Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

Кафедра экономической математики, информатики и статистики

И.Г. БОРОВСКОЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебно-методическое пособие

Томск-2017

Боровской И.Г.

Методические указания по выполнению практических и самостоятельных работ по дисциплине Численные методы. Учебно-методическое пособие для студентов направления 09.04.02 - Информационные системы и технологии (Управление проектами в информационных системах) / И.Г. Боровской. – Томск: ТУСУР, 2017. – 109 с.

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с решением кафедры экономической математики, информатики и статистики для студентов магистерской подготовки направления 09.04.02 - Информационные системы и технологии (Управление проектами в информационных системах)

Составитель: профессор И.Г. Боровской

Учебно-методическое пособие утверждено на заседании кафедры экономической математики, информатики и статистики 20 октября 2017 г., протокол № 1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Численные методы» относится к математическому и естественно-научному циклу (вариативная часть) дисциплин, задачей которой является формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков в использовании численных методов при решении задач поиска нулей функций одной переменной, решения систем линейных и нелинейных уравнений, вычисления собственных чисел и собственных векторов матриц, обращения матриц, интерполирования функций, численного дифференцирования и интегрирования функций, решения дифференциальных и интегральных уравнений.

Предметом изучения в рассматриваемой дисциплине являются модели и алгоритмы численного решения прикладных задач из различных областей науки и техники.

Целью дисциплины является изучение теоретических методов и освоение практических навыков в использовании численных методов при решении различных прикладных задач.

Требования к результатам освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины «Численные методы» направлен на формирование компетенции ОПК-6: способность анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями.

В результате освоения содержания дисциплины «Численные методы» студент должен:

Знать

- особенности математических вычислений, реализуемых на ЭВМ;
- теоретические основы численных методов, устойчивость и сложность алгоритма;
- численные методы линейной алгебры;
- решение нелинейных уравнений и систем;
- численное интегрирование и дифференцирование;
- методы приближения функции;
- методы решения дифференциальных уравнений;
- методы решения интегральных уравнений;

Уметь

- строить алгоритмы реализации численных методов решения прикладных программ;
- разрабатывать программы, реализующие численные методы.

Владеть

- навыками применения базового инструментария численных методов для решения прикладных задач;
- методикой построения, анализа и применения численных моделей в профессиональной деятельности.

Задания для практических работ по численным методам

Отчет по заданию должен содержать следующий материал по каждой задаче:

1) постановка задачи;
2) необходимый теоретический материал;
3) графический материал;
4) результаты вычислительного эксперимента;
5) анализ полученных результатов с выводами;
6) тексты программ.

Задание 1. Численное решение нелинейного уравнения

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 1.

Задача 1.1. Дано уравнение $f(x)=0$ ($g(x) = 0$) в таблице согласно номеру варианта. Найти с точностью $\xi=10^{-5}$ все решения заданного уравнения на интервале $[a,b]$. Для решения задачи использовать методы: бисекции, простой итерации, Ньютона, секущих, ложного положения и Стеффенсена.

Порядок решения

1. Найти аналитическое решение уравнения $f(x)=0$.

2. Используя пакет MathCAD, локализовать корни уравнения $f(x)=0$ графически.

3. Составить программу в пакете MathCAD, найти корни уравнения методами: бисекции, простой итерации (предварительно преобразовав уравнение), Ньютона, секущих, ложного положения и Стеффенсена при одном и том же начальном приближении. В качестве критерия окончания итераций в методе Ньютона и его модификациях можно использовать простую оценку $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

4. В случае кратных корней кратности m найти корни уравнения при помощи модификации метода Ньютона по формуле (3.9).

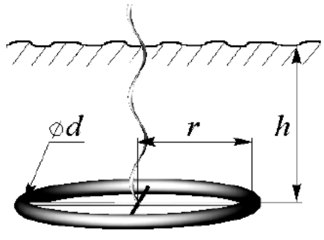
5. Занести результаты в таблицу. Сделать анализ полученных результатов.

x_i	Метод			
	бисекции	простой итерации	Ньютона	…
x_1				
x_2				
…				
Δ				
n				

Исходные данные к задаче 1

Вариант	$f(x)$	$[a;b]$	$g(x)$	$[a;b]$
1	$\sin^2 x - 5/6 \sin x + 1/6$	$[-3;3]$	$\cos x - x/2$	$[-2;2]$
2	$\sin^2 x - 1/6 \sin x - 1/6$	$[-3;3]$	$\cos x - x^2$	$[-1;1]$
3	$\sin^2 x - 1/2 \sin x - 1/8$	$[-3;3]$	$\cos(2x) - x^2/2$	$[-1,5;1,5]$
4	$\cos^2 x - 5/6 \cos x + 1/6$	$[-3;3]$	$\sin x - x^2 + 1$	$[-1,5;1,5]$
5	$\cos^2 x - 1/6 \cos x - 1/6$	$[-3;3]$	$\sin(2x) - x^2/2$	$[-1,5;1,5]$
6	$\ln^2 x - 1/4 \ln x - 1/8$	$[0,1;3]$	$\sin x - x^2/2$	$[-1,5;1,5]$
7	$\ln^2 x - 0,3 \ln x - 0,4$	$[0,1;3]$	$\cos x^2 - x/2$	$[-2;2]$
8	$\ln^2 x - 0,1 \ln x - 0,3$	$[0,1;3]$	$\cos x - x$	$[-1;1]$
9	$\ln^2 x + 1,1 \ln x + 0,3$	$[0,1;3]$	$\sin x - x^2/2 + 1$	$[-2;2]$
10	$\cos^2 x - 0,3 \cos x - 0,4$	$[-3;3]$	$\sin x^2 - x^2/2$	$[-1,5;1,5]$
11	$\cos^2 x - 0,1 \cos x - 0,3$	$[-3;3]$	$\sin(2x^2) - \tilde{o}^2/2$	$[-1,5;1,5]$
12	$\cos^2 x + 1,1 \cos x + 0,3$	$[-3;3]$	$\cos(x/2) - x/4$	$[-4;4]$
13	$\cos^2 x + 0,2 \cos x - 0,24$	$[-3;3]$	$\cos x^2 - x^2$	$[-1;1]$
14	$\cos^2 x - 0,2 \cos x - 0,35$	$[-3;3]$	$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg} x + 1/4$	$[-1,5;1,5]$
15	$\cos^2 x - 0,3 \cos x - 0,4$	$[-3;3]$	$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x/4 + 1/64$	$[-1,5;1,5]$
16	$\sin^2 x + 0,2 \sin x - 0,24$	$[-3;3]$	$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg} x/4 + 1/64$	$[-1,5;1,5]$
17	$\sin^2 x - 0,2 \sin x - 0,35$	$[-3;3]$	$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x + 1/4$	$[-1,5;1,5]$
18	$\sin^2 x - 0,3 \sin x - 0,4$	$[-3;3]$	$\mathrm{tg}^2 x - 1,2 \mathrm{tg} x + 0,36$	$[-1,5;1,5]$
19	$\cos^2 x - 1/4 \cos x - 1/8$	$[-3;3]$	$\ln^2 x - 1,2 \ln x + 0,36$	$[1;2]$
20	$\cos^2 x - 1/2 \cos x - 1/18$	$[-3;3]$	$\ln^2 x - 1,6 \ln x + 0,64$	$[1;3]$
21	$\sin^2 x - 0,3 \sin x - 0,4$	$[-3;3]$	$\cos x - \sqrt{x}$	$[0;1]$
22	$\sin^2 x - 0,1 \sin x - 0,3$	$[-3;3]$	$\sin(2x) - \sqrt{x}$	$[0;1]$
23	$\sin^2 x + 1,1 \sin x + 0,3$	$[-3;3]$	$e^{x/2} - x - 1,5$	$[-5;3]$
24	$\lg^2 x - 0,3 \lg x - 0,4$	$[0,1;10]$	$e^{-x/2} + x - 1,5$	$[-3;5]$
25	$\lg^2 x - 0,1 \lg x - 0,3$	$[0,1;10]$	$e^{-x^2} - x^2$	$[-1;1]$
26	$\lg^2 x + 1,1 \lg x + 0,3$	$[0,1;10]$	$e^{-x} - 2 + x^2$	$[-1,5;1,5]$
27	$\mathrm{tg}^2 x - 0,1 \mathrm{tg} x - 0,3$	$[-1,5;1,5]$	$e^{-x/2} - 2 + x^2$	$[-1,5;1,5]$
28	$\mathrm{tg}^2 x - 0,3 \mathrm{tg} x - 0,4$	$[-1,5;1,5]$	$e^{-x/3} - 3 + x^2$	$[-2;2]$
29	$\mathrm{tg}^2 x + 1,1 \mathrm{tg} x + 0,3$	$[-1,5;1,5]$	$e^{-x^2/3} - 1 + x^2$	$[-1;1]$
30	$\mathrm{tg}^2 x - 0,2 \mathrm{tg} x - 0,35$	$[-1,5;1,5]$	$e^{-x^2/4} - 1 + x^2/2$	$[-1,5;1,5]$

З а д а ч а 1.2. Заземлитель в форме кольца радиусом r расположен в грунте на глубине h.



Его сопротивление при h >> r рассчитывается по формуле

$$R = \frac{1}{4\pi^2 rG}\left[\frac{\pi r}{h} + \ln\left(\frac{16r}{d}\right)\right],$$

где π = 3,14…;

G – электропроводность грунта;

d – диаметр проводника, из которого изготовлено кольцо.

Задавшись параметрами h и d, указанными в таблице, а также приняв G = 0,03 1/Ом·м, найдите радиус r, обеспечивающий требуемое сопротивление заземления R .

Для вычисления использовать метод Ньютона.

Вариант	*h*, м	*d*, м	*R*, Ом	Вариант	*h*, м	*d*, м	*R*, Ом
1	1,2	0,03	17	9	0,9	0,02	19
2	1,1	0,02	25	10	1,7	0,023	18
3	0,9	0,015	22	11	1,1	0,016	15
4	1,5	0,025	15	12	1,4	0,03	20
5	1,6	0,014	16	13	1	0,012	16
6	1	0,035	21	14	1,2	0,025	21
7	1,3	0,04	14	15	1,5	0,032	22
8	1,4	0,012	20	16	1,3	0,038	24

З а д а ч а 1.3. В интегральных схемах используются плоские катушки индуктивности в виде круглой металлической спирали. Индуктивность такой катушки (в наногенри) приближенно определяется по формуле

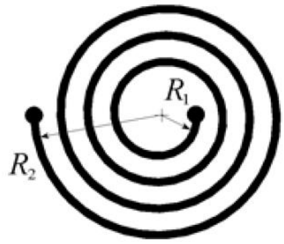
$$L = 0,4\cdot\pi N^2 a\left[\ln\frac{8a}{c} + \frac{1}{24}\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\ln\frac{8a}{c} + 3,583\right) - \frac{1}{2}\right],$$

где π = 3,14…;

N – число витков;

$a = (R_1 + R_2)/2$;

$c = R_2 - R_1$, R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы.



Все размеры в формулах указаны в миллиметрах.

Найдите радиус R_2, удовлетворяющий требуемому значению индуктивности L при указанных в таблице N и R_1. Для вычисления использовать метод ложного положения.

Вариант	R_1, мм	N	L, нГн	Вариант	R_1, мм	N	L, нГн
17	1,5	6	250	24	0,9	4	190
18	2	3,5	120	25	1,6	3	180
19	1,3	5	230	26	1,2	2	150
20	2	2	35	27	1,5	1,5	200
21	1,5	3	77	28	1,8	2,3	260
22	2	2,5	68	29	1,4	2	210
23	1,3	4	140	30	1,3	1,7	220

Примерные контрольные вопросы

1. Как и зачем выполняется отделение корня?
2. Каково условие сходимости метода ложного положения?
3. Чем отличаются итерационные методы ложного положения и секущих?
4. К какому виду нужно преобразовать уравнение для метода простых итераций?
5. В чем заключается условие сходимости метода простых итераций?
6. В чем отличие методов касательной и секущей, и что у них общего?

Задание 2. Численное решение систем линейных уравнений прямыми методами

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 2.

Задача 2.1. Заданы матрица $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ системы уравнений порядка n в матричной форме $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ в таблице согласно номеру варианта. Найти решение заданной системы уравнений. Для решения задачи использовать метод Гаусса. Исследовать зависимость погрешности решения системы от погрешности задания правой части системы.

Порядок решения

1. Найти решение системы с помощью встроенной функции X = lsolve(A,**b**).

2. Составить программы в пакете MathCAD, найти решение **x** исходной системы уравнения методом Гаусса и сравнить с полученным в п. 1.

3. При помощи составленной программы в пакете MathCAD, найти решение систем

$$A\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{b}}^k,\ k = 1,2,\ldots,n,$$

где $\tilde{\mathbf{b}}^k = \mathbf{b} + \Delta^k$ − измененная правая часть,

Δ^k − компоненты погрешности равные:

а) $\Delta_k^k = \Delta = 0{,}1$; á) $\Delta_k^k = \Delta = 0{,}2$ при $i = k$ и $\Delta_i^k = 0$ при $i \neq k$.

Принимая решение $\mathbf{x}$, полученное в п. 2 за точное, вычислить вектор относительных погрешностей

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)^{-1}, \quad \delta_i = \frac{\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^i \right\|_\infty}{\left\| \mathbf{x} \right\|_\infty}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Норма $\left\| \mathbf{x} \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

4. На основе вычисленного вектора δ построить две гистограммы для указанных значений вектора погрешностей Δ^k.

5. По гистограмме определить ту компоненту b_m вектора правой части $\mathbf{b}$, которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения.

6. Оценить верхнюю границу теоретической погрешности по формуле

$$E(x^m) = \mathrm{cond}(A) \cdot \delta(b_m).$$

Сравнить значение $E(x^m)$ со значением практической погрешности δ_m. Объяснить полученные результаты.

Исходные данные к задаче 2.1

Вариант	Матрица A	Матрица B
1	$\begin{pmatrix} 0.8 & -8.9 & 0.5 & -8.1 & 7.8 & -7.1 & 8.6 & -9.1 & -3.3 & -2 \\ 8.9 & 0.7 & 3.9 & -4.8 & 0.5 & -2 & 1.7 & 3.7 & -1.3 & -9.9 \\ 2 & 1.5 & -5.6 & -7.9 & -8.4 & 7.1 & 6.2 & 3.8 & 0.6 & -7.1 \\ 2 & 1.5 & -5.6 & -9.9 & -8.4 & 7.1 & 6.2 & 3.8 & 0.6 & -7.2 \\ -5.2 & 8 & 8.1 & -8.4 & -6.6 & 5.5 & -5.8 & -9.9 & -7.7 & -3.8 \\ -9.2 & -6.2 & -6.9 & 7.7 & -6.1 & 2.9 & 8.2 & 8.4 & -7 & 1.4 \\ 8.9 & 1.6 & -4.9 & -3 & 5.9 & -8.6 & 1.8 & -6 & 2.9 & 2.1 \\ -1.2 & -2.1 & 1.8 & 9 & -2.2 & -6.3 & 1.5 & 2.5 & -9 & -4.8 \\ 7.9 & 4.6 & -2.1 & 8.1 & -2.2 & -2.9 & 4.9 & 4.8 & -6 & 3.6 \\ -2.6 & -7.8 & -5.9 & 3.1 & 3.8 & -8.4 & -9.4 & -3.9 & -7.1 & -8.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.3 \\ 1.6 \\ 2.6 \\ 0.1 \\ 3.9 \\ -6.2 \\ -6.4 \\ -0.9 \\ -8.0 \\ -8.1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -7.2 & 1 & 0.5 & -4 & -3.1 & 2.2 & 9.7 & -7 & 4.2 & 5.5 \\ 2.4 & 3.8 & 1.9 & 1 & -5.1 & -0.1 & 3.4 & 2.5 & 6 & 9.8 \\ 2.6 & 1.8 & 0.9 & -1 & 8.8 & -5 & 4.6 & 2.5 & 2.8 & 1.1 \\ -1.1 & 9.9 & 4.9 & -6.5 & -3.4 & 3.1 & -1.5 & 3.6 & -0 & 6.1 \\ -9.9 & -2.5 & -1.3 & 7.8 & 3 & 4.7 & 9.1 & -2.7 & 8.1 & -0.9 \\ 7.4 & -9.2 & -4.6 & -6.7 & -7.7 & -7.6 & 1.6 & 4.6 & 3.4 & 6.2 \\ 9.9 & -5.9 & -3 & 1.6 & 9.2 & -2.4 & -7.6 & -9.1 & 5.2 & -10 \\ -1.5 & -0.8 & -0.4 & 1.2 & 8.4 & 7.1 & -0.2 & 4.9 & -4.9 & 5.8 \\ 1.1 & 0.4 & 0.2 & 4.6 & 8.3 & 5.9 & -2.1 & -8.9 & -10 & 5.1 \\ -6.9 & 3.4 & 1.7 & 6 & 9.6 & -4.1 & 7.5 & -8 & -7.1 & -3.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10.0 \\ -6.1 \\ 1.7 \\ -3.0 \\ 6.5 \\ -6.5 \\ 4.2 \\ -3.9 \\ -8.2 \\ -7.1 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица *A*	Матрица *B*
3	$\begin{pmatrix} -1.8 & 2.0 & -0.5 & 9.0 & 6.7 & 6.0 & 7.4 & 8.8 & 8.9 & -7.4 \\ -0.5 & -9.5 & -0.9 & -7.3 & -5.7 & 5.9 & 3.2 & 5.6 & 6.8 & -0.0 \\ -1.1 & 1.2 & -0.3 & 5.4 & 4.0 & 3.6 & 4.4 & 5.3 & 5.2 & -4.5 \\ -5.0 & -3.1 & 3.3 & 8.7 & -7.9 & 1.2 & 7.9 & 7.4 & -2.2 & 3.4 \\ -4.4 & 9.6 & 1.9 & -7.4 & 2.0 & -2.9 & -0.4 & 9.0 & 9.7 & 0.3 \\ 8.0 & -3.5 & 1.4 & -3.0 & -4.2 & 8.5 & 6.1 & 3.7 & 5.3 & 4.4 \\ -3.2 & -0.3 & 6.8 & 0.8 & 1.4 & 2.8 & 5.2 & -6.8 & 5.7 & -1.2 \\ 0.1 & -8.6 & 9.6 & 2.3 & -2.6 & 7.2 & -5.2 & -9.0 & -6.6 & -5.6 \\ 5.7 & -8.3 & -7.3 & 1.3 & 2.6 & -0.9 & -3.3 & -4.3 & 7.5 & 7.4 \\ 5.9 & 2.7 & 1.9 & -6.1 & -5.4 & -5.2 & -1.9 & -4.6 & -2.4 & -5.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.8 \\ -7.6 \\ -9.8 \\ 0.6 \\ 2.0 \\ -6.7 \\ -1.0 \\ -8.9 \\ 5.7 \\ 0.4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2.1 & -2.8 & 9.5 & 7.9 & 9.1 & -6.0 & -2.9 & -4.2 & -8.0 & 4.2 \\ 3.4 & -9.9 & 2.1 & -4.2 & 4.9 & 8.2 & 2.1 & 5.7 & 0.9 & -2.1 \\ -8.0 & -9.5 & -4.8 & -5.4 & 7.2 & -9.0 & -8.9 & -8.3 & 9.3 & 7.6 \\ -1.9 & 3.2 & 8.9 & -10.0 & -9.0 & -1.6 & 2.1 & -1.7 & 2.5 & -9.9 \\ -2.1 & -3.7 & 7.1 & -6.0 & -0.6 & -1.3 & -1.6 & 1.6 & -3.3 & 9.0 \\ -1.6 & 5.5 & -7.0 & -8.3 & -0.6 & -3.3 & 2.3 & -4.4 & -1.2 & -5.6 \\ -2.4 & -2.8 & -1.4 & -1.6 & 2.2 & -2.7 & -2.6 & -2.5 & 2.8 & 2.3 \\ 4.7 & -8.4 & 6.9 & -2.8 & -8.1 & -6.2 & 8.3 & -3.8 & -3.2 & -4.6 \\ -6.6 & -8.7 & 9.3 & -1.1 & -6.4 & -0.6 & -5.0 & -4.5 & 6.4 & 2.6 \\ -9.9 & -4.2 & 7.2 & 4.1 & 8.4 & -8.1 & -8.5 & -2.3 & 0.3 & -7.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.5 \\ 3.5 \\ -9.8 \\ -4.5 \\ 1.8 \\ 6.8 \\ -0.3 \\ 4.9 \\ -0.8 \\ 4.9 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -10.0 & -6.1 & 1.7 & -3.0 & 6.5 & -6.5 & 4.2 & -3.9 & -8.2 & -7.1 \\ 9.8 & -7.6 & -9.8 & 0.6 & 2.0 & -6.7 & -1.0 & -8.9 & 5.7 & 0.4 \\ 7.5 & 9.1 & 0.8 & -0.8 & 7.2 & 5.6 & 9.9 & 2.2 & -4.7 & 6.8 \\ -2.5 & 3.5 & -9.8 & -4.5 & 1.8 & 6.8 & -0.3 & 4.9 & -0.8 & 4.9 \\ 2.0 & 4.7 & 1.4 & -7.0 & -1.5 & 0.3 & 5.0 & -6.6 & -0.2 & 4.0 \\ -7.0 & -7.2 & 3.9 & -1.5 & 9.3 & -6.9 & 6.4 & -6.2 & 6.3 & -6.9 \\ -9.0 & -5.5 & 1.5 & -2.7 & 5.8 & -5.9 & 3.8 & -3.5 & -7.4 & -6.4 \\ -0.6 & 6.9 & -0.9 & 9.7 & 4.8 & -6.1 & 6.8 & 0.0 & -9.5 & 1.5 \\ 0.6 & 6.9 & 3.2 & 6.8 & -7.8 & -3.7 & -4.3 & -7.2 & 6.7 & 2.0 \\ -4.9 & -10.0 & 6.1 & -5.8 & 1.1 & -7.7 & 5.0 & 0.9 & -1.3 & 3.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.0 \\ -7.2 \\ 3.9 \\ -1.5 \\ 9.3 \\ -6.9 \\ 6.4 \\ -6.2 \\ 6.3 \\ -6.9 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1.9 & 7.5 & -5.3 & -5.3 & 3.1 & 5.2 & 0.2 & -1.6 & 9.7 & -9.6 \\ -8.1 & -3.7 & 6.6 & -0.1 & 8.4 & -7.7 & -1.6 & 9.9 & -9.4 & -7.6 \\ 1.8 & 1.5 & 1.8 & -0.8 & -0.3 & 0.4 & -1.3 & -1.8 & 0.1 & -1.9 \\ 8.9 & 7.2 & 8.8 & -3.9 & -1.5 & 2.1 & -6.7 & -9.0 & 0.0 & -9.7 \\ 0.7 & 7.0 & -3.0 & -7.7 & 1.0 & 5.3 & 8.4 & -5.8 & -1.0 & 7.5 \\ 0.8 & -5.0 & 2.9 & 9.1 & -7.1 & 7.2 & 4.8 & 6.1 & -7.6 & 8.9 \\ -5.9 & -6.0 & 5.2 & 9.1 & 2.7 & -1.5 & -2.1 & 5.3 & 3.8 & -0.0 \\ -8.3 & -6.4 & 2.4 & 9.6 & 9.6 & -8.9 & -1.7 & -2.0 & -4.0 & -9.0 \\ 1.9 & -3.3 & 8.5 & -9.5 & 2.7 & -7.9 & 2.0 & -9.6 & 9.6 & -8.5 \\ 6.4 & 8.1 & 4.2 & 2.3 & -4.5 & 2.3 & 6.8 & 2.9 & 9.2 & -9.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.6 \\ 6.9 \\ -0.9 \\ 9.7 \\ 4.8 \\ -6.1 \\ 6.8 \\ 0.0 \\ -9.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Матрица B
7	$\begin{pmatrix} 8.0 & 3.3 & 1.8 & -3.3 & 0.2 & -9.8 & 1.0 & 8.3 & -4.5 & -2.5 \\ 0.9 & 8.0 & -4.9 & 7.2 & 7.8 & 7.7 & -5.2 & -1.1 & -9.7 & 4.2 \\ 3.4 & -6.8 & -6.2 & 10.0 & -6.8 & 8.6 & 7.1 & -4.6 & 3.4 & 10.0 \\ 2.5 & 3.9 & -4.2 & 9.9 & 7.1 & -0.3 & 2.9 & 2.8 & 7.6 & 7.3 \\ 1.6 & 0.7 & 0.4 & -0.7 & 0.1 & -2.0 & 0.2 & 1.7 & -0.9 & -0.5 \\ 7.6 & -7.6 & -7.9 & 9.5 & 4.9 & -7.2 & 4.4 & 0.3 & -4.7 & -2.3 \\ 5.9 & -7.2 & -3.9 & -2.3 & 4.0 & 9.9 & 5.4 & -5.3 & -7.6 & -3.5 \\ 6.4 & 2.2 & -8.3 & 6.1 & 4.4 & -2.7 & 3.0 & -0.2 & -3.8 & 6.4 \\ -6.8 & -2.8 & -7.7 & 2.2 & -6.5 & 0.4 & -9.1 & -5.8 & 9.8 & -9.3 \\ 5.2 & -8.9 & 6.3 & -3.1 & 3.0 & -4.1 & 0.7 & -3.3 & -2.0 & -6.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4.9 \\ -10.0 \\ 6.1 \\ -5.8 \\ 1.1 \\ -7.7 \\ 5.0 \\ 0.9 \\ -1.3 \\ 3.9 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -0.1 & 8.0 & -5.4 & 4.2 & 4.3 & -3.9 & 5.6 & 9.2 & 5.9 & -9.1 \\ -8.5 & 4.6 & 3.7 & 4.8 & 0.9 & -6.3 & 9.3 & 9.1 & 0.4 & 4.7 \\ 0.1 & -6.5 & 3.7 & -5.0 & 5.2 & -3.4 & -6.4 & 9.5 & 3.6 & -9.4 \\ -3.6 & -9.7 & -5.4 & -3.0 & 9.1 & -0.8 & 1.3 & -4.5 & -1.4 & -6.9 \\ 6.3 & 5.7 & -6.2 & -8.6 & -0.5 & 0.6 & 10.0 & -4.0 & -0.5 & -6.9 \\ -4.3 & 2.3 & 1.9 & 2.4 & 0.5 & -3.1 & 4.7 & 4.6 & 0.2 & 2.4 \\ -6.5 & 3.8 & -7.1 & 2.2 & -4.5 & -7.7 & -6.5 & -1.0 & 0.7 & -3.9 \\ 5.5 & 7.8 & -7.9 & -0.1 & 3.6 & 0.7 & -4.1 & 2.3 & -5.5 & 3.2 \\ 2.5 & 2.6 & -5.9 & 6.7 & -0.7 & -0.9 & -3.6 & -6.7 & -3.7 & 0.9 \\ -4.0 & -6.4 & 5.0 & -8.5 & 2.4 & -3.3 & 8.3 & 5.0 & 6.7 & -7.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.6 \\ 7.9 \\ -5.5 \\ -1.8 \\ 2.6 \\ -1.0 \\ 2.0 \\ 7.1 \\ 2.5 \\ 1.3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -6.6 & 9.9 & -8.1 & 4.0 & 8.2 & 3.0 & -8.8 & 8.6 & -4.9 & -9.3 \\ -6.4 & 1.4 & 7.5 & -6.4 & 3.5 & 7.0 & 6.5 & 9.5 & 3.5 & -2.8 \\ 4.4 & 1.7 & -6.4 & 6.3 & 0.6 & 1.1 & 3.1 & -1.4 & 9.4 & -0.7 \\ -4.7 & 8.5 & 1.1 & -4.7 & 4.5 & -6.9 & -5.1 & -5.8 & 5.1 & -2.9 \\ 4.8 & -1.4 & -6.2 & -9.4 & -2.4 & -7.6 & 4.1 & -0.8 & 3.9 & -2.8 \\ -6.9 & 6.3 & 0.9 & 0.9 & 1.0 & 8.6 & 8.6 & -0.6 & 3.1 & 3.3 \\ -2.5 & 10.0 & -5.8 & 8.2 & 9.6 & -2.0 & 5.6 & -5.4 & -8.3 & -4.4 \\ -5.3 & -7.9 & 0.8 & -7.0 & 6.3 & 6.1 & 2.3 & 2.3 & 8.1 & 8.3 \\ -4.3 & -6.4 & 0.5 & -5.6 & 5.1 & 4.9 & 1.8 & 1.9 & 6.5 & 6.6 \\ -2.7 & -8.7 & -6.4 & -7.1 & 6.6 & -5.0 & 9.6 & -6.0 & -0.8 & 2.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.2 \\ 4.6 \\ 3.4 \\ -3.7 \\ -3.9 \\ -7.8 \\ 7.0 \\ -6.9 \\ -8.4 \\ 2.8 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2.4 & 3.8 & -0.4 & -5.1 & 9.8 & -6.3 & 4.7 & 9.3 & 7.9 & -1.4 \\ -4.6 & -1.7 & -4.5 & 8.8 & 3.2 & 8.5 & -5.4 & 9.7 & -2.3 & -2.9 \\ 3.8 & -0.2 & -3.4 & -3.8 & 3.8 & 3.1 & 7.1 & -9.2 & -4.2 & -7.9 \\ -2.3 & -0.9 & -2.2 & 4.4 & 1.6 & 4.3 & -2.7 & 4.8 & -1.1 & -1.5 \\ -6.2 & 1.5 & -8.8 & 8.9 & -9.1 & 9.1 & 2.0 & -8.8 & 4.3 & 6.2 \\ -2.7 & 8.1 & -0.1 & -1.2 & -2.5 & -3.5 & 1.6 & -1.9 & -1.8 & -3.2 \\ 9.2 & 5.0 & 4.8 & 3.1 & 9.4 & 6.0 & -0.3 & 5.5 & -1.3 & 2.2 \\ 1.4 & 5.1 & -0.7 & -9.3 & -3.4 & 2.1 & 7.3 & -1.7 & 4.7 & -4.8 \\ -6.7 & 7.8 & -5.3 & -5.1 & -4.1 & -2.9 & -5.4 & 7.9 & 6.8 & 9.9 \\ -6.7 & -5.0 & 9.6 & 0.5 & -4.5 & 1.4 & -9.7 & 9.2 & 8.1 & -1.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2 \\ -8.6 \\ 3.1 \\ -7.9 \\ -5.5 \\ 8.4 \\ 3.3 \\ -0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Матрица B
11	$\begin{pmatrix} -0.3 & -7.4 & 9.4 & -1.1 & -4.0 & 1.1 & -6.0 & 9.1 & 5.2 & -8.7 \\ -9.2 & 7.1 & -4.2 & -4.6 & 2.4 & -3.6 & -3.0 & -0.0 & 6.4 & -0.6 \\ -9.9 & 2.4 & 2.2 & -0.6 & -8.9 & -0.4 & -9.8 & -4.1 & 6.8 & 9.3 \\ 4.2 & -7.7 & 2.8 & 4.2 & -4.4 & -4.2 & 4.3 & -2.2 & -9.5 & 9.9 \\ 9.2 & 3.8 & -1.2 & -0.3 & -6.0 & 6.8 & -3.3 & 9.3 & -8.3 & 6.7 \\ 0.7 & -8.0 & 2.8 & -5.3 & -5.3 & -7.2 & -1.7 & 2.1 & 9.6 & 3.7 \\ -4.4 & 1.8 & -5.1 & -9.2 & 6.5 & 2.3 & 3.6 & -5.3 & -2.1 & -6.6 \\ -4.1 & 1.0 & 0.9 & -0.3 & -3.6 & -0.2 & -3.9 & -1.6 & 2.7 & 3.7 \\ -2.0 & -1.4 & 4.4 & -5.8 & 10.0 & 7.5 & 4.9 & -0.2 & 4.9 & -1.2 \\ -0.7 & 9.6 & -4.3 & 5.5 & -1.8 & -2.2 & 5.3 & -3.3 & 1.0 & 3.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.4 \\ 9.0 \\ -9.4 \\ -8.9 \\ -7.4 \\ 7.3 \\ 4.4 \\ -9.7 \\ 4.2 \\ -5.6 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 9.8 & -2.7 & -9.4 & -8.2 & -4.8 & -5.0 & -2.4 & 8.1 & 1.4 & -0.6 \\ 0.5 & 0.1 & 4.5 & -4.5 & 3.4 & -8.4 & -2.4 & 9.8 & 8.2 & 7.9 \\ -5.3 & -0.8 & -6.4 & -9.0 & 5.8 & -8.3 & 6.8 & 7.6 & 5.6 & 1.0 \\ 8.7 & 8.7 & -6.0 & -7.5 & -9.7 & 2.3 & 9.0 & 1.8 & 2.1 & -1.5 \\ -7.0 & 6.8 & -3.7 & 7.3 & -9.4 & -9.3 & 1.4 & 8.2 & -0.6 & -1.2 \\ 8.8 & -6.6 & -6.9 & 7.4 & -7.8 & 2.1 & -2.5 & 4.8 & 0.1 & 8.9 \\ -1.7 & 5.3 & -0.4 & 3.4 & 2.3 & -4.5 & -6.2 & 2.6 & 10.0 & -6.7 \\ 6.1 & 6.1 & -4.2 & -5.3 & -6.8 & 1.6 & 6.3 & 1.3 & 1.4 & -1.2 \\ -0.6 & 2.4 & -6.2 & -5.4 & -9.1 & -9.8 & 4.3 & -0.1 & -3.4 & -4.5 \\ 5.3 & -6.4 & -1.3 & -1.4 & -4.5 & 8.8 & -4.6 & -7.6 & -5.0 & -3.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.6 \\ -9.4 \\ 2.9 \\ -8.3 \\ 9.0 \\ -4.5 \\ 9.6 \\ -4.2 \\ -2.6 \\ -5.6 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 7.6 & 3.7 & -7.1 & 3.6 & 0.3 & -1.0 & -5.4 & -2.1 & -8.9 & 7.5 \\ 3.7 & 6.1 & -4.6 & -9.5 & 9.9 & -1.1 & 7.3 & 1.8 & 1.4 & -0.6 \\ 2.7 & -3.2 & 4.4 & -1.0 & -4.9 & -6.3 & -4.6 & 4.9 & 3.6 & 7.1 \\ 5.4 & -0.2 & -6.0 & -5.2 & -3.4 & -5.2 & -8.6 & -3.9 & -7.7 & -5.8 \\ 1.0 & 1.8 & -0.3 & 0.5 & 1.9 & -0.8 & -1.8 & -0.1 & -1.1 & 1.5 \\ 3.0 & 0.6 & -6.3 & -6.4 & -0.1 & 7.3 & -8.0 & 10.0 & -2.2 & -6.1 \\ -4.1 & 3.3 & 4.2 & -8.3 & 7.7 & 2.5 & 3.5 & -9.1 & 5.2 & -0.8 \\ 6.8 & 5.8 & 7.1 & -1.6 & -6.2 & -8.0 & -8.9 & 2.7 & 6.9 & -2.9 \\ 5.0 & 8.9 & -1.4 & 2.7 & 9.7 & -3.9 & -9.2 & -0.2 & -5.3 & 7.7 \\ 6.6 & -3.7 & 6.5 & 4.9 & -5.0 & -3.0 & 9.6 & -7.0 & 7.5 & -3.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.9 \\ 0.7 \\ 3.9 \\ -4.8 \\ 0.5 \\ -2.0 \\ 1.7 \\ 3.7 \\ -1.3 \\ -9.9 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} -2.7 & -3.4 & 5.2 & 0.1 & -0.8 & 3.0 & 7.5 & 3.6 & 0.0 & 3.6 \\ 3.4 & -1.0 & 3.2 & -8.4 & -8.1 & 1.5 & 6.2 & -8.9 & -9.1 & 2.1 \\ -6.5 & -5.0 & 6.7 & -7.5 & 2.7 & -2.9 & -3.8 & 3.3 & 2.0 & -4.4 \\ 0.9 & -7.0 & 1.8 & 9.4 & -5.8 & -8.2 & -2.8 & 6.8 & 0.7 & -4.4 \\ 4.1 & 7.5 & 8.3 & -5.6 & 7.0 & -4.7 & -7.7 & -8.1 & 0.3 & 5.7 \\ -7.1 & -1.8 & 0.9 & 3.6 & 4.2 & -5.0 & -5.6 & -4.7 & -3.7 & -7.1 \\ -7.2 & -7.7 & 9.8 & 1.8 & 5.7 & 7.3 & 2.7 & -6.6 & 3.3 & 3.2 \\ 9.9 & -4.0 & -8.2 & -5.4 & -4.9 & 2.4 & 2.1 & 1.2 & -4.8 & 9.9 \\ 6.9 & -2.8 & -5.8 & -3.8 & -3.4 & 1.7 & 1.5 & 0.9 & -3.2 & 6.9 \\ -2.3 & 9.7 & 5.9 & 9.8 & 8.6 & 5.9 & -5.3 & 1.4 & 9.4 & -5.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9.2 \\ -6.2 \\ -6.9 \\ 7.7 \\ -6.1 \\ 2.9 \\ 8.2 \\ 8.4 \\ -7.0 \\ 1.4 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Матрица B
15	$\begin{pmatrix} 8.4 & 2.6 & 7.7 & -2.5 & -6.1 & 3.0 & 8.1 & -0.9 & -2.2 & 6.0 \\ -2.5 & -6.1 & 2.9 & -1.4 & -4.6 & 3.0 & 1.1 & -4.3 & 0.8 & 6.3 \\ -3.2 & 9.6 & -8.6 & -2.6 & 2.9 & -9.3 & -4.5 & -9.0 & 8.1 & 2.0 \\ -1.0 & -2.4 & 1.1 & -0.6 & -1.8 & 1.2 & 0.4 & -1.7 & 0.3 & 2.4 \\ -3.7 & 8.4 & 8.4 & 5.2 & 2.3 & -3.2 & -8.3 & 3.1 & -0.1 & -8.0 \\ 7.8 & -1.8 & 8.5 & 0.4 & 4.4 & -3.7 & -8.7 & 7.8 & 5.9 & -4.8 \\ 3.3 & -7.3 & -2.7 & 4.5 & -7.4 & -7.1 & 1.4 & -1.5 & -7.3 & 4.0 \\ 7.9 & 0.9 & 9.2 & -8.9 & -3.9 & 2.9 & -3.0 & -7.4 & 8.6 & -7.4 \\ -8.2 & -3.9 & -1.6 & -1.6 & -6.9 & 7.8 & 8.9 & 3.3 & -0.6 & -6.6 \\ 5.0 & -7.1 & -2.7 & -7.8 & -1.5 & -4.5 & 1.3 & 3.2 & 4.0 & -5.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.2 \\ -2.1 \\ 1.8 \\ 9.0 \\ -2.2 \\ -6.3 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ -9.0 \\ -4.8 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} -1.3 & 1.6 & 2.6 & 0.1 & 3.9 & -6.2 & -6.4 & -0.9 & -8 & -8.1 \\ 8.6 & 7.9 & -5.5 & -1.8 & 2.6 & -1 & 2 & 7.1 & 2.5 & 1.3 \\ -6.3 & 1.1 & -5.1 & 2.1 & 1.7 & -0.1 & 4.8 & 2.4 & 6.1 & 1.5 \\ 8.2 & 4.6 & 3.4 & -3.7 & -3.9 & -7.8 & 7 & -6.9 & -8.4 & 2.8 \\ 0.9 & -1.8 & -0.7 & -6.9 & 4.8 & 6.5 & 7.5 & -4 & -7.5 & 5.7 \\ 2.2 & -8.6 & 3.1 & -7.9 & -5.5 & 8.4 & 3.3 & -0.1 & -0.1 & 0.2 \\ 3.8 & 2.1 & -9.9 & -8 & 7.3 & 4.9 & -2.4 & 1.1 & 9.1 & -6.5 \\ -7.4 & 9 & -9.4 & -8.9 & -7.4 & 7.3 & 4.4 & -9.7 & 4.2 & -5.6 \\ -5.2 & 6.3 & -6.6 & -6.2 & -5.1 & 5.1 & 3.1 & -6.8 & 2.9 & -3.9 \\ 1.5 & 1 & -3.8 & 6.2 & -4.3 & 7.9 & 4.9 & -2.8 & -5.4 & -5.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.6 \\ -7.8 \\ -5.9 \\ 3.1 \\ 3.8 \\ -8.4 \\ -9.4 \\ -3.9 \\ -7.1 \\ -8.6 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 4.5 & 3.9 & 3.1 & -8 & -9 & -0.7 & 4.6 & 3.6 & -2.6 & -9 \\ -6.6 & -3.8 & -5.8 & -0.3 & -1.2 & 2.1 & -2 & 6.9 & 2.5 & -8.9 \\ 7.3 & -3.9 & -9.5 & -2.2 & -9.4 & 7.2 & -2 & 2.2 & 7.5 & 1.9 \\ 5.9 & 1.8 & 1.4 & 3.5 & -9.8 & -3.2 & 5.4 & 7.4 & 4.5 & 7.9 \\ 0.7 & 5.6 & -6.1 & 5.9 & 7 & 2.6 & 2.3 & -5 & 5.8 & 4.3 \\ -8.4 & 7.1 & -3.9 & -0.5 & -6.2 & 9.9 & 3 & -6.5 & -4.5 & 6.8 \\ 1.7 & -5.3 & -5.4 & 9.4 & -9.5 & -7 & -9.8 & 2.9 & -1.7 & -8.2 \\ 0.4 & 3.4 & -3.6 & 3.6 & 4.2 & 1.4 & 1.4 & -3 & 3.5 & 2.6 \\ 2.9 & 6.6 & 7.4 & 8.3 & -1.2 & -2.9 & -1.4 & -10 & 5.5 & -8.2 \\ 3.7 & -6.9 & -9 & -9.6 & 3 & 8.3 & -1.4 & -5.1 & 3.1 & -9.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6.6 \\ -3.8 \\ -5.8 \\ -0.3 \\ -1.2 \\ 2.1 \\ -2.0 \\ 6.9 \\ 2.5 \\ -8.9 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} -8.5 & 8.3 & 5.1 & -8.0 & 3.6 & 6.5 & -4.6 & 7.4 & 9.4 & -5.6 \\ 7.1 & -0.3 & 6.7 & -2.2 & 2.6 & 0.1 & -3.5 & 4.7 & 5.7 & 0.6 \\ 9.1 & -3.4 & 7.8 & -1.3 & -4.7 & 0.6 & 5.9 & -0.3 & 1.2 & -3.1 \\ 8.2 & -2.6 & -5.8 & -9.0 & -5.0 & -7.1 & 2.2 & -6.1 & 5.2 & 2.7 \\ -6.5 & 9.3 & -6.0 & -9.1 & -9.3 & -8.4 & 1.4 & -5.6 & -3.9 & -1.8 \\ -5.0 & 0.2 & 9.8 & -7.6 & 4.1 & -4.1 & 0.5 & 0.3 & 6.6 & -7.9 \\ 8.9 & -0.5 & 8.4 & -2.7 & 3.2 & 0.1 & -4.4 & 5.8 & 7.2 & -0.7 \\ -1.2 & -2.4 & 1.2 & 6.7 & -9.8 & -9.2 & -4.9 & 4.2 & -7.3 & 7.1 \\ -5.6 & -3.7 & 2.1 & 9.1 & -2.3 & -5.3 & 1.8 & -9.7 & 8.3 & -5.5 \\ 9.3 & -2.0 & -3.3 & 2.5 & -4.2 & 8.0 & -3.4 & -0.8 & -1.7 & -7.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.9 \\ 1.8 \\ 1.4 \\ 3.5 \\ -9.8 \\ -3.2 \\ 5.4 \\ 7.4 \\ 4.5 \\ 7.9 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Матрица B
19	$\begin{pmatrix} -4.9 & 3.6 & 2.6 & -3.1 & -3.2 & 6.1 & -4.0 & -4.7 & 2.2 & 1.4 \\ -2.5 & 7.1 & 4.9 & -5.3 & 5.7 & 1.3 & -7.5 & -1.7 & -6.6 & -5.2 \\ -5.5 & 4.0 & 2.9 & -3.4 & -3.6 & -6.7 & -4.5 & -5.3 & 2.5 & 1.7 \\ 4.2 & 4.3 & 4.0 & -7.5 & -2.4 & 7.3 & -0.1 & 3.4 & -3.0 & 5.3 \\ -10.0 & 5.0 & 5.9 & 4.5 & 0.8 & -8.0 & -8.1 & -6.8 & 3.4 & 7.8 \\ 1.4 & -7.8 & 4.7 & -0.2 & 6.0 & -3.0 & 10.0 & 9.0 & 2.6 & -7.1 \\ -0.8 & -9.0 & 4.8 & 3.0 & -5.3 & 9.9 & 7.9 & 7.8 & 2.3 & 4.6 \\ 5.1 & -1.9 & 4.3 & 7.7 & -2.1 & -0.2 & 5.2 & -3.3 & -2.8 & -8.4 \\ 9.9 & -2.1 & -1.7 & -4.6 & -5.5 & 2.8 & 7.6 & -1.8 & 9.3 & -3.2 \\ 2.1 & 7.9 & -5.3 & 0.6 & 1.4 & 0.2 & 9.4 & 4.0 & -7.9 & -0.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.4 \\ 7.1 \\ -3.9 \\ -0.5 \\ -6.2 \\ 9.9 \\ 3.0 \\ -6.5 \\ -4.5 \\ 6.8 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} -9.0 & -7.7 & 4.8 & -9.9 & 9.1 & 5.0 & 3.6 & 3.3 & -8.6 & 7.2 \\ 7.8 & -7.0 & 1.5 & -6.5 & 6.7 & 7.2 & 9.7 & 4.2 & 6.3 & 9.5 \\ -3.7 & -5.9 & 9.0 & -5.0 & 7.3 & -5.9 & 5.1 & -2.5 & 2.6 & 4.7 \\ -2.2 & 9.6 & -3.4 & 2.5 & -0.2 & -4.6 & -8.7 & -0.9 & 2.9 & -4.7 \\ 2.5 & -8.0 & -0.1 & 4.1 & -2.6 & 9.2 & -0.9 & 0.4 & 5.8 & 4.8 \\ -9.0 & 9.8 & 2.9 & 8.0 & 8.3 & -0.4 & 5.2 & 4.9 & -2.7 & 6.4 \\ -1.3 & -8.4 & 2.5 & -3.5 & -0.3 & 1.2 & 3.9 & -2.0 & 7.8 & 2.1 \\ 6.0 & 6.3 & -8.4 & 9.7 & -0.0 & 1.3 & 7.2 & 9.8 & -1.9 & -2.0 \\ -0.5 & -3.3 & 1.1 & -1.4 & -0.1 & 0.5 & 1.6 & -0.8 & 3.1 & 0.9 \\ 9.2 & 8.7 & -7.9 & -5.5 & -6.2 & 7.9 & -8.9 & 4.4 & 1.0 & -7.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.6 \\ -5.3 \\ -5.4 \\ 9.4 \\ -9.5 \\ -7.0 \\ -9.8 \\ 2.9 \\ -1.7 \\ -8.2 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} -1.1 & -9.7 & 0.9 & 6.3 & 5.7 & -4.8 & -5.0 & 5.1 & -9.2 & 9.3 \\ -10.0 & 3.5 & -1.8 & -8.1 & -2.8 & 6.4 & -5.9 & 5.7 & 4.8 & -2.0 \\ 0.1 & -4.1 & 7.7 & 6.0 & -1.6 & 1.4 & 9.2 & 0.1 & -9.2 & -1.4 \\ -4.5 & 1.5 & 8.7 & -2.1 & 2.9 & 5.5 & -3.3 & -7.7 & -3.1 & -3.0 \\ 8.0 & -1.1 & 4.6 & -2.6 & -6.9 & -7.5 & -1.6 & 5.5 & -0.1 & -7.7 \\ -6.1 & 9.2 & 7.4 & 0.6 & -1.3 & -8.6 & -9.0 & -6.4 & -5.7 & 7.0 \\ 1.0 & 6.2 & -8.9 & -6.7 & -6.8 & 7.5 & -4.9 & -7.7 & -7.9 & 10.0 \\ 6.4 & -0.9 & 3.7 & -2.1 & -5.5 & -6.0 & -1.2 & 4.3 & 0.0 & -6.1 \\ 2.0 & -4.9 & 1.4 & 1.1 & -1.1 & 3.1 & -6.2 & 0.3 & 2.7 & 8.8 \\ -0.9 & 6.0 & -2.6 & -9.9 & -3.6 & -3.6 & 8.0 & -0.0 & 6.3 & 5.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.9 \\ 6.6 \\ 7.4 \\ 8.3 \\ -1.2 \\ -2.9 \\ -1.4 \\ -10.0 \\ 5.5 \\ -8.2 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1.6 & -6.1 & -2.0 & -6.1 & 7.5 & 6.5 & -7.2 & 2.4 & 5.4 & -7.3 \\ 4.6 & 8.8 & 3.8 & 0.9 & -1.6 & -5.9 & 1.4 & -5.0 & 2.1 & 7.3 \\ 1.9 & 3.0 & -0.9 & -3.7 & -3.9 & 3.5 & 3.7 & 2.9 & -1.9 & 1.8 \\ 8.9 & -4.9 & -6.4 & 6.7 & -1.2 & -2.3 & 10.0 & -9.3 & 9.1 & -4.6 \\ 1.6 & -5.9 & -6.1 & 5.2 & 7.1 & -5.4 & 3.5 & -4.7 & -9.6 & 6.4 \\ -3.3 & -7.5 & 9.6 & -7.0 & 4.6 & 2.7 & -2.9 & -5.8 & 8.1 & 2.9 \\ -6.8 & 4.6 & 7.1 & 6.9 & -8.2 & 5.0 & 2.5 & 2.3 & -1.9 & 6.4 \\ -9.3 & 1.1 & 0.2 & 6.0 & -9.6 & 1.9 & -8.8 & -3.7 & 2.4 & 5.2 \\ 5.9 & 6.3 & 1.0 & 0.7 & 8.5 & -4.5 & -0.9 & 7.7 & -6.8 & -0.2 \\ 4.7 & 7.6 & -2.2 & -9.0 & -9.7 & 8.8 & 9.2 & 7.3 & -4.7 & 4.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.2 \\ 1.0 \\ -0.7 \\ -4.0 \\ -3.1 \\ 2.2 \\ 9.7 \\ -7.0 \\ 4.2 \\ 5.5 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Матрица B
23	$\begin{pmatrix} 3.0 & -9.7 & -6.7 & 5.4 & 6.0 & -7.8 & 8.8 & 9.3 & 6.0 & 6.0 \\ 4.3 & 1.8 & -9.7 & 8.0 & -5.0 & -5.8 & -8.7 & 7.7 & -1.0 & 8.8 \\ 4.0 & 4.1 & 0.2 & 3.9 & -4.1 & 4.1 & -3.1 & 0.0 & -5.5 & -0.3 \\ 5.8 & -8.6 & 8.5 & -6.4 & 9.8 & -8.6 & 1.7 & 9.1 & 4.0 & -0.7 \\ -7.0 & 3.1 & 5.0 & -7.8 & 2.3 & 4.0 & -4.4 & -8.9 & 9.8 & -6.1 \\ 7.3 & -1.2 & -4.4 & -7.8 & -5.5 & 9.5 & 9.0 & -7.6 & 1.6 & -8.1 \\ -7.2 & -9.3 & 2.3 & 3.6 & -1.5 & 7.3 & -8.5 & -0.4 & -5.6 & 0.2 \\ -9.9 & -8.6 & 6.9 & -8.3 & 1.6 & 0.4 & -7.3 & 7.0 & 1.7 & 2.4 \\ 5.7 & 5.8 & 0.2 & 5.5 & -5.8 & 5.9 & -4.4 & 0.1 & -7.9 & -0.5 \\ 1.9 & 1.2 & 2.0 & 2.3 & 7.9 & 4.1 & -9.0 & -5.3 & 9.6 & -8.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.6 \\ 1.8 \\ 0.1 \\ -1.0 \\ 8.8 \\ -5.0 \\ 4.6 \\ 2.5 \\ 2.8 \\ 1.1 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 0.3 & -3.4 & -4.3 & -6.8 & 4.7 & -1.4 & 0.3 & 0.6 & -7.8 & 0.9 \\ 3.9 & 2.5 & 1.5 & -0.8 & 2.0 & -2.6 & -2.9 & 0.5 & 1.1 & 0.7 \\ -3.8 & -7.7 & -7.8 & -0.4 & 7.2 & 0.5 & 2.6 & -7.3 & -2.3 & 5.8 \\ 9.3 & 6.8 & -5.0 & -8.7 & -5.8 & -0.8 & -6.8 & 5.4 & 10.0 & 7.0 \\ 3.8 & -2.4 & 6.3 & 8.4 & -1.4 & 7.7 & -9.9 & -1.3 & 5.9 & 7.1 \\ -3.2 & -2.3 & -1.5 & -7.4 & -4.7 & 9.5 & -5.7 & -7.4 & 4.8 & -4.8 \\ 9.6 & 5.9 & 3.8 & -1.9 & 4.9 & -6.5 & -7.2 & 1.2 & 2.9 & 1.7 \\ 8.4 & -2.7 & -0.8 & -0.9 & 9.9 & -8.5 & 5.8 & 4.9 & -0.5 & -3.6 \\ 6.5 & -9.4 & -6.6 & -0.5 & 5.3 & -6.4 & 7.2 & 3.5 & 6.9 & 3.8 \\ -8.0 & -1.2 & -10.0 & 2.0 & 4.3 & 8.4 & -6.8 & -8.4 & 7.8 & 5.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9.9 \\ -2.5 \\ 6.5 \\ 7.8 \\ 3.0 \\ 4.7 \\ 9.1 \\ -2.7 \\ 8.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1.5 & -5.0 & 0.9 & -0.3 & -2.0 & -2.4 & 2.1 & 1.6 & -2.7 & -1.1 \\ 8.4 & -7.9 & 6.9 & -2.8 & -4.4 & 1.2 & -5.3 & 4.9 & -9.3 & -8.9 \\ -1.3 & -6.5 & 4.4 & 0.9 & -8.0 & 8.9 & -8.0 & -1.0 & -4.0 & -5.3 \\ -6.6 & -2.0 & -4.3 & -6.6 & 4.6 & 2.6 & 8.1 & 0.3 & 2.5 & 9.4 \\ 3.0 & -10.0 & 1.8 & -0.7 & -4.0 & -4.8 & 4.2 & 3.2 & -5.7 & -2.1 \\ 0.7 & -1.1 & -5.1 & -6.9 & 5.8 & 1.7 & -4.7 & 5.5 & 4.6 & 6.5 \\ -3.2 & -1.9 & -7.9 & 3.4 & -0.0 & -6.5 & 5.3 & 4.9 & -7.0 & 7.9 \\ 7.6 & 6.0 & -7.5 & -2.9 & 5.7 & -3.0 & -3.5 & -4.2 & -0.7 & 8.4 \\ -9.7 & 8.5 & 2.5 & 8.5 & 4.5 & -6.3 & -1.0 & -6.4 & 6.1 & -0.3 \\ 8.4 & -9.7 & 1.2 & -6.0 & 6.0 & -9.1 & -9.1 & 4.3 & -5.3 & 0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.9 \\ -5.9 \\ -2.2 \\ 1.6 \\ 9.2 \\ -2.4 \\ -7.6 \\ -9.1 \\ 5.2 \\ -10.0 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} -1.1 & 0.5 & 8.0 & 3.0 & 6.2 & -9.9 & -5.6 & -1.4 & -1.8 & 2.6 \\ -5.4 & 3.3 & -0.6 & 1.6 & -2.9 & 4.3 & 5.0 & 5.1 & -2.0 & -0.3 \\ 1.2 & -9.5 & -6.8 & -6.3 & 9.9 & 1.7 & 5.3 & 3.4 & -9.9 & 2.2 \\ -7.7 & 4.7 & -0.8 & 2.2 & -4.2 & 6.2 & 7.1 & 7.2 & -2.8 & -0.4 \\ -6.0 & 1.3 & -8.0 & 9.5 & 1.2 & 3.7 & -3.2 & -4.3 & -5.4 & -2.3 \\ 9.1 & 8.8 & -0.3 & -8.3 & -1.2 & -2.4 & -9.5 & -6.5 & -7.3 & 8.9 \\ 10.0 & -4.0 & -8.1 & 0.5 & 3.1 & -3.3 & 0.5 & 5.8 & 2.8 & 8.4 \\ 8.4 & -8.1 & 7.9 & 3.5 & 5.1 & 9.3 & -5.8 & -9.8 & 7.0 & -5.2 \\ -2.8 & 1.1 & -3.4 & 6.1 & 8.4 & -5.1 & -5.3 & 9.8 & 2.7 & 9.8 \\ 4.8 & 1.4 & -0.1 & -9.6 & 9.9 & -2.3 & -2.5 & 6.0 & 2.0 & 2.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.4 \\ 4.1 \\ 4.6 \\ 8.3 \\ 5.9 \\ -2.1 \\ -8.9 \\ -10.0 \\ 5.1 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Матрица B
27	$\begin{pmatrix} -0.1 & 8.0 & -5.4 & 4.2 & 4.3 & -3.9 & 5.6 & 9.2 & 5.9 & -9.1 \\ -8.5 & 4.6 & 3.7 & 4.8 & 0.9 & -6.3 & 9.3 & 9.1 & 0.4 & 4.7 \\ 0.1 & -6.5 & 3.7 & -5.0 & 5.2 & -3.4 & -6.4 & 9.5 & 3.6 & -9.4 \\ -3.6 & -9.7 & -5.4 & -3.0 & 9.1 & -0.8 & 1.3 & -4.5 & -1.4 & -6.9 \\ 0.0 & -3.3 & 1.9 & -2.4 & 2.6 & -1.7 & -3.2 & 4.8 & 1.8 & -4.7 \\ 5.7 & 4.1 & 6.2 & -5.5 & -7.6 & -7.0 & 6.6 & 6.3 & -3.6 & -2.0 \\ -6.5 & 3.8 & -7.1 & 2.2 & -4.5 & -7.7 & -6.5 & -1.0 & 0.7 & -3.9 \\ 5.5 & 7.8 & -7.9 & -0.1 & 3.6 & 0.7 & -4.1 & 2.3 & -5.5 & 3.2 \\ 2.5 & 2.6 & -5.9 & 6.7 & -0.7 & -0.9 & -3.6 & -6.7 & -3.7 & 0.9 \\ -4.0 & -6.4 & 5.0 & -8.5 & 2.4 & -3.3 & 8.3 & 5.0 & 6.7 & -7.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.3 \\ 6.3 \\ 8.0 \\ -4.6 \\ -5.4 \\ 7.5 \\ 6.9 \\ -9.2 \\ -6.3 \\ -1.0 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} -3.5 & 1.9 & 4.4 & 1.9 & -0.6 & 4.0 & 5.5 & -1.2 & 1.3 & -5.9 \\ 1.5 & 5.2 & 1.8 & -2.7 & -1.3 & 2.6 & 4.4 & -4.8 & -4.1 & -3.4 \\ -9.2 & -9.4 & -1.0 & -1.4 & 0.5 & -8.5 & 0.1 & 0.4 & -0.6 & 2.4 \\ -9.6 & 5.3 & 1.4 & 6.4 & -8.7 & 6.2 & -2.1 & 7.5 & -4.5 & 0.7 \\ 8.1 & 6.3 & -6.6 & -6.3 & 2.7 & 9.5 & -6.7 & -7.3 & -1.1 & -9.0 \\ -7.3 & -4.9 & 9.4 & 5.5 & 2.9 & 8.4 & 2.5 & -4.9 & 6.4 & 2.7 \\ -4.4 & 8.1 & 5.6 & -4.0 & 0.6 & -9.7 & 5.5 & -8.5 & 2.7 & 8.6 \\ 7.7 & 7.9 & -9.6 & 7.8 & -2.7 & 1.8 & -0.8 & -1.1 & 2.7 & 2.9 \\ 7.2 & 0.8 & 7.3 & 1.5 & 2.9 & -5.9 & -5.9 & 8.7 & 6.6 & 7.3 \\ 2.5 & 8.7 & 3.0 & -4.5 & -2.2 & 4.4 & 7.4 & -8.0 & -6.6 & -5.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.7 \\ -7.5 \\ -2.5 \\ 8.3 \\ -9.4 \\ -1.0 \\ -5.4 \\ -6.9 \\ 0.0 \\ 5.1 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} -7.5 & -5.0 & -2.7 & 2.6 & -5.9 & -8.8 & -7.6 & 4.5 & -5.7 & 4.5 \\ 7.3 & 5.8 & 7.2 & -5.1 & 9.8 & -8.2 & -6.3 & 6.7 & -7.9 & -9.5 \\ -0.8 & -7.7 & 4.8 & 1.8 & 5.0 & 8.9 & 3.9 & 0.6 & -9.2 & 6.6 \\ -9.4 & -8.2 & -9.1 & -9.6 & 3.1 & -2.3 & 2.1 & -6.1 & 0.8 & -1.8 \\ 4.5 & 5.2 & 1.5 & 3.4 & -5.2 & 6.4 & -9.1 & -1.3 & -8.2 & 4.4 \\ 4.4 & 2.1 & -5.1 & -5.3 & 1.7 & -5.1 & -5.6 & -1.6 & -6.6 & 3.6 \\ -4.8 & -9.9 & 1.0 & -4.8 & -8.0 & -0.1 & 8.5 & 5.0 & -2.2 & 7.1 \\ -3.8 & -2.5 & -1.4 & 1.3 & -2.9 & -4.4 & -3.8 & 2.3 & -2.8 & 2.2 \\ -4.6 & 1.6 & 5.8 & -9.5 & -0.7 & -3.7 & -6.2 & -9.6 & -7.1 & -0.1 \\ 3.8 & -9.7 & -9.0 & -3.2 & 2.6 & 4.4 & -6.1 & 7.0 & 4.9 & 6.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3.5 \\ -6.0 \\ -7.5 \\ 7.9 \\ -5.6 \\ 1.2 \\ -1.5 \\ 7.3 \\ -4.7 \\ 3.6 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} -1.4 & 6.1 & -9.3 & -0.6 & 6.4 & -4.7 & 1.2 & -7.4 & -6.5 & 0.8 \\ 2.9 & -0.5 & -4.0 & -0.5 & -2.4 & 5.0 & -1.2 & 2.8 & 3.5 & -3.9 \\ -1.6 & 0.6 & 8.6 & 2.9 & 5.8 & -5.0 & -1.5 & 6.6 & 1.5 & -1.8 \\ 2.6 & 3.9 & -8.7 & -1.8 & 6.7 & 8.0 & 8.6 & -0.5 & 8.4 & 2.2 \\ 5.7 & -1.0 & 4.3 & 3.2 & -3.4 & -4.9 & 8.6 & -4.6 & -7.0 & 9.2 \\ 5.9 & -1.0 & -7.9 & -0.9 & -4.8 & 9.9 & -2.3 & 5.5 & 7.1 & -7.7 \\ -6.8 & -8.8 & -7.0 & 3.7 & 7.4 & -8.3 & 7.2 & -7.4 & -7.6 & -0.4 \\ 1.4 & 8.5 & -5.1 & 0.8 & -8.5 & 4.6 & -1.2 & 3.3 & -2.7 & -7.2 \\ 1.4 & -1.7 & -5.9 & -9.0 & 1.0 & -5.5 & -2.5 & 3.7 & -1.8 & 4.0 \\ 0.2 & -5.8 & 9.0 & 1.4 & 1.3 & 9.9 & -9.9 & -5.1 & 8.5 & -0.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.7 \\ -1.9 \\ -0.0 \\ 7.5 \\ 5.6 \\ 1.8 \\ -4.4 \\ 7.5 \\ -4.0 \\ 7.3 \end{pmatrix}$

Примерные контрольные вопросы

1. Чем отличаются прямые методы от итерационных?
2. В чем преимущество метода Гаусса с выбором ведущего элемента?
3. Что такое число обусловленности матрицы?

Задание 3. Численное решение систем линейных уравнений итерационными методами

Задача 3.1. Заданы матрица A и $\mathbf{b}$ системы уравнений порядка n в матричной форме $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ в таблице согласно номеру варианта. Найти решение заданной системы уравнений с точностью $\xi = 10^{-6}$. Для решения задачи использовать методы: Якоби, простой итерации с выбором параметра, Зейделя, верхней релаксации с одним и тем же начальным приближением. В качестве начального приближения можно взять столбец $\mathbf{b}$ правой части системы уравнений.

Порядок решения

1. Найти решение системы с помощью встроенной функции X = lsolve(A,$\mathbf{b}$).

2. Составить программы в пакете MathCAD, найти решение $\mathbf{x}$ исходной системы уравнения методом Якоби, указать число итераций и сравнить с полученным в п. 1.

3. В качестве критерия окончания итераций используется условие $\rho(\mathbf{x}^n, \mathbf{x}^{n-1}) < \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\varepsilon$ в выбранной норме. Норма выбирается из условия, чтобы значение α имело наименьшее значение:

а) в пространстве с метрикой $\rho_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|$,

$$\alpha = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{i=n} |b_{ij}| < 1;$$

в) в пространстве с метрикой $\rho_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{i=n} (x_i - y_i)^2)^{1/2}$,

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2} < 1;$$

с) в пространстве с метрикой $\rho_3 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$,

$$\alpha = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{j=n} |b_{ij}| < 1.$$

4. Составить программу в пакете MathCAD, найти решение системы $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ методом простой итерации с выбором параметра τ, указать число итераций. За условие окончаний итераций принять условие п. 3.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \tau(A\mathbf{x}^k - \mathbf{b}),$$
$$\tau < \tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\max}}.$$

Для нахождения собственных значений матрицы A воспользоваться встроенной функцией eigenvals(A), возвращающей собственные значения матрицы A.

5. Составить программу в пакете MathCAD, найти решение системы $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ методом Зейделя ($\omega = 1$) и методом верхней релаксации с выбором параметра ω: $\omega = 0,1; 0,2; \ldots 1,9$.

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^k\right),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Указать число итераций для каждого значения ω. За условие окончаний итераций принять условие п. 3. Определить параметр релаксации ω, при котором точность $\xi = 10^{-6}$ достигается при наименьшем числе итераций.

6. Сравнить методы по числу итераций, необходимых для достижения заданной точности решения. Объяснить полученные результаты.

Исходные данные к задаче 3

Вариант	A	$\mathbf{b}$	Вариант	A	$\mathbf{b}$
1	$\begin{pmatrix} 3,5 & -1 & 0,9 & 0,2 & 0,1 \\ -1 & 7,3 & 2 & 0,3 & 2 \\ 0,9 & 2 & 4,9 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,1 & 5 & 1,2 \\ 0,1 & 2 & 0,2 & 1,2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 9,8 & 1,4 & 2,5 & 0,1 & -0,1 \\ 1,4 & 9,7 & 3 & -1,6 & 0,2 \\ 2,5 & 3 & 12,2 & -2,1 & 0,4 \\ 0,1 & -1,6 & -2,1 & 11,5 & 1,9 \\ -0,1 & 0,2 & 0,4 & 1,9 & 4,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2 \\ 9 \\ 4,8 \\ 0,3 \\ -1,1 \end{pmatrix}$

Вариант	A	**b**	Вариант	A	**b**
2	$\begin{pmatrix} 7,05 & -3 & 0,27 & 0,06 & 0,03 \\ -0,3 & 2,19 & 0,6 & 0,09 & 0,6 \\ 0,27 & 0,6 & 1,47 & -0,03 & 0,06 \\ 0,06 & 0,09 & -0,03 & 1,5 & 0,36 \\ 0,03 & 0,6 & 0,06 & 0,36 & 2,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 3,3 & 0,5 & 0,8 & 0,1 & -0,1 \\ 0,5 & 3,2 & 1 & -0,5 & 0,1 \\ 0,8 & 1 & 4,1 & -0,7 & 0,1 \\ 0,1 & -0,5 & -0,7 & 3,8 & 0,6 \\ -0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,6 & 1,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2 \\ 10,2 \\ 5,4 \\ 0,3 \\ -1,2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4,55 & -1,3 & 1,17 & 0,26 & 0,13 \\ -1,3 & 9,49 & 2,6 & 0,39 & 2,6 \\ 1,17 & 2,6 & 6,37 & -0,13 & 0,26 \\ 0,26 & 0,39 & -0,13 & 6,5 & 1,56 \\ 0,13 & 2,6 & 0,26 & 1,56 & 9,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 4,5 \\ 6 \\ 7,5 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 13,1 & 1,9 & 3,4 & 0,2 & -0,2 \\ 1,9 & 13 & 4 & -2,1 & 0,3 \\ 3,4 & 4 & 16,3 & -2,7 & 0,5 \\ 0,2 & -2,1 & -2,7 & 15,4 & 2,6 \\ -0,2 & 0,3 & 0,5 & 2,6 & 5,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1 \\ 4,8 \\ 2,6 \\ 0,2 \\ -0,6 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 7,35 & -2,1 & 1,89 & 0,42 & 0,21 \\ -2,1 & 15,33 & 4,2 & 0,63 & 4,2 \\ 1,89 & 4,2 & 10,29 & -0,21 & 0,42 \\ 0,42 & 0,63 & -0,21 & 10,5 & 2,52 \\ 0,21 & 4,2 & 0,42 & 2,52 & 14,7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 10,7 & 1,6 & 2,7 & 0,1 & -0,1 \\ 1,6 & 10,5 & 3,3 & -1,7 & 0,3 \\ 2,7 & 3,3 & 13,3 & -2,2 & 0,4 \\ 0,1 & -1,7 & -2,2 & 12,5 & 2,1 \\ -0,1 & 0,3 & 0,4 & 2,1 & 4,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,8 \\ 0,9 \\ 0,1 \\ -0,2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0,35 & -0,1 & 0,09 & 0,02 & 0,01 \\ -0,1 & 0,73 & 0,2 & 0,03 & 0,2 \\ 0,09 & 0,2 & 0,49 & -0,01 & 0,02 \\ 0,02 & 0,03 & -0,01 & 0,5 & 0,12 \\ 0,01 & 0,2 & 0,02 & 0,12 & 0,7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 4,2 \\ 6,3 \\ 8,4 \\ 10,5 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1,7 & 0,2 & 0,4 & 0,1 & -0,1 \\ 0,2 & 1,6 & 0,5 & -0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 2,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,1 & -0,3 & -0,3 & 1,9 & 0,3 \\ -0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1 \\ 5,4 \\ 2,9 \\ 0,2 \\ -0,6 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 8,05 & -2,3 & 2,07 & 0,46 & 0,23 \\ -2,3 & 16,79 & 4,6 & 0,69 & 4,6 \\ 2,07 & 4,6 & 11,27 & -0,23 & 0,46 \\ 0,46 & 0,69 & -0,23 & 11,5 & 2,76 \\ 0,23 & 4,6 & 0,46 & 2,76 & 16,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,7 \\ 3,4 \\ 5,1 \\ 6,8 \\ 8,5 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 3,2 & 0,3 & 0,9 & -0,7 & 1,1 \\ 0,3 & 8,1 & 1,8 & -2 & 0,8 \\ 0,9 & 1,8 & 4,1 & -0,1 & 0,2 \\ -0,7 & -2 & -0,1 & 3,6 & -0,6 \\ 1,1 & 0,8 & 0,2 & -0,6 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3,2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2,1 & -0,6 & 0,54 & 0,12 & 0,06 \\ -0,6 & 4,38 & 1,2 & 0,18 & 1,2 \\ 0,54 & 1,2 & 2,94 & -0,06 & 0,12 \\ 0,12 & 0,18 & -0,06 & 3 & 0,72 \\ 0,06 & 1,2 & 0,12 & 0,72 & 4,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 4,2 \\ 6,3 \\ 8,4 \\ 10,5 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,2 & -0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 1,6 & 0,4 & -0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,8 & -0,1 & 0,1 \\ -0,1 & -0,4 & -0,1 & 0,7 & -0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,9 \\ 0 \\ 2,9 \\ -1,8 \\ -2,7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 9.10 & -2,6 & 2,34 & 0,52 & 0,26 \\ -2,6 & 18,98 & 5,2 & 0,78 & 5,2 \\ 2,34 & 5,2 & 12,74 & -0,26 & 0,52 \\ 0,52 & 0,78 & -0,26 & 13 & 3,12 \\ 0,26 & 5,2 & 0,52 & 3,12 & 18,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7 \\ 1,4 \\ 2,1 \\ 2,8 \\ 3,5 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1,9 & 0,2 & 0,5 & -0,4 & 0,7 \\ 0,2 & 4,9 & 1,1 & -1,2 & 0,5 \\ 0,5 & 1,1 & 2,5 & -0,1 & 0,1 \\ -0,4 & -1,2 & -0,1 & 2,2 & -0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 0,1 & -0,4 & 2,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0 \\ 3,8 \\ -2,4 \\ -3,6 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 8.4 & -2,4 & 2,16 & 0,48 & 0,24 \\ -2,4 & 17,52 & 4,8 & 0,72 & 4,8 \\ 2,16 & 4,8 & 11,76 & -0,24 & 0,48 \\ 0,48 & 0,72 & -0,24 & 12 & 2,88 \\ 0,24 & 4,8 & 0,48 & 2,88 & 16,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,3 \\ 2,6 \\ 3,9 \\ 5,2 \\ 6,5 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1,6 & 0,2 & 0,5 & -0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 4,1 & 0,9 & -1 & 0,4 \\ 0,5 & 0,9 & 2,1 & -0,1 & 0,1 \\ -0,4 & -1 & -0,1 & 1,8 & -0,3 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 & -0,3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 2,6 \\ -1,6 \\ -2,4 \end{pmatrix}$

Вариант	A	**b**	Вариант	A	**b**
10	$\begin{pmatrix} 7.35 & -2,1 & 1,89 & 0,42 & 0,21 \\ -2,1 & 15,33 & 4,2 & 0,63 & 4,2 \\ 1,89 & 4,2 & 10,29 & -0,21 & 0,42 \\ 0,42 & 0,63 & -0,21 & 10,5 & 2,52 \\ 0,21 & 4,2 & 0,42 & 2,52 & 14,7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,2 \\ 1,8 \\ 2,4 \\ 3 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 2,9 & 0,3 & 0,8 & -0,6 & 1 \\ 0,3 & 7,3 & 1,6 & -1,8 & 0,7 \\ 0,8 & 1,6 & 3,7 & -0,1 & 0,2 \\ -0,6 & -1,8 & -0,1 & 3,2 & -0,5 \\ 1 & 0,7 & 0,2 & -0,5 & 3,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,3 \\ 0 \\ 4,2 \\ -2,6 \\ -3,9 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 8,2 & 1,2 & 2,1 & 0,1 & -0,1 \\ 1,2 & 8,1 & 2,5 & -1,3 & 0,2 \\ 2,1 & 2,5 & 10,2 & -1,7 & 0,3 \\ 0,1 & -1,3 & -1,7 & 9,6 & 1,6 \\ -0,1 & 0,2 & 0,3 & 1,6 & 3,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1 \\ 6 \\ 3,2 \\ 0,2 \\ -0,7 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0,3 & -0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 2,4 & 0,5 & -0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 1,2 & -0,1 & 0,1 \\ -0,2 & -0,6 & -0,1 & 1,1 & -0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & -0,2 & 1,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 1,3 \\ -0,8 \\ -1,2 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 2,5 & 0,36 & 0,63 & 0,03 & -0,03 \\ 0,36 & 2,4 & 0,75 & -0,39 & 0,06 \\ 0,63 & 0,75 & 3,1 & -0,51 & 0,09 \\ 0,03 & -0,39 & -0,51 & 2,9 & 0,48 \\ -0,03 & 0,06 & 0,09 & 0,48 & 1,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,05 \\ 3 \\ 1,6 \\ 0,1 \\ -0,35 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 3,8 & 0,4 & 1,1 & -0,8 & 1,3 \\ 0,4 & 9,7 & 2,2 & -2,4 & 1 \\ 1,08 & 2,2 & 4,9 & -0,1 & 0,2 \\ -0,8 & -2,4 & -0,1 & 4,3 & -0,7 \\ 1,3 & 1 & 0,2 & -0,7 & 4,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 1 \\ -0,6 \\ -0,9 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 13,12 & 1,92 & 3,36 & 0,16 & -0,16 \\ 1,92 & 12,96 & 4 & -2,08 & 0,32 \\ 3,36 & 4 & 16,32 & -2,72 & 0,48 \\ 0,16 & -2,08 & -2,72 & 15,36 & 2,56 \\ -0,16 & 0,32 & 0,48 & 2,56 & 5,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,06 \\ 3,6 \\ 1,92 \\ 0,12 \\ -0,42 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1,3 & 0,1 & 0,4 & -0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 3,2 & 0,7 & -0,8 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 & 1,6 & -0,1 & 0,1 \\ -0,3 & -0,8 & -0,1 & 1,4 & -0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & -0,2 & 1,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0 \\ 2,2 \\ -1,4 \\ -2,1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 6,56 & 0,96 & 1,68 & 0,08 & -0,08 \\ 0,96 & 6,48 & 2 & -1,04 & 0,16 \\ 1,68 & 2 & 8,16 & -1,36 & 0,24 \\ 0,08 & -1,04 & -1,36 & 7,68 & 1,28 \\ -0,08 & 0,16 & 0,24 & 1,28 & 2,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,12 \\ 7,2 \\ 3,84 \\ 0,24 \\ -0,84 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2,2 & 0,2 & 0,6 & -0,5 & 0,8 \\ 0,2 & 5,7 & 1,3 & -1,4 & 0,6 \\ 0,6 & 1,3 & 2,9 & -0,1 & 0,2 \\ -0,5 & -1,4 & -0,1 & 2,5 & -0,4 \\ 0,8 & 0,6 & 0,1 & -0,4 & 2,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,7 \\ 0 \\ 5,4 \\ -3,4 \\ -5,1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 14,8 & 2,2 & 3,8 & 0,2 & -0,2 \\ 2,2 & 14,6 & 4,5 & -2,3 & 0,4 \\ 3,8 & 4,5 & 18,4 & -3,1 & 0,5 \\ 0,2 & -2,3 & -3,1 & 17,3 & 2,9 \\ -0,2 & 0,4 & 0,5 & 2,9 & 6,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,07 \\ 4,2 \\ 2,24 \\ 0,14 \\ -0,49 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 4,5 & 0,4 & 1,3 & -1 & 1,5 \\ 0,4 & 11,3 & 2,5 & -2,8 & 1,1 \\ 1,3 & 2,5 & 5,7 & -0,1 & 0,3 \\ -1 & -2,8 & -0,1 & 5 & -0,8 \\ 1,5 & 1,1 & 0,3 & -0,8 & 5,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1,6 \\ -1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

Примерные контрольные вопросы

1. Чем отличаются прямые методы от итерационных?
2. Что такое метрическое пространство?
3. Описать принцип сжимающих отображений.
4. Преимущества метода Зейделя.
5. Привести графические иллюстрации методов для случая систем двух уравнений.
6. Какова скорость сходимости метода Зейделя?

Задание 4. Численное решение систем нелинейных уравнений

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 1.

Задача 4.1. Две системы нелинейных уравнений заданы в таблице согласно номеру варианта. Найти с точностью $\xi = 10^{-5}$ все решения заданной системы уравнений на указанном интервале $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$. Для решения задачи использовать методы: Ньютона, упрощенный Ньютона, секущих и Стеффенсена.

Порядок решения

1. Используя пакет MathCAD, локализовать корни системы уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ графически. Для этого привести систему к виду $x = f_1(y)$ и $y = g_1(x)$.

2. Составить программы в пакете MathCAD, найти корни системы уравнения при помощи метода Ньютона, упрощенного метода Ньютона, метода секущих и метода Стеффенсена при одном и том же начальном приближении. В качестве критерия окончания итераций в методе Ньютона и его модификациях можно использовать простую оценку $\left\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}\right\| \le \xi$.

3. Используя составленную программу, вычислить корни системы с заданной точностью $\xi = 10^{-5}$.

4. Сделать анализ полученных результатов, указав число итераций для каждого метода.

Задача 4.2. Система нелинейных уравнений задана в таблице согласно номеру варианта. Найти с точностью $\xi = 10^{-5}$ все решения заданной системы уравнений на указанном интервале $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$. Для решения задачи использовать метод Ньютона и метод градиентного спуска.

Порядок решения

1. Используя пакет MathCAD, локализовать корни системы уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ графически. Для этого привести систему к виду $x = f_1(y)$ или $y = g_1(x)$.

2. Составить программы в пакете MathCAD, найти корни системы уравнения при помощи метода Ньютона и метода градиентного спуска. В качестве критерия окончания итераций в методах Ньютона и градиентного спуска можно использовать простую оценку

$$\left\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}\right\| \le \xi .$$

3. Используя составленные программы, вычислить корни системы с заданной точностью $\xi = 10^{-5}$.

4. Вычислить корни системы, комбинируя методы. После некоторого числа итераций согласно методу градиентного спуска продолжить счет по методу Ньютона. Указать при этом число итерации каждого метода. Изменить число итераций метода градиентного спуска и вновь вычислить корни системы уравнений, комбинируя методы.

5. Сделать анализ полученных результатов, указав число итераций для каждого метода решения.

Исходные данные к задаче 4.1

Вариант	Система	Интервал
1	$f(x,y)=\frac{x^3-2}{x^4+1}-\sqrt[3]{y-1}$ $g(x,y)=\frac{y^2+y-2}{\sqrt{y+2}}+x^3-2$	$x\in[0{,}2;3{,}4]$ $y\in[-1;2]$
2	$f(x,y)=\frac{x^3-4}{x^4+3}-\sqrt[3]{y-3}$ $g(x,y)=\frac{y^2+y-12}{\sqrt{y+12}}+x^3-4$	$x\in[0{,}5;3{,}7]$ $y\in[1;4]$
3	$f(x,y)=\frac{x^3-8}{x^4+3}-\sqrt[3]{y-3}$ $g(x,y)=\frac{y^2+5y-24}{\sqrt{y+48}}+x^3-8$	$x\in[1;4]$ $y\in[1;4]$
4	$f(x,y)=\frac{x^3-3}{x^4+4}-\sqrt[3]{y-4}$ $g(x,y)=\frac{y^2-y-12}{\sqrt{y+9}}+x^3-3$	$x\in[0{,}4;4]$ $y\in[2;5]$
5	$f(x,y)=\frac{x^3-1}{x^4+0{,}5}-\sqrt[3]{y-0{,}5}$ $g(x,y)=\sqrt{2}\,\frac{2y^2-y-1}{\sqrt{1+8y}}+x^3-1$	$x\in[0{,}2;3]$ $y\in[0{,}2;1]$
6	$f(x,y)=\frac{x^3-2}{x^4+7}-\sqrt[3]{y-7}$ $g(x,y)=\frac{y^2-5y-14}{\sqrt{y+7}}+x^3-2$	$x\in[0{,}3;3]$ $y\in[5;8]$

Вариант	Система	Интервал
7	$f(x,y)=\dfrac{x-1}{x^2+8}+(y+2)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{1+y}{y^2+\|y\|+1}+\sqrt{2}(x-1)$	$x\in[-1;2{,}4]$ $y\in[-2;2]$
8	$f(x,y)=\dfrac{x-9}{x^2+24}+(y+2)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{3+3y}{y^2+\|y\|+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}(x-9)$	$x\in[7;10]$ $y\in[-2;2]$
9	$f(x,y)=\dfrac{4x-1}{4x^2-2}+(y+1)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{y}{2y^2+\|y\|+2}+\dfrac{4x-1}{4\sqrt{2}}$	$x\in[-0{,}75;1{,}25]$ $y\in[-1;1]$
10	$f(x,y)=\dfrac{8x-72}{8x^2+81}+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{6+12y}{4y^2+3\|y\|+4}+\dfrac{x-9}{\sqrt{2}}$	$x\in[7{,}5;10]$ $y\in[-1{,}5;1{,}5]$
11	$f(x,y)=\dfrac{4x-1}{4x^2+16}+(y+2)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{2+2y}{4y^2+\|y\|+4}+\dfrac{4x-1}{2}$	$x\in[-1{,}7;1{,}6]$ $y\in[-1{,}5;1{,}5]$
12	$f(x,y)=\dfrac{x-9}{x^2+3}+(y+1)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{6y}{2y^2+\|y\|+2}+\dfrac{x-9}{\sqrt{3}}$	$x\in[8{,}5;10]$ $y\in[-1;0{,}5]$
13	$f(x,y)=(x+2)(x^2-3x+2)-(y-3)^3$ $g(x,y)=(y-1)(y^2+y+12)-(x-2)^3$	$x\in[1{,}5;3]$ $y\in[2;6]$
14	$f(x,y)=(x+4)(x^2-4x+3)-(y-9)^3$ $g(x,y)=(y-1)(y^2+y-108)-2(x-3)^3$	$x\in[2{,}5;4]$ $y\in[8;12]$
15	$f(x,y)=(x+4)(x^2-5x+4)-(y-6)^3$ $g(x,y)=(y-1)(y^2+2y-48)-(x-4)^3$	$x\in[3;6]$ $y\in[5;9]$

Вариант	Система	Интервал
16	$f(x,y)=(2x+4)\left(\frac{1}{2}x^2-3x+4\right)-(y-6)^3$ $g(x,y)=(2y-5)\left(\frac{1}{2}y^2+5y-48\right)-(x-4)^3$	$x\in[3{,}5;5]$ $y\in[5;8]$
17	$f(x,y)=(2x+4)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1\right)-\left(y-\frac{3}{2}\right)^3$ $g(x,y)=(2y-5)\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{4}y-3\right)-(x-1)^3$	$x\in[-1;1{,}5]$ $y\in[0{,}5;4]$
18	$f(x,y)=\frac{x+2}{2}(2x^2-5x+2)-(y-3)^3$ $g(x,y)=\frac{y-2}{2}(2y^2-2y-12)-(x-2)^3$	$x\in[1;3]$ $y\in[2;3{,}5]$
19	$f(x,y)=(x-1)(x^2-x+2)+y^3$ $g(x,y)=(y^2+1)(y^2-y)-(x-2)^3$	$x\in[1{,}5;4]$ $y\in[-2;0{,}5]$
20	$f(x,y)=(x-2)(x^2-x-6)+\frac{y^3}{2}$ $g(x,y)=(y^2+4)(y^2-y)-\frac{(x-3)^3}{2}$	$x\in[2{,}5;5]$ $y\in[-2;0{,}5]$
21	$f(x,y)=(x-9)(x^2+12x-108)+\frac{(y+7)^3}{3}$ $g(x,y)=(y^2+9)(y^2-2y-63)-\frac{(x-6)^3}{2}$	$x\in[4;8]$ $y\in[-9;-6]$
22	$f(x,y)=(x-12)(x^2+9x-112)+\frac{(y+11)^3}{3}$ $g(x,y)=(y^2+9)(y^2-5y-176)-(x-7)^3$	$x\in[5;8]$ $y\in[-13;-10]$
23	$f(x,y)=(x-8)(x^2+26x-192)+\frac{(y+6)^3}{2}$ $g(x,y)=(y^2+4)(y^2-10y-96)-\frac{(x-6)^3}{2}$	$x\in[4;7]$ $y\in[-8;-5]$
24	$f(x,y)=(x-6)(x^2+4x-45)+\frac{(y+5)^3}{2}$ $g(x,y)=(y^2+4)(y^2-4y-45)-(x-5)^3$	$x\in[3;5{,}5]$ $y\in[-6;-3]$
25	$f(x,y)=\frac{1}{17}\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{1}{17}\cos\frac{2\pi x^2}{9}+(y-6)^3$ $g(x,y)=\cos\frac{\pi y}{12}+\sin\frac{\pi y^2}{18}+\frac{(2x-3)^3}{8}$	$x\in[1;2{,}5]$ $y\in[5;7{,}5]$

Вариант	Система	Интервал
26	$f(x,y)=\frac{1}{38}\sin\frac{\pi x}{3}+\frac{1}{38}\cos\frac{\pi x^2}{18}+(y-9)^3$ $g(x,y)=\cos\frac{\pi y}{18}+\sin\frac{2\pi y^2}{81}+\frac{(2x-6)^3}{8}$	$x\in[2{,}5;4]$ $y\in[8;10{,}5]$
27	$f(x,y)=\frac{-1}{21}\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{21}\cos\frac{\pi x^2}{8}+(y+6)^3$ $g(x,y)=\cos\frac{\pi y}{12}+\sin\frac{\pi y^2}{18}+\frac{(2x-4)^3}{8}$	$x\in[1{,}5;3]$ $y\in[-7;-4{,}5]$
28	$f(x,y)=\frac{-1}{20}\sin\frac{\pi x}{5}-\frac{1}{20}\cos\frac{\pi x^2}{50}+(y+3)^3$ $g(x,y)=\cos\frac{\pi y}{6}+\sin\frac{2\pi y^2}{9}+\frac{(2x-10)^3}{8}$	$x\in[4{,}5;6]$ $y\in[-4;-1{,}5]$
29	$f(x,y)=\frac{1}{16}\sin\pi x+\frac{1}{16}\cos\frac{\pi x^2}{2}+(y-12)^3$ $g(x,y)=\cos\frac{\pi y}{24}+\sin\frac{\pi y^2}{72}+\frac{(2x-2)^3}{8}$	$x\in[0{,}5;2]$ $y\in[11;13{,}5]$
30	$f(x,y)=\frac{-1}{4}\sin 2\pi x-\frac{1}{4}\cos 2\pi x^2+(y+6)^3$ $g(x,y)=\cos\frac{\pi y}{12}+\sin\frac{\pi y^2}{18}+\frac{(2x+1)^3}{8}$	$x\in[-1;0{,}5]$ $y\in[-7;-4{,}5]$

Исходные данные к задаче 4.1 (2)

Вариант	Система	Интервал
1	$f(x,y)=\frac{1}{5}\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{5}\cos\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{32}(2y-\pi)^5$ $g(x,y)=\cos 3y+\sin 4y+(x-\pi)^3$	$x\in[2;3{,}5]$ $y\in[0{,}5;2{,}0]$
2	$f(x,y)=\frac{4}{5}\sin\frac{x}{8}-\frac{4}{5}\cos\frac{x^2}{16\pi}+\frac{1}{32}(4y-\pi)^5$ $g(x,y)=\cos 6y+\sin 8y+(x-2\pi)^3$	$x\in[5;6{,}5]$ $y\in[-0{,}25;1{,}25]$
3	$f(x,y)=\frac{9}{80}\sin\frac{x}{3}-\frac{9}{80}\cos\frac{4x^2}{9\pi}+\frac{1}{32}\left(\frac{2y}{3}-\pi\right)^5$ $g(x,y)=\cos y+\sin\frac{4y}{3}+\frac{27}{64}(\frac{4x}{3}-\pi)^3$	$x\in[1{,}25;3]$ $y\in[3{,}5;5{,}25]$

Вариант	Система	Интервал
4	$f(x,y)=\frac{1}{80}\sin x-\frac{1}{80}\cos\frac{4x^2}{\pi}-\frac{1}{32}(2y+\pi)^5$ $g(x,y)=\cos 3y-\sin 4y+\frac{1}{64}(4x-\pi)^3$	$x\in[-0{,}25;1{,}25]$ $y\in[-2.5;-1]$
5	$f(x,y)=\frac{-4}{5}\sin\frac{x}{8}-\frac{4}{5}\cos\frac{x^2}{16\pi}+\frac{1}{32}\left(\frac{2y}{5}-\pi\right)^5$ $g(x,y)=\cos\frac{3y}{5}+\sin\frac{4y}{5}+8(\frac{x}{2}+\pi)^3$	$x\in[-7;-5{,}75]$ $y\in[7;8{,}5]$
6	$f(x,y)=\frac{5}{16}\sin\frac{x}{5}-\frac{5}{16}\cos\frac{4x^2}{25\pi}+\frac{1}{32}\left(\frac{6y}{7}-\pi\right)^5$ $g(x,y)=\cos\frac{9y}{7}+\sin\frac{12y}{7}+\frac{125}{64}(\frac{4x}{5}-\pi)^3$	$x\in[3;4{,}5]$ $y\in[2{,}5;4]$
7	$f(x,y)=e^{-2x}-16+y-\ln 2$ $g(x,y)=2e^{-y}-1+x+2\ln 2$	$x\in[-2{,}3;0{,}6]$ $y\in[-1{,}5;1{,}3]$
8	$f(x,y)=e^{-x}-\frac{3}{2}+y$ $g(x,y)=\frac{3}{2}e^{-y}-\frac{3}{2}+x+\ln(1{,}5)$	$x\in[-1{,}4;1{,}6]$ $y\in[-1;2]$
9	$f(x,y)=e^{-2x}-256+y-\ln 2$ $g(x,y)=4e^{-y}-2+x+2\ln 4$	$x\in[-3{,}8;-1{,}2]$ $y\in[-1{,}7;1{,}3]$
10	$f(x,y)=e^{-\frac{3x}{4}}-\sqrt[9]{4^{16}}+y-\ln\frac{3}{4}$ $g(x,y)=4e^{-y}-\frac{16}{3}+x+\frac{3\ln 4}{4}$	$x\in[-2;1]$ $y\in[-0{,}7;2{,}3]$
11	$f(x,y)=e^{\frac{-3x}{2}}-4\sqrt[4]{2}+y-\ln\frac{3}{2}$ $g(x,y)=2e^{-y}-\frac{4}{3}+x+\frac{3}{2}\ln 2$	$x\in[-2;1]$ $y\in[-1{,}4;1{,}6]$
12	$f(x,y)=e^{-2x}-81+y-\ln 2$ $g(x,y)=3e^{-y}-\frac{3}{2}+x+2\ln 3$	$x\in[-3{,}2;-0{,}2]$ $y\in[-1{,}7;1{,}3]$
13	$f(x,y)=e^{-2x^2}-2^{\sqrt{\ln 2}}+y-4\ln^2 2$ $g(x,y)=e^{-\frac{y}{2}}-2^{-2\ln 2}+x-\ln\sqrt{2}$	$x\in[-0{,}7;2{,}4]$ $y\in[0{,}9;3]$
14	$f(x,y)=e^{-2x^2}-3^{\frac{-\ln 3}{8}}+y-4\ln^2 3$ $g(x,y)=e^{-\frac{y}{2}}-3^{-2\ln 3}+x-\frac{\ln 3}{4}$	$x\in[-0{,}72;2{,}1]$ $y\in[3{,}8;6{,}8]$

Вариант	Система	Интервал
15	$f(x,y)=e^{-2x^2}-4^{\frac{-\ln 4}{2}}+y-4\ln^2 4$ $g(x,y)=e^{-\frac{y}{2}}-4^{-2\ln 4}+x-\ln 2$	$x\in[-0{,}3;2{,}7]$ $y\in[6{,}7;10]$
16	$f(x,y)=e^{-2x^2}-3^{-2\ln 3}+y-4\ln^2 3$ $g(x,y)=e^{-\frac{y}{2}}-3^{-2\ln 4}+x+\ln 3$	$x\in[-2{,}1;0{,}9]$ $y\in[3{,}8;6{,}8]$
17	$f(x,y)=e^{-2x^2}-2^{\frac{-\ln 2}{2}}+y-4\ln^2 2$ $g(x,y)=e^{-\frac{y}{2}}-2^{-2\ln 2}+x+\ln\sqrt{2}$	$x\in[-1{,}3;1{,}7]$ $y\in[0{,}9;2{,}8]$
18	$f(x,y)=e^{-2x^2}-e^{-2}+y-16$ $g(x,y)=e^{-\frac{y}{2}}-e^{-8}+x+1$	$x\in[-2;1]$ $y\in[15{,}18]$
19	$f(x,y)=\dfrac{x^3-2}{x^4+1}-\sqrt[3]{y-1}$ $g(x,y)=\dfrac{y^2+y-2}{\sqrt{y+2}}+x^3-2$	$x\in[0{,}2;3{,}4]$ $y\in[-1;2]$
20	$f(x,y)=\dfrac{x^3-4}{x^4+3}-\sqrt[3]{y-3}$ $g(x,y)=\dfrac{y^2+y-12}{\sqrt{y+12}}+x^3-4$	$x\in[0{,}5;3{,}7]$ $y\in[1;4]$
21	$f(x,y)=\dfrac{x^3-8}{x^4+3}-\sqrt[3]{y-3}$ $g(x,y)=\dfrac{y^2+5y-24}{\sqrt{y+48}}+x^3-8$	$x\in[1;4]$ $y\in[1;4]$
22	$f(x,y)=\dfrac{x^3-3}{x^4+4}-\sqrt[3]{y-4}$ $g(x,y)=\dfrac{y^2-y-12}{\sqrt{y+9}}+x^3-3$	$x\in[0{,}4;4]$ $y\in[2;5]$
23	$f(x,y)=\dfrac{x^3-1}{x^4+0{,}5}-\sqrt[3]{y-0{,}5}$ $g(x,y)=\sqrt{2}\,\dfrac{2y^2-y-1}{\sqrt{1+8y}}+x^3-1$	$x\in[0{,}2;3]$ $y\in[0{,}2;1]$

Вариант	Система	Интервал
24	$f(x,y)=\dfrac{x^3-2}{x^4+7}-\sqrt[3]{y-7}$ $g(x,y)=\dfrac{y^2-5y-14}{\sqrt{y+7}}+x^3-2$	$x\in[0{,}3;3]$ $y\in[5;8]$
25	$f(x,y)=\dfrac{x-1}{x^2+8}+(y+2)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{1+y}{y^2+\lvert y\rvert+1}+\sqrt{2}(x-1)$	$x\in[-1;2{,}4]$ $y\in[-2;2]$
26	$f(x,y)=\dfrac{x-9}{x^2+24}+(y+2)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{3+3y}{y^2+\lvert y\rvert+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}(x-9)$	$x\in[7;10]$ $y\in[-2;2]$
27	$f(x,y)=\dfrac{4x-1}{4x^2-2}+(y+1)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{y}{2y^2+\lvert y\rvert+2}+\dfrac{4x-1}{4\sqrt{2}}$	$x\in[-0{,}75;1{,}25]$ $y\in[-1;1]$
28	$f(x,y)=\dfrac{8x-72}{8x^2+81}+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{6+12y}{4y^2+3\lvert y\rvert+4}+\dfrac{x-9}{\sqrt{2}}$	$x\in[7{,}5;10]$ $y\in[-1{,}5;1{,}5]$
29	$f(x,y)=\dfrac{4x-1}{4x^2+16}+(y+2)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{2+2y}{4y^2+\lvert y\rvert+4}+\dfrac{4x-1}{2}$	$x\in[-1{,}7;1{,}6]$ $y\in[-1{,}5;1{,}5]$
30	$f(x,y)=\dfrac{x-9}{x^2+3}+(y+1)^{\frac{3}{5}}-1$ $g(x,y)=\dfrac{6y}{2y^2+\lvert y\rvert+2}+\dfrac{x-9}{\sqrt{3}}$	$x\in[8{,}5;10]$ $y\in[-1;0{,}5]$

Исходные данные к задаче 4.2

Вариант	$f(x)$	$g(x)$	$[a,b]$	$[c,d]$
1	$x^2+2xy-12$	$2x^2-3xy+4$	$[0;5]$	$[0;4]$
2	$x^2+4xy-20$	$2x^2-5xy+12$	$[0;8]$	$[0;6]$
3	$2x^2+4xy-14$	$2x^2-xy+1$	$[0;4]$	$[0;5]$
4	$2x^2+4xy-8$	$3x^2-xy-12$	$[0;4]$	$[-5;5]$
5	$y^2+2xy-4$	$2y^2-3xy-8$	$[-5;5]$	$[-5;5]$
6	$y^2+2xy-16$	$2x^2-3xy+y-4$	$[-5;5]$	$[0;6]$
7	$3y^2+2xy-1$	$2x^2-5xy-7$	$[-4;4]$	$[-4;4]$
8	$3y^2+2xy+3x-12$	$2x^2-5xy+4y-16$	$[0;8]$	$[-5;5]$
9	$3y^2+2xy+2x-10$	$-x^2-5xy+4y+25$	$[1;8]$	$[-5;5]$
10	$2x^2+4xy-5x-6$	$2x^2-5xy+2$	$[-5;5]$	$[-5;5]$
11	$2x^2+4xy-x-6$	$2x^2-5xy+2y-8$	$[0;4]$	$[-5;5]$
12	$3y^2+2xy+7x-8$	$2x^2-5xy+2x^3+1$	$[-4;4]$	$[-4;4]$
13	$2x^2-5xy^3-12x+6$	$3y^2+2xy^3+1$	$[-5;5]$	$[-4;4]$
14	$2x^2-5xy+4x+15$	$x^2+2xy-12x+9$	$[0;5]$	$[0;4]$
15	$2x^2-5xy+22$	$x^2+4xy-28$	$[0;7]$	$[0;6]$
16	$2x^2-xy-4$	$2x^2+4xy-24$	$[0;4]$	$[0;5]$
17	$3x^2-xy-5$	$2x^2+4xy+6$	$[0;4]$	$[-5;5]$
18	$2y^2-3xy-18$	$y^2+2xy-5y+6$	$[-5;4]$	$[0;4]$
19	$2x^2-3xy+y-5$	$y^2+2xy-3y-15$	$[-5;5]$	$[0;6]$
20	$2x^2-5xy+3$	$3y^2+2xy-y-6$	$[4;4]$	$[-4;4]$
21	$2x^2-5xy+4y+7$	$3y^2+2xy+3x-2$	$[-2;8]$	$[-5;5]$
22	$-x^2-5xy+4y-2$	$3y^2+2xy+2x-3$	$[1;8]$	$[-5;5]$
23	$2x^2-5xy-2x+8$	$2x^2+4xy-5x+2$	$[-5;5]$	$[-5;5]$
24	$2x^2-5xy+2y-1$	$2x^2+4xy+7x-9$	$[-5;5]$	$[-5;5]$
25	$2x^2-5xy+2x^3+2$	$3y^2+2xy+7x+7$	$[-4;4]$	$[-4;4]$
26	$2x^2-3xy+4$	$2x^2-xy^3-12x-16$	$[-5;5]$	$[-4;4]$
27	$3y^2+2xy+3x+2$	$2x^2-5xy-7y-14$	$[-5;5]$	$[-2;8]$
28	$3y^2+2xy+2x-6$	$-x^2-5xy+4y-1$	$[-5;5]$	$[0;4]$
29	$2x^2+4xy-5x+3$	$4x^2+5xy-2x+3$	$[-5;5]$	$[-5;5]$
30	$2x^2+4xy-7x-3$	$2x^2+5xy+6y+9$	$[-5;5]$	$[-5;5]$

Примерные контрольные вопросы

1. К какому виду приводится система нелинейных уравнений в методе простой итерации?
2. Какова скорость сходимости метода Ньютона?
3. Недостатки метода Ньютона.
4. В чем заключается модификация метода Ньютона и как при этом изменяется скорость сходимости?
5. Что такое градиент и антиградиент?
6. Привести графическую и интерпретацию метода спуска для случая систем двух уравнений.

Задание 5. Численное интегрирование

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 5.

Задача 5.1. Задана функция $P_n(x)$ в таблице согласно номеру варианта. Найти значение определенного интеграла с подынтегральной функцией $P_n(x)$ на заданном интервале $[a,b]$. Для решения задачи использовать квадратурные формулы левых, правых и центральных прямоугольников, формулы трапеций, Симпсона, формулу 3/8, формулу Милана, формулы Гаусса с двумя и тремя узлами.

Порядок решения

1. Вычислить значение интеграла $I = \int_a^b P_n(x)dx$ аналитически.

2. Составив программы в пакете MathCAD, найти приближенное значение интеграла по квадратурным формулам левых, правых и центральных прямоугольников, формуле трапеций, Симпсона, формуле 3/8 и формуле Милана. Отрезок $[a,b]$ считать элементарным отрезком интегрирования, шаг h постоянным.

3. Для формул прямоугольников, трапеций и Симпсона из априорных оценок погрешности (5.7)–(5.9) найти шаг h_a для достижения заданной точности $\xi = 10^{-6}$.

4. В качестве оценки погрешности вычисления интеграла для достижения заданной точности $\xi = 10^{-6}$ в программе применить правило двойного пересчета (5.19). Начальный шаг $h = (b-a)/2$, затем $h = (b-a)/2^n$, $n = 2,3,\ldots$.

Для каждой квадратурной формулы интерполяционного типа найти значение конечного шага h_d и соответствующее ему приближенное значение интеграла.

Сравнить полученные из апостериорных оценок значения h_d с соответствующими значениями h_a, вычисленными теоретически в предыдущем пункте.

5. Считая отрезок $[a,b]$ элементарным отрезком интегрирования, найти приближенное значение интеграла по формулам Гаусса с двумя и тремя узлами (см. 5.4).

6. Найти для каждой формулы абсолютную погрешность результата. В каком случае погрешность равна нулю и почему?

Задача 5.2. Задана функция $g(x)$ в таблице согласно номеру варианта. Найти значение определенного интеграла с подынтегральной функцией $g(x)$ на заданном интервале $[a,b]$. Для решения задачи использовать квадратурные формулы трапеций, Симпсона, формулу 3/8, формулу Милана и формулы Гаусса с двумя, тремя и четырьмя узлами.

Порядок решения

1. Используя пакет MathCAD, графически построить криволинейную трапецию, площадь которой следует вычислить.

2. Используя составленные программы для решения задачи 5.1 найти приближенное значение интеграла по квадратурным формулам центральных прямоугольников, трапеций, Симпсона, формуле 3/8 и формуле Милана. Отрезок $[a,b]$ считать элементарным отрезком интегрирования, шаг h постоянным.

3. В качестве оценки погрешности вычисления интеграла по квадратурным формулам интерполяционного типа для достижения заданной точности $\xi = 10^{-5}$ в программе применить правило двойного пересчета (5.19), изменяя шаг от $h = (b-a)/2$ до $h = (b-a)/2^n$, n = 2,3,… . Для каждой формулы найти значение конечного шага h_d и соответствующее ему приближенное значение интеграла.

4. Разделить отрезок $[a,b]$ точками c и d. Выбор точек c и d зависит от поведения функции $g(x)$ (*адаптивный метод*).

Очевидно, что на интервале, где функция имеет резкие изменения, целесообразно использовать больше узлов. Применяя аддитивное свойство интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx,$$

для каждого отрезка $[a,c]$, $[c,d]$ и $[d,b]$ найти приближенные значения интеграла по квадратурным формулам трапеций, Симпсона, формуле 3/8 и формуле Милана.

Для каждого отрезка $[a,c]$, $[c,d]$, $[d,b]$ используемой формулы указать соответствующий шаг h_1, h_2, h_3 для достижения заданной точности $\xi = 10^{-5}/3$ по правилу двойного пересчета. Определить общее количество узлов

$$n = (c-a)/h_1 + (d-c)/h_2 + (b-d)/h_3 .$$

5. Применить адаптивный метод для формул Гаусса с двумя, тремя и четырьмя узлами.

6. Сравнить результаты вычислений до применения адаптивной процедуры и после.

7. Проанализировать все полученные результаты. Для каждой формулы и метода указать абсолютную погрешность вычисления, шаг и число узлов; данные свести в таблицу.

Метод	Значения	Δ	Метод	Значения	Δ
Левых прямоугольников	h, n		Трапеций	h, n	
	h_a, n			h_a, n	
	h_d, n			h_d, n	
				h_{adap}, n	
Правых прямоугольников	h, n		…	…	
	h_a, n				
	h_d, n				
Центральных прямоугольников	h, n				
	h_a, n				
	h_d, n				
…	…				

Исходные данные к задачам 5.1, 5.2

Вариант	$P_n(x)$	$[a;b]$	$g(x)$	$[a;b]$
1	$1,6x^5+1,6x^4-2,1x^3+0,3x^2+2,1x+5,4$	$[1;1,5]$	$x/\cos\sqrt{x}$	$[0;2]$
2	$2,3x^5+1,9x^4-0,4x^3+0,3x^2-2,9x+2$	$[1;1,5]$	$20x^2/\cos x^2$	$[-1,2;1,2]$
3	$2,5x^5-2,9x^4+1,4x^3-1,3x^2+2,1x-3$	$[1;1,4]$	$4/\cos(x^3/2)$	$[-1,2;1,2]$
4	$1,5x^5-2,5x^4+1,5x^3-1,9x^2-2,4x-3$	$[1;1,4]$	$(4x^2+1)/\sin x$	$[0,25;2]$
5	$-2,5x^5+2,5x^4-1,7x^3-8x^2-2,4x+8$	$[1;1,6]$	$(2x^2+8x+1)/\sin x$	$[0,2;2]$
6	$-4,5x^5+2,5x^4+1,7x^3-0,5x^2+5,1x+2,2$	$[1;1,6]$	$(4x^3+3x+2)/\sin x$	$[0,4;2]$

Вари-ант	$P_n(x)$	$[a;b]$	$g(x)$	$[a;b]$
7	$6,5x^5-2,5x^4+1,7x^3-0,5x^2-5,5x+3,4$	$[1;1,4]$	$(3x^3+3x^2+1)/\sin x$	$[0,2;2]$
8	$-4,2x^5+2,2x^4-1,7x^3-0,5x^2-5,5x-8,2$	$[1;1,8]$	$(5x^3+3x+4)/\sin x$	$[0,2;2,5]$
9	$-2,7x^5+2,8x^4-5,7x^3-0,5x^2+6,5x-0,9$	$[1;1,8]$	$(2x^3+x^2+0,5)/\sin x$	$[0,2;2,5]$
10	$3,7x^5-5,8x^4+5,7x^3-6,5x^2+7,5x-1,2$	$[1;1,4]$	$(2x^4+4x^2+1)/\cos x$	$[-1,4;1,4]$
11	$-0,7x^5+1,8x^4+6,8x^3-4,5x^2+7,5x-2,2$	$[1;1,5]$	$(2x^4+x^2+0,5)/\cos x$	$[-1,4;1,4]$
12	$1,6x^5+1,6x^4-2,1x^3+0,3x^2+2,1x+5,4$	$[1;1,5]$	$2x^2/\cos\sqrt{x}$	$[0;2]$
13	$3x^5+1,9x^4-0,4x^3+0,3x^2-2,9x+2$	$[1;1,5]$	$3x^2/\cos x^2$	$[-1,2;1,2]$
14	$2,5x^5-2,9x^4+1,4x^3-1,3x^2+2,1x-3$	$[1;1,4]$	$5/\cos(x^3/2)$	$[-1,2;1,2]$
15	$1,5x^5-2,5x^4+4,5x^3-2,9x^2+2,4x+2$	$[1;1,4]$	$(3x^2+1)/\sin x$	$[0,25;2]$
16	$-3,8x^5+3,5x^4+1,5x^3-8x^2-2,4x+2$	$[1;1,6]$	$(x^2+4x+1)/\sin x$	$[0,2;2]$
17	$-2,5x^5+3,5x^4+1,7x^3+5x^2-0,2x+2,5$	$[1;1,6]$	$(4x^3+x+2)/\sin x$	$[0,4;2]$
18	$3,5x^5-2,5x^4+1,2x^3-0,5x^2-5,8x+2,4$	$[1;1,4]$	$(3x^3+x^2+0,5)/\sin x$	$[0,2;2]$
19	$-6,2x^5+4,2x^4-3,7x^3-0,5x^2+7,5x+0,5$	$[1;1,8]$	$(6x^3+3x+0,8)/\sin x$	$[0,2;2,5]$
20	$-2,4x^5+1,8x^4-5,7x^3-0,5x^2+6,5x+2$	$[1;1,8]$	$(x^3+3x^2+0,5)/\sin x$	$[0,2;2,5]$
21	$2,7x^5-3,8x^4+5,7x^3+6,5x^2+4,5x-1,2$	$[1;1,4]$	$(2x^4+x^2+0,4)/\cos x$	$[-1,4;1,4]$
22	$-2,7x^5+1,8x^4+6,8x^3-4,5x^2+7,5x-2,8$	$[1;1,5]$	$(2x^4+x^2+0,2)/\cos x$	$[-1,4;1,4]$
23	$1,6x^5+1,6x^4-2,1x^3+0,3x^2+5,4$	$[1;1,5]$	$(3x+0,2)/\cos\sqrt{x}$	$[0;2]$
24	$2,3x^5+1,9x^4-0,4x^3+0,3x^2-2,9x+2$	$[1;1,5]$	$(4x+0,4)/\cos\sqrt{x}$	$[-1,2;1,2]$
25	$2,5x^5-2,9x^4+1,4x^3-1,3x^2+3$	$[1;1,4]$	$(x+0,6)/\cos(x^3/2)$	$[-1,2;1,2]$
26	$1,5x^5-2,5x^4+1,5x^3-1,9x^2+6$	$[1;1,4]$	$(4x^2+0,8)/\sin x$	$[0,25;2]$
27	$-2,5x^5+2,5x^4-8,5x^2-2,4x+4,2$	$[1;1,6]$	$(2x^3+5x+0,4)/\sin x$	$[0,2;2,5]$
28	$-4,5x^5+2,5x^4+1,7x^3+2,1x+5,4$	$[1;1,6]$	$(2x^3+3x^2+0,2)/\sin x$	$[0,2;2,5]$
29	$3,3x^5+1,9x^4-0,4x^3+0,3x^2-2,9x-5$	$[1;1,4]$	$(5x^4+0,5x^2+0,2)/\cos x$	$[-1,4;1,4]$
30	$0,7x^5-1,8x^4+5,7x^3+6,5x^2+7,5x-1,2$	$[1;1,5]$	$(x^4+0,2x^2+0,6)/\cos x$	$[-1,4;1,4]$

Примерные контрольные вопросы

1. Геометрический смысл определенного интеграла?
2. Какой зависимость связан шаг интегрирования с количеством интервалов?
3. От чего зависит точность получаемого результата интегрирования?
4. Как получить квадратурную формулу для неравноотстоящих узлов интегрирования?
5. Какие методы дают точное значение при интегрировании линейной функции?
6. Почему для метода Симпсона число интервалов должно быть четным?
7. Что такое апостериорная оценка погрешности результата?
8. Может ли значение интеграла получиться отрицательным числом?
9. Что такое адаптивный метод?

Задание 6. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 6.

Задача 6.1. Численно решить задачу Коши $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, L]$.

В таблице заданы функция $f(x, y)$, начальное условие y_0, значение L. Найти решение задачи Коши, используя явную схему Эйлера (6.14), схемы Рунге – Кутты второго порядка точности (6.22) и (6.23); схему Рунге – Кутты четвертого порядка точности (6.25) и формулу метода Адамса четвертого порядка точности (6.30).

Порядок решения

1. Решить задачу Коши $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ аналитически. Построить график точного решения $y = y(x)$ на заданном интервале $[x_0, L]$.

2. Принять, что постоянный шаг $h = 0{,}1$. Составить программы в пакете MathCAD и найти приближенное решение задачи Коши $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $n = (L - x_0)/h$ по вышеуказанным формулам (для начала счета метода Адамса взять значения, вычисленные по схеме Рунге – Кутты четвертого порядка точности).

3. Для каждого метода найти абсолютную погрешность решения $\|\mathbf{z}\|_C$, зная точное аналитическое решение задачи Коши $y_i = y(x_i)$, $x_i = x_0 + ih$, по формуле

$$\|\mathbf{z}\|_C = \max_{0 \le i \le n} |y_i - u_i|.$$

4. На одном графике построить точное решение и полученные сеточные функции.

5. Проанализировать полученные результаты. Какой из методов дает наиболее и наименее точное решение задачи Коши?

З а д а ч а 6.2. Численно решить задачу Коши $y' = g(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, L]$.

В таблице заданы функция $g(x, y)$, начальное условие x_0, y_0, значение L. Найти решение задачи Коши, применяя одну из схем Рунге – Кутты второго порядка точности (6.22) или (6.23), схему Рунге – Кутты четвертого порядка точности (6.25).

Порядок решения

1. Принять, что шаг $h = 0{,}15$. Используя программы, составленные для задачи 6.1, найти приближенное решение задачи Коши $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $n = (L - x_0)/h$ по указанным в условии схемам для шага $h = 0{,}15$, а затем половинного шага $h = 0{,}075$.

2. Для *повышения точности* решения задачи Коши с постоянным шагом $h = 0{,}15$ в программе применить правило двойного пересчета (6.26), на каждом шаге внося поправку ξ_{i+1}:

$$u_{i+1} = u_{i+1}^{h+1/2} + \xi_{i+1},$$

где

$$\xi_{i+1} = \frac{u_{i+1}^{h+1/2} - u_{i+1}^{h}}{2^k - 1}.$$

Здесь для явной схемы Рунге – Кутты второго порядка точности k =2. Значение $u_{i+1}^{h+1/2}$ при $x = x_0 + h(i+1)$ вычисляется двумя последовательными действиями с половинным шагом:

$$u_{i+1/2}^{h+1/2} = u_i + \frac{h}{4}\left[f(x_i, u_i) + f(x_i + h/2, u_i + h/2\, f(x_i, u_i))\right],$$

$$u_{i+1}^{h+1/2} = u_{i+1/2}^{h+1/2} + \frac{h}{4}\left[f(x_{i+1/2}, u_{i+1/2}^{h+1/2}) + f(x_{i+1/2} + h/2, u_{i+1/2}^{h+1/2} + h/2\, f(x_{i+1/2}, u_{i+1/2}^{h+1/2}))\right]$$

Для явной схемы Рунге – Кутты четвертого порядка точности k = 4 и

$$u_{i+1/2}^{h+1/2} = u_i + \frac{h}{12}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = f(x_i, u_i), \qquad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{4}, u_i + \frac{h}{4} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{4}, u_i + \frac{h}{4} k_2\right), \quad k_4 = f\left(x_i + \frac{h}{4}, u_i + \frac{h}{2} k_3\right).$$

Следующий шаг:

$$u_{i+1}^{h+1/2} = u_{i+1/2}^{h+1/2} + \frac{h}{12}(\tilde{k}_1 + 2\tilde{k}_2 + 2\tilde{k}_3 + \tilde{k}_4),$$

где

$$\tilde{k}_1 = f(x_{i+1/2}, u_{i+1/2}^{h+1/2}), \qquad \tilde{k}_2 = f\left(x_{i+1/2} + \frac{h}{4}, u_{i+1/2}^{h+1/2} + \frac{h}{4}\tilde{k}_1\right),$$

$$\tilde{k}_3 = f\left(x_{i+1/2} + \frac{h}{4}, u_{i+1/2}^{h+1/2} + \frac{h}{4}\tilde{k}_2\right), \quad \tilde{k}_4 = f\left(x_{i+1/2} + \frac{h}{4}, u_{i+1/2}^{h+1/2} + \frac{h}{2}\tilde{k}_3\right).$$

3. На одном графике построить полученные приближенные сеточные функции по схеме Рунге – Кутты второго порядка точности, и с уточнением решения по правилу двойного пересчета с шагом $h = 0{,}15$. Здесь же привести график полученной сеточной функции по схеме Рунге – Кутты второго порядка точности с половинным шагом $h = 0{,}075$.

4. На одном графике построить полученные приближенные сеточные функции для схемы Рунге – Кутты четвертого порядка точности с первоначальным шагом $h = 0{,}15$, и с уточнением решения по правилу двойного пересчета. Здесь же привести график полученной приближенной сеточной функции по схеме Рунге – Кутты четвертого порядка точности с половинным шагом $h = 0{,}075$.

5. Оценить точность приближенного решения задачи Коши $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ для явной схемы Рунге – Кутты второго порядка точности с половинным шагом $h = 0{,}075$, применяя апостериорную оценку локальной погрешности значения $u_{i+1}^{h+1/2}$ в каждом узле:

$$y_{i+1} - u_{i+1}^{h+1/2} \approx \frac{u_{i+1}^{h+1/2} - u_{i+1}^{h}}{2^2 - 1} = \xi_{i+1}, \qquad \|\xi\| = \max_{0 \le i \le n} |\xi_i|.$$

6. Оценить точность приближенного решения задачи Коши $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ для явной схемы Рунге – Кутты четвертого порядка точ-

ности с половинным шагом $h = 0{,}075$, применяя апостериорную оценку локальной погрешности значения $u_{i+1}^{h+1/2}$:

$$y_{i+1} - u_{i+1}^{h+1/2} \approx \frac{u_{i+1}^{h+1/2} - u_{i+1}^{h}}{2^4 - 1} = \xi_{i+1}, \qquad \|\xi\| = \max_{0 \le i \le n} |\xi_i|.$$

7. Проанализировать полученные результаты. Какой из методов дает наиболее и наименее точное решение задачи Коши?

Исходные данные к задачам 6.1, 6.2

Вариант	$f(x)$	x_0	y_0	L	$g(x)$	x_0	y_0	L
1	$y\cos x + \sin 2x$	0	–1	1	$-\frac{2y^2}{x} + x^3$	1	$-\frac{5}{6}$	2,5
2	$3x^2 y + \frac{x^2(1+x^3)}{3}$	0	0	1	$\frac{y^2}{x} - \frac{12}{x^3}$	1	4	2,5
3	$\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x}$	1	1	2	$\frac{y^2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$	1	1	2,5
4	$4xy - 4x^3$	0	–1	2	$-\frac{y^2}{x} + \frac{x+1}{x}e^x$	1	3	2,5
5	$y\cos x - \sin 2x$	0	3	1	$\frac{2x-5}{x^2}y^2 + 5$	2	4	4,5
6	$\frac{2y}{x+1} + (x+1)^3$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{-2xy^2}{1+x^2} + \frac{2x^2}{1+x^2}$	0	$\frac{2}{3}$	1,5
7	$-2xy + \frac{x\sin x}{e^{x^2}}$	0	1	1	$-\frac{y^2}{2x} + x^2$	1	1	2,5
8	$\frac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$	0	1	1	$-\frac{y^2}{x} + \sin x$	3	$\frac{1}{3}$	4,5
9	$-xy - x^3$	0	3	1	$\frac{y^2}{x} + x\sin x$	1	1	2,5
10	$\frac{y}{x} - \frac{2}{x^2}$	1	1	1	$\frac{y^2}{x+1} + (x+1)e^x$	0	1	1,5
11	$-2xy - 2x^3$	1	e^{-1}	2	$\frac{y^2}{1+x^2} + 2x + x^2$	–1	1,5	0,5

Вариант	$f(x)$	x_0	y_0	L	$g(x)$	x_0	y_0	L
12	$-\frac{3y}{x}+\frac{2}{x^2}$	1	1	2	$-\sqrt[3]{y^5}\,\mathrm{tg}x+\cos^2 x$	0,5	0,5	2
13	$\frac{2x-1}{x^2}y+1$	1	1	2	$-\sqrt[3]{y^5}\cos x+\frac{\sin 2x}{2}$	0	0	1,5
14	$\frac{2x}{1+x^2}y+1+x^2$	1	3	2	$y^2\mathrm{ctg}x+2x\sin x$	1,5	0	3
15	$-\frac{y}{x}+3x$	1	1	2	$\frac{y^{\frac{5}{3}}}{x}+x^2$	1	0	2,5
16	$-\frac{2y}{x}+x^3$	1	$-\frac{5}{6}$	2	$y^2\cos x+\sin 2x$	0	–1	1,5
17	$\frac{y}{x}-\frac{12}{x^3}$	1	4	2	$3x^2y^2+\frac{x^2(1+x^3)}{3}$	0	0	1,5
18	$\frac{y}{x}-\frac{2\ln x}{x}$	1	1	2	$\frac{y^2}{x}-\frac{\ln x}{x}$	1	1	2,5
19	$-\frac{y}{x}+\frac{x+1}{x}e^x$	1	e	2	$4xy^2-4x^3$	0	–1	1,5
20	$\frac{2x-5}{x^2}y+5$	2	4	3	$\sqrt[3]{y^5}\cos x-\sin 2x$	0	3	1,5
21	$\frac{-2x}{1+x^2}y+\frac{2x^2}{1+x^2}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2y^2}{x+1}+(x+1)^3$	0	$-\frac{1}{2}$	1,5
22	$-\frac{y}{2x}+x^2$	1	1	2	$-2xy^2+\frac{x\sin x}{e^{x^2}}$	0	1	1,5
23	$-\frac{y}{x}+\sin x$	π	$\frac{1}{\pi}$	$\pi+1$	$\frac{2y^{\frac{5}{3}}}{x+1}+e^x(x+1)^2$	0	1	1,5
24	$\frac{y}{x}+x\sin x$	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}+1$	$-x\sqrt[3]{y^5}-x^3$	0	3	1,5
25	$\frac{y}{x+1}+(x+1)e^x$	0	1	1	$\frac{\sqrt[3]{y^5}}{x}1-\frac{2}{x^2}$	1	1	2,5
26	$\frac{y}{1+x^2}+2x+x^2$	–1	1,5	0	$-2xy^2-2x^3$	1	$\frac{1}{3}$	2,5
27	$-y\mathrm{tg}x+\cos^2 x$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}+1$	$-\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{x}+\frac{2}{x^2}$	1	1	2,5

Вариант	$f(x)$	x_0	y_0	L	$g(x)$	x_0	y_0	L
28	$-y\cos x+\dfrac{\sin 2x}{2}$	0	0	1	$\dfrac{2x-1}{x^2}y^{\frac{5}{3}}+1$	1	1	2,5
29	$y\mathrm{ctg}x+2x\sin x$	$\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}+1$	$\dfrac{2x}{1+x^2}y^{\frac{5}{3}}+1+x^2$	1	3	2,5
30	$\dfrac{y}{x}+x^2$	1	0	2	$-\dfrac{y^{\frac{5}{3}}}{x}+3x$	1	1	2,5

Примерные контрольные вопросы

1. Что получается в результате применения численного метода для решения обыкновенных дифференциальных уравнений?
2. От чего зависит точность получаемого результата?
3. Насколько точнее модифицированный метод Эйлера простого?
4. Зависит ли получаемое решение каким-либо методом от начального условия?

Задание 7. Приближение функций

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 4.

Задача 7.1. Задана функция $f(x)$ и отрезок $[a,b]$ в таблице согласно номеру варианта. Приблизить интерполяционными многочленами Лагранжа при равномерном и чебышевском распределении узлов интерполяции. Сравнить результаты.

Порядок решения

1. Составить программу-функцию построения интерполяционного многочлена при произвольном распределении n узлов

$$L_{n-1}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}y_i\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_{n-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_{n-1})}.$$

2. Используя составленную программу, найти приближение в форме интерполяционными многочленами Лагранжа при *равномерном* распределении n узлов. Вычислить при этом приближенные значения функции $f(x)$ в $3n$ точках отрезка $[a,b]$.

3. Используя составленную программу, найти приближение в форме интерполяционными многочленами Лагранжа при чебышевском распределении n узлов

$$t_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0,1,..., n-1; \quad x_k = \frac{a+b}{2} + t_k\frac{b-a}{2}.$$

Вычислить при этом приближенные значения функции $f(x)$ в тех же самых $3n$ точках отрезка $[a,b]$, что и в предыдущем пункте.

4. На одном чертеже построить графики приближающих интерполяционных многочленов с равномерным, чебышевском распределением узлов и исходной функции.

5. В $3n$ точках отрезка $[a,b]$ вычислить практическую величину погрешностей

$$\Delta_i = \left| f(x_i) - L_{n-1}(x_i) \right|, \ i = 1, 2, ..., 3n.$$

На одном чертеже построить графики погрешностей при *равномерном* и *чебышевском* распределении узлов интерполяции.

6. Оценить для каждого случая погрешность приближения по формуле $\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{3n} \Delta_i^2}$. Сравнить качество приближений функции при разном распределении узлов.

7. Выполнить п. 2−6, строя интерполяционный многочлен по $2n$ узлам интерполяции.

8. Сравнить качество приближений функции при разном количестве узлов.

З а д а ч а 7.2. Задана функция $g(x)$ отрезок $[a,b]$ в таблице согласно номеру варианта. Приблизить методом глобальной интерполяции и естественным кубическим сплайном. Сравнить результаты.

Порядок решения

1. Составить программу-функцию построения интерполяционного многочлена степени n по одной из формул (6.4), (6.15).

2. Используя составленную программу, найти приближение функция $g(x)$ методом глобальной интерполяции. Вычислить при этом приближенные значения функции $g(x)$ в $3n$-точках отрезка $[a,b]$.

3. Построить естественный кубический сплайн (см. 6.5), используя те же узлы, что и в методе глобальной интерполяции.

Вычислить при этом приближенные значения функции $f(x)$ в тех же самых $3n$-точках отрезка $[a,b]$, что и в предыдущем пункте.

4. На одном чертеже по найденным значениям в $3n$-точках построить график интерполяционного многочлена, кубического сплайна и исходной функции $g(x)$.

5. В $3n$-точках отрезка $[a,b]$ вычислить практическую величину погрешностей $\Delta_i = \left| f(x_i) - L_{n-1}(x_i) \right|$, $i = 1,2,...3n$. На одном чертеже построить графики погрешностей для интерполяционного многочлена и кубического сплайна.

6. Оценить для каждого случая погрешность приближения по формуле $\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{3n} \Delta_i^2}$. Сравнить качество приближений функции.

7. Выполнить пп. 2–6, увеличивая количество узлов и соответственно степень многочлена интерполяции.

8. Сравнить качество приближений функции при разном количестве узлов.

Исходные данные к задачам 7.1, 7.2

Вари-ант	$f(x)$	$[a;b]$	$g(x)$	$[a;b]$
1	$e^{x/2}\sin x$	$[0;3]$	$x\cos\sqrt{x}$	$[0;4]$
2	$e^{x^2/2}\sin x$	$[-2;2]$	$x^2\cos x^2$	$[-1{,}5;1{,}5]$
3	$e^{x^2/2}\sin 2x$	$[-2;2]$	$4\cos(x^3/2)$	$[-1{,}5;1{,}5]$
4	$e^{(x^2+1)/2}\sin x$	$[-2;2]$	$(4x^2+1)\sin(4x^2)$	$[-1;3]$
5	$e^{(x^2-1)/2}\sin x$	$[0;1{,}6]$	$(2x^2+8x+1)\sin x$	$[0{,}2;3]$
6	$e^{(x^2+1)/2}\sin x^2$	$[-2;2]$	$(x^3+3x+2)\sin x$	$[-1;3]$
7	$e^{\sqrt{x}}\cos x$	$[0;4]$	$(3x^3+3x^2+1)\sin\sqrt{x}$	$[0;3]$
8	$e^{\sqrt{x}}\cos x^2$	$[0;4]$	$(5x^3+3x+4)\sin x$	$[-1;2{,}5]$
9	$e^{\sqrt{x+1}}\cos\sqrt{x}$	$[0;3]$	$(2x^3+x^2+0{,}5)\sin\sqrt{x}$	$[0{,}2;2{,}5]$
10	$e^{\sqrt{x+2}}\cos\sqrt{x}$	$[0;3]$	$(2x^4+4x^2+1)\cos x$	$[-1{,}5;1{,}5]$
11	$e^{\sqrt{x+2}}\cos\sqrt{x+1}$	$[-1;3]$	$(2x^4+x^2+0{,}5)\cos x$	$[-1{,}5;1{,}5]$
12	$e^{x/2}\cos x$	$[-2;2]$	$2x^2\cos\sqrt{x}$	$[0;4]$

Вари-ант	$f(x)$	$[a;b]$	$g(x)$	$[a;b]$
13	$e^{x^2/3}\cos x$	$[-2;2]$	$3x^2\cos x^2$	$[-2;2]$
14	$e^{x^2/2}\cos 2x$	$[-2;2]$	$5x^2\cos(x^3/2)$	$[-1,5;1,5]$
15	$e^{(x^2+1)/3}\cos x$	$[-2;2]$	$(x^2+2x)\sin x$	$[-2;2]$
16	$e^{(x^2+1)/4}\sin(2x^2)$	$[-2;\ 2]$	$(x^2+4x+1)\sin x$	$[-2;2]$
17	$e^{x^2/2}\sin(x^2-1)$	$[-2;2]$	$(4x^3+x+2)\sin x$	$[-2;2]$
18	$e^{x^2/2}\sin(2x)$	$[-2;2]$	$(3x^3+x^2+0,5)\sin x$	$[-2;1]$
19	$e^{(x^2+1)/2}\sin x^2$	$[-2;\ 2]$	$(x^3+3x+0,8)\sin x$	$[-2;2]$
20	$e^{(x^2-1)/2}\sin(3x)$	$[-2;2]$	$(x^3-3x^2+0,5)\sin x$	$[0;3]$
21	$e^{(x^2+1)/2}\sin(2x)$	$[-2;2]$	$(2x^4+x^2+0,4)\cos x$	$[-1,5;1,5]$
22	$e^{\sqrt{x}}\cos(x/2)$	$[0;4]$	$(2x^4+x^2+0,2)\cos x$	$[-1,5;1,5]$
23	$e^{\sqrt{x}/2}\cos(x-1)^2$	$[0;\ 4]$	$(3x^2+0,2)\cos\sqrt{x}$	$[0;2]$
24	$e^{\sqrt{x+1}}\cos\sqrt{x-1}$	$[1;4]$	$(x^3+0,4)\cos\sqrt{x}$	$[0;\ 2]$
25	$e^{\sqrt{x+2}}\cos\sqrt{x}$	$[0;4]$	$(x^2+0,6)\cos(x^3/2)$	$[-2;2]$
26	$e^{2\sqrt{x+2}}\cos\sqrt{x+1}$	$[-1;2]$	$(3x^2-2)\sin x$	$[-2;2]$
27	$e^{x/2}\cos 2x$	$[-2;2]$	$(x^3-5x+0,4)\sin x$	$[-2;2]$
28	$e^{x^2/2}\cos(1,5x)$	$[-2;2]$	$(2x^3-3x^2+0,2)\sin x$	$[-2;2]$
29	$e^{x^2/2}\cos(2,5x)$	$[-2;2]$	$(x^4-0,5x^2+0,2)\cos x$	$[-1,5;1,5]$
30	$e^{(x^2-1)/2}\cos 3x$	$[-2;2]$	$(x^4-0,2x^2+0,6)\cos x$	$[-1,5;1,5]$

Примерные контрольные вопросы

1. Как ставится задача интерполяции?
2. В чем отличие интерполирования от экстраполирования?
3. Какие формулы используются для интерполирования в равноотстоящих узлах, а какие в неравноотстоящих?
4. Что такое узлы интерполяции?
5. Чем отличаются первая и вторая формулы Ньютона?

Задание 8. Метод наименьших квадратов

Задача 8. Задана таблица приближенных значений y_i функции $f(x)$ и узлах x_i согласно номеру варианта. Приблизить $f(x)$ методом наименьших квадратов. В качестве приближающей функции взять указанные в варианте две функции. Сравнить результаты.

Перечислим приближающие функции:

$F_1(x) = ax^2 + bx + c$ с параметрами a, b и c;

$F_2(x) = ax^m$ с параметрами $a > 0$ и m;

$F_3(x) = ae^{mx}$ с параметрами $a > 0$ и m;

$F_4(x) = \dfrac{1}{ax + b}$ с параметрами a и b;

$F_5(x) = \dfrac{x}{ax + b}$, с параметрами a и b;

$F_6(x) = \dfrac{a}{x} + b$, с параметрами a и b;

$F_7(x) = a\ln x + b$ с параметрами a и b;

$F_8(x) = a\cos x + b\sin x$ с параметрами a и b.

Порядок решения

1. Составить систему уравнений метода наименьших квадратов.

Приближающие функции $F_2 - F_7$ предварительно с помощью замены переменной следует привести к линейной форме (см. разд. 6.6 с примерами). Из системы (6.31) с помощью встроенной функции *Isolve* пакета MathCAD найти параметры линейной приближающей функции и восстановить параметры исходной приближающей функции.

В случае квадратичной функции $F_1(x)$ неизвестные параметры находятся из системы (6.32).

Функция $F_8(x)$ представлена в виде линейной комбинации известных функции, коэффициенты a и b определяются из системы (6.30) метода наименьших квадратов. Функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ соответственно равны $\cos x, \sin x$.

2. На одном чертеже построить графики приближающих функций и заданные приближенные значения искомой функции.

3. Сравнить степень приближения по сумме квадратов отклонений найденных приближающих функций от соответствующих табличных значений

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{8} (F_j(x_i) - y_i)^2}\ .$$

Исходные данные к задаче 8

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Функции
	0,4	0,8	1	1,5	1,8	2	2,5	3	
1	12,962	10,245	9,152	6,250	1,440	4,201	2,500	1,022	F_1 и F_7
2	13,963	11,242	10,121	7,250	2,144	5,050	3,250	2,020	F_1 и F_7
3	10,960	8,241	7,041	4,251	−0,562	2,022	0,250	−1,022	F_1 и F_4
4	15,961	13,242	12,152	9,250	4,400	7,012	5,250	4,022	F_1 и F_4
5	11,961	9,240	8,051	5,250	0,441	3,041	1,250	0,061	F_1 и F_6
6	9,960	7,240	6,002	3,250	−1,560	1,001	−0,750	−2,002	F_1 и F_5
7	16,960	14,240	13,002	10,250	5,440	8,002	6,250	5,003	F_1 и F_5
8	12, 500	6,250	5,005	3,333	2,780	2,501	2,041	1,670	F_6 и F_7
9	10,500	4,250	3,002	1,333	0,778	0,500	0,001	−0,333	F_6 и F_5
10	13,500	7,250	6,002	4,333	3,778	3,500	3,002	2,666	F_6 и F_4
11	9,500	3,250	2,100	0,333	−0,222	−0,500	−1,150	−1,333	F_6 и F_5
12	13,001	6,750	5,500	3,832	3,280	3,120	2,500	2,165	F_6 и F_4
13	8,500	2,250	1,001	−0,666	−1,222	−1,5	−2,023	−2,332	F_6 и F_5
14	12,800	6,552	5,320	3,325	3,068	2,811	2,320	1,957	F_6 и F_7
15	0,064	0,512	1,020	3,375	5,832	8,002	15,625	27,001	F_2 и F_3
16	0,128	1,024	2,002	6,750	11,666	16,112	31,250	54,201	F_2 и F_3
17	0,032	0,256	0,52	1,678	2,915	4,004	7,802	13,502	F_1 и F_2
18	0,096	0,768	1,500	5,062	8,750	12,078	23,440	40,502	F_2 и F_3
19	0,016	0,128	0,250	0,843	1,458	2,105	3,905	6,750	F_1 и F_2
20	0,115	0,920	1,801	6,075	10,502	14,401	28,125	48,604	F_2 и F_3
21	0,048	0,615	1,203	4,005	7,001	9,602	18,750	32,402	F_2 и F_4
22	0,032	0,102	0,201	0,675	1,167	1,602	35,125	5,402	F_1 и F_2
23	−0,916	−0,223	0,002	0,405	0,587	0,687	0,914	1,101	F_7 и F_8
24	0,084	0,777	1,001	1,401	1,587	1,687	1,916	2,087	F_7 и F_8
25	−1,832	−0,446	0,01	0,901	1,174	1,378	1,802	2,878	F_5 и F_7
26	−0,458	−0,112	0,002	0,202	0,294	0,345	0,458	0,500	F_7 и F_8
27	−1,916	−1,223	−1,002	−0,595	−0,413	−0,301	−0,084	−0,001	F_7 и F_8
28	0,542	0,888	1,001	1,200	1,294	1,350	1,458	1,500	F_7 и F_8
29	2,168	3,554	4,001	4,901	4,172	4,378	4,802	5,189	F_1 и F_7
30	3,168	4,554	5,004	5,901	6,174	6,367	6,800	7,201	F_5 и F_7

Примерные контрольные вопросы

1. Как ставится задача приближения функции?
2. Как оценить отклонение точек от заданной функции?
3. Как выполняется линеаризация аппроксимирующей функции?
4. Как выбрать аппроксимирующую функцию?

Задание 9. Численное решение краевой задачи для одномерного однородного и неоднородного уравнения теплопроводности

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 7.

Задача 9.1. Найти численное решение уравнения $u'_t = a^2 u''_{xx}$, удовлетворяющего условиям $u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$,

$$u(x,0) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le l/2, \\ c(l-x), & l/2 \le x \le l. \end{cases}$$

В таблице заданы значения c, a, l и T. Найти численное решение задачи на временном интервале $[0;T]$, используя явную схему (9.5), неявную схему (9.8) и схему Кранка – Николсона при весе $\sigma = 1/2$.

Значения v_i^{j+1} сеточной функции по схеме Кранка – Николсона на новом временном слое определяются из краевой задачи:

$$\frac{\tau}{2h^2} v_{i-1}^{j+1} - (1 + \frac{\tau}{h^2}) v_i^{j+1} + \frac{\tau}{2h^2} v_{i+1}^{j+1} = -((1 - \frac{\tau}{h^2}) v_i^j + \frac{\tau}{2h^2} (v_{i-1}^j + v_{i+1}^j) + \tau \varphi_i^j),$$
$$i = 1, 2, ..., N-1, \quad N = l/h;$$
$$v_0^{j+1} = 0, \quad v_N^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, ..., L-1, \quad L = T/\tau;$$
$$v_i^0 = u(x_i 0),$$

которая решается методом прогонки (см. 2.3).

Порядок решения

1. Решить задачу аналитически:

$$u(x,t) = \frac{4l\tilde{n}}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{\frac{-(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

2. Построить график приближенного решения $u = u(x,t)$ на интервале $x \in [0,l]$ при $t = T/k$, где k = 16;4;2 и 1. Для решения в виде суммы ряда следует аналитически найти необходимое число слагаемых для достижения заданной точности решения $\xi = 10^{-4}$.

3. Принять, что постоянный шаг $h = 0{,}05$ по переменной x вдоль стержня. Составить программы в пакете MathCAD и найти приближенное решение $u = u(x,t)$ по явной схеме (7.5) ($\tau \le \frac{h^2}{2}$), неявной схеме (7.8) и схеме Кранка – Николсона ($\tau = h$).

4. Для каждого метода найти абсолютную погрешность решения $\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C$ на каждом временном слое $t = T/k$, где k = 16;4;2 и 1. За точное решение принять решение, найденное в п.1, $u_i = u(x_i,t)$, $x_i = ih$. Приближенные решения $v_i^j = v(x_i,t_j)$, находятся из соответствующих разностных схем при $t_j = j\tau = t$.

Тогда

$$\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C = \max_{0 \le i \le n} \left|u_i - v_i^j\right|.$$

5. На одном графике для каждого временного слоя построить «точное решение» и полученные сеточные функции по явной схеме, неявной схеме и схеме при весе $\sigma = 1/2$.

6. Проанализировать полученные результаты. Какой из методов дает наиболее и наименее точное решение задачи?

Задача 9.2. Дан тонкий однородный стержень длины l, изолированный от внешнего пространства, начальная температура $\varphi(x) = cx(l-x)/l^2$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в заданный момент времени *t*. В таблице заданы значения *c, a, l и T*. Найти численное решение задачи на временном интервале $[0;T]$, используя явную схему (7.5), неявную схему (7.8) и схему Кранка – Николсона при весе $\sigma = 1/2$.

Порядок решения

1. Решить задачу аналитически:

$$u(x,t) = \frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{\frac{-(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Построить график приближенного решения $u = u(x,t)$ на интервале $x \in [0,l]$ при $t = T/k$, где k = 16;8;2 и 1. Для решения в виде суммы ряда следует аналитически найти необходимое число слагаемых для достижения заданной точности решения $\xi = 10^{-4}$.

2. Принять, что постоянный шаг $h = 0{,}1$ по переменной x вдоль стержня. Составить программы в пакете MathCAD и найти приближенное решение $u = u(x,t)$ по явной схеме (7.5) ($\tau \le \frac{h^2}{2}$), неявной схеме (7.8) и схеме Кранка – Николсона ($\tau = h$).

3. Для каждого метода найти абсолютную погрешность решения $\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C$ на каждом временном слое $t = T/k$, где k = 16;8;2 и 1. За точное решение принять решение, определенное в п. 1, $u_i = u(x_i, t)$, $x_i = ih$. Приближенные решения $v_i^j = v(x_i, t_j)$, находятся из соответствующих разностных схем при $t_j = j\tau = t$.

Тогда

$$\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C = \max_{0 \le i \le n} \left|u_i - v_i^j\right|.$$

4. На одном графике для каждого временного слоя $t = T/k$ построить «точное решение» и полученные сеточные функции по явной схеме, неявной схеме и схеме при весе $\sigma = 1/2$.

5. Проанализировать полученные результаты. Какой из методов дает наиболее и наименее точное решение задачи при выбранных шагах h и τ?

6. Уменьшить постоянный шаг по переменной x вдоль стержня вдвое, $h = 0{,}05$. Найти приближенное решение $u = u(x,t)$ по явной схеме (7.5) ($\tau \le \frac{h^2}{2}$), неявной схеме (7.8) и схеме Кранка – Николсона ($\tau = 2h$). Для каждого метода найти абсолютную погрешность решения $\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C$ на каждом временном слое $t = T/k$, где k = 16;8;2 и 1.

7. Провести исследование полученных решений согласно п. 3.

Задача 9.3. Найти численное решение уравнения $u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x,t)$, удовлетворяющего условиям $u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$,

$$u(x,0) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le l/2, \\ c(l-x), & l/2 \le x \le l. \end{cases}$$

В таблице заданы значения c, a, l, T и $f(x,t)$. Найти численное решение задачи на временном интервале $[0;T]$, используя явную схему (7.5), неявную схему (7.8), схему Кранка – Николсона при весе $\sigma = 1/2$ и схему повышенного порядка точности.

Порядок решения

1. Решить задачу аналитически:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{\pi n x}{l}\tilde{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi,$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi.$$

Построить график приближенного решения $u = u(x,t)$ на интервале $x \in [0,l]$ при $t = T/k$, где k = 8; 4; 2 и 1. Для решения в виде суммы ряда следует аналитически найти необходимое число слагаемых для достижения заданной точности решения $\xi = 10^{-4}$.

2. Принять, что постоянный шаг $h = 0{,}05$ по переменной x вдоль стержня. Составить программы в пакете MathCAD и найти приближенное решение $u = u(x,t)$ по явной схеме (7.5) ($\tau \le \frac{h^2}{2}$), неявной схеме (7.8) и схеме Кранка – Николсона ($\tau = 2h$).

Положить

$$\varphi_i^j = \bar{f} = f(x_i, t_{j+1/2}).$$

При весе $\sigma = 1/2$ значения v_i^{j+1} сеточной функции на новом временном слое определяются из краевой задачи:

$$\frac{\tau}{2h^2}v_{i-1}^{j+1} - \left(1+\frac{\tau}{h^2}\right)v_i^{j+1} + \frac{\tau}{2h^2}v_{i+1}^{j+1} = -\left(\left(1-\frac{\tau}{h^2}\right)v_i^j + \frac{\tau}{2h^2}(v_{i-1}^j + v_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j\right),$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1,\quad N = l/h;$$

$$v_0^{j+1}=0,\quad v_N^{j+1}=0,\quad j=0,1,\ldots,L-1, L=T/\tau;$$
$$v_i^0=u(x_i 0),$$

которая решается методом прогонки.

В схеме с весами

$$\frac{v_i^{j+1}-v_i^j}{\tau}=\sigma L_h\left(v_i^{j+1}\right)+(1-\sigma)L_h\left(v_i^j\right)+\varphi_i^j,$$

повышенного порядка точности

$$\sigma=\sigma_*=1/2-h^2/(12\tau)\ \text{ и }\ \varphi_i^j=\bar{f}_i+\frac{h^2}{12\tau}L_h(\bar{f}_i),$$
$$L_h\left(\bar{f}_i\right)=\frac{\bar{f}_{i+1}-2\bar{f}_i+\bar{f}_{i-1}}{h^2},\qquad \bar{f}_i=f(x_i,t_{j+1/2}).$$

Для каждого метода найти абсолютную погрешность решения $\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C$ на каждом временном слое $t=T/k$, где k = 8; 4; 2 и 1. Если за точное решение принять решение, определенное в п. 1, $u_i=u(x_i,t)$, $x_i=ih$, тогда приближенные решения $v_i^j=v(x_i,t_j)$, находятся из соответствующих разностных схем при $t_j=j\tau=t$, и погрешность решения $\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C=\max\limits_{0\le i\le n}\left|u_i-v_i^j\right|$.

3. На одном графике для каждого временного слоя построить «точное решение» и полученные сеточные функции по явной схеме, неявной схеме, схеме при весе $\sigma=1/2$ и схеме повышенного порядка точности. Проанализировать полученные результаты. Какой из методов дает наиболее и наименее точное решение задачи при выбранных шагах h и τ?

4. Принять, что постоянный шаг $h=0{,}05$ по переменной *x*. В неявной схеме (9.8), схеме Кранка – Николсона и схеме повышенного порядка точности увеличить шаг по времени, $\tau=4h$. Для каждой указанной схемы вновь найти абсолютную погрешность решения $\left\|\mathbf{z}^j\right\|_C$ на каждом временном слое $t=T/k$, где k = 8; 4; 2 и 1.

5. На одном графике для каждого временного слоя вновь построить «точное решение» и полученные в п. 4 приближенные решения по неявной схеме, схеме с весом $\sigma=1/2$ и схеме повышенного порядка точности.

6. Проанализировать полученные результаты. Какой из методов дает наиболее и наименее точное решение задачи при выбранных шагах h и τ? Сравнить с предыдущим результатом (п. 3).

Исходные данные к задачам 9.1, 9.2, 9.3

Вари-ант	a	l	T	c	a	l	T	a	l	T	$f(x,t)$
	к задаче 9.1			*к задачам* 9.1, 9.2,9.3	*к задаче* 9.2			*к задаче* 9.3			
1	0,4	1	2	16	0,81	1,2	4	1	1	16	$e^{t/8}$
2	0,16	0,8	4	36	0,4	0,6	4	1	1	16	$2e^{t/8}$
3	0,36	0,6	4	25	0,16	0,8	4	1	1	48	$e^{-t/4}$
4	0,25	0,6	4	14	0,36	0,6	2	2	1	16	$e^{t/2}$
5	0,04	0,8	4	16	0,25	1	4	1	1	16	$2e^{-t/2}$
6	0,01	0,6	4	20	0,04	1,2	8	1	1	48	$8e^{-t/2}$
7	0,09	1	4	12	0,01	1,4	8	2	1	32	$4e^{-t/2}$
8	0,121	1,2	2	10	0,09	0,9	4	1	1	16	$8e^{t/8}$
9	0,144	1,4	2	16	0,121	0,4	4	1	1	48	$8xe^{-t}$
10	0,625	0,9	4	8	0,144	0,6	4	1	1	32	$6xe^{-2t}$
11	0,169	0,4	4	12	0,625	1	2	1	1	32	$xe^{-t/2}$
12	0,256	0,6	4	10	0,04	1	8	1	1	32	$4x\, e^{-t/4}$
13	0,225	1	2	16	0,16	0,8	4	1	1	32	$6xe^{-t/4}$
14	0,289	0,8	4	36	0,36	1,2	4	1	1	16	$4xe^{t/4}$
15	0,81	1,2	4	25	0,25	0,6	4	1	1	16	$3xe^{-t/8}$
16	0,4	0,6	4	14	0,04	0,8	8	2	1	48	$8xe^{-t/6}$
17	0,16	0,8	8	16	0,01	0,6	8	2	1	16	$3e^{t/8}$
18	0,36	0,6	2	12	0,09	1	4	2	1	16	$8e^{-t/2}$
19	0,25	1	4	12	0,121	1,2	4	2	1	48	$4xe^{-t/4}$
20	0,04	1,2	8	10	0,144	1,4	4	2	1	16	$6xe^{t/8}$
21	0,01	1,4	8	16	0,625	0,9	2	1	1	16	$xe^{-t/2}$
22	0,09	0,9	8	24	0,169	0,4	4	2	1	48	$xe^{-t/8}$
23	0,121	0,4	4	12	0,256	0,6	4	2	1	32	$5e^{-t/8}$
24	0,144	0,6	8	10	0,225	1	2	2	1	16	$e^{t/8}$
25	0,625	1	4	16	0,289	0,8	8	1	1	16	$e^{t/4}$
26	0,169	0,8	4	36	0,81	1,2	2	1	1	16	$e^{t/8}$
27	0,256	1,2	4	16	0,4	0,6	4	2	1	48	$2e^{-t/2}$
28	0,225	0,6	8	36	0,16	0,8	4	1	1	32	$2xe^{-t/2}$
29	0,2	0,8	8	30	0,36	0,6	4	1	1	16	$6xe^{t/8}$
30	0,81	0,6	2	24	0,25	1	4	1	1	48	$xe^{-t/4}$

Примерные контрольные вопросы

1. В чем заключается суть разностного метода?
2. Назовите виды шаблонов разностных схем.
3. Какая разностная схема называется явной (неявной)?
4. Назовите недостаткиявной разностной схемы решения уравнения теплопроводности.

Методический материал для самостоятельной работы студентов

Приведены темы заданий для самостоятельного выполнения студентами. Указания для выполнения см. в работе [1].

Задания для самостоятельной работы

1. Решить систему методом простой итерации и Зейделя. Сравнить скорости сходимости итераций:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6,1 & 2,2 & 1,2 & 16,55 \\ 2,2 & 5,5 & -1,5 & 10,55 \\ 1,2 & -1,5 & 7,2 & 16,80 \end{array}\right).$$

2. Вычислить приближенно по формуле трапеций интеграл, полагая $n = 10$:

$$\int_0^1 (3x^2 - 4x)dx .$$

3. Вычислить приближенно по формуле Симпсона интеграл, полагая $n = 6$:

$$\int_0^1 \sin x^2 \, dx .$$

4. Вычислить интеграл по формуле трапеций с точностью до 10^{-2}, величину h определить с помощью двойного пересчета:

$$\int_1^2 \frac{\lg x}{x} dx .$$

5. Методом Адамса найти с точностью до 10^{-2} значения решения дифференциального уравнения. «Начальный отрезок» найти методом Рунге − Кутта:

$$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1.$$

6. Численное решение краевой задачи одномерной стационарной диффузии.

Теоретический материал к данной теме представлен в разделе 8 [1].

Найти численное решение уравнения $'))' + qu = f$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям $u(a) = u_a = 0$, $u(b) = u_b = 0$, методом конечных элементов. В таблице заданы функции $k(x)$, $q(x)$, интервал $[a, b]$ и функция $f(x)$.

Порядок решения

1. Разбить интервал $[a, b]$ на элементарные отрезки с постоянным шагом h = 0,1. Выбрать базовые функции по (10.5), (10.6).

Вычислить коэффициенты

$$a_{ij} = \int_a^b (k\varphi_i'\varphi_j' + q\varphi_i\varphi_j)dx, \quad b_i = \int_a^b f\varphi_i dx$$

в системе (10.9) по формулам (10.13) с помощью квадратурных формул второго порядка точности относительно h.

2. Решая систему алгебраических уравнений (8.9), (8.10) методом прогонки, определить u_j^h.

3. По дискретным значениям u_j^h построить непрерывную функцию $u(x)$ на интервале $[a, b]$, используя интерполяционный многочлен Ньютона.

4. Уменьшить шаг в два раза и найти решение по изложенной выше схеме. Привести графики функций $u(x)$ на интервале $[a, b]$ для шага h = 0,1 и шага h = 0,05. Сделать выводы.

Исходные данные

Вариант	$k(x)$	$[a;b]$	$q(x)$	$f(x)$
1	$e^{x/2}$	$[0;3]$	x	$2\sin 3x$
2	$\mathring{a}^{x^2/2}$	$[0;2]$	x^2	$-4\sin 4x$
3	$\mathring{a}^{x^2/2}$	$[0;2]$	$4x$	$3\sin 3x$
4	$\mathring{a}^{(x^2+1)/2}$	$[1;2]$	$4x^2+1$	$2\sin 4x$
5	$\mathring{a}^{(x^2-1)/2}$	$[0;1,6]$	$(2x^2+8x+1)$	$-5\cos 4x$
6	$\mathring{a}^{(x^2+1)/2}$	$[1;2]$	x^3+3x+2	$2\sin 3x$
7	$e^{\sqrt{x}}$	$[0;4]$	$3x^3+3x^2+1$	$-4\sin 4x$
8	$e^{\sqrt{x}}$	$[0;4]$	$5x^3+3x+4$	$3\sin 3x$
9	$e^{\sqrt{x+1}}$	$[0;3]$	$2x^3+x^2+0,5$	$-2\sin 4x$
10	$e^{\sqrt{x+2}}$	$[0;3]$	$2x^4+4x^2+1$	$5\cos 4x$
11	$e^{\sqrt{x+2}}$	$[1;3]$	$2x^4+x^2+0,5$	$-8\sin 4x$
12	$e^{x/2}$	$[0;2]$	$2x^2$	$6\cos 4x$
13	$\mathring{a}^{x^2/3}$	$[0;2]$	$3x^2$	$-2\sin 3x$
14	$\mathring{a}^{x^2/2}$	$[1;2]$	$5x^2$	$4\sin 4x$
15	$\mathring{a}^{(x^2+1)/3}$	$[0;2]$	x^2+2x	$-3\sin 3x$
16	$\mathring{a}^{(x^2+1)/4}$	$[0;2]$	x^2+4x+1	$2\sin 4x$
17	$\mathring{a}^{x^2/2}$	$[0;2]$	$4x^3+x+2$	$5\cos 4x$
18	$\mathring{a}^{x^2/2}$	$[0;2]$	$3x^3+x^2+0,5$	$-2\sin 3x$
19	$\mathring{a}^{(x^2+1)/2}$	$[0;2]$	$x^3+3x+0,8$	$4\sin 4x$
20	$\mathring{a}^{(x^2-1)/2}$	$[0;2]$	$x^3+3x^2+0,5$	$3\sin 3x$
21	$\mathring{a}^{(x^2+1)/2}$	$[0;2]$	$2x^4+x^2+0,4$	$-2\sin 4x$
22	$e^{\sqrt{x}}$	$[0;4]$	$2x^4+x^2+0,2$	$5\cos 4x$
23	$e^{\sqrt{x}/2}$	$[0;4]$	$3x^2+0,2$	$8\sin 4x$
24	$e^{\sqrt{x+1}}$	$[1;4]$	$x^3+0,4$	$-6\cos 4x$
25	$e^{\sqrt{x+2}}$	$[0;4]$	$x^2+0,6$	$2\sin 3x$
26	$e^{2\sqrt{x+2}}$	$[-1;2]$	$3x^2+2$	$-4\sin 4x$
27	$e^{x/2}$	$[-2;2]$	$x^2+5x+0,4$	$3\sin 3x$
28	$\mathring{a}^{x^2/2}$	$[-2;2]$	$3x^2+0,2$	$2\sin 4x$
29	$\mathring{a}^{x^2/2}$	$[-2;2]$	$x^4+0,5x^2+0,2$	$-5\cos 4x$
30	$\mathring{a}^{(x^2-1)/2}$	$[-2;2]$	$x^2+0,4$	$2\sin 3x$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боровской, И.Г. Численные методы: Учеб.-методическое пособие / И.Г.Боровской. - Томск:ТУСУР, 2017. - 108с.

2. Калиткин, Н.Н. Численные методы /Н.Н.Калиткин.– М.:Наука, 1978. - 510с.

3. Самарский, А.А. Численные методы /А.А.Самарский, А.В.Гулин.–М.: Наука, 1989. - 432с.