**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭМИС
_________________ И. Г. Боровской
«___» _____________________ 2017 г.

**Е.А. ШЕЛЬМИНА**

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

***Методические указания по выполнению практических работ и самостоятельной работы***

***для студентов 09.04.02 «Информационные системы»***

2017

Шельмина Е.А. Методы оптимизации информационных систем – Томск: Изд-во ТУСУР, 2017. – 27 с.

Учебно-методическое пособие посвящено изучению основ методов оптимизации и их практического применения в области информационных систем. В пособии рассматриваются задачи одномерного поиска экстремума, методы решения многомерных задач линейного и нелинейного программирования, численные методы нулевого, первого и второго порядков решения задач безусловной минимизации, а также численные методы поиска условного экстремума.

**СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**
**по дисциплине «Методы оптимизации информационных систем»**
**и руководство по выполнению (36 часов)**
**для студентов 09.04.02 «Информационные системы»**

**Краткое содержание тем и результатов их освоения**

| Тема практических занятий | Деятельность студента. Решая задачи, студент: |
|---|---|
| 1. Безусловный экстремум функции одной переменной | • *изучает* основные понятия методов оптимизации;<br>• *учиться* решать типовые задачи на поиск экстремума функции; |
| 2. Безусловный экстремум функции многих переменных | • *изучает* методы поиска экстремума функции многих переменных;<br>• *применяет* полученные знания при решении задач; |
| 3. Условный экстремум при ограничениях типа равенств | • *учиться* решать задачи на поиск экстремума при ограничениях типа равенств;<br>• знакомиться с методом исключения переменных и методом множителей Лагранжа; |
| 4. Условный экстремум при ограничениях типа неравенств | • *учиться* решать задачи на поиск экстремума при ограничениях типа неравенств;<br>• *применяет* метод множителей Лагранжа для поиска условного экстремума; |
| 5. Прикладные задачи оптимизации | • *изучает* методы решения задач линейного программирования;<br>• *учиться* решать типовые задачи линейного программирования; |
| 6. Численные методы оптимизации | • *изучает* численные методы нулевого, первого и второго порядков решения задач безусловной минимизации, а также численные методы поиска условного экстремума;<br>• *учиться* применять численные методы оптимизации в области информационных систем; |

## Практическая работа 1. Безусловный экстремум функции одной переменной

**Постановка задачи.** Для заданной функции $F(x)$ найти точки экстремума.

**Решение.** Рассмотрим случай, когда функция *F(x)* - непрерывная и дифференцируемая. Необходимо вычислить первую производную и записать уравнение:

$$F'(x)=0 \tag{1.1}$$

Пусть $\hat{x}_1,...,\hat{x}_k$ – корни этого уравнения ($k$ =0, 1, ...).

Чтобы решить вопрос, какой экстремум достигается в этих точках, нужно вычислить вторую производную.

Если $F(\hat{x}_i) > 0$, то функция в данной точке имеет минимум.

Если $F(\hat{x}_i) < 0$, то функция в данной точке имеет максимум.

Если $F(\hat{x}_i) = 0$, то функция в данной точке имеет перегиб или требуются дальнейшие исследования, связанные с вычислением старших производных.

При решении подобных задач возможна ситуация, когда функция *F(x)* имеет точки излома, т.е. в этих точках первая производная терпит разрыв. Подробное описание решения таких задач приведено в следующих источниках:

1. Методы оптимизации: Методические указания по выполнению практических работ для студентов 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» / Шельмина Е. А. - 2015. 19 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/6147.
2. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 512 с. [Электронный ресурс]. - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67460.

## Практическая работа 2. Безусловный экстремум функции многих переменных

**Постановка задачи.** Дана функция многих переменных *F(x*1, *x*2 ,..., *xn)*. Если из переменных составить n-мерный вектор-столбец *x*, то можно записать *F(x*1, *x*2 ,..., *xn)=F(x)*. Этот вектор можно рассматривать как точку в n-мерном пространстве *Rn*. Введем также следующие обозначения: градиент функции - n-мерный вектор-столбец:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ ... \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

и гессиан функции – n×n-мерная матрица:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & ... & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2{}^2} & ... & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & ... & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{n^2}} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Пусть $C$ – симметрическая n×n-мерная матрица с элементами $Cij$ и $\Delta x$ –n-мерный вектор с элементами $\Delta x1$, $\Delta x2$ ,..., $\Delta xn$ , $T$ – знак транспонирования. Тогда выражение

$$q(C,\Delta x) = \Delta x^T C \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \tag{2.3}$$

называется квадратической формой. Квадратическая форма $q(C,\Delta x)$ (соответственно матрица С) называется:

- положительно определенной, если $q(C,\Delta x) > 0$ при любых $\Delta x \neq 0$;
- неотрицательно определенной, если $q(C,\Delta x) \geq 0$ при любых $\Delta x \neq 0$;
- отрицательно определенной, если $q(C,\Delta x) < 0$ при любых $\Delta x \neq 0$;
- неположительно определенной, если $q(C,\Delta x) \leq 0$ при любых $\Delta x \neq 0$;
- знакоопределенной, если $q(C,\Delta x)$ может иметь разные знаки при разных $\Delta x$.

Проверка квадратической формы $q(C,\Delta x)$ или матрицы $C$ на знакоопределенность может быть выполнена с помощью критерия Сильвестра. Пусть $\Delta_1,...,\Delta_n$ - главные миноры матрицы $C$.

Критерий Сильвестра. Квадратическая форма $q(C,\Delta x)$ (соответственно матрица С)

- положительно определена, если все $\Delta_i > 0$ *(i=1,...,n)*;
- неотрицательно определена, если все $\Delta_i \geq 0$ *(i=1,...,n)*;
- отрицательно определена, если все $(-1)^i \Delta_i > 0$ *(i=1,...,n)*;
- неположительно определена, если все $(-1)^i \Delta_i \geq 0$ *(i=1,...,n)*;
- знакоопределена, если не выполняются предыдущие условия.

## Указания к самостоятельной работе студентов по разделу «Безусловный экстремум функции многих переменных»

**Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по теме: «Безусловный экстремум функции многих переменных»**

***Форма текущего контроля***: *отчет* по решению практических задач.

**Типовые задачи**: Исследовать функцию z(x,y) на экстремум.

1. $z(x,y)=x^2+xy+y^2-12x-3y$.
2. $z(x,y)=3-x^2+xy-y^2+2x-y$.
3. $z(x,y)=-x^2-xy+y^2+3x+6y$.
4. $z(x,y)=3(x^2+y^2)-x^3+4y$.
5. $z(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$ .
6. $z(x,y)=3x^3+y^3-x-3y^2-1$.
7. $z(x,y)=x^2y^2-2xy^2-6x^2y+12xy$.
8. $z(x,y)=x^4+y^4-2x^2$ .
9. $z(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.
10. $z(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$.

## Практическая работа 3. Условный экстремум при ограничениях типа равенств

Тема «Условный экстремум при ограничениях типа равенств» приведена в следующих источниках:

1. Методы оптимизации: Методические указания по выполнению практических работ для студентов 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» /

Шельмина Е. А. - 2015. 19 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/6147.

2. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 512 с. [Электронный ресурс]. - http://e.lanbook.com/book/element.php?pl1_id=67460

**Указания к самостоятельной работе студентов по разделу «Условный экстремум функции многих переменных при ограничениях типа равенств»**

**Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по теме: «Условный экстремум функции многих переменных при ограничениях типа равенств»**
***Форма текущего контроля***: *отчет* по решению практических задач.

**Типовые задачи:** Найти условный экстремум функции при ограничениях - равенствах.

1. $f(x,y)=5-3x-4y, x^2+y^2=25$
2. $f(x,y)=1-4x-8y, x^2-8y^2=8$
3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2, x^2+y^2=1$
4. $f(x,y)=2x^2+12xy+y^2, x^2+4y^2=25$
5. $f(x,y)=xy, x+y=1$
6. $f(x,y)=x^2+y^2, 3x+2y=6$
7. $f(x,y)=x^2-y^2, 2x-y=3$
8. $f(x,y)=xy^2, x+2y-1=0$
9. $f(x,y)=x^2+xy+y^2, x^2+y^2=1$
10. $f(x,y)=3x^2+5xy-y^2, 2x^2+3y^2=1$

**Практическая работа 4. Условный экстремум при ограничениях типа неравенств**

Тема «Условный экстремум при ограничениях типа равенств» приведена в следующих источниках:

1. Методы оптимизации: Методические указания по выполнению практических работ для студентов 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» / Шельмина Е. А. - 2015. 19 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/6147.
2. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 512 с. [Электронный ресурс]. - http://e.lanbook.com/book/element.php?pl1_id=67460

**Указания к самостоятельной работе студентов по разделу «Условный экстремум функции многих переменных при ограничениях типа неравенств»**

**Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по теме: «Условный экстремум функции многих переменных при ограничениях типа неравенств»**
***Форма текущего контроля***: *отчет* по решению практических задач.

**Типовые задачи:** Найти условный экстремум функции при ограничениях - неравенствах.

1. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ в круге $(x_1 - \sqrt{2})^2 + (x_2 - \sqrt{2})^2 \le 9$.
2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1$ в замкнутой области: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, 2x_1 + 3x_2 \le 12$.
3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1 + x2$ в квадрате $1 \le x_1 \le 2,\ 2 \le x_2 \le 3$.
4. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1x_2$ в круге $x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 1$.
5. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2$ в треугольнике $x_1 \le 1,\ x_2 \le 1, x_1 + x_2 \ge 1$.
6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$ в круге $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1$.
7. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = \sin x_1 + \sin x_2 + \cos(x_1 + x_2)$ в замкнутой области: $0 \le x_1 \le \frac{3\pi}{2}, 0 \le x_2 \le \frac{3\pi}{2}$.
8. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin(x_1 + x_2)$ в замкнутой области: $0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le x_2 \le \frac{\pi}{2}$.
9. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2 \sin(x_1 + x_2)$ в замкнутой области: $0 \le x_1 \le \pi,\ 0 \le x_2 \le \pi$.
10. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1x_2^2$ в круге $x_1^2 + x_2^2 \le 1$.

## Практическая работа 5. Прикладные задачи оптимизации

### 5.1. Симплекс- метод решения задачи линейного программирования (ЗЛП)

Решение ЗЛП геометрическим методом возможно лишь в случае двух или трех переменных. Если же число переменных в задаче больше трех, то для ее решения широко используют *симплексный метод*.

**Построение начального опорного плана.** Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{5.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0,\ b_i > 0 \quad (i = \overline{1,m};\quad j = \overline{1,n};\quad m < n). \tag{5.3}$$

Система ограничений (5.2)-(5.3) имеет канонический вид. Кроме того, каждое равенство в (5.2) содержит одну переменную, которая входит в данное уравнение с коэффициентом, равным единице, а во все остальные уравнения с коэффициентом, равным нулю.

Если положить свободные переменные $x_{m+1},...,x_n$ равными нулю, то базисные переменные $x_1,...,x_m$ будут равны свободным членам. Таким образом, решение

$$\mathbf{x}_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0) \quad (5.4)$$

будет опорным.

Если система ограничений имеет симметричный вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ b_i > 0, \quad (i = 1,2,...,m), \quad (5.5)$$

то она может быть приведена к каноническому виду. Для этого к левым частям неравенств (5.5) следует добавить дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$ $(i = 1,...,m)$. В результате получится эквивалентная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ b_i > 0, \quad (i = 1,2,...,m), \quad (5.6)$$

которая имеет канонический вид. Ее начальный опорный план можно выбрать в виде

$$\mathbf{x}_0 = (\underbrace{0,0,...,0}_{n}, b_1, ..., b_m). \quad (5.7)$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$c_{n+i} = 0, \quad (i = \overline{1,m}). \quad (5.8)$$

**Признак оптимальности опорного плана.** Рассмотрим ЗЛП (5.1)-(5.2), записанную в каноническом виде. Введем обозначения:

$$\Delta_0 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_m b_m = \mathbf{c}_0 \mathbf{A}_0, \quad (5.9)$$

$$\Delta_j = (c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \cdots + c_m a_{mj}) - c_j = \mathbf{c}_0 \mathbf{A}_j - c_j, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{c}_0 = (c_1, c_2, \cdots, c_m)$–вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $\mathbf{A}_0 = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ –вектор-столбец свободных членов; $\mathbf{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$ –вектор-столбец коэффициентов при переменных $x_j$.

На практике исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейшие вычисления проводят, записав условия задачи и первоначальный опорный план в таблицу, которая называется *симплексной* (таблица 5.1).

В столбце $\mathbf{c}_0$ этой таблицы записывают коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных.

В столбце $A_0$ записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получаются положительные компоненты оптимального плана. Столбцы $A_j$ представляют собой при $j = 1,..,m$ столбцы коэффициентов при базисных переменных $x_j$, а при $j = m+1,..,n$–столбцы переменных при свободных переменных.

В таблице 5.1 первые $m$ строк определяются исходными данными задачи, а элементы последней $(m+1)$ строки *(индексной строки)* вычисляются. В этой строке $\Delta_0$– значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, числа $\Delta_j$ вычисляются по формуле (5.10) и называются *оценками* соответствующих переменных.

После заполнения таблицы 5.1 исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого просматривают элементы последней строки таблицы. В результате может иметь место один из трех случаев:

1. $\Delta_j \geq 0$ для $j = m+1, m+2, ..., n$;

2. $\Delta_j < 0$ для некоторого $j = k$, и все соответствующие этому индексу величины $a_{ik} \leq 0 \; (i = \overline{1,m})$;

*Таблица 5.1.*

| Базис пер | $\mathbf{c}_0$ | $\mathbf{A}_0$ | $c_1$ | $c_2$ | .... | $c_p$ | ... | $c_m$ | $c_{m+1}$ | ... | $c_k$ | .... | $c_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $A_1$ | $A_2$ | .... | $A_p$ | ... | $A_m$ | $A_{m+1}$ | ... | $A_k$ | .... | $A_n$ |
| $x_1$ | $c_1$ | $b_1$ | 1 | 0 | ... | 0 | ... | 0 | $a_{1,m+1}$ | ... | $a_{1,k}$ | .... | $a_{1,n}$ |
| $x_2$ | $c_2$ | $b_2$ | 0 | 1 | ... | 0 | ... | 0 | $a_{2,m+1}$ | ... | $a_{2,k}$ | .... | $a_{2,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | .... | ... |
| $x_p$ | $c_p$ | $b_p$ | 0 | 0 | ... | 1 | ... | 0 | $a_{p,m+1}$ | ... | $a_{p,k}$ | .... | $a_{p,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | .... | ... |
| $x_m$ | $c_m$ | $b_m$ | 0 | 0 | ... | 0 | ... | 0 | $a_{m,m+1}$ | ... | $a_{m,k}$ | .... | $a_{m,n}$ |
| | | $\Delta_0$ | 0 | 0 | ... | 0 | ... | 0 | $\Delta_{m+1}$ | ... | $\Delta_k$ | .... | $\Delta_n$ |

.

*Таблица 5.2*

| Базис пер | $\mathbf{c}_0$ | $\mathbf{A'}_0$ | $c_1$ | $c_2$ | .... | $c_p$ | ... | $c_m$ | $c_{m+1}$ | ... | $c_k$ | .... | $c_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $A_1$ | $A_2$ | .... | $A_p$ | ... | $A_m$ | $A_{m+1}$ | ... | $A_k$ | .... | $A_n$ |
| $x_1$ | $c_1$ | $b'_1$ | 1 | 0 | ... | $a'_{1,p}$ | ... | 0 | $a'_{1,m+1}$ | ... | 0 | .... | $a'_{1,n}$ |
| $x_2$ | $c_2$ | $b_2$ | 0 | 1 | ... | $a'_{2,p0}$ | ... | 0 | $a'_{2,m+1}$ | ... | $0_k$ | .... | $a'_{2,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | .... | ... |
| $x_k$ | $c_k$ | $b'_p$ | 0 | 0 | ... | $a'_{p,p}$ | ... | 0 | $a'_{p,m+1}$ | ... | 1 | .... | $a'_{p,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | .... | ... |
| $x_m$ | $c_m$ | $b'_m$ | 0 | 0 | ... | $a'_{m,p}$ | ... | 0 | $a'_{m,m+1}$ | ... | 0 | .... | $a'_{m,n}$ |
| | | $\Delta'_0$ | 0 | 0 | ... | $\Delta'_p$ | ... | 0 | $\Delta'_{m+1}$ | ... | 0 | .... | $\Delta'_n$ |

3. $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов $j$, и для каждого такого $j$ по крайней мере одно из чисел $a_{ij}$ положительно.

В первом случае исходный план является оптимальным. Во втором случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов. В третьем случае можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится. Этот переход от одного опорного плана к другому осуществляется исключением из исходного базиса какой-нибудь из переменных $x_i$ и введением в него другой переменной $x_j$. В качестве переменной, вводимой в базис, можно взять любую из свободных переменных $x_k$, для которой $\Delta_k < 0$.

Для определения переменной, подлежащей исключению из базиса, находят $min(b_i / a_{ik})$ для всех $a_{ik} > 0$. Пусть этот минимум достигается при $i = p$. Тогда из базиса исключают переменную $x_p$, а число $a_{pk}$ называют *разрешающим элементом.*

Столбец и строку, на пересечении которых находится разрешающий элемент, называют *направляющими.*

После выделения направляющей строки и направляющего столбца находят новый опорный план и коэффициенты разложения новых базисных переменных через новые свободные переменные. Это легко реализовать, если воспользоваться методом Гаусса. Положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b_i' = \begin{cases} b_i - (b_p / a_{pk}) a_{ik} & при \ i \neq p \\ b_p / a_{pk} & при \ i = p \ . \end{cases} \tag{5.11}$$

Новые элементы $a_{ij}'$, соответствующие новому опорному плану, вычисляются по формулам

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - (a_{pj} / a_{pk}) a_{ik} & при \ i \neq p \\ a_{pj} / a_{pk} & при \ i = p \ . \end{cases} \tag{5.12}$$

После вычисления $b_i'$ и $a_{ij}'$ по формулам (5.11)-(5.12) их значения заносят в таблицу 5.2. Элементы индексной строки этой таблицы могут быть вычислены либо по формулам

$$\Delta_0' = \Delta_0 - (b_p / a_{pk}) \Delta_k , \quad \Delta_j' = \Delta_j - (a_{pj} / a_{pk}) \Delta_k , \tag{5.13}$$

либо на основании их определения.

Из формул (5.13) следует, что при переходе от одного опорного плана к другому наиболее целесообразно ввести в базис такую переменную $x_k$, для которой максимальным (по абсолютной величине) является число $(b_p / a_{pk}) \Delta_k$. На практике направляющий столбец определяют, исходя из максимальной абсолютной величины отрицательных оценок $\Delta_j$. Если же таких чисел несколько, то в базис следует вводить переменную с таким номером $j$, для которого значение коэффициента $c_j$ (при $\Delta_j < 0$) максимально.

Таким образом, переход от одного опорного плана к другому сводится к переходу от одной симплекс-таблицы к другой. Элементы новой симплекс-таблицы можно вычислять как с помощью рекуррентных формул (5.11)-(5.13), так и по правилам, непосредственно вытекающим из них.

Итак, нахождение оптимального опорного плана симплексным методом включает следующие этапы:

1) находят начальный опорный план;
2) составляют симплекс-таблицу;
3) выясняют, существует ли хотя бы одно отрицательное число $\Delta_j$.

Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же среди чисел $\Delta_j$ есть отрицательные, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану;

4) находят направляющий столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по модулю отрицательным числом $\Delta_j$, а направляющая строка – минимальным из отношений компонент столбца $\mathbf{A}_0$ к положительным компонентам направляющего столбца;

5) по формулам (5.11)-(5.13) определяют положительные компоненты нового опорного плана, новые компоненты столбцов $\mathbf{A}_j$ и оценки $\Delta_0'$ и $\Delta_j'$. Все эти числа записывают в новую симплекс-таблицу;

6) проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к пункту 4. Если же найденный опорный план оптимален или установлено, что задача неразрешима, то процесс решения задачи заканчивают.

**Указания к самостоятельной работе студентов по разделу «Линейное программирование. Часть 1»**

**Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по теме***: «Линейное программирование»*

***Форма текущего контроля***: *отчет* по решению практических задач.

**Типовые задачи:**

**Варианты заданий**

**Вариант №1.**

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

| Ресурсы | Нормы затрат ресурсов на одно изделие | | Общее количество ресурсов |
|---|---|---|---|
| | стол | шкаф | |
| Древесина I вида (куб. м) | 0.2 | 0.1 | 40 |
| Древесина II вида (куб. м) | 0.1 | 0.3 | 60 |
| Трудоемкость (человеко-часов) | 1.2 | 1.5 | 371.4 |
| Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.) | 600 | 800 | |

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

**Вариант №2.**

Для выпуска двух видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

| Тип ресурса | Нормы затрат ресурсов на единицу продукции | | Наличие ресурсов |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| Сырьё | 3 | 5 | 60 |
| Рабочее время | 22 | 14 | 400 |
| Оборудование | 10 | 14 | 128 |
| Прибыль на единицу продукции | 30 | 25 | |

Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

**Вариант №3.**

Для изготовления двух видов изделий А, В используется токарное, фрезерное и сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

| Тип оборудования | Затраты времени (станко-часов) на обработку одного изделия вида | | Общий фонд рабочего времени оборудования (ч) |
|---|---|---|---|
| | А | В | |
| Фрезерное | 2 | 4 | 120 |
| Токарное | 1 | 8 | 280 |
| Сварочное | 7 | 4 | 240 |
| Шлифовальное | 4 | 6 | 360 |
| Прибыль от реализации (руб.) | 100 | 140 | |

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

**Вариант №4.**
Для выпуска двух видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

| Тип ресурса | Нормы затрат ресурсов на единицу продукции | | Наличие ресурсов |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| Сырьё | 4 | 3 | 200 |
| Рабочее время | 1 | 2 | 80 |
| Оборудование | 2 | 2 | 130 |
| Прибыль на единицу продукции | 60 | 80 | |

Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

**Вариант №5.**
Для обработки деталей А, В используются станки I, II и III. В таблице указаны нормы затрат времени на обработку станком соответствующей детали, продажная цена единицы детали (в руб.), стоимость 1 ч работы станка и предельное время работы станка:

| Детали | Нормы времени | | Стоимость | Время работы станка |
|---|---|---|---|---|
| Станки | А | В | | |
| I | 0,2 | 0,1 | 30 | 40 |
| II | 0,6 | 0,3 | 10 | 60 |
| III | 0,2 | 0,1 | 20 | 30 |
| Цена | 20 | 16 | | |

Решить задачу определения оптимальной производственной программы, максимизирующей прибыль от реализации продукции.

**Вариант №6.**
Кондитерская фабрика для производства двух видов карамели А, В использует три вида основного сырья: сахар, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1т карамели приведены в таблице. В ней же указано общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано фабрикой, а также приведена прибыль от реализации 1т карамели данного вида.

| Вид сырья | Нормы расхода сырья (т) на 1 т карамели | | Общее количество сырья (т) |
|---|---|---|---|
| | А | В | |
| Сахар | 0.8 | 0.5 | 800 |
| Патока | 0.4 | 0.4 | 600 |
| Фруктовое пюре | - | 0.1 | 120 |
| Прибыль от реализации 1т продукции ( дол.) | 108 | 112 | - |

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

**Вариант №7.**
На швейной фабрике для изготовления двух видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода ткани на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида.

| Артикул ткани | Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида | | Общее количество ткани (м) |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| I | 1 | - | 180 |
| II | - | 1 | 210 |
| III | 4 | 2 | 800 |
| Цена одного изделия (дол.) | 9 | 6 | |

Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

**Вариант №8.**

Предприятие выпускает два вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

| Тип оборудования | Затраты времени (станко-часов) на единицу продукции вида | | Общий ресурс рабочего времени (станко-часов) |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| Токарное | 1 | 3 | 300 |
| Фрезерное | 2 | 1 | 180 |
| Шлифовальное | 1 | - | 80 |
| Прибыль от реализации (руб.) | 2 | 3 | |

**Вариант №9.**

Торговое предприятие планирует организовать продажу двух видов товара А, В используя при этом только 2 вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 кв.м. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров А, В и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице: Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли. Нормативы затрат приведены в таблице:

| Показатели | Товар | | Общее количество ресурсов |
|---|---|---|---|
| | А | В | |
| Расход рабочего времени на единицу товара (ч) | 0.6 | 0.8 | 840 |
| Использование площади торгового зала на на единицу товара (кв.м) | 0.1 | 0.2 | 180 |
| Прибыль от продажи единицы товара (дол.) | 5 | 8 | |

**Вариант №10.**

На производстве двух видов изделий А, В используется три различных вида сырья. Ресурсы сырья ограничены. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице:

| Вид сырья | Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции | | Общее количество ресурса |
|---|---|---|---|
| | А | В | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 4 | 2 | 180 |
| II | 3 | 1 | 210 |
| III | 1 | 2 | 244 |
| Цена единицы продукции (дол.) | 10 | 14 | |

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

## 5.2. Транспортная задача. Метод потенциалов

**Постановка задачи по критерию стоимости в матричной форме.** Математическая модель *транспортной задачи* формулируется следующим образом. В $m$ пунктах отправления $A_1$, $A_2,\ldots$, $A_m$ сосредоточен однородный груз в количествах соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц. Имеющийся груз необходимо доставить потребителям $B_1, \ldots, B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1, \ldots, b_n$ единиц. Стоимость перевозки единицы груза из $i$-го пункта отправления $(i=\overline{1,m})$ в $j$-ый пункт назначения $(j=\overline{1,n})$ равна $c_{ij}$. Требуется составить такой план перевозок, который бы полностью удовлетворял спрос потребителей в грузе, и при этом суммарные транспортные издержки были бы минимальны.

Если через $x_{ij}$ обозначить количество единиц груза, перевозимого из $i$-го пункта отправления в $j$-ый пункт назначения, то математическая постановка задачи будет состоять в определении минимального значения функции:

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=\overline{1,n}),$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$x_{ij}\ge 0 \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

***Определение.*** План $\mathbf{x}^*=(x_{ij}^*)$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записывают в виде *распределительной* таблицы (таблица 5.3).

*Таблица 5.3*

| Пункты отправления | Пункты назначения | | | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | ……. | $B_j$ | ……. | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | …… | $c_{1j}$ $x_{1j}$ | …….... | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| …….. | ……. | ……. | …….. | …….. | …… | ……. |
| $A_i$ | $c_{i1}$ $x_{i1}$ | ……. | $c_{ij}$ $x_{ij}$ | …….. | $c_{in}$ $x_{in}$ | $a_i$ |
| ……. | …….. | ….. | ……. | ……. | ….. | ……. |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | ….. | $c_{mj}$ | …….. | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_{mj}$ | | | |
| Потреб-ности | $b_1$ | ……. | $b_j$ | …….. | $b_n$ | |

Транспортная задача называется *закрытой*, если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Если же это условие не выполняется, то транспортная задача называется *открытой.*

Если запасы груза у поставщиков превышают суммарные потребности у потребителей, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(n+1)$-ый пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0 \ (i = \overline{1,m})$.

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный $(n+1)$ ый пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{m+1,j} = 0 \ (j = \overline{1,n})$.

В результате таких преобразований открытая модель транспортной задачи превращается в закрытую. Оптимальный план исходной задачи определяют из оптимального решения закрытой модели транспортной задачи.

Решение транспортной задачи можно проводить симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ее ограничений для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы.

Отметим, что решение транспортной задачи складывается из следующих этапов:

1) определяют начальный опорный план задачи;
2) найденный опорный план по определенным критериям проверяют на оптимальность;
3) если найденный опорный план оптимален, решение задачи заканчивается, а если нет, то переходят к новому опорному плану, который доставляет целевой функции меньшее значение, чем предыдущий план, и возвращаются к этапу 2. Таким образом, в результате конечного числа последовательных итераций, оптимизирующих решение получают оптимальный план.

**Построение начального опорного плана.** Начальный план транспортной задачи можно находить методом северо-западного угла, методом минимального элемента или методом аппроксимации Фогеля.

Рассмотрим метод минимального элемента. Построение начального опорного плана и его последующее преобразование будем проводить непосредственно в распределительной таблице (таблица 5.3). В соответствии с методом минимального элемента просматривают тарифы таблицы 5.3 и в первую очередь заполняют клетку с минимальным значением тарифа $c_{ij}$. При этом в клетку записывают максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивают, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен. В результате получают опорный план, который содержит $m+n-1$ загруженных клеток. В процессе заполнения таблицы могут быть одновременно исключены строка и столбец. Так бывает, когда полностью исчерпывается запас груза и полностью удовлетворяется спрос (вырожденная задача). В этом случае в свободные клетки надо записать число 0–*"нуль-загрузка",* условно считая такую клетку занятой. Однако число 0 записывают в те свободные клетки, которые не образуют циклов (см. ниже) с ранее занятыми клетками.

**Метод потенциалов.** Для определения оптимального плана транспортной задачи обычно используется *метод потенциалов,* который базируется на следующей теореме.

***Теорема*.** *Если для некоторого опорного плана* $\mathbf{x}^* = (x_{ij}^*)$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ *транспортной задачи существует система из* $m+n$ *чисел* $u_i^*$, $v_j^*$, *удовлетворяющих условиям* $u_i^*+v_j^*=c_{ij}$ *для* $x_{ij}^*>0$ *и* $u_i^*+v_j^*\le c_{ij}$ *для* $x_{ij}^*=0$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, *то* $\mathbf{x}^* = (x_{ij}^*)$*–оптимальный план транспортной задачи.*

***Определение.*** Числа $u_i^*$ и $v_j^*$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ называются *потенциалами* соответственно $i$-го пункта отправления $j$-го пункта назначения.

В соответствии с введенным понятием потенциалов каждому пункту отправления ставят в соответствие потенциал $u_i$ $(i=\overline{1,m})$, а каждому пункту назначения–потенциал $v_i$ $(j=\overline{1,n})$.

После того как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток вычисляют значения $s_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$. Если все числа $s_{ij}>0$, то найденный опорный план является оптимальным. Если же для некоторой свободной клетки $s_{ij}<0$, то найденный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого рассматривают все свободные клетки, для которых $s_{ij}<0$, и среди данных чисел выбирают наименьшее (наибольшее по абсолютной величине). Клетку, которой соответствует это число, следует заполнить.

Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых клеток и связанных с заполненной так называемым *циклом.*

***Определение.*** *Циклом* в распределительной таблице называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья–вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое–в столбце.

Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами.

После того, как для выбранной свободной клетки цикл построен, следует перейти к новому опорному плану. Для этого необходимо переместить грузы в пределах клеток, связанных с данной свободной клеткой циклом. Это перемещение производят по следующим правилам:

1) каждой из клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, приписывают определенный знак, причем свободной клетке–знак плюс, а всем остальным клеткам–поочередно знаки минус и плюс;

2) в данную свободную клетку переносят меньшее из чисел $x_{ij}$, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в плюсовых клетках, и вычитают из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а минусовая клетка, в которой стояло наименьшее из чисел $x_{ij}$, считается свободной.

В результате указанных перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Описанный выше переход от одного опорного плана к другому называется *сдвигом по циклу пересчета.*

Следует отметить, что при сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным, а именно остается равным $m+n-1$. При этом если в минусовых клетках имеется два (или более) одинаковых чисел $x_{ij}$, то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа $s_{ij}$ для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется отрицательных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же отрицательные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

## Указания к самостоятельной работе студентов по разделу «Линейное программирование. Часть 2»

**Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по теме***: «Линейное программирование»*

***Форма текущего контроля***: *отчет* по решению практических задач.

**Типовые задачи:**

### Варианты заданий

Имеются 3 пункта поставки однородного груза $A_1$, $A_2$, $A_3$ и 5 пунктов потребления этого груза $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$. На пунктах $A_i$ (i=1,2,3) груз находится соответственно в количествах $a_1$, $a_2$, $a_3$ условных единиц. В пункты $B_j$ (j=1,2,3,4,5) требуется доставить соответственно $b_j$ единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из $A_i$ в $B_j$ определена матрицей $C=\{c_{ij}\}$.

1). $a_1 = 200,\ a_2 = 170,\ a_3 = 180,$
$b_1 = 100,\ b_2 = 70,\ b_3 = 180,$
$b_4 = 150,\ b_5 = 50$

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 8 & 10 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

2). $a_1 = 120,\ a_2 = 250,\ a_3 = 150,$
$b_1 = 90,\ b_2 = 70,\ b_3 = 160,$
$b_4 = 130,\ b_5 = 70$

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 8 & 4 & 7 \\ 11 & 5 & 7 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

3). $a_1 = 280,\ a_2 = 350,\ a_3 = 250,$
$b_1 = 130,\ b_2 = 100,\ b_3 = 300,$
$b_4 = 270,\ b_5 = 80$

$$C=\begin{pmatrix} 13 & 8 & 10 & 9 & 6 \\ 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 14 & 7 & 10 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

4). $a_1 = 250,\ a_2 = 270,\ a_3 = 150,$
$b_1 = 100,\ b_2 = 170,\ b_3 = 160,$
$b_4 = 170,\ b_5 = 70$

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 16 \\ 8 & 9 & 15 & 4 & 18 \\ 10 & 11 & 13 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

5). $a_1 = 230,\ a_2 = 250,\ a_3 = 200,$
$b_1 = 100,\ b_2 = 180,\ b_3 = 160,$
$b_4 = 160,\ b_5 = 80$

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 11 & 5 & 3 \\ 9 & 5 & 17 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

6). $a_1 = 100,\ a_2 = 140,\ a_3 = 150,$
$b_1 = 60,\ b_2 = 50,\ b_3 = 80,$
$b_4 = 160,\ b_5 = 40$

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 1 & 7 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 3 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

7). $a_1 = 175,\ a_2 = 150,\ a_3 = 125,$
$b_1 = 105,\ b_2 = 75,\ b_3 = 50,$
$b_4 = 145,\ b_5 = 75$

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 12 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 11 & 5 & 6 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

8). $a_1 = 200,\ a_2 = 250,\ a_3 = 160,$
$b_1 = 120,\ b_2 = 120,\ b_3 = 100,$
$b_4 = 210,\ b_5 = 60$

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 15 & 16 & 12 & 20 \\ 21 & 9 & 10 & 9 & 7 \\ 12 & 15 & 16 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

9). $a_1 = 390,\ a_2 = 450,\ a_3 = 400,$
$b_1 = 310,\ b_2 = 250,\ b_3 = 150,$
$b_4 = 440,\ b_5 = 90$

$$C=\begin{pmatrix} 20 & 11 & 10 & 12 & 12 \\ 25 & 9 & 13 & 14 & 10 \\ 24 & 7 & 10 & 13 & 22 \end{pmatrix}$$

10). $a_1 = 300,\ a_2 = 360,\ a_3 = 400,$
$b_1 = 150,\ b_2 = 350,\ b_3 = 300,$
$b_4 = 150,\ b_5 = 110$

$$C=\begin{pmatrix} 9 & 15 & 7 & 20 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 11 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

## Практическая работа 6. Численные методы оптимизации
### 6.1. Нахождение минимума функции одной переменной

**Постановка задачи.** Требуется найти безусловный минимум функции одной переменной $Y = F(x)$, то есть, такую точку $x^* \in R$, что $F(x^*) = \min\limits_{x \in R} F(x)$.

Поставленная задача может быть решена с помощью необходимых и достаточных условий безусловного экстремума. Однако, во многих практических случаях найти производные от заданной функции не представляется возможным. Поэтому решение задач одномерной оптимизации численными методами является актуальным при изучении методов оптимизации.

**Численные методы одномерной минимизации.** К основным численным методам одномерной минимизации относят:

- метод равномерного поиска;
- метод деления отрезка пополам;

- метод дихотомии;
- метод золотого сечения;
- метод Фибоначчи;
- метод квадратичной интерполяции  и др.

**Метод равномерного поиска.** Метод относится к пассивным стратегиям поиска точки экстремума. Задается начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ и количество вычислений $N$. Вычисления производятся в $N$ равноотстоящих друг от друга точках. При этом интервал делится на $N+1$ равных интервалов. Путем сравнения величин $F(x_i), i = \overline{1, N}$ находится точка $x_k$, в которой значение функции наименьшее. Искомая точка $x^*$ считается заключенной в интервале $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.

**Алгоритм равномерного поиска точки минимума.** Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

1 этап. Задается начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ и $N$ - количество вычислений функции.

2 этап. Вычислить точки $x_i = a_0 + i\dfrac{L_0}{N+1}, i = \overline{1, N}$, равноотстоящие друг от друга.

3 этап. Вычислить значения функции в $N$ найденных точках $F(x_i), i = \overline{1, N}$.

4 этап. Среди точек $x_i, i = \overline{1, N}$, найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение $F(x_k) = \min\limits_{1 \le i \le N} F(x_i)$.

5 этап. Точка минимума $x^*$ принадлежит интервалу $x^* \in [x_{k-1}, x_{k+1}] = L_N$, на котором в качестве приближенного решения может быть выбрана точка $x^* \cong x_k$.

Для оценки сходимости используется характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности $R(N) = \dfrac{2}{N+1}$.

**Метод деления интервала пополам.** Метод относится к последовательным стратегиям и позволяет исключать из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации в точности половину текущего интервала неопределенности. Алгоритм уменьшения интервала основан на анализе величин функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре равные части). Поиск заканчивается, если длина текущего интервала неопределенности меньше заданной величины.

**Алгоритм поиска точки минимума методом деления интервала пополам.** Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

1 этап. Задается начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ и $\alpha > 0$ - требуемая точность.

2 этап. Задать $k = 0$.

3 этап. Вычислить среднюю точку $x_k^c = \dfrac{a_k + b_k}{2}, |L_{2k}| = b_k - a_k, F(x_k^c)$.

4 этап. Вычислить точки $y_k = a_k + \dfrac{|L_{2k}|}{4}, z_k = b_k - \dfrac{|L_{2k}|}{4}$, которые с $x_k^c$ делят интервал $L_{2k} = [a_k, b_k]$ на четыре равные части, и функции $F(y_k), F(z_k)$.

5 этап. Если $F(y_k) < F(x_k^c)$, исключить интервал $(x_k^c, b_k]$, приняв $b_{k+1} = x_k^c, a_{k+1} = a_k$. Средней точкой нового интервала становится точка $y_k : x_{k+1}^c = y_k$.

Перейти на этап 7.

Если $F(y_k) \ge F(x_k^c)$, перейти на этап 6.

6 этап. Если $F(z_k) < F(x_k^c)$, исключить интервал $[a_k, x_k^c)$, приняв $a_{k+1} = x_k^c, b_{k+1} = b_k$. Средней точкой нового интервала становится точка $z_k : x_{k+1}^c = z_k$.

Перейти на этап 7.

Если $F(z_k) \geq F(x_k^c)$, исключить интервалы $[a_k, y_k), (z_k, b_k]$, приняв $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = z_k$. Средней точкой нового интервала останется точка $x_k^c : x_{k+1}^c = x_k^c$.

7 этап. Вычислить $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

Если $|L_{2(k+1)}| \leq \alpha$, то процесс поиска завершается и $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения принимают середину последнего интервала $x^* \cong x_{k+1}^c$.

Если $|L_{2(k+1)}| > \alpha$, то принять $k = k+1$ и перейти к этапу 4.

Для оценки сходимости метода используется характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности $R(N) = \frac{1}{2^{N/2}}$, где $N$ количество вычислений функции.

**Метод дихотомии.** Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. Для их нахождения текущий интервал неопределенности делится пополам и в обе стороны от середины откладывается по $\frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon$ малое положительное число. Поиск заканчивается, если длина текущего интервала неопределенности меньше заданной величины.

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

1 этап. Задается начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ и $\alpha > 0$ - требуемая точность, $\varepsilon > 0$ - малое положительное число.

2 этап. Задать $k = 0$.

3 этап. Вычислить $y_k = \frac{a_k + b_k - \varepsilon}{2}, F(y_k), z_k = \frac{a_k + b_k + \varepsilon}{2}, F(z_k)$.

4 этап. Если $F(y_k) \leq F(z_k)$, принять $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$ и перейти к этапу 5.

Если $F(y_k) > F(z_k)$, принять $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k$.

5 этап. Вычислить $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

Если $|L_{2(k+1)}| \leq \alpha$, то процесс поиска завершается и $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения принимают середину последнего интервала $x^* \cong \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$.

Если $|L_{2(k+1)}| > \alpha$, то принять $k = k+1$ и перейти к этапу 3.

Для оценки сходимости метода используется характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности $R(N) = \frac{1}{2^{N/2}}$, где $N$ количество вычислений функции.

**Метод золотого сечения.** В методе золотого сечения в качестве двух внутренних точек выбираются точки золотого сечения.

Точка производит золотое сечение, если отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей части. На отрезке $[a_0, b_0]$ имеются две симметричные относительно его концов точки $y_0$ и $z_0$:

$$\frac{b_0-a_0}{b_0-y_0}=\frac{b_0-y_0}{y_0-a_0}=\frac{b_0-a_0}{z_0-a_0}=\frac{z_0-a_0}{b_0-z_0}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1.618..$$

Точка $y_0$ производит золотое сечение отрезка $[a_0,z_0]$, а точка $z_0$ - отрезка $[y_0,b_0]$.

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения. На каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Поиск заканчивается, если длина текущего интервала неопределенности меньше заданной величины.

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

1 этап. Задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$ и $\alpha>0$ - требуемая точность.

2 этап. Задать $k=0$.

3 этап. Вычислить $y_k=a_0+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0-a_0),\ z_k=a_0+b_0-y_0$.

4 этап. Вычислить $F(y_k), F(z_k)$.

5 этап. Если $F(y_k)\le F(z_k)$, то принять $a_{k+1}=a_k, b_{k+1}=z_k$ и $y_{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}-y_k,\ z_{k+1}=y_k$. Перейти к этапу 6.

Если $F(y_k)>F(z_k)$, принять $a_{k+1}=y_k, b_{k+1}=b_k$ и $y_{k+1}=z_k,\ z_{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}-z_k$.

6 этап. Вычислить $\Delta=|a_{k+1}-b_{k+1}|$ и проверить условие окончания поиска. Если $\Delta\le\alpha$, процесс поиска прекращается и $x^*\in[a_{k+1}+b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения принимают середину последнего интервала $x^*\cong\frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$.

Если $\Delta>\alpha$, принять $k=k+1$ и перейти к этапу 4.

**Метод Фибоначчи.** В методе Фибоначчи реализована последовательная стратегия, обеспечивающая максимальное гарантированное сокращение интервала неопределенности при заданном количестве вычисления функции. Эта стратегия опирается на числа Фибоначчи, определяемые по формуле

$$Fi_0=Fi_1=1,\ Fi_k=Fi_{k-1}+Fi_{k-2},\ k=2,3,4,\ldots.$$

Последовательность чисел Фибоначчи имеет вид 1,1,2,3,5,8,13,23,34,55,89,144,233,.. .

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и количество вычислений функции. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. Точки вычисления функции находятся с использованием последовательности из $N+1$ чисел Фибоначчи. На каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Поиск заканчивается, если длина текущего интервала неопределенности меньше заданной величины.

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

1 этап. Задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$, $\alpha>0$ - допустимая длина конечного интервала, $\varepsilon>0$ - константа различимости.

2 этап. Найти количество вычислений функции как наименьшее целое число, при котором удовлетворяется условие $Fi_N\ge\frac{|L_0|}{\alpha}$ и числа Фибоначчи $Fi_0,Fi_1,\ldots,Fi_N$.

3 этап. Задать $k=0$.

4 этап. Вычислить $y_k=a_0+\frac{Fi_{N-2}}{Fi_N}(b_0-a_0),\ z_k=a_0+\frac{Fi_{N-1}}{Fi_N}(b_0-a_0)$.

5 этап. Вычислить $F(y_k), F(z_k)$.

6 этап. Если $F(y_k) \le F(z_k)$, то принять $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k, z_{k+1} = y_k$, и $y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{Fi_{N-k-3}}{Fi_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Перейти к этапу 7.

Если $F(y_k) > F(z_k)$, принять $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k, y_{k+1} = z_k$ и $z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{Fi_{N-k-2}}{Fi_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$.

7 этап. Если $k \ne N-3$, то принять $k = k+1$ и перейти к этапу 5.

Если $k = N-3$, то всегда $y_{N-2} = z_{N-2} = \frac{(a_{N-2} + b_{N-2})}{2}$, то есть отсутствует точка нового вычисления функции. В этом случае следует принять $y_{N-1} = y_{N-2} = z_{N-2}; z_{N-1} = y_{N-1} + \varepsilon$. В точках $y_{N-1}$, $z_{N-1}$ вычисляются значения функции и находятся границы конечного интервала неопределенности:

- если $F(y_{N-1}) \le F(z_{N-1})$, то принять $a_{N-1} = a_{N-2}, b_{N-1} = z_{N-1}$;
- если $F(y_{N-1}) > F(z_{N-1})$, то принять $a_{N-1} = y_{N-1}, b_{N-1} = b_{N-2}$.

Процесс поиска завершается и $x^* \in [a_{N-1}, b_{N-1}]$. В качестве приближенного решения можно принять любую точку интервала, рекомендуется $x^* = \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}$.

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности $R(N) = \frac{1}{Fi_N}$, где $N$ количество вычислений функции.

### 6.2. Нахождение минимума функции многих переменных

Постановка задачи. Требуется найти минимум функции многих переменных $Y = F(\vec{x})$, то есть, такую точку $\vec{x}^* \in U$, что $F(\vec{x}^*) = \min\limits_{\vec{x} \in U} F(\vec{x})$, где множество точек $U$ определяется ограничениями вида

$g_j(\vec{x}) = 0,\ j = 1,...,m,\ m < n,$

$g_j(\vec{x}) \le 0,\ j = m+1,..., p$.

**Методы условной оптимизации.** Применение необходимых и достаточных условий условного экстремума эффективно для решения ограниченного числа задач, в которых имеются аналитические решения. Для решения большинства практических задач используются численные методы, которые можно разделить на две группы:

- методы последовательной безусловной оптимизации;
- методы возможных направлений.

Методы последовательной безусловной оптимизации основаны на преобразовании задачи условной оптимизации в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения в рассмотрение вспомогательных функций.

Основная идея методов первой группы состоит в том, чтобы аппроксимировать исходную задачу условной оптимизации некоторой вспомогательной задачей, решение которой менее сложно, чем решение исходной. Однако, при этом приходится решать последовательность таких задач, сходящихся к исходной. Причем, результаты решения предыдущей задачи используются в качестве начальных приближений при решении последующей задачи. Получение решений с практически необходимой точностью может быть достигнуто за конечное число шагов.

Ко второй группе методов относятся:

- метод проекции градиента;
- метод возможных направлений Зойтендейка.

Методы возможных направлений, используемые для решения задачи условной оптимизации, основаны на движении из одной допустимой точки, где выполнены все ограничения, к другой допустимой точке с лучшим значением целевой функции.

**Методы последовательной безусловной оптимизации.** К методам последовательной безусловной оптимизации относят:

- метод штрафов;
- метод барьеров;
- метод множителей;
- метод точных штрафных функций.

В методе штрафов (внешних штрафов) к целевой функции добавляется функция, интерпретируемая как штраф за нарушение каждого из ограничений. В результате генерируется последовательность точек, которая сходится к решению исходной задачи.

В методе барьеров (внутренних штрафов) к целевой функции исходной задачи добавляется слагаемое, которое не позволяет генерируемым точкам выходить за пределы допустимой области.

В методе множителей штрафная функция добавляется не к самой целевой функции, а к ее функции Лагранжа . В результате исследование на экстремум сводится к исследованию модифицированной функции Лагранжа.

В методе точных штрафных функций задача сводится к решению одной задачи безусловной оптимизации.

**Метод штрафов.** Алгоритм метода штрафов состоит из следующих этапов.

**1 этап**. Задать начальную точку $\bar{x}^0$ вне области допустимых решений, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для увеличения параметра штрафа, погрешность расчета $\varepsilon > 0$. Принять $k = 0$.

**2 этап**. Составить вспомогательную функцию

$$F(\bar{x}, r^k) = f(\bar{x}) + \frac{r^k}{2}\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(\bar{x})]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(\bar{x})]^2\},$$

где функция штрафа $P(\bar{x}, r^k) = \frac{r^k}{2}\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(\bar{x})]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(\bar{x})]^2\}$ - квадрат срезки.

$g_j^+(\bar{x})$ - срезка функции:

$$g_j^+(\bar{x}) = \max\{0, g_j(\bar{x})\} = \begin{cases} g_j(\bar{x}), & g_j(\bar{x}) > 0, \\ 0, & g_j(\bar{x}) \le 0. \end{cases}$$

**3 этап.** Найти точку $\bar{x}^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F(\bar{x}, r^k)$ по $\bar{x}$ с помощью какого либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

$F(\bar{x}^*(r^k), r^k) = \min\limits_{x \in R^n} F(\bar{x}, r^k)$ . При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $\bar{x}^k$. Вычислить функцию штрафа $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) = \frac{r^k}{2}\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(\bar{x}^*)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(\bar{x}^*)]^2\}$.

**4 этап**. Проверить выполнение условия окончания:

А) если $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) \le \varepsilon$, процесс поиска закончить: $\bar{x}^* = \bar{x}^*(r^k), \quad f(\bar{x}^*) = f(\bar{x}^*(r^k))$;

Б) если $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) > \varepsilon$, то принять $r^{k+1} = Cr^k, \quad \bar{x}^{k+1} = \bar{x}^*(r^k), k = k+1$ и перейти к этапу 2.

**Метод барьерных функций.** Алгоритм метода барьерных функций состоит из следующих этапов.

**1 этап**. Задать начальную точку $\bar{x}^0$ внутри области $U$, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для уменьшения величины параметра штрафа, погрешность расчета $\varepsilon > 0$. Принять $k = 0$.

**2 этап**. Составить вспомогательную функцию

$$F(\bar{x}, r^k) = f(\bar{x}) - r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\bar{x})} \quad \text{или} \quad F(\bar{x}, r^k) = f(\bar{x}) - r^k \sum_{j=1}^{m} \ln(-g_j(\bar{x})).$$

**3 этап.** Найти точку $\bar{x}^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F(\bar{x}, r^k)$ по $\bar{x}$ с помощью какого либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

$F(\bar{x}^*(r^k), r^k) = \min\limits_{x \in R^n} F(\bar{x}, r^k)$ с проверкой принадлежности текущей точки внутренности множества $U$. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $\bar{x}^k$.

Вычислить функцию штрафа $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) = -r^k \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{g_j(\bar{x}^*(r^k))}$ (обратная функция штрафа) или $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) = -r^k \sum\limits_{j=1}^{m} \ln[-g_j(\bar{x}^*(r^k))]$ (логарифмическая функция штрафа).

**4 этап**. Проверить выполнение условия окончания:

А) если $\left|P(\bar{x}^*(r^k), r^k)\right| \le \varepsilon$, то процесс поиска закончить, приняв $\bar{x}^* = \bar{x}^*(r^k), \quad f(\bar{x}^*) = f(\bar{x}^*(r^k))$;

Б) если $\left|P(\bar{x}^*(r^k), r^k)\right| > \varepsilon$, то принять $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}, \quad \bar{x}^{k+1} = \bar{x}^*(r^k), k = k+1$ и перейти к этапу 2.

## Указания к самостоятельной работе студентов по разделу «Численные методы оптимизации»

**Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по теме*: «*Численные методы оптимизации*»***

***Форма текущего контроля***: *отчет* по решению практических задач.

**Типовые задачи:**

**Задание 1.** Осуществить программную реализацию численного метода согласно варианту для поиска минимума функции.

| № варианта | Целевая функция | Метод |
|---|---|---|
| 1 | $f(x) = \sin(x),\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$. | Метод перебора |
| 2 | $f(x) = \cos(x),\ x \in [0, \pi]$. | Метод дихотомии |
| 3 | $f(x) = (x-2)^2,\ x \in [-2, 20]$. | Метод золотого сечения |
| 4 | $f(x) = (x-15)^2 + 5,\ x \in [2, 200]$. | Метод Фибоначчи |
| 5 | $f(x) = (x+5)^4,\ x \in [-10, 15]$. | Метод перебора |
| 6 | $f(x) = e^x,\ x \in [0, 100]$. | Метод дихотомии |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | $f(x)=x^2+2x-4,\ x\in[-10,20].$ | Метод золотого сечения |
| 8 | $f(x)=x^3-x,\ x\in[0,1].$ | Метод Фибоначчи |
| 9 | $f(x)=x^5-x^2,\ x\in[0,1].$ | Метод перебора |
| 10 | $f(x)=-x/e^x,\ x\in[0,3].$ | Метод дихотомии |
| 11 | $f(x)=x^4-x,\ x\in[0,1].$ | Метод золотого сечения |
| 12 | $f(x)=x^4/\ln x,\ x\in[1.1,1.5].$ | Метод Фибоначчи |
| 13 | $f(x)=(x+5)^4,\ x\in[-10,15].$ | Метод перебора |
| 14 | $f(x)=\cos(x),\ x\in[0,\pi].$ | Метод дихотомии |
| 15 | $f(x)=\sin(x),\ x\in[-\pi/2,\pi/2].$ | Метод золотого сечения |
| 16 | $f(x)=x^4-x,\ x\in[0,1].$ | Метод Фибоначчи |
| 17 | $f(x)=x^5-x^2,\ x\in[0,1].$ | Метод перебора |

**Задание 2.** Осуществить программную реализацию численного метода согласно варианту для поиска максимума заданной функции:

Для нечетных вариантов целевая функция имеет вид:

$$f(x,y)=A_1\exp\left\{-\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2-\left(\frac{y-c_1}{d_1}\right)^2\right\}+A_2\exp\left\{-\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2-\left(\frac{y-c_2}{d_2}\right)^2\right\}$$

Для четных вариантов целевая функция имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{A_1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2+\left(\frac{y-c_1}{d_1}\right)^2}+\frac{A_2}{1+\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2+\left(\frac{y-c_2}{d_2}\right)^2}$$

| **№ варианта** | $A_1$ | $A_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ | $d_1$ | $d_2$ | **Метод поиска** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | метод наискорейшего спуска |
| **2** | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | метод Хука и Дживса |
| **3** | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | метод средней точки |
| **4** | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | метод хорд |
| **5** | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | метод наискорейшего спуска |
| **6** | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | метод Ньютона |
| **7** | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | метод Ньютона - Рафсона |
| **8** | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | метод Марквардта |
| **9** | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | метод градиентного спуска |
| **10** | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | метод наискорейшего спуска |
| **11** | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | метод сопряженных градиентов |
| **12** | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | метод Ньютона |
| **13** | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | метод Ньютона - Рафсона |
| **14** | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | метод градиентного |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | спуска |
| **15** | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | метод наискорейшего спуска |
| **16** | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | метод сопряженных градиентов |
| **17** | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | метод Ньютона |

**Задание 3.**

1. Решить задачу нелинейного программирования с использованием барьерных и штрафных функций.
2. Исследовать сходимость метода штрафных функций в зависимости от выбора функций штрафа и стратегии выбора коэффициентов штрафа, осуществляя спуск из различных исходных точек. Исследовать сходимость, фиксируя точность определения минимума, количество итераций метода и степень нарушения ограничений в зависимости от задаваемой величины коэффициента штрафа.
3. Условие: целевая функция из практической работы № 2.

Варианты ограничений:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $x - y \le 1,\ 0 \le x \le 4$ | **10** | $3x + 2y \le 6$ |
| **2** | $x + y \le 1$ | **11** | $2x + y \le 2$ |
| **3** | $x + 3y \le 3$ | **12** | $2x + 3y \le 6$ |
| **4** | $3x + y \le 3$ | **13** | $3x + y \le 3$ |
| **5** | $2x - 2y \le 1$ | **14** | $2x - 2y \le 1$ |
| **6** | $2x + y \le 1$ | **15** | $2x + y \le 1$ |
| **7** | $x + y \le 1$ | **16** | $x + y \le 1$ |
| **8** | $x + 2y \le 1$ | **17** | $x + 2y \le 1$ |
| **9** | $2x + 2y \le -1$ | | |