5 — 4 000 штук.

Фирма располагает следующими производственными мощностями: завод 1 производит 5 000 деталей в месяц, завод 2 — 10 000 деталей в месяц, завод 3 — 12 500 деталей в месяц.

Себестоимость одной детали, изготовленной на заводе 1, равняется 1 д. е., на заводе 2 — 0,90 д. е., на заводе 3 — 0,80 д. е.

Транспортные расходы, связанные с доставкой одной детали в точки оптовой продажи, приведены в таблице 1.8.

Построить модель линейного программирования с целью определения оптимальных объемов продукции, подлежащих выпуску на каждом заводе данной фирмы, и количества деталей, поставляемых фирмой своим посредникам-оптовикам.

Таблица 1.8 — Транспортные расходы, связанные с доставкой одной детали (д. е.)

Завод	Посредник				
	1	2	3	4	5
1	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
2	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
3	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

Вариант 11

Средства очистки пола оценивают по трем показателям: очищающие свойства, дезинфицирующие свойства, раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей измеряется по линейной шкале от 0 до 100 единиц.

Продукт на рынке должен содержать по крайней мере 60 единиц очищающих свойств и по крайней мере 60 единиц дезинфицирующих свойств по соответствующей шкале. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Конечный продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приводятся в таблице 1.9.

Таблица 1.9 — Характеристики основных очистителей (ед.)

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие на кожу
A	15	30	70
B	65	85	45
C	45	70	10

Сформулируйте задачу нахождения оптимальной смеси как задачу линейного программирования.

Вариант 12

Фирма «Фасад» производит двери для продажи местным строительным компаниям. Ее репутация позволяет продавать всю производимую продукцию. На фирме работают 10 рабочих в одну смену (8 рабочих часов) 5 дней в неделю, что дает 400 часов в неделю. Рабочее время поделено между двумя существенно различными технологическими процессами: собственно производством и конечной обработкой дверей. Из 400 рабочих часов в неделю 250 отведены под собственно производство и 150 — под конечную обработку. «Фасад» производит три типа дверей: стандартные, полированные и резные. В таблице 1.10 приведены временные затраты и прибыль от продажи одной двери каждого типа.

Таблица 1.10 — Затраты времени на технологические процессы и прибыль от реализации дверей

Тип дверей	Время на производство, мин	Время на обработку, мин	Прибыль, $
Стандартные	30	15	45
Полированные	30	30	90
Резные	60	30	120

Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль? Оптимально ли распределение рабочего времени между двумя технологическими процессами (производство и конечная обработка)? Как изменится прибыль, если распределить рабочее время между этими процессами оптимально?

Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль? Оптимально ли распределение рабочего времени между двумя технологическими процессами (производство и конечная обработка)? Как изменится прибыль, если распределить рабочее время между этими процессами оптимально?

Вариант 13

Ежедневно в ресторане фирменный коктейль (порция составляет 0,33 л) заказывают в среднем 600 человек. Предполагается, что в ближайшее время их количество увеличится в среднем на 50 человек. Согласно рецепту в составе коктейля должно быть:

- не менее 20%, но и не более 35% спирта;
- не менее 2% сахара;
- не более 5% примесей;
- не более 76% воды;

- не менее 7% и не более 12% сока.

В таблице 1.11 приведены процентный состав напитков, из которых смешивается коктейль, и их количество, которое ресторан может ежедневно выделять на приготовление коктейля.

Таблица 1.11 — Процентный состав и запасы напитков

Напиток	Спирт	Вода	Сахар	Примеси	Количество, л/сут.
Водка	40%	57%	1%	2%	50
Вино	18%	67%	9%	6%	184
Сок	0%	88%	8%	4%	46

Постройте модель, на основании которой можно будет определить, хватит ли ресторану имеющихся ежедневных запасов напитков для удовлетворения возросшего спроса на коктейль.

Вариант 14

В области имеется пять кирпичных заводов, объем выпуска которых в сутки равен 105, 50, 80, 20, 25 т соответственно. Заводы удовлетворяют потребности шести строительных фирм соответственно в количестве 80, 43, 10, 17, 50, 30 т. Оставшийся кирпич отправляют по железной дороге в другие области. Кирпич на строительные объекты внутри области доставляется автомобильным транспортом. Расстояние в километрах от заводов до объектов приведено в таблице 1.12.

Таблица 1.12 — Расстояние от заводов до объектов (км)

Кирпичные заводы	Строительные фирмы					
	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф5	Ф6
1	3	5	6	12	7	8
2	4	11	2	10	9	5
3	7	6	8	5	4	9
4	12	10	4	3	9	3
5	5	3	8	4	10	7

Определить, с каких заводов и каким фирмам должен доставляться кирпич, а также какие заводы и в каком количестве должны отправлять кирпич в другие области, чтобы транспортные издержки по доставке кирпича автотранспортом были минимальными. Стоимость перевозки 1 т кирпича автотранспортом удовлетворяет условию $c = a + d(l - 1)$, где $a = 30$ д. е., $d = 10$ д. е., l — пробег, км.

Вариант 15

Для строительства трех участков дорожной магистрали необходимо завозить песок. Песок может быть поставлен из четырех карьеров. Перевозка песка из карьеров до участков осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от карьеров до участков, наличие песка в карьерах и потребность песка на участках дороги приведены в таблице 1.13.

Таблица 1.13 — Расстояние от заводов до объектов (км)

Песчаные карьеры	Участки дороги				Наличие песка, тыс. т
	I	II	III	IV	
I	1	8	2	3	30
II	4	7	5	1	50
III	5	3	4	4	20
Потребность в песке, тыс. т	15	15	40	30	–

Составить план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

Вариант 16

Четыре растворных узла потребляют в сутки 170, 190, 230 и 150 т песка, который отгружается с трех песчаных карьеров. Суточная производительность карьеров равна соответственно 280, 240 и 270 т песка. Карьеры взимают плату за погрузку песка каждые сутки не с количества отгруженного материала, а с «факта» его отгрузки, куда входит стоимость погрузки, цена песка и транспортные расходы доставки потребителю при закреплении его за карьером. Стоимость перевозки 1 т песка от карьеров до растворных узлов приведена в таблице 1.14.

Таблица 1.14 — Стоимость перевозки 1 т песка от карьеров до растворных узлов

Растворные узлы	Карьеры		
	1	2	3
1	9	15	6
2	10	8	9
3	7	4	12
4	5	10	13
Цена 1 т песка, д. е.	3	29	22
Суточная стоимость погрузки, д. е.	190	250	150

Найти оптимальный вариант закрепления растворных узлов за карьерами. Критерий оптимальности — минимум суммарных затрат (в д. е.) на перевозку песка от карьеров до растворных узлов.

Вариант 17

Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью 10, 8 и 6 млн галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 6, 11 и 7 млн галлонов.

Бензин транспортируется в бензохранилища по трубопроводу. Стоимость перекачки бензина на 1 км составляет 5 д. е. на 100 галлонов. Завод 1 не связан с хранилищем 3. Расстояние от заводов до бензохранилищ приведено в таблице 1.15.

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и решите на минимум транспортных затрат.

Таблица 1.15 — Расстояние от заводов до бензохранилищ

Заводы	Бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	–
2	420	180	60
3	200	280	120

Вариант 18

Пусть имеются 30, 45, 25 и 20 станков соответствующих типов. Шесть типов работ характеризуются 30, 20, 10, 40, 10 и 10 операциями соответственно. На станке 3 не может выполняться работа 6. Исходя из коэффициентов стоимости операций, представленных в таблице 1.16, постройте модель и выполните оптимальное распределение станков по работам.

Таблица 1.16 — Коэффициенты стоимости операций

Тип станков	Тип работ					
	1	2	3	4	5	6
1	10	1	3	7	14	8
2	4	8	12	2	10	7
3	12	3	14	6	2	–
4	11	12	9	5	1	3

Вариант 19

Три электрогенерирующие станции мощностью 25, 40 и 30 миллионов кВт/ч поставляют электроэнергию в три города. Максимальная потребность в электроэнергии этих городов оценивается в 30, 35 и 24 миллионов кВт/ч. Цены за миллион кВт/ч в данных городах приведены в таблице 1.17.

Таблица 1.17 — Стоимость за электроэнергию, руб./млн кВт/ч

Города / Станция	1	2	3
1	600	700	400
2	320	300	350
3	500	480	450

В августе на 20% возрастает потребность в электроэнергии в каждом из трех городов. Недостаток электроэнергии могут восполнить из другой электросети по цене 1000 за 1 миллион кВт/ч. Но третий город не может подключиться к альтернативной электросети. Электрогенерирующие станции планируют разработать наиболее экономичный план распределения электроэнергии и восполнения ее недостатка в августе. Сформулируйте эту задачу в виде транспортной модели.

Вариант 20

Некоторой компании принадлежат три фермы, где выращивают овощи, предназначенные для последующей обработки на двух холодильных заводах компании. Одним из выращиваемых овощей являются бобы, которые холодильные заводы продают по 200 руб. за 1 т. В таблице 1.18 приведены издержки производства для каждой фермы и каждого холодильного завода, максимальные значения урожая для каждой фермы, прогнозные значения спроса на следующий сезон для каждого завода. В таблице 1.19 приведена стоимость транспортировки бобов.

Таблица 1.18 — Издержки производства и максимальный урожай бобов

		Издержки производства, руб./т	Максимальный урожай, т
Фермы	1	90	2000
	2	95	3000
	3	87	1500
Прогнозный спрос, т			
Заводы	1	20	2750
	2	23	3250

Таблица 1.19 — Стоимость транспортировки бобов, руб./т

Фермы	Холодильный завод	
	1	2
1	10	15
2	12	12
3	18	9

Постройте транспортную модель, которая для ферм и холодильных заводов позволяет найти на следующий сезон производственный план, гарантирующий максимальный доход.

2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

2.1 Цель работы

Приобретение навыков использования модели Уилсона и ее адаптации к ситуации с ограниченной грузоподъемностью транспортных средств.

2.2 Основная модель управления запасами (модель Уилсона)

Входные параметры:

1) ν — интенсивность потребления запаса [ед. товара / ед. времени];

2) s — затраты на хранение запаса [ден. ед. / ед. товара × ед. времени];

3) K — затраты на осуществление заказа [ден. ед.].

Выходные параметры:

1) Q — размер заказа [ед. тов.];

2) τ — период поставки [ед. времени];

3) L — общие затраты на управление запасами в единицу времени [ден. ед. / ед. времени];

4) h_0 — точка заказа [ед. тов.].

Допущения модели Уилсона

1. Интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной, $\nu = \text{const}$.

2. Время поставки заказа является известной и постоянной величиной.

3. Каждый заказ поставляется в виде одной партии.

4. Затраты на осуществление заказа K не зависят от размера заказа.

5. Отсутствие запаса является недопустимым.

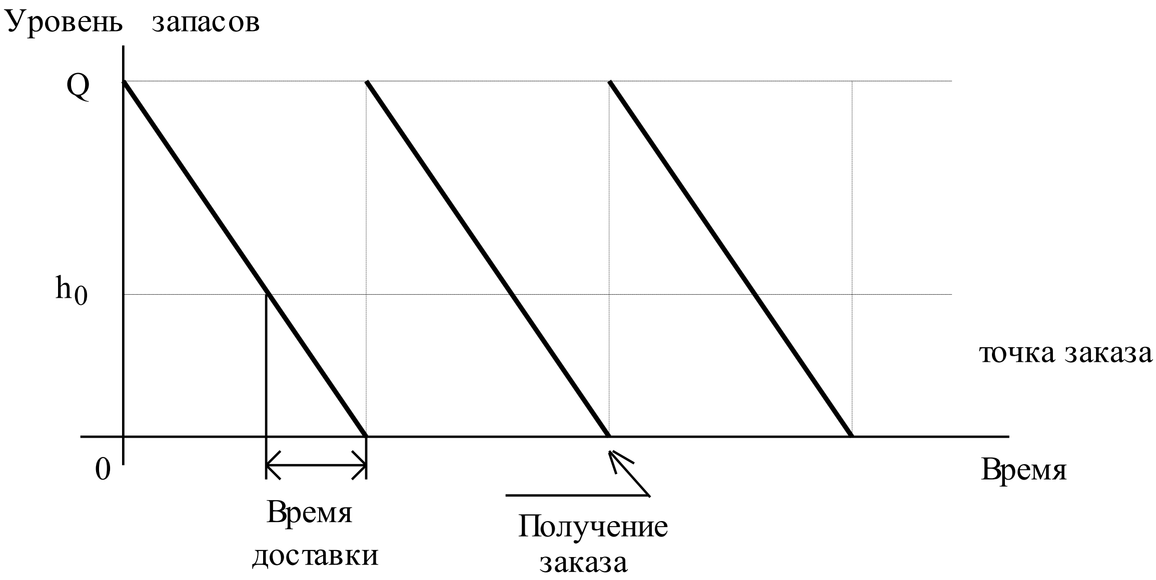


Рис. 2.1 — График циклов изменения запасов в модели Уилсона

Формулы модели Уилсона

$$Q^*=\sqrt{\frac{2K\nu}{s}};\quad L=K\cdot\frac{\nu}{Q}+s\cdot\frac{Q}{2};\quad h_0=\nu T_Д;\quad \tau=\frac{Q}{\nu}. \tag{2.1}$$

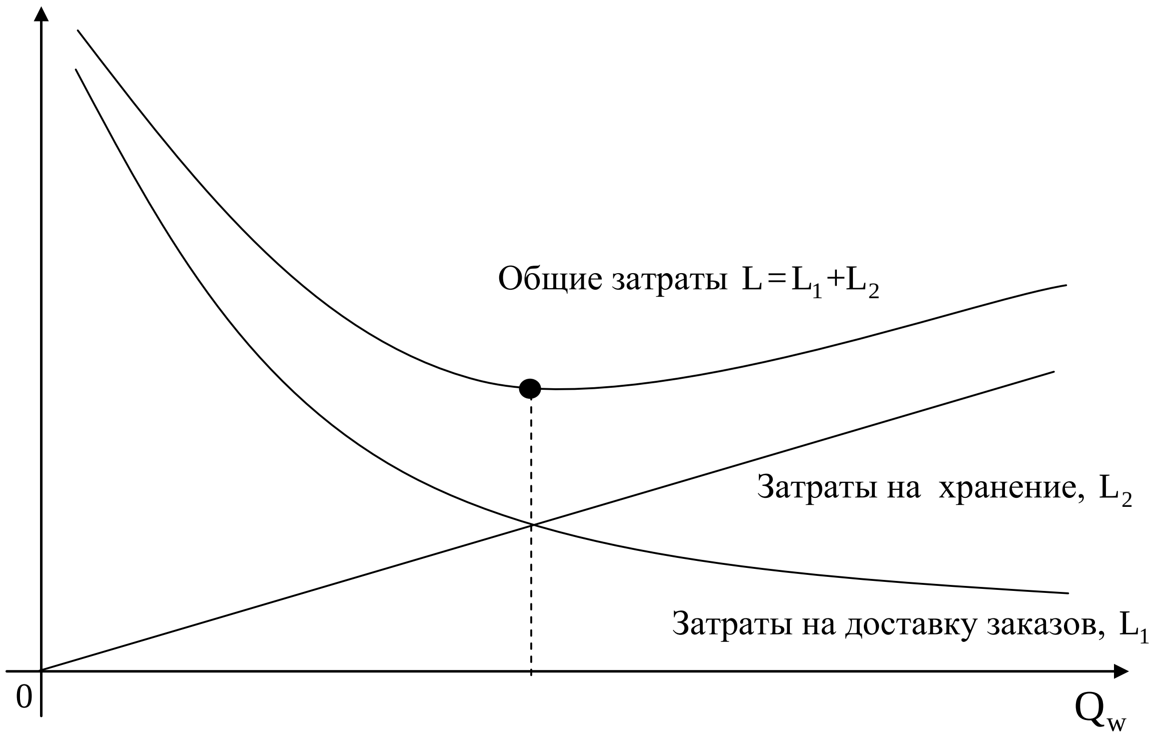
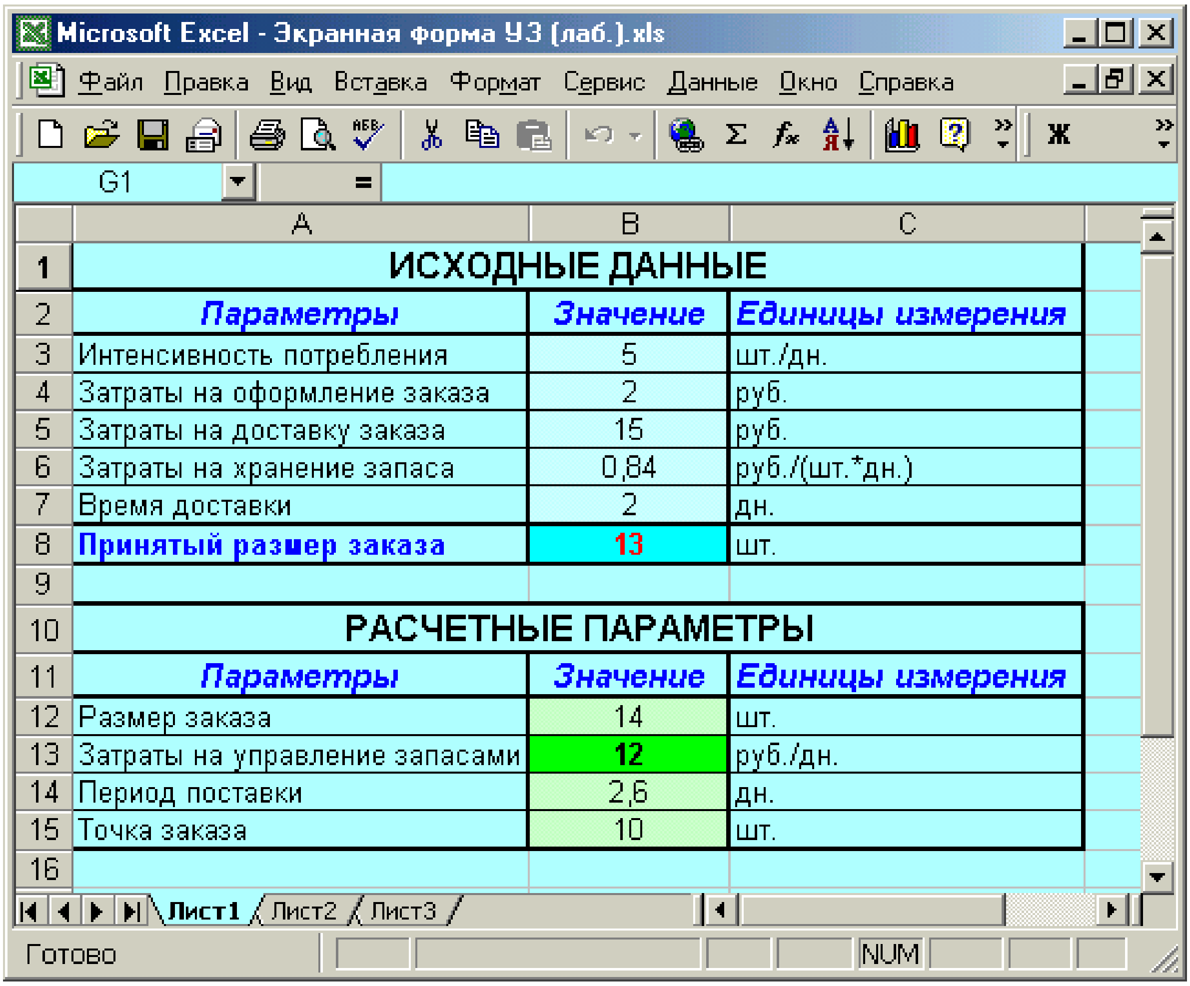


Рис. 2.2 — График затрат на управление запасами

2.3 Расчет параметров модели Уилсона в Microsoft Excel

Экранная форма для расчета параметров модели Уилсона должна состоять из двух частей: блока исходных данных и расчетных формул (см. рис. 2.3).



	A	B	C
1	ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ		
2	Параметры	Значение	Единицы измерения
3	Интенсивность потребления	5	шт./дн.
4	Затраты на оформление заказа	2	руб.
5	Затраты на доставку заказа	15	руб.
6	Затраты на хранение запаса	0,84	руб./(шт.*дн.)
7	Время доставки	2	дн.
8	**Принятый размер заказа**	13	шт.
9			
10	РАСЧЕТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ		
11	Параметры	Значение	Единицы измерения
12	Размер заказа	14	шт.
13	Затраты на управление запасами	12	руб./дн.
14	Период поставки	2,6	дн.
15	Точка заказа	10	шт.
16			

Рис. 2.3 — Экранная форма расчета параметров модели Уилсона

Размер реально подаваемого заказа Q может не совпадать с Q^*, вычисленным по формуле Уилсона (2.1). Поэтому в блок исходных данных помимо параметров, заданных в условии задачи, необходимо ввести **Принятый размер заказа**, который будет использоваться при вычислении расчетных параметров.

Формулы, вводимые в блок расчетных параметров, представлены на рисунке 2.4.

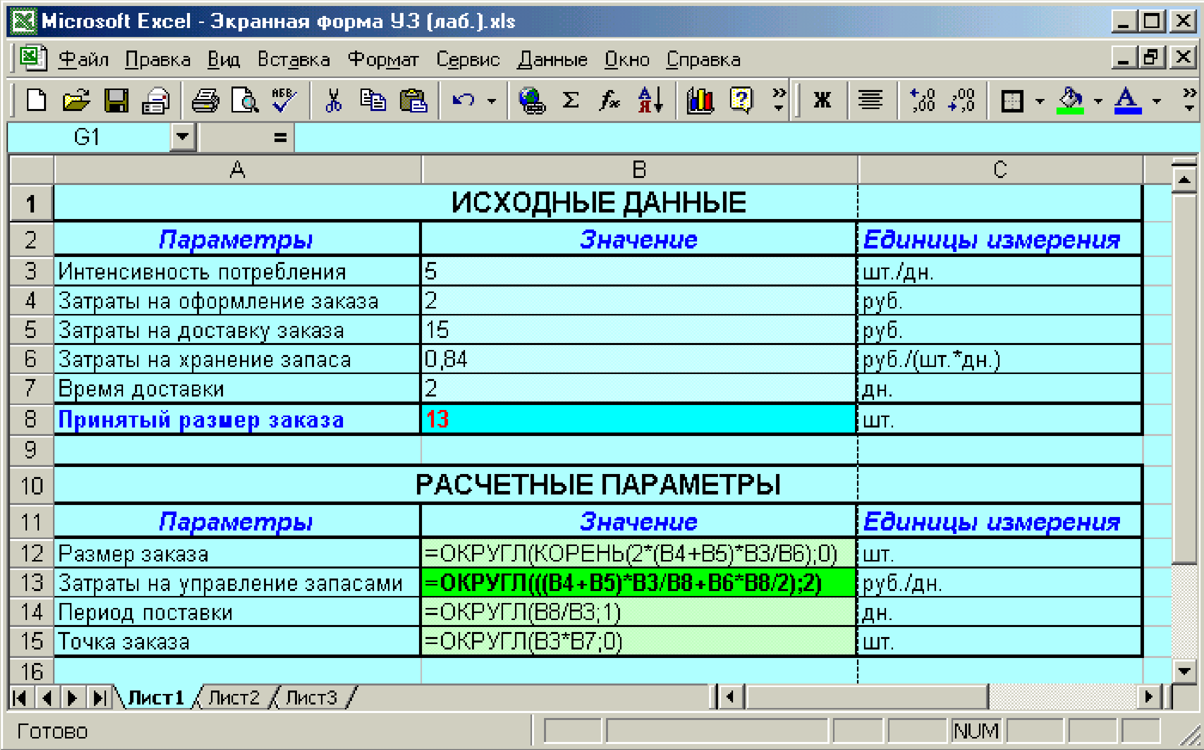


Рис. 2.4 — Формулы блока расчетных параметров модели Уилсона

Для рассмотрения различных вариантов управления запасами удобно использовать несколько листов, содержащих одну и ту же экранную форму, но различные значения исходных данных. Для этого необходимо скопировать **Лист1** с помощью контекстного меню, вызываемого правой клавишей мыши на названии листа.

2.4 Задание на лабораторную работу № 2

При строительстве участка железной дороги длиной $\boldsymbol{D}$ (м) используют стальной рельс в виде брусков, длиной $\boldsymbol{d}$ (м) каждый. Вес одного метра рельса равен $\boldsymbol{p}$ (кг). Затраты на хранение рельсов на складе дороги составляют в сутки $\boldsymbol{s} = 1$ рубль за тонну. Затраты на оформление одного заказа равны $\boldsymbol{K}_{\text{оф}}$ (руб.). Доставка грузов на склад дороги может осуществляться железнодорожным вагоном, вмещающим в себя до $\boldsymbol{m}_1$ (т) груза, либо грузовыми машинами, каждая из которых рассчитана max на $\boldsymbol{m}_2$ (т) груза. Затраты на использование одного рейса вагона составляют $\boldsymbol{K_1}$ (руб.), а стоимость одного рейса грузовой машины — $\boldsymbol{K_2}$ (руб.). Доставка вагоном занимает $\boldsymbol{T_{Д1}}$ (дней), а доставка грузовыми машинами — $\boldsymbol{T_{Д2}}$ (дней). Стройка должна быть закончена не позднее чем за $\boldsymbol{T_{max}}$ (дней).

Определите:

1) размер заказа рельса;

2) каким видом транспорта выгоднее доставлять заказы;

3) с какой периодичностью подавать заказ;

4) при каком уровне запаса подавать заказ;

5) затраты на УЗ в течение всего периода строительства.

Постройте график циклов изменения запасов за весь период стройки.

Рекомендации по решению:

1. При решении данной задачи параметры s и Q необходимо измерять в рельсах, количество которых должно быть целым числом.

2. Затраты на осуществление заказа включают затраты на оформление заказа и на доставку.

3. Если в транспортное средство (вагон или машину) не вмещается объем заказа, найденный по формуле Уилсона, то необходимо рассмотреть следующие варианты доставки:

a) доставлять такое количество рельс, которое вмещается в транспортное средство;

b) использовать для доставки не одно, а несколько транспортных средств (например, два), но при этом изменятся затраты на доставку (увеличатся в 2 раза).

4. Основная идея решения заключается в рассмотрении нескольких вариантов доставки и выбора минимального по затратам на управление запасами.

5. При построении графика циклов изменения запасов особое внимание следует уделить размеру последней поставки рельс, которая может отличаться от доставляемого прежде размера заказа.

Таблица 2.1 — Исходные данные для выполнения лабораторной работы № 2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{D}$	1440	1620	1090	1550	1870	1100	1970	1970	1020	1700
$\boldsymbol{d}$	6	6	7	6	7	7	5	7	7	8
$\boldsymbol{p}$	93	107	86	91	84	83	80	85	96	106
$\boldsymbol{s}$	1	1,4	1	1,6	1	1,9	1,2	1,3	1,4	1,5
$\boldsymbol{K}_{\text{оф}}$	1,2	1,4	1,7	1	1,5	1	1,2	1	1,5	1,3
$\boldsymbol{m}_1$	40	55	65	53	64	60	58	51	69	42
$\boldsymbol{m}_2$	8,5	10	12	16	19	15	11	14	10	19
$\boldsymbol{K}_1$	35	41	43	33	43	37	40	35	30	47
$\boldsymbol{K}_2$	9	8	13	14	15	8	11	8	10	9
$\boldsymbol{T}_{\text{Д1}}$	1,5	1,1	2,5	2,5	1,3	2,4	1,8	2,5	2,2	1,3
$\boldsymbol{T}_{\text{Д2}}$	0,5	0,8	1	0,5	0,7	0,5	1,1	0,6	1	1,1
$\boldsymbol{T}_{\max}$	19	28	28	23	30	26	22	29	29	19

Окончание табл. 2.1

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\boldsymbol{D}$	1280	1460	1030	1650	1780	1500	1900	1240	1820	1880
$\boldsymbol{d}$	5	8	6	6	6	7	7	5	6	5
$\boldsymbol{p}$	89	95	120	111	86	85	84	95	93	91
$\boldsymbol{s}$	1,7	1,2	1,5	1,6	1,5	1,7	1,9	1,4	1,5	1,5
$\boldsymbol{K}_{\text{оф}}$	1,2	1,9	1,4	1,5	1,7	1,8	1,2	2	1,9	1,4
$\boldsymbol{m}_1$	56	46	56	58	55	53	49	50	46	49
$\boldsymbol{m}_2$	19	13	20	13	10	20	18	18	11	13
$\boldsymbol{K}_1$	48	35	35	40	44	40	45	49	43	31
$\boldsymbol{K}_2$	12	15	7	12	7	15	10	14	13	9
$\boldsymbol{T}_{\text{Д1}}$	1,7	1,4	1,8	1,5	1,4	1,7	2,3	2	1,4	2,5
$\boldsymbol{T}_{\text{Д2}}$	0,8	0,5	1,1	0,5	0,9	0,6	0,9	1	0,8	0,5
$\boldsymbol{T}_{\max}$	24	24	28	26	21	24	28	25	19	29

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлова И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование : учебник / И. В. Орлова, В. А. Половников. — М. : ИНФРА-М, 2011.

2. Горбунова Р. И. Экономико-математические методы и модели / Р. И. Горбунова, С. И. Макаров, М. В. Мищенко. — М. : КНОРУС, 2008.

3. Замков О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. — М. : Дело и Сервис, 2009.

6. Просветов Г. И. Математические методы в экономике / Г. И. Просветов. — М. : РДЛ, 2005.

7. Федосеев В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. — 2-е изд. — М. : ЮНИТИ, 2005.

8. Математическое моделирование экономических процессов и систем : учеб. пособие / О. А. Волгина [и др.]. — 2-е изд. — М. : КНОРУС, 2014.

9. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. — М. : Финансы и статистика, 2005.

10. Просветов Г. И. Математические методы и модели в экономике : учеб.-практ. пособие / Г. И. Просветов. — М. : Альфа-Пресс, 2008. — 344 с.

11. Кундышева Е. С. Математическое моделирование в экономике : учеб. пособие / Е. С. Кундышева ; под науч. ред. проф. Б. А. Суслакова. — М. : Дашков и К, 2004. — 352 с.

12. Минюк Е. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / Е. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. — Минск : ТетраСистемс, 2002. — 432 с.

13. Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / под ред. В. В. Федосеева. — 2-е изд. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — 304 с.

14. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. — 2-е изд. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — 287 с.

15. Вентцель Е. С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. — М. : Высшая школа, 2001. — 208 с.