Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

С.Я. Гриншпон, И.Э. Гриншпон

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (теория и приложения)

Учебное пособие

2016

Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э.

Многочлены от одной переменной (теория и приложения): учеб. пособие / С.Я. Гриншпон, И.Э. Гриншпон. –

В пособии излагаются основные факты теории многочленов от одной переменной: рассматривается равенство многочленов в алгебраическом и функциональном смыслах, изучается деление многочленов, обосновывается правило нахождения рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами, приведена основная теорема алгебры многочленов, рассматриваются теорема Безу и схема Горнера. Даны приложения теории многочленов, которые применяются в курсе высшей математики технических вузов. Весь изложенный материал иллюстрируется большим количеством примеров. Приведен также цикл задач и упражнений по теории многочленов, снабженных ответами.

Пособие будет полезным студентам младших курсов вузов и учащимся 9-11 классов с углубленным изучением математики.

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов младших курсов классических и технических университетов и педагогических вузов, изучающих математику. Теория многочленов часто применяется в курсе линейной алгебры (например, при решении характеристических уравнений для нахождения собственных значений линейного оператора), в курсе математического анализа (например, при интегрировании рациональных функций и аппроксимации функций многочленами), в методах приближенных вычислений и при изучении других разделов математики.

С изучением многочленов связан целый ряд важных преобразований в математике. Исследование полиномиальных уравнений и их решений являлось основой развития классической алгебры на протяжении нескольких столетий. Техническая простота вычислений, связанных с многочленами, по сравнению с более сложными классами функций, а также тот факт, что множество многочленов плотно в пространстве непрерывных функций, способствовали развитию методов разложения в ряды и полиномиальной интерполяции в математическом анализе.

Хотя в необозримом царстве функций многочлены занимают, на первый взгляд, очень скромное место, но это первое впечатление обманчиво. Известный математик-вычислитель Р. В. Хемминг пишет: «Поскольку с многочленами легко обращаться, большая часть классического численного анализа основывается на приближении многочленами».

В настоящем пособии изложены основные факты теории многочленов от одной переменной, приведены их доказательства. Даны некоторые приложения теории многочленов. Рассмотрены всевозможные задачи, связанные с многочленами, тщательно разобраны их решения, а также предлагается большой набор задач и упражнений, снабженных ответами.

В связи с переходов в вузовском образовании на бакалавриат много времени выделяется на самостоятельную работу студентов. Часть разделов данного пособия можно рекомендовать для самостоятельного изучения.

Пособие может быть использовано в средней школе на факультативных занятиях и при подготовке к ЕГЭ, а также на занятиях с учащимися физико-математических школ.

§1. Основные понятия теории многочленов

Под ***многочленом*** (от одной переменной) понимается выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1.1}$$

где n – целое неотрицательное число, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – любые числа, причем $a_0 \neq 0$. Это выражение может состоять и из одного слагаемого – такой многочлен называется ***одночленом***.

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – произвольный многочлен и $a_0 \neq 0$. Число n называется ***степенью многочлена*** $f(x)$. Степень многочлена $f(x)$ обозначают $\deg(f(x))$ (от английского слова «degree»). Например, степень многочлена $\deg(3x^9 - 7x^7 + 2x^5 - 7x + 1) = 9$.

Константу, отличную от нуля, считают многочленом нулевой степени. Считается также многочленом константа, равная нулю. Такой многочлен называется ***нулевым многочленом*** или просто ***нулем***. В отличие от всех других многочленов нулевой многочлен не имеет степени.

Коэффициент a_0 называют ***старшим коэффициентом*** многочлена $f(x)$, а сам одночлен a_0x^n – его ***старшим членом***. Коэффициент a_n называется ***свободным членом***. Многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется ***приведенным***. Многочлены, как и любые алгебраические выражения, можно складывать, вычитать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных.

Для упрощения приведения подобных сложение и умножение многочленов можно выполнять в столбик.

Пример 1. Даны два многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ и $g(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + x - 11$. Найдите их сумму $f(x) + g(x)$ и произведение $f(x)\cdot g(x)$.

Решение. Найдем сумму

$$
\begin{array}{r}
{}_{+}2x^4-5x^3-3x^2+x-11\\
x^3+2x^2-3x+1\\
\hline
2x^4-4x^3-x^2-2x-10
\end{array}.
$$

Найдем произведение

$$
\begin{array}{r}
{}_{\times}2x^4-5x^3-3x^2+x-11\\
x^3+2x^2-3x+1\\
\hline
2x^4-5x^3-3x^2+x-11\\
-6x^5+15x^4+9x^3-3x^2+33x\\
4x^6-10x^5-6x^4+2x^3-22x^2\\
2x^7-5x^6-3x^5+x^4-11x^3\\
\hline
2x^7-x^6-19x^5+12x^4-5x^3-28x^2+34x-11
\end{array}.
$$

Итак, получили

$f(x)+g(x)=2x^4-4x^3-x^2-2x-10$,

$f(x)\cdot g(x)=2x^7-x^6-19x^5+12x^4-5x^3-28x^2+34x-11$. ◊

Пример 2. Докажите тождества:

а) $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)=x^n-1$;

б) $(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-...-x+1)=x^{2n+1}+1$.

Решение. а) Раскроем скобки в левой части равенства

$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)=x^n-x^{n-1}+x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-2}-...-$

$-x+x-1=x^n-1$.

Все слагаемые, получающиеся после раскрытия скобок, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются.

Заметим, что из доказанного тождества следует формула $\dfrac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$.

Можно предложить еще один способ доказательства этого тождества. При любом $x\neq 0$ выражение, стоящее во второй скобке, является суммой геометрической прогрессии с первым членом x^{n-1}, знаменателем $1/x$, содержащей n слагаемых. При $x \neq 0,\ x \neq 1$ имеем

$$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)=(x-1)x^{n-1}\cdot\frac{1-(1/x)^n}{1-1/x}=$$

$$=\frac{(x-1)x^{n-1}x(x^n-1)}{x^n(x-1)}=x^n-1.$$

При $x=0$ и при $x=1$ тождество проверяется непосредственной подстановкой.

б) доказывается аналогично. ◊

Пример 3. Найдите коэффициент при x^7 в произведении многочленов $f(x)=3x^4-5x^2+4x+2$ и $g(x)=2x^6+3x^5-$ $-12x^2+5x+6$.

Решение. Вычислим произведение тех одночленов, сумма степеней которых равна 7 и сложим полученные выражения: $-5x^2\cdot 3x^5+4x\cdot 2x^6=-7x^7$. Искомый коэффициент равен -7. ◊

Пример 4. Найдите степень многочлена $f(x)=(x+\sqrt{5})^4-(x-\sqrt{5})^4-(4\sqrt{5}x-2)(2x^2+\sqrt{0,2}\,x)$.

Решение. $(x+\sqrt{5})^4-(x-\sqrt{5})^4-(4\sqrt{5}x-2)(2x^2+\sqrt{0,2}\,x)=$ $\left((x+\sqrt{5})^2-(x-\sqrt{5})^2\right)\left((x+\sqrt{5})^2+(x-\sqrt{5})^2\right)-(8\sqrt{5}x^3-4x^2+4x^2-$ $-2\sqrt{0,2}\,x)=4\sqrt{5}x(2x^2+10)-8\sqrt{5}x^3+2\sqrt{0,2}\,x=8\sqrt{5}x^3+10\sqrt{5}\,x-$ $-8\sqrt{5}x^3+2\sqrt{0,2}\,x=10,4\sqrt{5}x$. Итак, степень заданного в условии примера многочлена равна 1. ◊

Вычислим произведение тех одночленов, сумма степеней которых равна 7 и сложим полученные выражения: $-5x^2\cdot 3x^5+4x\cdot 2x^6=-7x^7$. Искомый коэффициент равен -7. ◊

Отметим, что если $f(x)$ и $g(x)$ – два многочлена, то

1. Степень произведения многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равна сумме степеней сомножителей:

$$\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x)).$$

2. Степень суммы многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не превосходит большей из степеней слагаемых:

$$\deg(f(x)+g(x)) \le \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

Вместо переменной x в многочлен $f(x)$ можно подставить любое число c. В результате получится некоторое число. Это число называется ***значением многочлена*** $f(x)$ при $x = c$ (или в точке c) и обозначается через $f(c)$.

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n. \qquad (1.2)$$

Отметим два простых факта, связанных со значениями многочлена и полезных для решения задач: свободный член многочлена равен его значению в точке 0, а сумма коэффициентов многочлена равна его значению в точке 1, то есть $f(0) = a_n$; $f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Пример 5. Найдите свободный член и сумму коэффициентов многочлена $f(x) = (5x^2 - 7x + 1)^{2016} + (8x^2 - 9x + 1)^{2017}$.

<u>*Решение*</u>. После раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $f(x) = (5x^2 - 7x + 1)^{2016} + (8x^2 - 9x + 1)^{2017}$ получится многочлен со свободным членом $f(0) = 1 + 1 = 2$ и суммой коэффициентов $f(1) = (5 - 7 + 1)^{2016} + (8 - 9 + 1)^{2017} =$ $= 1 + 0 = 1$. ◊

Число x_0 называется ***корнем многочлена*** $f(x)$, если значение многочлена в точке x_0 равно нулю, т.е. $f(x_0) = 0$.

Понятие корня является центральным в теории многочленов. С этим понятием тесно связаны теория делимости многочленов, разложение многочленов на множители, решение различных алгебраических уравнений.

Рассмотрим понятие равенства многочленов.

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются ***равными***, если их степени совпадают и коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны. Если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m$$

и многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны, то $m=n$ и $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_n$. Такое равенство многочленов называется ***равенством в алгебраическом смысле***.

Однако многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ можно рассматривать как функцию. Но тогда можно говорить о равенстве двух многочленов как о равенстве двух функций. Известно, что две функции называются равными, если они имеют одну и ту же область определения и каждому числу из области определения обе функции ставят в соответствие одно и то же число. Равенство многочленов, понимаемое в этом смысле, будем называть ***равенством в функциональном смысле***. Если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны, то для любого действительного числа[1] c имеем $f(c)=g(c)$.

Итак, мы располагаем двумя определениями равенства многочленов. Можно показать, что эти определения равенства многочленов эквивалентны. Иначе говоря, если два многочлена равны в алгебраическом смысле, то они равны и в функциональном смысле, и наоборот.

Пример 6. В многочлене $f(x)=x^3-5x^2+ax+15$ один из корней равен 3. Найдите $f(x)$.

<u>*Решение*</u>. Так как $x_0=3$ является корнем многочлена $f(x)$, то $f(3)=0$. Тогда $3^3-5\cdot 3^2+3a+15=0$, и $a=1$. Итак, $f(x)=x^3-$ $-5x^2+x+15$ – искомый многочлен. ◊

Пример 7. Найдите целые числа a и b, при которых один из корней многочлена $f(x)=2x^3+ax^2+bx-2$ равен $1+\sqrt{3}$.

[1] Если коэффициенты многочлена $f(x)$ комплексные числа, то c также комплексное число.

<u>*Решение.*</u> Дано $x_0 = 1+\sqrt{3}$ – корень многочлена $f(x)$, значит $f(x_0)=0$. Имеем $P(x_0) = 2(1+\sqrt{3})^3 + a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) - 2 =$ $= 18 + 12\sqrt{3} + a(4+2\sqrt{3}) + b(1+\sqrt{3}) = 0$.

Соберем все слагаемые, содержащие $\sqrt{3}$, в правой части $18 + 4a + b = -(12 + 2a + b)\sqrt{3}$.

Так как a и b – целые числа, то равенство выполняется только тогда, когда обе его части равны нулю. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 4a + b + 18 = 0, \\ 2a + b + 12 = 0. \end{cases}$. Решая эту систему, находим, что $a = -3,\ b = -6$.

Искомый многочлен $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x - 2$. ◊

Пример 8. При каких значениях неизвестных коэффициентов справедливо равенство
$(x^2 + 2x + a)(x^2 + bx + 2) = x^4 + cx^3 - 9x^2 + dx - 10$.

<u>*Решение*</u>. Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x: $x^4 + (2+b)x^3 + (a + 2b + 2)x^2 + (ab+4)x$ $+2a = x^4 + cx^3 - 9x^2 + dx - 10$. Следовательно,

$$\begin{cases} 2 + b = c, \\ a + 2b + 2 = -9, \\ ab + 4 = d, \\ 2a = -10. \end{cases} \text{. Решая эту систему, получим } \begin{cases} a = -5 \\ b = -3 \\ c = -1 \\ d = 19 \end{cases}.$$

Заданное в условии равенство имеет вид
$(x^2 + 2x - 5)(x^2 - 3x + 2) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 19x - 10$. ◊

Пример 9. Найдите многочлен $f(x)$ второй степени, удовлетворяющий условиям $f(1) = 6,\ f(2) = 9,\ f(-3) = 34$.

<u>*Решение*</u>. Будем искать $f(x)$ в виде $f(x) = ax^2 + bx + c$. Для определения неизвестных коэффициентов подсчитаем значения многочлена в заданных точках и составим систему: $\begin{cases} a + b + c = 6, \\ 4a + 2b + c = 9, \\ 9a - 3b + c = 34. \end{cases}$ Решение этой системы $a = 2,\ b = -3,\ c = 7$.

Искомый многочлен имеет вид $f(x)=2x^2-3x+7$. ◊

Пример 10. Докажите, что если $f(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами и $f(a+b\sqrt{c})=p+q\sqrt{c}$, где a, b, c, p, q – рациональные числа, $c>0$, $\sqrt{c}$ – иррациональное число, то $f(a-b\sqrt{c})=p-q\sqrt{c}$.

<u>*Решение*</u>. Это утверждение достаточно доказать для степени x^n $(n\in\mathbb{N})$. Доказательство проведем методом математической индукции.

При $n=1$ утверждение очевидно.

Справедливо оно и при $n=2$, так как $(a+b\sqrt{c})^2=a^2+b^2c+2ab\sqrt{c}$ и $(a-b\sqrt{c})^2=a^2+b^2c-2ab\sqrt{c}$.

Пусть утверждение справедливо при $n=k$, т.е.

$$(a+b\sqrt{c})^k=p+q\sqrt{c}\Rightarrow(a-b\sqrt{c})^k=p-q\sqrt{c}$$

Тогда при $n=k+1$ получаем

$$(a+b\sqrt{c})^{k+1}=(a+b\sqrt{c})^k(a+b\sqrt{c})=(p+q\sqrt{c})(a+b\sqrt{c})=$$
$$=(ap+bqc)+(aq+bp)\sqrt{c}.$$
$$(a-b\sqrt{c})^{k+1}=(a-b\sqrt{c})^k(a-b\sqrt{c})=(p-q\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=$$
$$=(ap+bqc)-(aq+bp)\sqrt{c},$$

т.е. при $n=k+1$ утверждение справедливо. Следовательно, оно справедливо при любом натуральном n. ◊

Пример 11. Докажите, что $\sqrt{x}$ нельзя представить в виде многочлена.

<u>*Решение*</u>. Предположим, что $\sqrt{x}=f(x)$, где $f(x)$ – некоторый многочлен. Тогда $f^2(x)=x$. По свойству степени произведения $\deg(f^2(x))=2\deg(f(x))$. Получим $2\deg f(x)=\deg x=1$. Противоречие с тем, что степень многочлена – натуральное число. ◊

Упражнения.

1. Составьте многочлен, если даны его коэффициенты

   а) 1; 3; –4; 7; 0; 0; 11;

б) 3; 4; –7; 0; 0, 6; –1/2; 0;

в) 2; 7; 3; 0; –15; 0; 5, –3.

2. Коэффициенты многочлена $f(x)$ – натуральные числа, меньшие 10. Значение многочлена в точке 10 равно 28741390567. Найдите $f(x)$.

3. Найдите многочлен, принимающий в точках 1, 3, 4, 7 значения, равные нулю.

4. Найдите степень многочлена

а) $(1-x)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)+x^2(x^4-1)$;

б) $(x^2-3x+5)(x^3-x+1)+(x-3)(1+x-x^4)$;

в) $(x^5+2x^4-3x^3+x^2-4)(x^2-2x+7)-(x^3+21)(x^4-1)$.

5. а) Докажите, что если все коэффициенты многочлена – целые числа, то при всяком целом значении аргумента значение многочлена есть целое число. Верно ли обратное утверждение?

б) существует ли многочлен, при всех целых значениях x, принимающий целые значения, и один из коэффициентов которого равен 0,2.

6. Приведите примеры многочленов, таких что

а) степень суммы многочленов $f(x)+g(x)$ равна большей из степеней слагаемых;

б) степень суммы многочленов $f(x)+g(x)$ меньше степени каждого из слагаемых.

7. Докажите, что если многочлен $f(x)$ является четной функцией, то он не содержит одночленов нечетной степени.

8. Докажите, что если многочлен $f(x)$ является нечетной функцией, то он не содержит одночленов четной степени.

9. Найдите свободные члены и суммы коэффициентов многочленов

а) $(x^3-4x^2+5x-1)^{17}+(2x^4+6x^3-7x^2-x-1)^{21}$;

б) $(4x^8-5x^5+2)^6+(13x^{11}-11x^9-1)^9$;

в) $(x^5-3x^4+1)^{121}-(5x^{10}-3x^7-1)^{120}$.

10. Найдите коэффициент при x^7 в произведении многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если

а) $f(x)=7x^6-4x^5+3x$, $g(x)=x^5+3x^4-5x^2-x+2$;

б) $f(x)=-6x^7+x^5-3x^2+7x$, $g(x)=2x^5-3x^2+4x-7$;

в) $f(x)=x^8+5x^4-9x^2+23$, $g(x)=4x^5-7x^3-5x-1$.

11. При каких значениях неизвестных коэффициентов справедливы равенства

а) $(x^2+4x-3)(x^2+ax+d)=x^4+6x^3+bx^2+cx+15$;

б) $(x^3+ax^2+bx-3)(3x+c)=3x^4+dx^3-6x^2-x-12$;

в) $(2x^3-x^2+3x+a)(x^2+bx+5)=2x^5+cx^4+16x^3+$ $+dx^2+27x-20$.

12. При каких значениях неизвестных коэффициентов справедливы равенства

а) $(x^2+2x+a)(x^2+bx+2)=x^4+cx^3-9x^2+dx-10$;

б) $(x^2+4x-3)(x^2+2x+a)=x^4+6x^3+bx^2+cx+15$;

в) $(2x^3+ax^2+4x+b)(3x^2+2x-7)=6x^5+x^4-cx^3+$ $+dx^2+ex-21$.

13. Найдите значения неизвестных коэффициентов a, b и c многочленов $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, если

а) $f(-2)=-13$, $f(-1)=-3$, $f(3)=57$;

б) $f(-4)=-9$, $f(1)=26$, $f(2)=21$;

в) $f(-3)=-16$, $f(-1)=8$, $f(2)=29$.

Найдите многочлен $P(x)$ третьей степени, удовлетворяющий условиям:

а) $f(-3)=-10$, $f(-1)=-8$, $f(2)=10$, $f(3)=44$;

б) $f(-2)=19$, $f(-1)=-3$, $f(1)=-5$, $f(2)=-9$.

14. Докажите, что если $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, a, b, – целые числа, c – натуральное число,

$\sqrt{c}$ – иррациональное число, то $f(a+b\sqrt{c})=p+q\sqrt{c}$, где p и q – целые числа.

15. Докажите, что если число $a+b\sqrt{c}$, где a, b, c – рациональные числа, $c>0$, $\sqrt{c}$ – иррациональное число, является корнем многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами, то число $a-b\sqrt{c}$ также является корнем этого многочлена.

16. Докажите, что если $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, a, b, – целые, c – натуральное, $\sqrt{c}$ – иррациональное число, то числа $f(a+b\sqrt{c})+f(a-b\sqrt{c})$ и $f(a+b\sqrt{c})\cdot f(a-b\sqrt{c})$ являются целыми.

17. Найдите корни многочлена $x^3+ax^2+bx-21$, если известно, что число $5+\sqrt{2}$ – его корень.

18. Найдите корни многочлена $x^4+ax^3-x^2+bx-14$, если известно, что число $3-\sqrt{2}$ – его корень.

19. Найдите корни многочлена $x^5+ax^3+bx^2+5x+2$, если известно, что число $1+\sqrt{2}$ – его корень.

§2. Делимость многочленов

Говорят, что ***многочлен*** $f(x)$ ***делится (нацело) на многочлен*** $g(x)\neq 0$, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется равенство

$$f(x)=g(x)\cdot q(x). \qquad (2.1)$$

Если $f(x)$ делится на $g(x)$, то это принято записывать так $f(x)\,\vdots\,g(x)$.

Например, из равенства $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ следует, что $(x^3-1)\,\vdots\,(x-1)$ и $(x^3-1)\,\vdots\,(x^2+x+1)$.

Многочлен $q(x)$ в равенстве (2.1) называется ***частным*** от деления $f(x)$ на $g(x)$. Многочлен $q(x)$ в равенстве (2.1) определяется однозначно. Если бы существовал еще один многочлен $q_1(x)$, удовлетворяющий равенству (2.1), то мы получили бы, что $f(x) = g(x)q(x) = g(x)q_1(x)$. Из этого следует, что $g(x)(q(x) - q_1(x)) = 0$. Но многочлен $g(x)$ по условию ненулевой, и, значит, нулевым является многочлен $q(x) - q_1(x)$, т.е. $q(x) = q_1(x)$.

Делимость многочленов обладает многими свойствами, которыми обладает делимость целых чисел.

Перечислим некоторые свойства операции деления многочленов:

1) если два многочлена $f_1(x)$ и $f_2(x)$ делятся на $g(x)$, то их сумма и разность также делятся на $g(x)$;

2) если $f(x)$ делится на $g(x)$ и $h(x)$ – некоторый многочлен, то и произведение $f(x) \cdot h(x)$ делится на $g(x)$;

3) если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ делится на $h(x)$;

4) степень частного равна разности степеней делимого и делителя;

5) любой многочлен делится на многочлен нулевой степени, то есть любой многочлен делится на число;

6) нулевой многочлен делится на любой многочлен, отличный от нуля.

Однако деление многочлена на многочлен нацело возможно не всегда.

Как уже было замечено, делимость многочленов своими свойствами похожа на делимость целых чисел. Укажем еще на одну важную аналогию. Известно, что при делении целого числа n на целое число $m \neq 0$ однозначно определяются частное и остаток. Иначе говоря, для всякой пары целых чисел n и $m \neq 0$ существует и притом единственная пара целых чисел q (частное) и r (остаток), которые удовлетворяют соотношениям: $n = mq + r$, $0 \leq r < |m|$. Например, при делении $n = 73$ на $m = 13$ имеем частное $q = 5$, остаток $r = 8$, так как $73=13\cdot 5+8$, $0\le 8<13$. При делении 19 на (–5) получаем частное $q=-3$ и остаток $r=4$, так как $19=(-5)(-3)+4$, $0\le 4<|-5|$. Если число n делится на число $m\ne 0$, то остаток равен нулю.

Аналогичный факт имеет место и для многочленов.

Теорема 2.1. (о делении с остатком). *Для любого многочлена $f(x)$ и любого ненулевого многочлена $g(x)$ существует единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, для которой выполняется равенство*

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x), \tag{2.2}$$

где многочлен $r(x)$ либо нулевой, либо имеет степень, меньшую, чем степень $g(x)$. ♦

$q(x)$ называют ***частным***, $r(x)$ – ***остатком***.

Существует несколько способов вычисления частного и остатка. Наиболее удобный метод вычисления, который чаще всего применяется на практике для нахождения частного и остатка, – это метод «деления уголком».

Пример 12. Найдите частное и остаток при делении $f(x)=4x^5+7x^4+6x^3+3x+1$ на $g(x)=x^3+x^2+3$.

<u>*Решение.*</u> Выполним деление «уголком»

$$\begin{array}{r|l}
-\,4x^5+7x^4+6x^3+0x^2+3x+1 & x^3+x^2+3 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^5+4x^4\qquad\quad +12x^2\qquad\qquad} & 4x^2+3x+3 \\
-\,3x^4+6x^3-12x^2+3x\qquad & \\
\underline{3x^4+3x^3\qquad\qquad +9x}\qquad & \\
-\,3x^3-12x^2-6x+1 & \\
\underline{3x^3+3x^2\qquad\quad +9} & \\
-15x^2-6x-8 &
\end{array}$$

Получили $q(x)=4x^2+3x+3$ – частное и $r(x)=-15x^2-6x-8$ – остаток. ◊

Пример 13. Найдите частное и остаток при делении $f(x)=x^4+2x^3-2x^2-5x-2$ на $g(x)=x^2+3x+2$.

<u>*Решение*</u>. Выполним деление «уголком»

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4+2x^3-2x^2-5x-2 & x^2+3x+2 \\
\underline{x^4+3x^3+2x^2} & \overline{x^2-x-1} \\
-\,-x^3-4x^2-5x & \\
\underline{-x^3-3x^2-2x} & \\
-\,-x^2-3x-2 & \\
\underline{-x^2-3x-2} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак, частное $q(x)=x^2-x-1$, остаток $r(x)=0$. Значит, $x^4+2x^3-2x^2-5x-2$ делится на x^2-x-1. $\lozenge$

Ясно, что $f(x)$ делится на $g(x)$ тогда и только тогда, когда остаток $r(x)$ от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю.

Упражнения.

20. Какие из данных утверждений верны

а) $(x^4+81)\vdots(x^2+9)$; б) $(x^4-81)\vdots(x^2-9)$;

в) $(x^4-81)\vdots(x^2+9)$; г) $(x^4-81)\vdots(x+3)$;

д) $(x^4-81)\vdots(x-3)$; е) $(x^2+9)\vdots(x^4-81)$?

21. Укажите верные утверждения

а) $(x^2-2x-3)\vdots(x+1)$; б) $(x^2-2x-3)\vdots(x-1)$;

в) $(x^2-2x+3)\vdots 0{,}37$; г) $(4x^3+x^2-7x+3)\vdots(x^4-3)$.

22. Докажите, что если $f(x)$ делится на x, то свободный член многочлена $f(x)$ равен нулю.

23. Найдите частное от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x)=x^4-5x^3+7x^2-4$, $g(x)=x-2$;

б) $f(x)=3x^4+7x^3+10x-24$, $g(x)=x+3$;

в) $f(x)=x^4+4x^3+3x^2+21x+36$, $g(x)=x+4$;

г) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$, $g(x)=x^2-x-2$;

д) $f(x)=x^4+x^3-7x^2-7x+4$, $g(x)=x^2+2x-1$.

24. Найдите частное и остаток при делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - x + 9$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$;

б) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$, $g(x) = x^2 - 3x$;

в) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 8$, $g(x) = x^2 - 5x + 1$;

г) $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x - 1$, $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$;

д) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$, $g(x) = x^2 + 3x + 1$;

е) $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$.

25. При каком значении a многочлен $x^4 + ax^2 + x - 12$ делится на двучлен $x - 3$?

26. При каком значении a многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$

а) $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 5$, $g(x) = x^2 + x + 1$;

б) $f(x) = x^6 + x^3 + a$, $g(x) = x^3 + 2$.

27. При каких значениях a и b многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = x^3 + ax + 1$, $g(x) = x^2 + x + b$

б) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 3x - 9$, $g(x) = (x - 3)^2$.

28. При каких значениях a и b многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 3x + b$, $g(x) = x^2 - 3x + 3$;

б) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^2 - x + b$;

в) $f(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 + 2x + b$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;

г) $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + 2x + b$, $g(x) = x^2 + 2x - b$.

29. При каких ненулевых значениях a и b многочлен $x^3 - 2x^2 + ax + b$ делится на многочлен $x^2 + 2x + ab$?

30. При каких значениях a, b и c многочлен $f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ делится на $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$?

31. При делении $f(x)$ на $g(x)$ остаток равен 3, а при делении $f^2(x)$ на $g^2(x)$ остаток равен 9. Найдите остаток от деления $f(x)$ на на $g^2(x)$.

32. При делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ получаются частное $q(x)$ и остаток $r(x)=x^2-1$. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $q(x)$, если $\deg(f(x))=9$, $\deg(g(x))=5$.

33. При делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ получаются частное $q(x)=x^2-x+4$ и остаток $r(x)=$ $=x^3+3x^2-7x+5$. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $q(x)$.

§3. Теорема Безу[1]

Важную роль в теории многочленов и ее приложениях имеет теорема, показывающая связь между значениями многочленов в точке и остатком при делении этого многочлена на линейный двучлен.

Теорема 3.1. (Безу). *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению многочлена $f(x)$ в точке a.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный многочлен $f(x)$ и разделим его с остатком на двучлен $x-a$. Так как степень этого двучлена равна 1, то остаток либо равен нулю, либо имеет нулевую степень. И в том и в другом случае остаток r есть число. Значит, многочлен можно запи-

[1] Этьен Безу (1730-1783) – французский математик, член Парижской академии наук. Основные работы относятся к алгебре. Совместно с Крамером разрабатывал теорию определителей, развил метод неопределенных множителей. Исследовал свойства систем алгебраических уравнений высших степеней, предложил метод исключения неизвестных при решении таких систем. Доказал теорему, сформулированную Маклореном, что две кривые порядка m и n пересекаются не более чем в mn точках. Часть трудов Безу посвящена баллистике.

сать в виде $f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r$. Положив в этом тождестве $x=a$, получим, что $f(a)=r$. ♦

Основным следствием из этой теоремы будет

Следствие 3.2. *Многочлен $f(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда число a является его корнем*.

Пример 14. Найдите остаток от деления многочлена $f(x)=x^5-6x^4+2x^3-7x^2+11x-32$ на двучлен $x-1$.

Решение. Согласно теореме Безу остаток от деления $f(x)$ на двучлен $x-1$ равен значению многочлена в точке $x=1$. Подсчитаем $f(1)=1-6+2-7+11-32=-31$. Итак, $r=-31$. ◊

Пример 15. Пусть $f(x)=x^4-3x^3-36x^2-35x-13$. Вычислите $f(8)$.

Решение. Разделим «уголком» $f(x)$ на $x-8$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4-3x^3-36x^2-35x+31 & x-8 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-8x^3} & x^3+5x^2+4x-3 \\
-\,5x^3-36x^2 & \\
\underline{5x^3-40x^2} & \\
-\,4x^2-35x & \\
\underline{4x^2-32x} & \\
-\,-3x+31 & \\
\underline{-3x+24} & \\
7 &
\end{array}
$$

Так как остаток от деления $f(x)$ на $x-8$ равен 7, то значение многочлена $f(x)$ в точке $x=8$ равно 7. ◊

Пример 16. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-2$ дает остаток 11, а при делении на $x+1$ – остаток 2. Какой остаток дает $f(x)$ при делении на $(x+1)(x-2)$?

Решение. Делитель $(x+1)(x-2)$ имеет степень 2. Значит, остаток есть многочлен степени не выше первой, поэтому запишем остаток в виде многочлена первой степени $r(x)=ax+b$, и нам нужно найти неизвестные коэффициенты a и b. Обозначим частное через $q(x)$. Тогда $f(x)=(x-2)(x+1)q(x)+(ax+b)$. Подставив $x = 2$, получим $f(2) = 2a + b$, но по условию и в силу теоремы Безу $f(2) = 11$, поэтому $2a + b = 11$. Аналогично при $x = -1$ получим $-a + b = 2$. Решая систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} 2a+b=11, \\ -a+b=2, \end{cases}$ получим $a = 3$, $b = 5$. Значит, $r(x) = 3x + 5$. ◊

Пример 17. При каких значениях a и b многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + ab$ при делении на $x - 3$ имеет остаток 20, а на $x + 2$ делится без остатка.

Решение. По теореме Безу $f(3) = 20$ и $f(-2) = 0$. Вычисляя $f(3)$ и $f(-2)$, для определения a и b получаем систему $\begin{cases} 27+9a+3b+ab=20, \\ -8+4a-2b+ab=0. \end{cases}$

Эта система имеет два решения: $\begin{cases} a_1=1 \\ b_1=-4 \end{cases}$ и $\begin{cases} a_2=2 \\ b_2=-5 \end{cases}$.

Получили, что условию задачи удовлетворяют два многочлена $f_1(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ и $f_2(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 10$. ◊

Рассмотрим еще несколько следствий из теоремы Безу.

Следствие 3.3. *Если $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на произведение* $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$.

$$f(x) \vdots (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k) \tag{3.1}$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу корней многочлена k. При $k = 1$ утверждение справедливо (следствие 4.2). Предположим, что утверждение (4.2) верно для k различных корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ многочлена $f(x)$, т.е. $f(x) \vdots (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$.

Докажем, что если $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}$ – различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x) \vdots (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})$.

Обозначим через $q(x)$ частное от деления $f(x)$ на $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$. Тогда согласно индуктивному предположению

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)q(x). \quad (3.3)$$

При $x=\alpha_{k+1}$ имеем

$$0=(\alpha_{k+1}-\alpha_1)(\alpha_{k+1}-\alpha_2)...(\alpha_{k+1}-\alpha_k)q(\alpha_{k+1}) \quad (3.4)$$

В правой части равенства (3.4) все разности отличны от нуля, поэтому $q(\alpha_{k+1})=0$ и, значит, $q(x)\,\vdots\,(x-\alpha_{k+1})$, т.е. $q(x)=(x-\alpha_{k+1})q_1(x)$. Подставив $q(x)$ в равенство (3.3), получим $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})q_1(x)$, т.е. $f(x)\,\vdots\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})$. ♦

Следствие 3.4. *Число различных корней многочлена, отличного от нуля, не больше чем его степень.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – ненулевой многочлен и $\deg(f(x))=n$. Предположим, что $f(x)$ имеет k различных корней и пусть $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ – эти корни. Тогда по следствию 3.3 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)q(x)$ и, $\deg f(x)=$ $=\deg(x-\alpha_1)+\deg(x-\alpha_2)+...+\deg(x-\alpha_k)+\deg q(x)=k+$ $+\deg q(x)$ или $n=k+\deg q(x)$.

Так как $\deg q(x)\geq 0$, то $k\leq n$. ♦

Это следствие теоремы Безу было доказано французским математиком и философом Рене Декартом[1]. В дальнейшем результат, сформулированный в следствии 3.4, будет уточнен.

Уже упоминался тот факт, что если два многочлена равны, то их значения совпадают при любом действительном

[1] Рене Декарт (1596 – 1650) – французский математик, философ, физик, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики. Особо следует отметить переработанную им математическую символику Виета, с этого момента близкую к современной.

значении аргумента. Теперь мы можем значительно усилить это утверждение.

Следствие 3.5. Если значения двух многочленов, степени которых не больше n, совпадают в $(n+1)$-ой точке, то эти многочлены равны.

Пример 18. Докажите, что при любых попарно различных числах a, b, c справедливо тождество

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Решение. Обозначим левую часть доказываемого тождества через $f(x)$. Степень многочлена $f(x)$ не больше двух (действительно, раскрыв скобки в каждом слагаемом, мы получим при умножении линейных двучленов, содержащих x, квадратные трехчлены). В правой части доказываемого тождества стоит число 1, на которое можно смотреть как на многочлен $g(x)$ нулевой степени, то есть степень $g(x)$ также не превосходит двух. Имеем

$$f(a)=\frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}=1=g(a).$$

(Многочлен $g(x)$ равен 1 при любом значении x). Аналогично $f(b)=g(b)=1$ и $f(c)=g(c)=1$. Итак, два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, степени которых не больше двух, принимают одинаковые значения в трех точках: $x=a$, $x=b$, $x=c$. Значит, по следствию 3.5, $f(x)=g(x)$ и тождество доказано. ◊

Упражнения.

34. Не выполняя операцию деления, найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x)=2x^4-3x^3+7x^2+4x-2,\ g(x)=x+2$;

б) $f(x)=x^3+2x^2-11x+17,\ g(x)=x-3$;

в) $f(x)=x^5+2x^4-3x^3+4x^2-5x+7,\ g(x)=x+1$.

35. Не выполняя операцию деления, найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x)=(x^3+4x^2+x-7)^{21}+(x^3-11x+5)^{20}$, $g(x)=x+3$;

б) $f(x)=(x^3-2x^2-x-7)^{31}-(x^4-x^2-25x+4)^{33}$, $g(x)=x-3$;

в) $f(x)=(x^4-12x^2+34)^{17}+(x^4-x^2-19)^{16}$, $g(x)=x^2-5$.

36. Дан многочлен $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-11x+31$. Вычислите $f(4)$, не подставляя значение x в многочлен.

37. Не выполняя операцию деления, проверьте, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x)=x^4+4x^3-4x^2-19x+6$, $g(x)=x^2+x-6$;

б) $f(x)=x^4-4x^3+7x^2-8x+4$, $g(x)=x^2-3x+2$.

38. Докажите, что $(x-4)^{100}-(x-2)^{50}$ делится на $x^2-9x+18$.

39. Докажите, что $(x-2)^{47}+(x-3)^{48}-1$ делится на x^2-5x+6.

40. Найдите остаток от деления многочлена $x^{150}-3x^{149}+x^2-4x-11$ на квадратный трехчлен x^2-2x-3.

41. Многочлен $f(x)$ при делении на $x+2$ дает остаток 2, а при делении на $x-5$ дает остаток 9. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $x^2-3x-10$.

42. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-7$ дает остаток 12, а при делении на $x+1$ дает остаток 9. Найдите остаток от деления $f(x)$ на x^2-6x-7.

43. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-2$ дает остаток 2, а при делении на $x+3$ дает остаток 7. Найдите остаток от деления $f(x)$ на x^2+x-6.

44. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-1$, $x+1$, $x-3$ дает остатки –4, 2, –2 соответственно. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $(x-1)(x+1)(x-3)$.

45. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-1$, $x-2$, $x+3$ дает остатки –1, 6, 11 соответственно. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $(x-1)(x-2)(x+3)$.

46. Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $ax+b$ равен значению многочлена $f(x)$ при $x=-b/a$.

47. Не выполняя операцию деления, найдите остаток от деления многочлена $f(x)=4x^4-6x^3+5x^2-7x+5$ на двучлен $2x-3$.

48. При каких значениях параметров a и b многочлен $x^3+ax^2+bx-10$ делится на $x-5$ и $x+1$?

49. При каких значениях параметров a и b многочлен x^3+ax^2-6x+b делится на $x-4$ и $x+2$?

50. Найдите значения a и b, при которых остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ равен r, а остаток от деления $f(x)$ на $h(x)$ равен s, если

а) $f(x)=2x^3-3x^2-ax+b$, $g(x)=x+2$, $r=-5$, $h(x)=x-1$, $s=4$;

б) $f(x)=x^3+ax^2+3x+b$, $g(x)=x-4$, $r=3$, $h(x)=x+1$, $s=-2$;

в) $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx+1$, $g(x)=x-3$, $h(x)=x-1$, $r=7$, $s=-3$.

51. Дан многочлен $f(x)=3x^4+ax^3+4x^2+x+b$. Каковы должны быть значения a и b, чтобы остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x+1$ равнялся 3, а остаток от деления $f(x)$ на $x-1$ равнялся 9?

52. Докажите, что при любом натуральном n многочлен x^n-a^n делится на $x-a$.

53. Докажите, что при любом натуральном n многочлен $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ делится на $x+a$.

54. Докажите, что многочлен $x^{2n}-a^{2n}$ делится на $x-a$ и на $x+a$ при любом натуральном n.

55. Докажите, что многочлен $x^{2n}+a^{2n}$ не делится ни на $x+a$ ни на $x-a$ ни при каком натуральном n.

56. Докажите тождества

а) $a\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+c\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x$;

б) $a^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+c^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x^2$.

57. Решите уравнение

$$a\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+c\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x^2.$$

§4. Схема Горнера

Теорема Безу позволяет найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$. Но при решении некоторых задач необходимо знать не только остаток, но и частное. Это мы уже умеем делать (выполняя, например, деление «углом»). При делении многочлена на двучлен $x-a$ для отыскания частного и остатка применяют более простой метод, называемый «схемой Горнера»[1].

Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен степени n. Тогда степень частного $q(x)$ от деления $f(x)$ на $x-a$ будет на 1 меньше, то есть $n-1$. Будем искать частное в виде $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1}$. Подставим $f(x)$ и $g(x)$ в формулу деления с остатком и раскроем скобки.

[1] Уильям Джордж Горнер (1786-1837) английский математик. Основные труды посвящены теории алгебраических уравнений. Горнер разработал способ приближенного нахождения вещественных корней уравнения любой степени.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x-a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots +$$
$$+ b_{n-2}x + b_{n-1}) + r = b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + (b_2 - ab_1)x^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (b_{n-1} - ab_{n-2})x + (r - ab_{n-1}).$$

Применив определение равенства многочленов в алгебраической форме, для определения коэффициентов частного $q(x)$ и остатка r, получим систему

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + ab_0 \\ b_2 = a_2 + ab_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + ab_{n-2} \\ r = a_n + ab_{n-1} \end{cases}.$$

Удобно схему Горнера записывать в виде таблицы

коэффициенты делимого					
	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + ab_0$	$\ldots$	$b_{n-1} =$ $= a_{n-1} + ab_{n-2}$	$r = a_n + ab_{n-1}$
коэффициенты частного					остаток

Старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого. Для получения каждого следующего коэффициента частного нужно соответствующий коэффициент делимого сложить с предыдущим коэффициентом частного, умноженным на число a.

Пример 19. Найдите частное и остаток при делении многочлена $x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 7x + 9$ на двучлен $x - 2$.

Решение. Составим таблицу, записывая коэффициенты многочлена в первую строку таблицы.

коэффициенты делимого					
	1	2	-4	7	9
2	1	$2\cdot1+2=4$	$2\cdot4-4=4$	$2\cdot4+7=15$	$2\cdot15+9=39$
коэффициенты частного					остаток

Получили неполное частное $q(x)=x^3+4x^2+4x+15$ и остаток $r=39$. ◊

Пример 20. Найдите частное и остаток при делении многочлена $x^4-15x^2+21x+46$ на двучлен $x+4$.

Решение. Составим таблицу. Так как у делимого член с x^3 отсутствует, то в соответствующий столбец таблицы пишем 0.

коэффициенты делимого					
	1	0	– 15	21	46
–4	1	$(-4)\cdot 1+0$ $=-4$	$(-4)\cdot(-4)$ $-15=1$	$(-4)\cdot 1+21$ $=17$	$(-4)\cdot 17+$ $+46=-22$
коэффициенты частного					остаток

Получили неполное частное $q(x)=x^3-4x^2+x+17$ и остаток $r=-22$. ◊

Рассмотрим обобщение схемы Горнера.

Пусть $f(x)$ – многочлен степени n: $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Найдем частное и остаток при делении $f(x)$ на квадратный трехчлен $g(x)=x^2-c_1x-c_2$. Степень делителя равна 2, поэтому степень частного равна $n-2$. Следовательно, частное можно записать в виде $q(x)=b_0x^{n-2}+$ $+b_1x^{n-3}+\ldots+b_{n-3}x+b_{n-2}$, а остаток – $r(x)=d_1x+d_2$.

По теореме о делении с остатком запишем

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x^2-c_1x-c_2)(b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+$$
$$+\ldots+b_{n-3}x+b_{n-2})+(d_1x+d_2).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения коэффициентов частного.

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + c_1 b_0 \\ b_2 = a_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 \\ b_3 = a_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ b_{n-2} = a_{n-2} + c_1 b_{n-3} + c_2 b_{n-4} \\ d_1 = a_{n-1} + c_1 b_{n-2} + c_2 b_{n-3} \\ d_2 = a_n + c_2 b_{n-2} \end{cases}.$$

Обобщенную схему Горнера также удобно записывать в виде таблицы

	a_0	a_1	a_2	a_3
c_2		b_0	b_1	b_2
c_1	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + c_1 b_0$	$b_2 = a_2 + c_1 b_1 +$ $+ c_2 b_0$	$b_2 = a_3 + c_1 b_2 +$ $+ c_2 b_1$

…	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
…	b_{n-3}	b_{n-2}	
…	$b_{n-2} = a_{n-2} + c_1 b_{n-3} +$ $+ c_2 b_{n-4}$	$d_1 = a_{n-1} + c_1 b_{n-2} +$ $+ c_2 b_{n-3}$	$d_2 = a_n +$ $+ c_2 b_{n-2}$

Пример 21. Найдите частное и остаток при делении многочлена $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 5x + 33$ на трехчлен $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

<u>*Решение*</u>. По теореме о делении с остатком имеем $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где частное $q(x)$ – многочлен 4-ой степени, его будем искать в виде $q(x) = b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4$, а остаток $r(x)$ – многочлен 1-ой степени, его будем искать в виде $r(x) = d_1 x + d_2$.

Составим таблицу.

	1	–3	2
–5		1	–1
2	$b_0 = 1$	$b_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$	$b_2 = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + 2 = -5$

–4	1
–5	–9
$b_3 = 2\cdot(-5)+(-5)\cdot(-1)-4=-9$	$b_4 = 2\cdot(-9)+(-5)\cdot(-5)+1=8$

5	33
8	
$d_1 = 2\cdot 8+(-5)\cdot(-9)+5=66$	$d_2 = (-5)\cdot 8+33=-7$

Получили неполное частное $q(x)=x^4-x^3-5x^2-9x+8$ и остаток $r(x)=66x-7$. ◊

Упражнения.

58. Используя схему Горнера, выполните деление многочлена $f(x)$ на двучлен $x-a$, если

а) $f(x)=x^4-3x^3-24x^2+7x+2$, $a=-4$;

б) $f(x)=x^4-6x^2+7x-11$, $a=2$;

в) $f(x)=x^4+3x^3-9x^2-23x+14$, $a=-1$;

г) $f(x)=x^5+4x^4+10x^2+29x-37$, $a=-4$;

д) $f(x)=x^5-3x^2-7x+2$, $a=-2$;

е) $f(x)=x^5-4x^3-x^2-25x-12$, $a=3$.

59. Используя обобщенную схему Горнера, выполните деление многочлена $f(x)$ на трехчлен, если

а) $f(x)=x^4+3x^3+11x^2-5x+17$, $g(x)=x^2+2x+7$;

б) $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+7x-11$, $g(x)=x^2+4x+1$.

§5. Кратные корни многочленов

Если число α является корнем многочлена $f(x)$, то по теореме Безу $f(x)$ делится на $x-\alpha$, то есть $f(x)=(x-\alpha)q(x)$. При этом может оказаться, что число α является корнем частного $q(x)$, тогда $q(x)=(x-\alpha)q_1(x)$ и $f(x)$ будет делиться на $(x-\alpha)^2$, то есть $f(x)=(x-\alpha)^2q_1(x)$

и так далее. В таких случаях число α называется ***кратным корнем многочлена***.

Число α называется ***корнем кратности k*** многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$.

Если число α является корнем кратности k многочлена $f(x)$, то многочлен представим в виде

$$f(x)=(x-\alpha)^k q(x). \qquad (5.1)$$

Корни кратности 1 называют ***простыми*** корнями. Например, для многочлена $x^4-5x^3+8x^2-7x+2=$ $=(x-1)^3(x-2)$ число 1 является корнем кратности 3, число 2 – простым корнем, число 4 – корнем не является.

Пример 22. Докажите, что число 2 является корнем многочлена $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+16x-12$ и найдите кратность этого корня.

Решение. $f(2)=2^4-3\cdot 2^3-3\cdot 2^2+16\cdot 2-12=0$. Значит, 2 – корень многочлена и $f(x)$ делится на $x-2$. Найдем частное $q(x)$.

коэффициенты делимого					
	1	–3	–3	16	–12
2	1	1·2–3= –1	–1·2–3= –5	–5·2+16=6	6·2–12=0
коэффициенты частного					остаток

Получили частное $q(x)=x^3-x^2-5x+6$. Следовательно, $f(x)=(x-2)(x^3-x^2-5x+6)$.

Выясним, делится ли $f(x)$ на $(x-2)^2$. Это зависит от того делится ли $q(x)$ на $x-2$. Так как $q(2)=2^3-2^2-5\cdot 2+6=0$, то по теореме Безу $q(x)$ делится на $x-2$. Находим частное $q_1(x)$:

	коэффициенты делимого			
	1	–1	–5	6
2	1	1·2 – 1 = 1	1·2–5 = – 3	– 3·2 + 6 = 0
	коэффициенты частного			остаток

Итак, $q_1(x) = x^2 + x - 3$ и $f(x) = (x-2)^2(x^2 + x - 3)$. Значит, $f(x)$ делится на $(x-2)^2$. Многочлен $x^2 + x - 3$ не делится на $x-2$, так как $q_1(2) = 4 + 2 - 3 \neq 0$. По определению число 2 – корень кратности 2 многочлена $f(x)$. ◊

При нахождении кратности корня существенно помогает понятие производной многочлена, которое вводится следующим образом.

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Производной многочлена $f(x)$ называется многочлен

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}. \qquad (5.2)$$

По определению полагаем, что производная константы равна нулю, т.е. $(a)' = 0$.

Так как производная данного многочлена $f(x)$ есть многочлен $f'(x)$, то для него можно найти производную. Обозначим ее символом $f''(x)$ и будем называть ***второй производной*** от многочлена $f(x)$. Аналогично, производную от $f''(x)$ обозначим символом $f'''(x)$ и назовем ***третьей производной*** от многочлена $f(x)$, и вообще, символом $f^{(k)}(x)$ обозначают ***производную порядка k*** от многочлена $f(x)$.

Приведем основные свойства производной, вытекающие из ее определения.

1) Если $\deg f(x) = n$, то $\deg f'(x) = n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$;

2) Если многочлен $f(x)$ – константа, то его производная равна нулю, и если $f'(x) = 0$, то $f(x)$ – константа;

3) Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ где } c \in K;$$

4) Производная суммы (разности) двух многочленов равна сумме (разности) производных этих многочленов:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

5) Производная произведения двух многочленов равна сумме произведений производной первого многочлена на второй и производной второго многочлена на первый:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x);$$

6) $(f^{m}(x))' = m\cdot f^{m-1}(x)\cdot f'(x) \quad (m \in \mathbb{N})$.

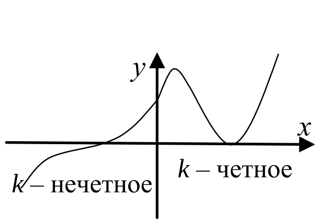
Способ нахождения кратности корня многочлена с помощью производной дает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Если α – корень кратности k многочлена $f(x)$, то α – корень кратности $k-1$ многочлена $f'(x)$.*

Доказательство. Пусть α – корень кратности k многочлена $f(x)$. Это значит, что $f(x) = (x-\alpha)^{k} q(x)$ и частное $q(x)$ не делится на $x-\alpha$, то есть по теореме Безу $q(\alpha) \neq 0$. Тогда $f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}q(x) + (x-\alpha)^{k} q'(x) = (x-\alpha)^{k-1}\times$ $\times(kq(x) + (x-\alpha)q'(x))$. Из этого равенства следует, что $q'(x) \vdots (x-\alpha)^{k-1}$ и при $x=\alpha$ частное $q_1(x)$ отлично от нуля. В самом деле $q_1(\alpha) = kq(\alpha) + (\alpha-\alpha)q'(\alpha) = kq(\alpha) \neq 0$. По следствию 3.2 теоремы Безу $q_1(x)$ не делится на $x-\alpha$ и поэтому $f'(x)$ не делится на $(x-\alpha)^{k}$. Следовательно, α – корень кратности $k-1$ многочлена $f'(x)$. ♦

Из этой теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 5.2. *Если α – корень кратности k многочлена $f(x)$, то α является корнем всех его производных до $(k-1)$-го порядка включительно и не является корнем производной k-го порядка.*



Заметим, что если α – кратный корень многочлена $f(x)$, то ось OX является касательной к графику функции $y=f(x)$. В самом деле, если α – кратный корень многочлена $f(x)$, то α – корень производной $f'(x)$, следовательно, касательная к графику функции $y=f(x)$ горизонтальна, то есть совпадает с осью OX (точка $(\alpha; f(\alpha))$ лежит на оси OX). Если α – корень четной кратности, то функция при переходе через точку α сохраняет знак, если α – корень нечетной кратности, то функция при переходе через точку α меняет знак на противоположный.

Пример 23. Докажите, что число (-1) является корнем многочлена $f(x)=x^5+2x^4+2x^3+4x^2+5x+2$ и найдите его кратность.

<u>*Решение*</u>. Так как $f(-1)=0$; то (-1) – корень многочлена $f(x)$. Вычислим производную $f'(x)=5x^4+8x^3+6x^2+8x+5$. Так как $f'(-1)=0$, то значит, (-1) – корень производной $f'(x)$. Далее, $f''(x)=20x^3+24x^2+12x+8$, $f''(-1)=0$ и (-1) – корень второй производной многочлена. Наконец, найдем $f'''(x)=60x^2+48x+12$, $f'''(-1)=24\neq 0$. Таким образом, (-1) – корень многочлена $f(x)$ кратности 3. ◊

Пример 24. Докажите, что многочлен

$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

<u>*Решение*</u>. Обозначим данный многочлен через $f(x)$:

$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$. Производная

$$f'(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)'=\frac{1}{1!}+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}=$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Предположим, что α – кратный корень многочлена $f(x)$. Тогда α – корень производной $f'(x)$ и, значит, корень многочлена

$g(x) = f(x) - f'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Из $g(\alpha) = \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$ следует, что $\alpha = 0$.

Но $f(\alpha) = 1 + \dfrac{\alpha}{1!} + \dfrac{\alpha^2}{2!} + \dfrac{\alpha^3}{3!} + \ldots + \dfrac{\alpha^n}{n!} = 1 \neq 0$.

Получили противоречие. Следовательно, многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней. ◊

Пример 25. Найдите значения a, при которых число (-1) является корнем кратности 2 многочлена $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$.

<u>*Решение*</u>. $f(-1) = -1 + a - a + 1 = 0$. Следовательно, (-1) – корень $f(x)$ при всех a. Найдем частное от деления $f(x)$ на $x+1$:

	1	a	a	1
-1	1	$a-1$	1	0

$q(x) = x^2 + (a-1)x + 1$ и $f(x) = (x+1)q(x)$.

Выясним, при каких значениях a многочлен $f(x) \vdots (x+1)^2$, это эквивалентно тому, что $q(x) \vdots (x+1)$. Для того, чтобы $q(x) \vdots (x+1)$ необходимо и достаточно, чтобы $q(-1) = 3 - a = 0$ или $a = 3$. Тогда $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Но в этом случае $f(x)$ делится не только на $(x+1)^2$, но и на $(x+1)^3$. Значит, ни при каком значении a число (-1) не является корнем кратности 2 многочлена $f(x)$ (при $a \neq 3$ (-1) – простой корень, при $a = 3$ (-1) – корень кратности 3). ◊

Пример 26. При каких значениях параметра a многочлен $x^{99} - ax^{15} + ax^6 - 1$ делится на $(x-1)^2$.

<u>*Решение*</u>. Обозначим данный многочлен через $f(x)$. Тогда $f(1) = 1 - a + a - 1 = 0$. Поэтому 1 – корень $f(x)$ при любом a. Нам нужно найти такое число a, чтобы 1 была кратным корнем $f(x)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы 1 была корнем $f'(x)$. Имеем $f'(x) = 99x^{98} - 15ax^{14} + 6ax^5$ и $f(1) = 99 - 9a = 0$. Отсюда следует, что $a = 11$ и $f(1) = x^{99} - 11x^{15} + 11x^6 - 1$. ◊

Пример 27. Определите кратность корня $x_0 = a$ многочлена

$$\varphi(x) = \frac{f'(x) + f'(a)}{2}(x-a) - f(x) + f(a).$$

Решение. Имеем $\varphi'(x)=\dfrac{-f'(x)+f'(a)}{2}+\dfrac{f''(x)}{2}(x-a)$ и $\varphi'(a)=\dfrac{-f'(a)+f'(a)}{2}+\dfrac{f''(a)}{2}(a-a)=0$. Найдем вторую производную $\varphi''(x)=\dfrac{f'''(x)}{2}(x-a)$ и $\varphi''(a)=\dfrac{f'''(a)}{2}(a-a)=0$. Далее имеем $\varphi'''(x)=\dfrac{f'''(x)}{2}+\dfrac{f^{IV}(x)}{2}(x-a)$ и $\varphi'''(a)=\dfrac{f'''(a)}{2}$. Значит, a является корнем кратности $k+3$ многочлена $\varphi(x)$, где k – показатель кратности a, как корня $f'''(x)$. ◊

Упражнения.

60. Дан многочлен $f(x)=x^5+2x^4+3x^3+7x^2+8x+3$. Покажите, что $\alpha=-1$ является его корнем. Найдите кратность этого корня.

61. Найдите кратность корня $\alpha=2$ для многочлена $f(x)=x^5+4x^4-7x^3-11x^2+4$.

62. Найдите кратность корня $\alpha=2$ для многочлена $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

63. Для многочлена $f(x)=x^5+3x^4+2x^3-2x^2-3x-1$ найдите кратность корня $\alpha=-1$.

64. Покажите, что многочлен $f(x)=x^n-1$ не имеет кратных корней.

65. Покажите, что многочлен $f(x)=x^3-4x^2+9x+c$ не имеет кратных действительных корней ни при каком c.

66. При каких значениях параметра c многочлен $f(x)=x^3-4x^2+5x+\dfrac{c}{27}$ имеет кратные корни.

67. Определите a и b так, чтобы число $\alpha=-2$ было кратным корнем многочлена $f(x)=x^5+ax^2+bx-4$.

68. Определите a и b так, чтобы число $\alpha = 2$ было кратным корнем многочлена $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + +56x - 16$.

§6. Многочлены с целыми коэффициентами

В случае многочленов с целыми коэффициентами всегда можно отыскать все его рациональные, в частности, целые корни, если, конечно, они существуют. Способ отыскания рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами дается следующей теоремой.

Теорема 6.1. *Если несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на* p*, а старший коэффициент делится на* q.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + +a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами и дробь $\frac{p}{q}$ – его корень; числа p и q являются взаимно простыми, так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Имеем $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$

или $f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0$.

Умножая обе части равенства на q^n, получим $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$.

Оставляя слагаемое a_nq^n в левой части равенства и перенося все остальные слагаемые в правую часть с противоположными знаками, получим

$$a_nq^n = -p(a_0p^{n-1} + \ldots + a_{n-2}pq^{n-2} + a_{n-1}q^{n-1}).$$

Из этого равенства следует, что произведение $a_n q^n$ делится на p. Но поскольку p и q не имеют общих множителей, то на p делится a_n.

Аналогично, из равенства $a_0 p^n = -q(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + {}$ $+ \ldots + a_n q^{n-1})$ выводится, что a_0 делится на q. ♦

Из этой теоремы вытекает важное следствие.

Следствие 6.2. *Если старший коэффициент многочлена с целыми коэффициентами равен* 1, *то все рациональные корни многочлена – целые и являются делителями свободного члена*.

Доказательство. Действительно, в этом случае знаменатель рационального корня $\frac{p}{q}$ может быть равен только ± 1, поэтому корень $\frac{p}{q} = \pm p$ – целый и $a_n \vdots p$. ♦

Отметим, что утверждение, обратное доказанной теореме, неверно: если p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента многочлена $f(x)$, то отсюда совсем не следует, что дробь $\frac{p}{q}$ – корень $f(x)$. Например, если $f(x) = x^3 - x^2 - 7x + 4$, то число 2 является делителем свободного члена, но не является корнем многочлена $f(x)$, так как $f(2) = 2^3 - 2^2 - 7 \cdot 2 + 4 = -14 \neq 0$.

Из теоремы 6.1 следует, что для нахождения рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами нужно выписать все делители свободного члена, все положительные делители старшего коэффициента[1], составить из этих

[1] Для старшего коэффициента выписываем только положительные делители, так как знак дроби считаем присоединенным к числителю.

чисел несократимые дроби и проверить какие из этих дробей являются корнями многочлена.

Для уменьшения количества вычислений и упрощения перебора полезна следующая теорема.

Теорема 6.3. *Если несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *с целыми коэффициентами, то для любого натурального числа* k *отношение* $\frac{f(k)}{qk-p}$ *является целым числом.*

Доказательство. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами и $\frac{p}{q}$ – его корень. Из доказательства теоремы 6.1 имеем

$$q^n f\left(\frac{p}{q}\right)=a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0.$$

Тогда для любого целого числа k вытекает

$$q^n f(k)=q^n f(k)-q^n f\left(\frac{p}{q}\right)=q^na_0k^n+q^na_1k^{n-1}+\ldots+$$
$$+q^na_{n-1}k+q^na_n-(a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n)=$$
$$=a_0(q^nk^n-p^n)+a_1q(q^{n-1}k^{n-1}-p^{n-1})+a_2q^2(q^{n-2}k^{n-2}-$$
$$-p^{n-2})+\ldots+a_{n-1}q^{n-1}(qk-p).$$

Каждый многочлен $q^mk^m-p^m$ делится на двучлен $qk-p$ (упражнение 52). Следовательно, и весь многочлен $q^n f(k)$ делится на двучлен $qk-p$. Так как числа p и q взаимно простые, то получаем, что многочлен $f(k)$ делится на двучлен $qk-p$. Значит, отношение $\frac{f(k)}{qk-p}$ является целым числом. ♦

Заметим, что имеет место и утверждение, обратное теореме 6.3.

Теорема 6.4. *Если для многочлена с целыми коэффициентами* $f(x)$ *и несократимой дроби* $\frac{p}{q}$ *отношение* $\frac{f(k)}{p-qk}$ *является целым числом для любого натурального числа* k*, то* $\frac{p}{q}$ *– корень многочлена* $f(x)$*.*

Доказательство. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами и $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь.

В доказательстве теоремы 6.3 получено, что $q^n f(k)-q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ делится на $p-qk$. Так как по условию теоремы первое слагаемое делится на $p-qk$, то и второе слагаемое должно делится на $p-qk$, т.е. $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ делится на $p-qk$. Так как числа p и q – взаимно простые получаем, что $f\left(\frac{p}{q}\right)$ делится на $p-qk$ для любого натурального числа k. А это возможно только тогда, когда $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$. ♦

Пример 28. Решите уравнение $x^3-6x^2+2x+12=0$.

<u>*Решение*</u>. Многочлен $x^3-6x^2+2x+12$ имеет целые коэффициенты. По следствию 6.2 рациональные корни этого многочлена, если они есть, являются целыми и находятся среди делителей свободного члена. Поэтому искать рациональные корни следует среди чисел ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Проверкой убеждаемся, что число 2 является корнем многочлена. По теореме Безу многочлен делится на $x-2$. Выполнив деление, получим

$(x-2)(x^2-4x-6)=0$. Решая квадратное уравнение $x^2-4x-6=0$, найдем его корни $x_{2,3}=2\pm\sqrt{10}$. Итак, исходное уравнение имеет три действительных корня: $x_1=2$, $x_2=2+\sqrt{10}$, $x_3=2-\sqrt{10}$. ◊

Пример 29. Найдите целые корни многочлена $f(x)=2x^3+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{6}$.

Решение. Не все коэффициенты данного многочлена $f(x)$ целые, поэтому сразу применить следствие 6.2 нельзя. Рассмотрим многочлен $f_1(x)=6f(x)=12x^3+4x^2-3x+5$. Корни многочленов $f(x)$ и $f_1(x)$ совпадают. Целые корни многочлена $f_1(x)$ будем искать среди делителей его свободного члена ±1, ±5. Имеем $f_1(1)=18,\ f_1(-1)=0,\ f_1(5)=1590,\ f_1(-5)=-1380$. Значит, $f(x)$ имеет один целый корень: -1. ◊

Пример 30. Найдите рациональные корни многочлена $f(x)=2x^3+3x^2+6x-4$.

Решение. Рациональные корни многочлена будем искать в виде дроби $\dfrac{p}{q}$. Возможные значения для числителя дроби p: ±1; ±2; ±4, возможные значения для знаменателя дроби q: 1; 2 (знак считаем присоединенным к числителю). Возможные значения рациональных корней: ±1; ±2; ±4, $\pm0,5$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_1=0,5$ – корень многочлена $f(x)$. По теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на двучлен $x-0,5$. Выполнив деление, получим $f(x)=(x-0,5)(2x^2+4x+8)=$ $=(2x-1)(x^2+2x+4)$.

Квадратный трехчлен x^2+2x+4 не имеет действительных корней. Значит, многочлен $f(x)$ имеет единственный рациональный корень: $x=0,5$. ◊

Пример 31. Разложите на множители многочлен $f(x)=x^4+3x^3-2x^2-12x-8$.

Решение. Многочлен $f(x)$ – приведенный, поэтому его рациональные корни (если они существуют) являются целыми и находятся среди делителей свободного члена. Искать рациональные корни следует среди чисел ±1; ±2; ±4; ±8.

Проверкой убеждаемся, что число –1 – корень многочлена $f(x)$. Выполнив деление многочлена $f(x)$ на $x+1$, получим $f(x)=(x+1)(x^3+2x^2-4x-8)$. Многочлен x^3+2x^2-4x-8 имеет корень 2, поэтому он представим в виде: $x^3+2x^2-4x-8=(x-2)(x^2+4x+4)$. Применив формулу сокращенного умножения, получим искомое разложение $f(x)$ на множители: $f(x)=(x+1)(x-2)(x+2)^2$. ◊

Пример 32. Докажите, что у многочленов $f(x)=a_0x^n+$ $+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ и $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, где a_0 и a_n отличны от нуля, корни взаимно обратные числа, то есть если α – корень многочлена $f(x)$, то $\dfrac{1}{\alpha}$ – корень многочлена $g(x)$ и наоборот.

Решение. Пусть α – корень многочлена $f(x)$, то есть $f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0$.

Найдем значение многочлена $g(x)$ в точке $\dfrac{1}{\alpha}=\alpha^{-1}$:

$$g(\alpha^{-1})=a_n(\alpha^{-1})^n+a_{n-1}(\alpha^{-1})^{n-1}+\ldots+a_1(\alpha^{-1})+a_0=$$

$$=\frac{a_n+a_{n-1}\alpha+\ldots+a_1\alpha^{n-1}+a_0\alpha^n}{\alpha^n}=0.$$

Следовательно, α^{-1} – корень многочлена $g(x)$.
Вторая часть доказательства проводится аналогично. ◊

Пример 33. Найдите все корни многочлена $f(x)=8x^3+6x^2-7x+1$.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся утверждением, доказанным в примере 32.

Найдем корни многочлена $g(x) = x^3 - 7x^2 + 6x + 8$. Многочлен $g(x)$ – приведенный, и его рациональные корни – целые числа. Ищем корни среди чисел ±1; ±2; ±4; ±8. Непосредственной подстановкой находим, что $x_1 = 2$ – корень $g(x)$ и $g(x) = (x-2)(x^2 - 5x - 4)$. Находим корни квадратного трехчлена $x_{2,3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Согласно примеру 32 многочлен $f(x)$ имеет корни $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{2}{5-\sqrt{41}} = -\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}$, $x_3 = \dfrac{2}{5+\sqrt{41}} = \dfrac{\sqrt{41}-5}{8}$. ◊

Пример 34. Найдите рациональные корни многочлена $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 - 17x - 6$.

Решение. Если несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$, то $6 \vdots p$, а $2 \vdots q$. Делителями числа 6 являются числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, а делителями числа 2 – числа 1, 2 (знак присоединен к числителю). Поэтому рациональные корни многочлена, если они есть, находятся среди чисел $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6;\ \pm 0{,}5;\ \pm 1{,}5$. Для упрощения перебора воспользуемся тем, что если дробь $\dfrac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$, то значение выражения $\dfrac{f(k)}{qk-p}$ при любом целом k, в частности, при $k = \pm 1$ должно быть целым числом (заметим, что значение заданного в примере многочлена при $k = \pm 1$ отлично от нуля). Рассмотрим значения $\dfrac{f(1)}{q-p}$ и $\dfrac{f(-1)}{q+p}$ при различных значениях p и q. Они должны быть целыми. Имеем $f(1) = -15$, $f(-1) = 5$.

Составим таблицу, в которую запишем «ц», если исследуемая дробь принимает целое значение и «д», если – дробное.

Причем, если в первой заполняемой строчке появилась буква «д», то клетку под ней можно не заполнять.

p	2	–2	3	–3	6	–6	1	–1	3	–3
q	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
p/q	2	–2	3	–3	6	–6	0,5	–0,5	1,5	–1,5
$\dfrac{f(1)}{q-p}$	ц	ц	д	д	ц	д	ц	ц	ц	ц
$\dfrac{f(-1)}{q+p}$	д	ц			д		д	ц	ц	ц

Видим, что «кандидатами» в рациональные корни многочлена являются только числа –2; –0,5; 1,5; –1,5. Подстановкой в многочлен убеждаемся, что подходят только числа –2 и 1,5: $f(-2)=0,\quad f(-0{,}5)=1{,}5,\quad f(1{,}5)=0,\quad f(-1{,}5)=3{,}75$.

Имеем $f(x)=(x+2)(2x-3)(x^2+3x+1)$. Последний множитель рациональных корней не имеет. ◊

Пример 35. Докажите, что $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}-\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$ – целое число. Найдите его.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}-\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}=x$. Тогда

$$x^3=17\sqrt{5}+38-3\cdot\sqrt[3]{(17\sqrt{5}+38)^2}\cdot\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}+3\cdot\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}\times$$

$$\times\sqrt[3]{(17\sqrt{5}-38)^2}-17\sqrt{5}+38=76-3\cdot\sqrt[3]{(17\sqrt{5}-38)(17\sqrt{5}+38)}\times$$

$$\times\left(\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}-\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\right)=76-3x\cdot\sqrt[3]{1445-1444}=76-3x.$$

Для нахождения заданного числа, получили кубическое уравнение $x^3+3x-76=0$. Многочлен, стоящий в правой части уравнения, обозначим через $f(x)$. Возможные значения целых корней многочлена $\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm19$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=4$ – корень $f(x)$ и поэтому $f(x)\,\vdots\,(x-4)$. Частное от деления многочлена $f(x)$ на $x-4$ $q(x)=x^2+4x+19$ не имеет действительных корней. Таким образом, $x=4$ – единственный корень уравнения и, значит, значение исходного выражения равно 4. ◊

Пример 36. Докажите, что $\sin 10^\circ$ – иррациональное число.

<u>*Решение*</u>. По известной формуле синуса тройного угла $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ при $\alpha = 10^\circ$, получаем, что $\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$, т.е. справедливо равенство $3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ = 0{,}5$. Следовательно, $\sin 10^\circ$ – корень многочлена $f(x) = 8x^3 - 6x + 1$. Согласно теореме 10.4 рациональные корни многочлена следует искать среди чисел $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Проверка показывает, что ни одно из этих чисел не является корнем многочлена $f(x)$. Следовательно, $f(x)$ не имеет рациональных корней и $\sin 10^\circ$ – иррациональное число. ◊

Упражнения.

69. Найдите корни многочлена и разложите многочлен на множители:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 16x - 12$;

б) $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$;

в) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$;

г) $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$;

д) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16$.

70. Найдите целые корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

б) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12$;

в) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 12x + 8$;

г) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$;

д) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 10x + 8$.

71. Найдите целые корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:

а) $f(x)=x^4-x^3-13x^2-31x-20$;

б) $f(x)=x^4+3x^3-8x^2-26x-12$;

в) $f(x)=x^5-x^4-4x^3+5x^2+x-2$;

г) $f(x)=x^5+4x^4+2x^3-10x^2-15x-6$;

д) $f(x)=x^5-5x^4+4x^3+11x^2-17x+6$.

72. Найдите рациональные корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:

а) $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$;

б) $f(x)=3x^4+5x^3+7x^2+15x-6$;

в) $f(x)=8x^3-12x^2-2x+3$;

г) $f(x)=12x^3+16x^2+7x+1$;

д) $f(x)=12x^3+16x^2+7x+1$.

73. Докажите, что многочлены не имеют целых корней:

а) $f(x)=x^3-7x+2$;

б) $f(x)=x^3-x^2-2x-3$;

в) $f(x)=x^4-13x^3+x-2$;

г) $f(x)=x^9-16x^6-13x^2+1$.

74. Дан многочлена $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$ Найдите кратный корень этого многочлена и укажите его кратность. Разложите многочлен на множители.

75. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^3+ax^2-3x+2=0$ имеет хотя бы один целый корень. Для каждого из полученных значений a найдите все корни уравнения.

76. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^3+ax^2-3x+2=0$ имеет хотя бы один целый корень. Найдите все корни уравнения в случае, когда оно имеет более одного целого корня.

77. Докажите, что число $\sqrt[3]{10\sqrt{7}+22}-\sqrt[3]{10\sqrt{7}-22}$ – целое. Найдите это число.

78. Докажите, что $\cos 40^\circ$ – иррациональное число.

§7. Основная теорема алгебры многочленов и ее следствия

Теория многочленов с комплексными[1] коэффициентами оказывается более стройной и простой, чем теория многочленов с действительными коэффициентами, и объясняется это именно основной теоремой, справедливой для многочленов с комплексными коэффициентами.

Теорема 7.1. (основная теорема алгебры многочленов). *Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один комплексный корень.*[2]

---

[1] ***Комплексным числом*** называется число вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, то есть такое число, квадрат которого равен –1 ($i^2=-1$). Любое действительное число a можно считать комплексным, так как оно представимо в виде $a+0i$. Число вида $0+bi$ ($b\neq 0$) называется чисто мнимым. Формально операции сложения, вычитания и умножения комплексных чисел выполняются как операции над многочленами по правилам раскрытия скобок, при этом учитывается, что $i^2=-1$. Число $\bar{z}=a-bi$ называется ***комплексно сопряженным*** числу $z=a+bi$. Заметим, что $z+\bar{z}=2a$ и $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$ – действительные числа и $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, $\overline{z^n}=\bar{z}^n$.

[2] Эту теорему сформулировал Альбер де Жирар в 1629 г. Доказательства теоремы предложили Д'Аламбер (1746), Эйлер (1749) и Лагранж (1771), но эти доказательства были небезупречны. Первым удовлетворительное доказательство основной теоремы алгебры получил Гаусс,

Доказательство этой теоремы не является чисто алгебраическим и использует различные факты теории функций комплексного переменного.

Большой интерес представляют следствия, которые вытекают из основной теоремы алгебры многочленов.

Следствие 7.2. *Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами раскладывается в произведение n линейных множителей.*

Следствие 7.3. *Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет n корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.*

Основная теорема алгебры многочленов позволяет для многочленов любой степени сформулировать утверждение, которое при $n = 2$ доказывается в школьном курсе под названием теорема Виета. Это утверждение и в общем случае называется теоремой Виета.

Следствие 7.4. (теорема Виета[1]) *Пусть задан приведенный многочлен $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с комплексными коэффициентами. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ сумма всех возможных произведений корней, состоящих из k сомножителей, равна $(-1)^k a_k$.*

который привел три разных доказательства (1799, 1815 и 1816), поэтому ее часто называют теоремой Гаусса.

[1] Франсуа Виет (1540 — 1603) — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии – юрист. Виет разработал новый язык – язык обобщенной арифметики, которая дает возможность проводить математические исследования с недостижимыми ранее глубиной и общностью. Он обозначает буквами не только неизвестные, что уже встречалось ранее, но и все прочие параметры, для которых он придумал термин ***коэффициенты***. Символика Виета была высоко оценена учеными разных стран. К заслугам Виета нужно отнести полное аналитическое изложение теории уравнений первых четырех степеней.

Запишем теорему Виета более подробно.

Пусть $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ – приведенный многочлен и $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – его корни, среди которых могут быть и равные (то есть каждый корень записываем столько раз, какова его кратность). Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=-a_1 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n=a_2 \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n=(-1)^n a_n \end{cases}. \tag{7.1}$$

(Выражение для коэффициента a_k содержит C_n^k слагаемых.) Формулы (7.1) называют ***формулами Виета***.

Полное доказательство теоремы Виета довольно громоздко, и мы ограничимся только проверкой первого и последнего равенств. Представим $f(x)$ в виде

$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$.

После раскрытия скобок в правой части будем иметь:

$$x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=x^n-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)x^{n-1}+$$
$$+...+(-1)^n\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n.$$

Если два многочлена равны, то равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Поэтому

$-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)=a_1$ и $(-1)^n\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n=a_n$.

Умножая первое равенство на (–1), а второе на $(-1)^n$, получим проверяемые равенства. ♦

Для квадратного трехчлена $f(x)=x^2+a_1x+a_2$ теорема Виета имеет вид (x_1, x_2 – корни трехчлена)

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_1x_2=a_2 \end{cases}, \tag{7.2}$$

а для многочлена третьей степени

$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ (x_1, x_2, x_3 – корни многочлена) –

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_2 = a_2 \\ x_1x_2x_3 = -a_3 \end{cases}. \qquad (7.3)$$

Пример 37. Для многочлена $f(x) = x^2 - 8x - 5$ найдите

а) сумму квадратов корней многочлена;

б) сумму кубов корней многочлена;

в) сумму чисел, обратных корням многочлена.

Решение. Многочлен $f(x)$ приведенный, x_1 и x_2 – его корни. Запишем теорему Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1x_2 = -5 \end{cases}$.

Сумму квадратов корней найдем, используя формулу квадрата суммы двух чисел. Из этой формулу следует, что $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2$ и $x_1^2 + x_2^2 = 8^2 - 2(-5) = 64 + 10 = 74$.

Сумму кубов корней найдем, используя формулу куба суммы чисел $\left(x_1 + x_2\right)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2\left(x_1 + x_2\right)$. Отсюда следует, что $x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)^3 - 3x_1x_2\left(x_1 + x_2\right)$. Получаем $x_1^3 + x_2^3 = 8^3 - 3(-5)\cdot 8 = 512 + 120 = 632$.

Найдем сумму чисел, обратных корням многочлена: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2}$. Итак, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{8}{-5} = -1,6$. ◊

Пример 38. Дан многочлен $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 3x + 7$ найдите

а) сумму квадратов корней многочлена;

б) сумму чисел, обратных корням многочлена.

Решение. Данный многочлен не является приведенным. Однако многочлен $f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 1,5x + 3,5$ – приведенный и имеет те же корни, что и $f(x)$. Обозначим корни x_1, x_2, x_3. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_2 = -1,5 \\ x_1x_2x_3 = -3,5 \end{cases}.$$

Найдем сумму квадратов корней, используя для этого формулу квадрата суммы чисел: $\left(x_1+x_2+x_3\right)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+$ $+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$. Получаем $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-$ $-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=3^2-2\cdot(-1{,}5)=12$.

Найдем сумму чисел, обратных корням многочлена:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=\frac{-1{,}5}{-3{,}5}=\frac{3}{7}. \qquad \Diamond$$

Пример 39. Покажите, что не все корни многочлена $f(x)=x^3-4x^2+9x-11$ являются действительными числами.

<u>*Решение*</u>. По теореме Виета корни многочлена $f(x)$ удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=9,\\ x_1x_2x_3=11.\end{cases}$

Используя формулу, полученную в предыдущем примере, имеем $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$. Для заданного в условии задачи многочлена получим $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4^2-2\cdot 9=-2$, что невозможно, если все корни многочлена действительные числа. $\Diamond$

Пример 40. В многочлене $f(x)=2x^2+17x+m$ определите m так, чтобы его корни были связаны соотношением $x_1-x_2=5{,}5$.

<u>*Решение*</u>. Данный многочлен не является приведенным. Рассмотрим многочлен $f_1(x)=x^2+8{,}5x+0{,}5m$, который является приведенным и имеет те же корни, что и $f(x)$.

По теореме Виета корни многочлена $f(x)$ удовлетворяют соотношениям $x_1+x_2=-8{,}5,\ x_1x_2=0{,}5m$. Присоединив соотношение $x_1-x_2=5{,}5$, для определения m получим систему

$$\begin{cases} x_1+x_2=-8{,}5,\\ x_1x_2=0{,}5m,\\ x_1-x_2=5{,}5.\end{cases} \text{ Откуда } \begin{cases} x_1=-1{,}5,\\ x_2=-7,\\ m=2x_1x_2=21.\end{cases} \qquad \Diamond$$

Пример 41. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $f(x) = -2x^3 - x^2 + 2x + 3$. Составьте приведенный многочлен третьей степени, корнями которого будут числа $y_1 = \dfrac{x_1}{x_2x_3},\ y_2 = \dfrac{x_2}{x_1x_3},\ y_3 = \dfrac{x_3}{x_1x_2}$.

Решение. Многочлен $f(x) = -2x^3 - x^2 + 2x + 3$ не является приведенным, соответствующий приведенный многочлен $f_1(x) = x^3 + 0,5x^2 - x - 1,5$ и теорема Виета для него имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -0,5, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1, \\ x_1x_2x_3 = 1,5. \end{cases}$$

Многочлен $g(x)$ будем искать в виде $g(x) = x^3 + a_1x^2 + {}$ $+a_2x + a_3$. Для определения коэффициентов применим теорему Виета:

$$a_1 = -(y_1 + y_2 + y_3) = -\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1x_2x_3},$$

$$a_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{x_1^2x_2^2x_3^2},$$

$$a_3 = -y_1y_2y_3 = -\frac{1}{x_1x_2x_3}.$$

Чтобы найти суммы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$ воспользуемся решением примера 38:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-0,5)^2 - {}$$
$$-2(-1) = 2,25.$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2x_3^2 - {}$$
$$-2x_1x_2^2x_3 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = (-1)^2 - {}$$
$$-2 \cdot 1,5 \cdot (-0,5) = 2,5.$$

Подставляя полученные выражения в формулы Виета, вычислим коэффициенты

$$a_1 = -\frac{2,25}{1,5} = -\frac{3}{2}; \quad a_2 = \frac{2,5}{1,5^2} = \frac{10}{9}; \quad a_3 = -\frac{1}{1,5} = -\frac{2}{3}.$$

Искомый трехчлен $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{9}x - \frac{2}{3}$. ◊

Следующее утверждение является одним из ярких примеров применения теории комплексных чисел к задачам «чисто действительным», не имеющим в своей постановке к комплексным числам никакого отношения.

Теорема 7.5. *Всякий многочлен степени* $n \geq 1$ *с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами, имеющими действительные коэффициенты.*

При доказательстве теоремы сначала нужно показать, что если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с действительными коэффициентами и комплексное число $\alpha = a + bi$ является корнем многочлена $f(x)$, то и число $\bar{\alpha} = a - bi$ является корнем многочлена $f(x)$. Имеем

$P(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$. Поэтому

$\overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha + a_n} = \overline{a_0} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + ... +$
$+ \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_n} = a_0\bar{\alpha}^n + a_1\bar{\alpha}^{n-1} + ... + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n = \bar{0} = 0$. Следовательно, $\bar{\alpha}$ – корень многочлена $f(x)$.

Утверждение теоремы будем доказывать индукцией по степени n многочлена $f(x)$. Для многочленов степени 1 и 2 утверждение верно. Предположим, что оно справедливо для любых многочленов степени меньше n, и пусть $f(x)$ имеет степень n. Многочлен $f(x)$ имеет комплексный корень α. По теореме Безу

$$f(x) = (x - \alpha)q(x). \tag{7.4}$$

И если α – действительное число, то $q(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами. Тогда по предположению индукции $q(x)$ раскладывается в произведение требуемого вида. Но тогда в силу равенства (7.4) такое разложение существует и для многочлена $f(x)$.

Пусть теперь α – комплексное число, но тогда $\bar{\alpha}$ тоже корень многочлена $f(x)$ и из (7.4) при $x=\bar{\alpha}$ получаем $f(\bar{\alpha})=(\bar{\alpha}-\alpha)q(\bar{\alpha})$. Так как $f(\bar{\alpha})=0$ и $\bar{\alpha}-\alpha\neq 0$, то $q(\bar{\alpha})=0$. Снова применим теорему Безу и получим $q(x)=(x-\bar{\alpha})h(x)$. И тогда из (7.4) будем иметь:

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})h(x). \qquad (7.5)$$

Поскольку $\alpha+\bar{\alpha}$ и $\alpha\cdot\bar{\alpha}$ – числа действительные, то трехчлен $x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\cdot\bar{\alpha}$ имеет действительные коэффициенты и отрицательный дискриминант, так как его корни не являются действительными числами.

Многочлен $h(x)$ также имеет действительные коэффициенты как частное двух многочленов с действительными коэффициентами. Но многочлен $h(x)$ имеет степень меньше n, так что к нему применимо предположение индукции. После этого требуемое утверждение для многочлена $f(x)$ вытекает из равенства (7.5). ♦

Пример 42. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлен $f(x)=x^3-x^2+x-6$.

<u>*Решение*</u>. Все действительные корни многочлена целые находятся среди делителей свободного члена. Перебором его делителей найдем целый корень $x_1=2$. Найдем частное $q(x)=x^2+x+3$ от деления $f(x)$ на $x-2$. Так как многочлен $q(x)$ не имеет действительных корней, то, $f(x)=x^3-x^2+$ $+x-6=(x-2)(x^2+x+3)$. ◊

Пример 43. Разложите на линейные множители многочлен $f(x)=x^3+x+10$.

Решение. Среди делителей свободного члена находим целый корень $x_1=-2$. По схеме Горнера находим частное $q(x)=x^2-2x+5$ от деления $f(x)$ на $x+2$.

Корни квадратного трехчлена $x_{2,3}=1\pm 2i$ ($D=4-20=-16$ и $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=4i$). Тогда $f(x)=(x+2)(x-1-2i)(x-1+2i)$. ◊

Пример 44. Один из корней многочлена $f(x)=$ $=x^4+x^3-x^2-10x-12$ равен $-1+i\sqrt{3}$. Разложите $f(x)$ на множители с действительными коэффициентами.

Решение. Так как $x_1=-1+i\sqrt{3}$ – корень $f(x)$, то по теореме 7.5 $x_2=-1-i\sqrt{3}$ также является корнем $f(x)$. Поэтому $f(x)$ делится на произведение $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+2x+4$. Выполнив деление «углом» или по обобщенной схеме Горнера, получим частное $q(x)=x^2-x-3$. Его корни $x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Искомое разложение $f(x)=(x^2-x-3)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$. ◊

Пример 45. Составьте многочлен четвертой степени, корнями которого будут числа $x_1=x_2=1,\ x_3=5, x_4=-2$.

Решение. Многочлен $f(x)$ будем искать в виде $f(x)=x^4+$ $+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$. Для определения коэффициентов применим теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-a_1, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a_2, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-a_3, \\ x_1x_2x_3x_4=a_4. \end{cases}$$

Имеем $\begin{cases} a_1=-(1+1+5-2)=-5, \\ a_2=1+5-2+5-2-10=-3, \\ a_3=-(5-2-10-10)=17, \\ a_4=-10. \end{cases}$

Искомый многочлен $g(x)=x^4-5x^3-3x^2+17x-10$.

Этот пример можно решить и другим способом, применив следствие 7.2. В разложении многочлена на множители $f(x)=(x-1)^2(x-5)(x+2)$ раскрыть скобки. ◊

Пример 46. Разложите многочлен $f(x)=x^4+4$ на

а) квадратичные множители;

б) линейные множители.

<u>Решение</u>. Многочлен $f(x)=x^4+4$ не имеет действительных корней, поэтому разложим его на квадратичные множители. Для этого нужно прибавить и отнять выражение, позволяющее выделить полный квадрат, а потом разложить на множители, применив формулу сокращенного умножения: $x^4+4=x^4+4x^2+$ $+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

Чтобы разложить многочлен на линейные множители, найдем корни квадратных трехчленов: $x_{1,2}=1\pm i$ и $x_{3,4}=-1\pm i$. Искомое разложение имеет вид

$$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i).$$

Корни многочлена $P(x)=x^4+4$ можно было найти, используя формулу извлечения корня из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме. Если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (r – модуль, φ – аргумент комплексного числа), то $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $k=0,1,\ldots,n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня. Для $z=-4$ имеем $r=4,\ \varphi=\pi$.

Тогда $\sqrt[4]{-4}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{4}\right)$ ($k=0,1,2,3$) и $x_1=1+i,\ x_2=1-i,\ x_3=-1+i,\ x_4=-1-i$. Разложение $f(x)$ на линейные множители имеет вид

$$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i).$$ ◊

Пример 47. Можно ли разложить на множители с действительными коэффициентами многочлен $x^{20}+x^{10}+1$.

<u>Решение</u>. Заметим, что если α является корнем квадратного трехчлена x^2+x+1, то $\alpha^3=1$. Докажем это. Если

$\alpha^2+\alpha+1=0$. С другой стороны $\alpha^2+\alpha+1=\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha-1}$. Поэтому $\alpha^3=1$.

Тогда получаем $\alpha^{20}+\alpha^{10}+1=\alpha^{18}\alpha^2+\alpha^9\alpha+1=\alpha^2+\alpha+1=0$ и поэтому многочлен $x^{20}+x^{10}+1$ делится на трехчлен x^2+x+1, имеющий действительные коэффициенты. Понятно, что в частном также получится многочлен с действительными коэффициентами. ◊

Пример 48. Сократите дробь $\dfrac{x^3+2x^2-x-14}{x^4-2x^3+x^2-x-2}$.

Решение. Дробь можно сократить, если ее числитель и знаменатель имеют общий множитель. Разложим числитель и знаменатель на множители. Многочлены $f(x)=x^3+2x^2-x-14$ и $g(x)=x^4-2x^3+x^2-x-2$ приведенные, поэтому их рациональные корни целые и являются делителями свободного члена. Непосредственной проверкой убеждаемся, что число 2 является корнем как $f(x)$ так и $g(x)$. Выполнив деление, получим

$f(x)=x^3+2x^2-x-14=(x-2)(x^2+4x+7)$,

$g(x)=x^4-2x^3+x^2-x-2=(x-2)(x^3+x+1)$.

Таким образом,

$$\frac{x^3+2x^2-x-14}{x^4-2x^3+x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x^2+4x+7)}{(x-2)(x^3+x+1)}=\frac{x^2+4x+7}{x^3+x+1}.$$ ◊

Пример 49. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{23}{15}, \\ xy+xz+yz=23. \end{cases}$

Решение. Пусть (α, β, γ) – решение системы уравнений. Получаем, $\alpha+\beta+\gamma=9$, $\dfrac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{23}{15}$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=23$.

Согласно теоремы Виета получаем, что α, β и γ являются корнями кубического уравнения $t^3-9t^2+23t-15=0$. Решая это уравнение, получим, что его корни равны 1, 3, 5. Значит, решениями данной системы уравнений являются следующие тройки чисел (1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3) и (5, 3, 1). ◊

Упражнения.

79. В квадратном трехчлене $3x^2-8x-35$ найдите сумму и произведение корней. Найдите сумму квадратов корней и сумму кубов корней этого трехчлена.

80. Дано уравнение $2x^2-9x-11=0$, x_1, x_2 – его корни. Найдите $x_1+x_2+3x_1x_2$.

81. Дано уравнение $0,4x^2+17x-5=0$, x_1, x_2 – его корни. Найдите $\dfrac{x_1+x_2}{(x_1x_2)^2}$.

82. При каком значении m один из корней уравнения $x^2+mx-m^2+7m-10=0$ равен–5. Решите уравнение.

83. Корни многочлена x^2-7x+5 равны x_1, x_2. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; в) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$;

г) $x_1^3+x_2^3$; д) $x_1^3x_2+x_1x_2^3$; е) $x_1^4+x_2^4$.

84. x_1, x_2 – корни многочлена $3x^2+7x-1$. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; в) $\dfrac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}$;

г) $x_1^3+x_2^3$; д) $x_1^3x_2+x_1x_2^3$; е) $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$.

85. x_1, x_2 – корни многочлена $2x^2+5x-9$. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; в) $x_1^3x_2+x_1x_2^3$;

г) $\dfrac{x_1+2}{x_2}+\dfrac{x_2+2}{x_1}$; д) $\dfrac{x_2}{x_1}(1+x_1)+\dfrac{x_1}{x_2}(1+x_2)$.

86. Не вычисляя дискриминант уравнения $3x^2+7x+19=0$, покажите, что оно не имеет действительных корней.

87. Найдите такие значения p и q, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ равны $x_1=p,\ x_2=q$.

88. При каких p разность корней уравнения $x^2-(2p+1)x+p^2-1=0$ равна 5? Решите уравнение.

89. При каких значениях k разность корней уравнения $x^2-(3k-2)x+k^2+k=0$ будет равна 7? Решите уравнение для большего значения k.

90. Найдите все такие значения k, при которых корни уравнения $3x^2-(2k+3)x+k+7=0$ удовлетворяют условию $2x_1-3x_2=2$. Решите уравнение при большем значении k.

91. Чему равен свободный член q трехчлена $x^2-10x+q$, если сумма квадратов корней этого трехчлена равна 62?

92. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a^2-5a-2=0$ наибольшая? Найдите наибольшее значение этой суммы.

93. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2-(2a-3)x+2a^2-a+1=0$ наименьшая? Найдите наименьшее значение этой суммы.

94. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a^2-5a-2=0$ наибольшая? Найдите наибольшее значение этой суммы.

95. При каких действительных значениях p сумма кубов корней уравнения $x^2-px+p-7=0$ равна 17?

96. Найдите все значения a, при которых сумма квадратов корней уравнения $ax^2-3x-2=0$ больше 5.

97. Пусть α_1, α_2 – корни уравнения $x^2+7x-4=0$. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого будут числа α_1+5, α_2+5.

98. Пусть α_1, α_2 – корни уравнения $2x^2+12x+7=0$. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого будут числа $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1^2+\alpha_2^2$.

99. Корни многочлена $f(x)=x^3+3x^2-7x+1$ равны x_1, x_2, x_3. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$; б) $x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$;

в) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$; г) $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

100.Корни многочлена $f(x)=3x^3+5x^2-7x+4$ равны x_1, x_2, x_3. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$; б) $x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_1+x_1x_2x_3^2$;

в) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$; г) $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

101.Корни многочлена $f(x)=2x^3-7x^2+3x-8$ равны x_1, x_2, x_3. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$; б) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$;

в) $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}$; г) $x_1^3x_2x_3+x_1x_2^3x_3+x_1x_2x_3^3$.

102. Корни многочлена $f(x)=x^4+2x^3-3x^2+7x-5$ равны x_1, x_2, x_3, x_4. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$; б) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$;

в) $x_1^2x_2x_3x_4+x_1x_2^2x_3x_4+x_1x_2x_3^2x_4+x_1x_2x_3x_4^2$;

г) $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_1x_3}+\dfrac{1}{x_1x_4}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_2x_4}+\dfrac{1}{x_3x_4}$.

103. Корни многочлена $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-5x+4$ равны x_1, x_2, x_3, x_4. Найдите

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$; б) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$;

в) $x_1^2x_2x_3x_4+x_1x_2^2x_3x_4+x_1x_2x_3^2x_4+x_1x_2x_3x_4^2$;

г) $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_1x_3}+\dfrac{1}{x_1x_4}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_2x_4}+\dfrac{1}{x_3x_4}$.

104. Для многочлена $f(x)=x^5+3x^4-2x^3-5x+4$ найдите сумму величин, обратных корням, и сумму квадратов его корней.

105. Докажите, что не все корни многочлена $f(x)$ действительные числа, если

а) $f(x)=x^3+2x^2+4x-7$; б) $f(x)=x^3-5x^2+14x-3$;

в) $f(x)=x^3-4x^2+9x-11$; г) $f(x)=x^3+3x^2+5x+1$;

д) $x^3-6x^2+40x+10$.

106. При каком целом k один из корней уравнения $x^3-3x^2-10x+k=0$ в два раза больше другого? Решите уравнение при этом k.

107. При каком значении k сумма двух корней уравнения $x^3-9x^2+kx+24=0$ равна 5? Решите уравнение.

108. При каком значении b сумма двух корней уравнения $4x^3+8x^2-29x+b=0$ равна 2? Решите уравнение.

109. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни многочлена x^3-2x^2+ $+5x-1$. Составьте приведенный многочлен третьей степени, корнями которого будут числа $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \alpha_3+1$.

110. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни многочлена $x^3 - 2x^2 + {}$ $+3x - 5$. Составьте приведенный многочлен третьей степени, корнями которого будут числа $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3$.

111. Составьте приведенный многочлен третьей степени, корнями которого будут числа $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3$, если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни многочлена $2x^3 - 7x^2 + 6x - 12$.

112. При каких значениях m корни уравнения $x^3 - 9x^2 + 26x + m = 0$ образуют арифметическую прогрессию? Найдите все корни этого уравнения.

113. При каких значениях m корни уравнения $x^3 - 7x^2 - 42x + m = 0$ образуют геометрическую прогрессию? Найдите все корни этого уравнения.

114. При каких значениях a и b число $3 - \sqrt{2}$ является корнем многочлена $x^5 - 5x^4 + ax^2 + bx + 14$ с целыми коэффициентами. Найдите все корни этого многочлена.

115. Разложите на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней, многочлены

а) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$;

б) $f(x) = 2x^3 + 8x^2 + 13x + 10$;

в) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 5x + 6$;

г) $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 17x - 12$;

д) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

116. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x + y + z = 5, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{4}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$

117. Сократите дроби а) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 - 4x - 6}$;

б) $\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^3-5x^2+7x-2}$; в) $\dfrac{x^3-x^2-10x-8}{x^3-5x^2+2x+8}$;

г) $\dfrac{x^3-19x+30}{x^3+7x^2+2x-40}$; д) $\dfrac{x^5+2x^4-6x^3-8x^2+5x+6}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}$;

е) $\dfrac{x^5-2x^4-6x^3+8x^2+5x-6}{x^4+x^3-3x^2-x+2}$.

§8. Уравнения третьей и четвертой степеней

Вначале рассмотрим два частных случая для уравнения третьей степени.

1. Уравнение $x^3+ax=0$ $(a\neq 0)$. Вынесем за скобку общий множитель $x(x^2+a)=0$. Получим, что уравнение имеет один действительный корень $x_1=0$ и два комплексно сопряженных $x_{2,3}=\pm i\sqrt{a}$, если $a>0$, и три действительных корня $x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{-a}$, если $a<0$.

2. Уравнение $x^3+ax^2=0$. Это уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2}=0$ и $x_3=-a$.

Перейдем к рассмотрению произвольного кубического уравнения $a_0t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$ $(a_0\neq 0)$. Разделив все коэффициенты на a_0, получим приведенное кубическое уравнение $t^3+at^2+bt+c=0$.

Исключим слагаемое, содержащее квадрат переменной. Для этого сделаем замену $t=x-\dfrac{a}{3}$. Имеем

$$\left(x-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(x-\frac{a}{3}\right)+c=0,$$

$$x^3-\frac{3ax^2}{3}+\frac{3a^2x}{9}-\frac{a^3}{27}+ax^2-\frac{2a^2x}{3}+\frac{a^3}{9}+bx-\frac{ab}{3}+c=0,$$

$$x^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0.$$

Обозначим полученный коэффициент при неизвестной $b-\dfrac{a^2}{3}$ через p, а свободный член $\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$ через q. Тогда уравнение примет вид

$$x^3+px+q=0. \qquad (8.1)$$

Чтобы найти корни уравнения (8.1) введем вспомогательные неизвестные u и v, положив $x=u+v$. Подставив выражение для x через u и v в уравнение и раскрыв скобки, получим

$$u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0. \qquad (8.2)$$

Так как вместо одного неизвестного x уравнение содержит два u и v, то для их определения нужно задать некоторое условие, связывающее эти переменные. Зададим это условие так, чтобы выражение в первой скобке последнего слагаемого в уравнении (8.2) равнялось нулю: $3uv+p=0$.

При этом условии уравнение (8.2) сводится к системе двух уравнений $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$.

По теореме обратной теореме Виета неизвестные u^3 и v^3 являются корнями приведенного квадратного уравнения $z^2+qz-\dfrac{p^3}{27}=0$. Его корни $z_{1,2}=-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$. Тогда $u=\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$, $v=\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$.

Итак, решение кубического уравнения (8.1) находится по формуле

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (8.3)$$

Во множестве комплексных чисел каждый из кубических радикалов имеет три значения. Комбинируя любое значение u с любым значением v, получим девять сумм $u+v$, только три из которых будут корнями уравнения (8.2). Это те суммы $u+v$, для которых выполняется соотношение $3uv+p=0$. Обозначим через $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ один из корней третьей степени из 1. Если u_1 и v_1 подходящая пара значений u и v, то остальные пары определяются соотношениями $u_2 = \varepsilon u_1$, $v_2 = \varepsilon^2 v_1$ и $u_3 = \varepsilon^2 u_1$, $v_3 = \varepsilon v_1$. Так как $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) \end{cases}$.

Пример 50. Решите уравнение $x^3 - 9x + 28 = 0$.

<u>*Решение*</u>. Так как $p = -9, q - 28$, то

$u = \sqrt[3]{-14 + \sqrt{14^2 - 3^3}} = \sqrt[3]{-14+13} = \sqrt[3]{-1}$,

$v = \sqrt[3]{-14 - \sqrt{14^2 - 3^3}} = \sqrt[3]{-14-13} = \sqrt[3]{-27}$.

Так как $3uv = -p = 9$, то если $u_1 = -1$, то $v_1 = -3$.

Тогда $x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-27} = -1 - 3 = -4$,

$$x_2 = -\frac{u_1+v_1}{2} + i\frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3} = -\frac{-1-3}{2} + i\frac{-1+3}{2}\sqrt{3} = 2 + i\sqrt{3},$$

$$x_3 = -\frac{u_1+v_1}{2} - i\frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3} = -\frac{-1-3}{2} - i\frac{-1+3}{2}\sqrt{3} = 2 - i\sqrt{3}. \qquad \Diamond$$

Метод решения неполного кубического уравнения впервые был приведен в книге итальянского математика, физика и философа Джероламо Кардано[1] «Великое искусство», поэтому и формулу (8.3) для вычисления корней кубического уравнения называют ***формулой Кардано***. Справедливости ради необходимо отметить, что на несколько лет раньше этот метод решения неполного кубического уравнения применял итальянский математик Николо Тарталья[2].

Важную роль при исследовании числа решений кубического уравнения играет дискриминант $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$.

Если $\Delta = 0$, то кубическое уравнение имеет два действительных корня, один из которых имеет кратность 2.

Можно показать, что $x^3 + px + q = \left(x - \frac{3q}{p}\right)\left(x + \frac{3q}{2p}\right)^2$.

Если $\Delta > 0$, то уравнение (8.1) имеет один действительный корень и два комплексно сопряженных корня.

Если $\Delta < 0$, то вспомогательное квадратное уравнение действительных корней не имеет. Можно показать, что кубическое уравнение в этом случае имеет три различных действительных корня. Например, для уравнения

---

[1] Джироламо Кардано (1501-1576) – итальянский врач и математик. Кардано занимался экспериментальными исследованиями и конструированием различных механизмов. Кардано был любителем азартных игр. Его книга «Об азартных играх», содержала начала теории вероятности и комбинаторики. Кардано первым в Европе стал использовать отрицательные корни уравнений.

[2] Никколо Фонтана, псевдоним Тарталья (1500–1557) – итальянский математик. В 1535г. прославился на всю Италию блестящей победой на публичном математическом диспуте с учеником Кардано – Феррари. Темой соревнования был вопрос об общем способе решения уравнений 3-й степени. Свои исследования по арифметике, алгебре и геометрии Тарталья поместил в «Общем трактате о числе и мере».

$x^3 - x = 0$ дискриминант $\Delta = -\frac{4}{27}$ ($p = -1, q = 0$), но оно имеет три действительных корня $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$.

Недостаток формулы Кардано состоит в том, что даже рациональные корни уравнения приходится считать через радикалы. Например, для уравнения $x^3 - x - 6 = 0$ число $x = 2$ является корнем. Однако, дискриминант $\Delta = \frac{968}{27}$ и для вычисления корня получаем выражение

$x = \sqrt[3]{3 + 11\sqrt{6}/9} + \sqrt[3]{3 - 11\sqrt{6}/9}$.

Поэтому, если кубическое уравнение имеет рациональные корни, то их удобно искать способом, изложенным в §6.

Метод решения уравнения четвертой степени принадлежит ученику Кардано Лудовико Феррари[1] (1522-1565 г.г.).

Рассмотрим уравнение

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{8.4}$$

Перенесем три последних члена уравнения в правую часть и прибавим к обеим частям $\frac{a^2x^2}{4}$, чтобы получить в левой части полный квадрат

$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d$.

[1] Луиджи Феррари (1522–1565) – итальянский математик, ученик Кардано. К открытию общего способа решения уравнений 4-й степени Феррари был приведен решением задачи, предложенной любителем математики Джованно Колла: «Разделить число 10 на три числа так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, и произведение двух первых слагаемых равнялось 6».

Введем вспомогательное неизвестное y и снова преобразуем уравнение, чтобы получить в левой части полный квадрат. Для этого прибавим к обеим частям уравнения сумму $\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}$. Уравнение примет вид

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right) \tag{8.5}$$

Подберем вспомогательное неизвестное y так, чтобы и в правой части был полный квадрат. Это будет только тогда, когда дискриминант $\Delta=B^2-4AC=0$, где $A=\frac{a^2}{4}-b+y$, $B=\frac{ay}{2}-c$, $C=\frac{y^2}{4}-d$. Подставляя в равенство $B^2-4AC=0$ вместо A, B и C их выражения, получим уравнение $\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0$.

Если в этом уравнении раскрыть скобки и привести подобные, то получаем кубическое относительно y уравнение $y^3-by^2+(ac-4d)y-(a^2d-4bd+c^2)=0$.

Если y_0 – один из корней этого уравнения то, подставляя его в уравнение (8.5), превратим правую часть в полный квадрат $\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}\right)^2=\left(\sqrt{A}\,x+\sqrt{B}\right)^2$. Это уравнение распадается на два квадратных уравнения $x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=\sqrt{A}\,x+\sqrt{B}$ и $x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=-\sqrt{A}\,x-\sqrt{B}$.

Эти уравнения и дадут нам четыре корня исходного уравнения четвертой степени. Итак, по методу Феррари решение уравнения четвертой степени сводится к решению кубического уравнения и двух квадратных уравнений.

Итак, для решения уравнений третьей и четвертой степеней с буквенными коэффициентами существуют формулы, выражающие при помощи радикалов корни этих уравнений. Математики в этом случае говорят, что уравнение ***разрешимо в радикалах***.

Основные алгебраические операции над комплексными числами – это четыре арифметических действия, а также действия возведения в степень и извлечения корня. Поэтому вполне естественной является следующая задача, известная под названием проблема решения уравнения в радикалах: выразить корни алгебраического уравнения через его коэффициенты и некоторые рациональные числа при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Уравнения второй, третьей и четвертой степени решаются в радикалах. Вопрос о том, решаются ли в радикалах уравнения степени выше четвертой, долгое время оставался открытым. Вопросам о разрешимости уравнений в радикалах большое внимание уделял норвежский математик Хенрик Абель[1]. В 1824 году он опубликовал статью, в которой доказал невозможность решения в радикалах уравнения степени n при любом $n \geq 5$. Однако Абель не дал исчерпывающего ответа на поставленный вопрос. Он доказал, что универсальной формулы решения в радикалах, пригодной для всех уравнений данной степени n при $n \geq 5$

---

[1] Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) –норвежский математик. В 1822 он представил университету первую значительную научную работу, посвященную интегрируемости дифференциальных уравнений. Абель исследовал сходимость рядов и в теории рядов имя Абеля носят несколько важных теорем. В 2002 году, в честь юбилея Абеля, правительство Норвегии учредило абелевскую премию по математике.

не существует. Но из этого не следует, что конкретное уравнение нельзя решить с помощью радикалов, специально подобранных для данного уравнения.

Полностью вопрос об условиях, при которых данное уравнение разрешимо в радикалах был исследован французским математиком Эваристом Галуа[1]. Он показал, что разрешимость или неразрешимость уравнения в радикалах тесно связана с некоторыми свойствами так называемой группы уравнения. Оказалось, что для всякого $n \geq 5$ можно найти неразрешимое в радикалах уравнение степени n даже с целыми коэффициентами. Например, для $n = 5$ таким является уравнение $x^5 - 4x - 2 = 0$.

По формуле Кардано любое уравнение третьей степени разрешимо в радикалах второй и третьей степени. Поставим вопрос, для каких кубических уравнений существует решение, содержащее только квадратные корни? Ответ на этот вопрос дает теорема.

Теорема 8.1. *Уравнение третьей степени* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *с рациональными коэффициентами разрешимо в квадратных радикалах тогда и только тогда, когда оно имеет хотя бы один рациональный корень.*

В геометрии доказывается, что корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с рациональными коэффициентами мо-

[1] Эварист Галуа (1811 – 1832) –французский математик, основатель современной высшей алгебры. За 20 лет жизни Галуа успел сделать открытия, ставящие его на уровень крупнейших математиков XIX века. Он заложил основы современной алгебры, ввел такие понятия, как группа и поле. Галуа нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы корни уравнения допускали выражение через радикалы. Но наиболее ценным был даже не этот результат, а те методы, с помощью которых Галуа удалось его получить. Открытия Галуа положили начало новому направлению – теории абстрактных алгебраических структур.

гут быть построены с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда это уравнение разрешимо в квадратных радикалах, т.е. решение этого уравнения сводится к решению цепочки квадратных уравнений.

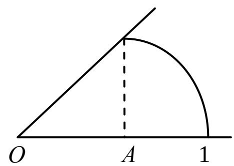
Приведем примеры нескольких известных задач на построение, при решении которых применяются кубические уравнения.

Задача об удвоении куба. *Построить куб, объем которого в два раза больше объема данного куба.*

По условию задачи дан отрезок $a = 1$ – ребро данного куба. Тогда длина ребра искомого куба x удовлетворяет уравнению $x^3 = 2$. Но это уравнение не имеет рациональных корней. Следовательно, ребро искомого куба нельзя построить с помощью циркуля и линейки.

Задача о трисекции угла. *Разделить данный угол на три равные части.*

Пусть из точки O проведены два луча, образующие угол φ. Проведем дугу окружности радиуса 1 и отложим на луче отрезок OA, такой, что его длина a равна $\cos\varphi$. Обратно, зная отрезок OA длины $\cos\varphi$, легко построить угол φ. Таким образом, задача о трисекции угла сводится к построению отрезка $x = \cos\dfrac{\varphi}{3}$. Используя действия с комплексными числами в тригонометрической форме, запишем



$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)^3 = \cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3} +$$

$+i\left(3\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}-\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)$. Откуда получим, что

$$\cos\varphi=\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}=\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)$$

или $4\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}-\cos\varphi=0$.

Так как $\cos\frac{\varphi}{3}=x$ и $\cos\varphi=a$, то получим кубическое уравнение $4x^3-3x-a=0$. Это уравнение не всегда разрешимо в квадратных радикалах. Например, при $\varphi=\frac{\pi}{3}$ уравнение принимает вид $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$. Оно не имеет рациональных корней. Следовательно, корни этого уравнения невозможно построить циркулем и линейкой.

Задача о построении правильного семиугольника. *Построить правильный семиугольник, вписанный в единичную окружность*.

Корни уравнения $z^7-1=0$ расположены в вершинах правильного семиугольника, вписанного в окружность радиуса 1. Один из корней этого уравнения равен 1, а остальные удовлетворяют уравнению шестой степени $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ (*) (пример 2а). Докажем, что уравнение (*) неразрешимо в квадратных радикалах. Данное уравнение является возвратным. Разделив обе части уравнения на z^2 и сгруппировав слагаемые, получим уравнение $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$. Полагая $t=z+\frac{1}{z}$, получим кубическое уравнение $t^3+t^2-2t-1=0$, которое не имеет рациональных корней, и, значит, уравнение (*) не разрешимо в квадратных радикалах. Следовательно, корни этого уравнения нельзя построить циркулем и линейкой. Поэтому правильный семиугольник невозможно построить циркулем и линейкой.

Ответ на вопрос, при каких n можно с помощью циркуля и линейки построить правильный n-угольник дал Гаусс. Он показал, что построение правильного n-угольника возможно только тогда, когда $n = 2^k p_1 p_2 \ldots p_m$, где $k \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – различные простые числа вида $2^s + 1$ $(s \in \mathbb{N})$.

§9. Разложение многочлена по степеням двучлена

Для многочлена $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ для любого числа a можно записать разложение по степеням $x - a$

$$f(x) = b_0 (x-a)^n + b_1 (x-a)^{n-1} + \ldots + b_{n-1}(x-a) + b_n. \quad (9.1)$$

Определим коэффициенты разложения. Для этого вычислим производные многочлена и подсчитаем их значения в точке a.

$$f'(x) = b_0 n (x-a)^{n-1} + \ldots + 2b_{n-2}(x-a) + b_{n-1},$$

$$f''(x) = b_0 n(n-1)(x-a)^{n-2} + \ldots + 3 \cdot 2 b_{n-3}(x-a) + 2b_{n-2},$$

$$f'''(x) = b_0 n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2 b_{n-3},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$f^{(n-1)}(x) = b_0 n(n-1)(n-2)\ldots 2(x-a) + b_1 (n-1)(n-2)\ldots 1,$$

$$f^{(n)}(x) = b_0 n(n-1)(n-2)\ldots 1.$$

$$f(a) = b_n, \cdots f'(a) = b_{n-1},\ \ f''(a) = 2! b_{n-2},\ \ f'''(a) = 3! b_{n-3}, \ldots,$$

$$f^{(n-1)}(a) = (n-1)! b_1,\ \ f^{(n)}(a) = n! b_0.$$

Из этих равенств выразим коэффициенты $b_0, b_1, ..., b_n$

$$b_n = f(a),\ b_{n-1} = \frac{f'(a)}{1!},\ b_{n-2} = \frac{f''(a)}{2!}\ ,...,\ b_1 = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

$b_0 = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ и подставим найденные значения коэффициентов в формулу (9.1). Получим

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + ... + \\ + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + f(a). \quad (9.2)$$

Коэффициенты разложения многочлена по степеням двучлена $x-a$ можно также получить с помощью деления многочлена на двучлен с остатком.

Разделим $f(x)$ на $x-a$. Остаток будет равен b_n, а неполное частное $q_1(x)$. Разделим $q_1(x)$ на $x-a$. Остаток будет равен b_{n-1}, а неполное частное $q_2(x)$. Разделим $q_2(x)$ на $x-a$. Остаток будет равен b_{n-2}, а неполное частное $q_3(x)$ и т. д. Подставляя последовательно значения частных в формулу деления с остатком, получим

$$f(x) = (...((b_0(x-a) + b_1)(x-a) + b_2)(x-a)... + b_{n-1}) + b_n .$$

Раскрыв в этом выражении скобки, получим равенство (9.1).

Пример 51. Разложите многочлен $2x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 5x - 14$ по степеням двучлена $x-2$.

<u>*Решение*</u>. Обозначим $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 5x - 14$.

Вычислим производные многочлена:

$$f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 5,\ f''(x) = 40x^3 - 60x^2 + 42x,$$

$$f'''(x) = 120x^2 - 120x + 42,\ f^{(4)}(x) = 240x - 120,\ f^{(5)}(x) = 240 .$$

Подсчитаем значение многочлена и его производных в точке 2:

$f(2)=16,\ \ f'(2)=79,\ \ f''(2)=84,\ \ f'''(2)=282,\ \ f^{(4)}(2)=360$, $f^{(5)}(2)=240$.

Подсчитаем значения коэффициентов:

$$b_0=\frac{f^{(5)}(2)}{5!}=\frac{240}{120}=2, b_1=\frac{f^{(4)}(2)}{4!}=\frac{360}{24}=15, b_2=\frac{f'''(2)}{3!}=\frac{282}{6}=$$

$$=47, b_3=\frac{P''(2)}{2!}=\frac{84}{2}=42, b_4=\frac{f'(2)}{1!}=79, b_5=f(2)=16.$$

Разложение $f(x)$ по степеням $x-2$ имеет вид: $f(x)=$ $=2(x-2)^5+15(x-2)^4+47(x-2)^3+82(x-2)^2+79(x-2)+16$.

Решим этот пример, вычислив коэффициенты разложения по схеме Горнера.

Разделим многочлен $f(x)$ на двучлен $x-2$ с остатком.

Составим таблицу.

	2	–5	7	0	–5	–14
2	2	2·2–5= = –1	2·(–1)+7= = 5	2·5+0= = 10	2·10–5= = 15	2·15–14= = 16
2	2	2·2–1= = 3	2·3+5= = 11	2·11+10 = = 32	2·32+15= = 79	
2	2	2·2+3= = 7	2·7+11= = 25	2·25+32 = = 82		
2	2	2·2+7= = 11	2·11+25= = 47			
2	2	2·2+11= = 15				

Итак, разложение $f(x)$ по степеням $x-2$ имеет вид: $f(x)=$ $=2(x-2)^5+15(x-2)^4+47(x-2)^3+82(x-2)^2+79(x-2)+16$. ◊

Пример 52. Найдите значение многочлена $f(x)=2x^5-5x^4+7x^3-5x-14$ в точке $c=2{,}1$.

Решение. 1способ. Если подставлять $c=2{,}1$ в исходное выражение, то вычисления будут громоздкими. Поэтому воспользуемся разложением, полученным в предыдущем примере. Имеем

$$P(2{,}1) = 2\cdot 0{,}1^5 + 15\cdot 0{,}1^4 + 47\cdot 0{,}1^3 + 82\cdot 0{,}1^2 + 79\cdot 0{,}1 + 16 =$$

$$= 0{,}00002 + 0{,}001 + 0{,}047 + 0{,}82 + 7{,}9 + 16 = 24{,}76852.$$

2 способ. Выполним деление $f(x)$ на $x-2{,}1$ по схеме Горнера.

	2	–5	7	0	–5	–14
2,1	2	2·2,1 – 5= – 0,8	2,1·(– 0,8) + 7 = = 5,32	2,1·5,32 + 0 = = 11,172	2,1·11,172 – 5 = 18,4612	2,1·18,4612 – 14 = 24,76852

По теореме Безу остаток $r = 24{,}76852$ равен значению многочлена $f(x)$ в точке $x = 2{,}1$. ◊

В математическом анализе формулу представления функции в виде многочлена называют ***формулой Тейлора***. Отметим, что если функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема, то ее можно представить приближенно с помощью формулы Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x), \qquad (9.3)$$

где через $r_n(x)$ обозначен остаточный член формулы.

Формулу Тейлора применяют для приближенного вычисления значений функции в окрестности точки a.

§10. Представление рациональной дроби в виде суммы простых дробей

Теория многочленов имеет многочисленные приложения в математическом анализе. Одним из важных приложений теории многочленов является представление рациональной дроби в виде суммы простых дробей.

§10. Представление рациональной дроби в виде суммы простых дробей

Дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$), числитель и знаменатель которой являются многочленами, называется ***рациональной***. Над рациональными дробями можно выполнять алгебраические операции, причем эти операции выполняются по тем же законам, что и операции над рациональными числами. Например, при сложении дробей их нужно сначала привести к общему знаменателю. Две дроби $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ и $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ называются ***равными***, если $f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$.

Если дроби $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ и $\frac{f_2(x)}{g(x)}$ с равными знаменателями равны, то равны и их числители.

Рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется ***правильной***, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе дроби. Если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе дроби, то дробь называется ***неправильной***. Заметим, что сумма, разность и произведение правильных дробей – правильная дробь.

Рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется ***несократимой***, если ее числитель и знаменатель не имеют общих делителей (взаимно-простые). Всякую рациональную дробь можно преобразовать, сократив числитель и знаменатель на общие делители многочленов, и получить равную ей несократимую дробь.

§10. Представление рациональной дроби в виде суммы простых дробей

Теорема 10.1. *Любую неправильную несократимую рациональную дробь можно представить и притом единственным образом в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби.*

Действительно, пусть дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ неправильная. Деля числитель на знаменатель с остатком, получим $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$, где $\deg(r(x))<\deg(g(x))$. Тогда $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)}=q(x)+\dfrac{r(x)}{g(x)}$.

Итак, получили, что дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ является суммой многочлена $q(x)$ и правильной дроби $\dfrac{r(x)}{g(x)}$. Можно показать, что такое представление дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ единственно.

Пример 53. Выделите целую часть дроби $\dfrac{x^5-3x^4+7x^2-11x+25}{x^3-2x^2+x-5}$.

Решение. Степень числителя равна 5, а степень знаменателя – 3. Следовательно, дробь является неправильной. Для выделения целой части разделим «уголком» числитель дроби на ее знаменатель.

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^5-3x^4 \qquad\quad +7x^2-11x+25 & x^3-2x^2+x-5 \\
\underline{x^5-2x^4+x^3-5x^2 \qquad\qquad\quad} & x^2-x-3 \\
-\; -x^4-x^3+12x^2-11x \qquad\; & \\
\underline{-x^4+2x^3-x^2\quad +5x \qquad\;} & \\
-\; -3x^3+13x^2-16x+25 & \\
\underline{-3x^3+6x^2\quad -3x\quad +15} & \\
7x^2-13x+10 &
\end{array}
$$
.

Итак, целая часть равна $x^2 - x - 3$ и дробь представима в виде $\dfrac{x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 11x + 25}{x^3 - 2x^2 + x - 5} = x^2 - x - 3 + \dfrac{7x^2 - 13x + 10}{x^3 - 2x^2 + x - 5}$. ◊

Рациональная дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется ***простой***, если ее знаменатель нельзя представить в виде произведения различных множителей.

Существует четыре типа простых дробей с действительными коэффициентами:

I) $\dfrac{A}{x-a}$, II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, III) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, IV) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$,

где квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней (то есть его дискриминант отрицателен).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 10.2. *Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы конечного числа простых дробей.*

Разложение дроби в сумму дробей, знаменатели которых содержат только линейные выражения или квадратные трехчлены, не имеющие действительных корней, называется ***разложением дроби на простые***.

Пусть дана правильная рациональная дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$ (если в знаменателе коэффициент при старшей степени отличен от 1, то вынесем этот коэффициент за скобки, и будем считать, что в знаменателе стоит приведенный многочлен).

Согласно теореме 7.5 любой многочлен степени $n \geq 1$ единственным образом разлагается в произведение линейных множителей и квадратных трехчленов с действительными коэффициентами, не имеющих действительных корней, то есть

$$g(x)=(x-a_1)^{k_1}...(x-a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_rx+q_r)^{l_r},$$

где $k_1+...+k_s+\dfrac{l_1+...+l_r}{2}=n$.

Если $x=a$ – простой корень многочлена $g(x)$, то в разложении $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ на простые дроби ему соответствует одна простая дробь первого типа $\dfrac{A}{x-a}$.

Если $x=a$ – корень кратности k $(k\geq 2)$ многочлена $g(x)$, то ему в разложении соответствует сумма k простых дробей первого и второго типов $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+$ $+...+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$.

Если множитель x^2+px+q в разложении $g(x)$ на множители имеет первую степень, то ему соответствует одна дробь третьего типа $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

Если множитель x^2+px+q имеет степень l $(l\geq 2)$, то ему в разложении дроби на простые соответствует сумма l простых дробей третьего и четвертого типов

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Пример 54. Представьте дробь $\dfrac{x^2-18x+5}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ в виде суммы простых дробей.

Решение. Данная дробь является правильной. Ее знаменатель разложен на линейные множители, причем все они имеют первую степень. Следовательно, заданная дробь представима в виде суммы трех простых дробей первого типа $\frac{x^2-18x+5}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$, где A, B, C – неизвестные коэффициенты. Приведем правую часть равенства к общему знаменателю $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x^2-x-6)+B(x^2-4x+3)}{(x-1)(x+2)(x-3)}+$ $+\frac{C(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$. Приравняв полученное выражение левой части, получим равенство

$$\frac{x^2-18x+5}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A(x^2-x-6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

Из равенства дробей с равными знаменателями следует равенство их числителей. Используя это условие, получаем

$$A(x^2-x-6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2+x-2)=x^2-18x+5.$$

Вычисление коэффициентов можно осуществить двумя способами. Один из них основан на понятии равенства многочленов в алгебраическом смысле, другой – на понятии равенства многочленов в функциональном смысле.

Воспользуемся определениями равенства многочленов в алгебраическом и функциональном смысле.

1) Применим понятие равенства многочленов в алгебраическом смысле. Раскроем скобки, соберем и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$(A+B+C)x^2+(-A-4B+C)x+(-6A+3B-2C)=x^2-18x+5.$$

Получим систему $\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-4B+C=-18 \\ -6A+3B-2C=5 \end{cases}.$

Ее решение $A=2,\ B=3,\ C=-4$.

2) Найдем коэффициенты другим способом, используя понятие равенства многочленов в функциональном смысле. Переменной x будем придавать значения, при которых часть слагаемых в левой части равенства обращается в ноль, и приравни-

вать значения многочленов, стоящих в правой и левой частях равенства.

Пусть $x=1$. Тогда $-6A+0B+0C=-12$, откуда $A=2$.
Пусть $x=-2$. Тогда $0A+15B+0C=45$, откуда $B=3$.
Пусть $x=3$. Тогда $0A+0B+10C=-40$, откуда $C=-4$.
Итак, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-18x+5}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x-3}.\ \Diamond$$

Пример 43. Представьте дробь $\dfrac{x^2-3x+8}{(x-1)^2(x+2)}$ в виде суммы простых дробей.

<u>Решение</u>. Данная дробь является правильной. Так как $x=1$ – корень знаменателя кратности 2, то в разложении дроби на простые ему будет соответствовать два слагаемых. $x=-2$ – простой корень знаменателя, поэтому разложении дроби на простые ему будет соответствовать одно слагаемое. Запишем разложение дроби на простые с неопределенными коэффициентами

$$\frac{x^2-3x+8}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\ .$$

Приведя правую часть равенства к общему знаменателю

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}+$$

$+\dfrac{C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$, получим равенство $\dfrac{x^2-3x+8}{(x-1)^2(x+2)}=$

$$=\frac{A(x^2+x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Из равенства дробей с равными знаменателями следует равенство их числителей. Используя это условие, получаем $A(x^2+x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1)=x^2-3x+8$.

Для вычисления коэффициентов воспользуемся определениями равенства многочленов в алгебраическом и функциональном смысле.

1) Применим понятие равенства многочленов в алгебраическом смысле. Раскроем скобки, соберем и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x: $(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)=x^2-3x+8$.

Получим систему $\begin{cases} A \qquad +C=1 \\ A+B-2C=-3 \\ -2A+2B+C=8 \end{cases}$.

Ее решение $A=-1,\ B=2,\ C=2$.

2) Найдем коэффициенты другим способом, используя понятие равенства многочленов в функциональном смысле. Переменной x будем придавать значения, при которых часть слагаемых в левой части равенства обращается в ноль, и приравнивать значения многочленов, стоящих в правой и левой частях равенства.

Пусть $x=1$. Тогда $0A+3B+0C=6$, откуда $B=2$.

Пусть $x=-2$. Тогда $0A+0B+9C=18$, откуда $C=2$.

Пусть $x=-1$. Тогда $-2A+B+4C=12$, откуда $A=-1$.

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-3x+8}{(x-1)^2(x+2)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{x+2}.$$

Пример 44. Представьте дробь $\dfrac{11x+7}{(x-3)(x^2+2x+5)}$ в виде суммы простых дробей.

Решение. Данная дробь является правильной. Так как $x=3$ – простой корень знаменателя, то в разложении заданной дроби на простые ему будет соответствовать одна дробь первого типа. Квадратный трехчлен x^2+2x+5 действительных корней не имеет, поэтому ему будет соответствовать дробь третьего типа. Запишем разложение дроби на простые с неопределенными коэффициентами

$$\frac{11x+7}{(x-3)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5} \ .$$

Приведя правую часть равенства к общему знаменателю $\frac{A}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5} = \frac{A(x^2+2x+5)+(Mx+N)(x-3)}{(x-3)(x^2+2x+5)}$, получим равенство

$$\frac{11x+7}{(x-3)(x^2+2x+5)} = \frac{A(x^2+2x+5)+(Mx+N)(x-3)}{(x-3)(x^2+2x+5)} .$$

Из равенства дробей с равными знаменателями следует равенство их числителей. Используя это условие, получаем уравнение

$$A(x^2+2x+5)+(Mx+N)(x-3) = 11x+7 .$$

Для вычисления коэффициентов воспользуемся определением равенства многочленов в алгебраическом смысле. Раскроем скобки, соберем и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x: $(A+M)x^2 + (2A-3M+N)x + (5A-3N) = 11x+7$.

Получим систему $\begin{cases} A+M = 0 \\ 2A-3M+N = 11 \\ 5A-3N = 7 \end{cases}$.

Ее решение $A=2,\ M=-2,\ N=1$.

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\frac{11x+7}{(x-3)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-3} + \frac{-2x+1}{x^2+2x+5} \ .$$

Пример 45. Дробь $\frac{4x^2-26x+10}{x^4-6x^3+10x^2}$ представьте в виде суммы простых дробей.

Решение. Заданная в условии задачи дробь является правильной. Разложим знаменатель на множители $x^4-6x^3+10x^2 = x^2(x^2-6x+10)$. $x=0$ – корень знаменателя кратности 2, в разложении дроби на простые ему будет соответствовать два слагаемых первого и второго типов. Квадратный трехчлен $x^2-6x+10$ действительных корней не имеет, поэтому ему будет соответствовать дробь третьего типа.

Запишем разложение дроби на простые с неопределенными коэффициентами

$$\frac{4x^2-26x+10}{x^4-6x^3+10x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2-6x+10}\ .$$

Приведя правую часть равенства к общему знаменателю

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2-6x+10}=\frac{Ax(x^2-6x+10)+B(x^2-6x+10)}{x^2(x^2-6x+10)}+$$

$+\dfrac{(Mx+N)x^2}{x^2(x^2-6x+10)}$, получим равенство $\dfrac{4x^2-26x+10}{x^4-6x^3+10x^2}=$

$$=\frac{Ax(x^2-6x+10)+B(x^2-6x+10)+(Mx+N)x^2}{x^2(x^2-6x+10)}\ .$$

Из равенства дробей с равными знаменателями следует равенство их числителей. Используя это условие, получаем уравнение $Ax(x^2-6x+10)+B(x^2-6x+10)+$ $+(Mx+N)x^2=4x^2-26x+10$.

Для вычисления коэффициентов воспользуемся определениями равенства многочленов в алгебраическом смысле. Раскроем скобки, соберем и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x: $(A+M)x^3+$ $+(-6A+B+N)x^2+(10A-6B)x+10B=4x^2-26x+10$.

Получим систему

$$\begin{cases} A+M=0 \\ -6A+B+N=4 \\ 10A-6B=-26 \\ 10B=10 \end{cases}.$$

Ее решение $A=-2,\ B=1,\ M=2,\ N=-9$.

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\frac{4x^2-26x+10}{x^4-6x^3+10x^2}=\frac{-2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2x-9}{x^2-6x+10}.$$

Пример 46. Дробь $\dfrac{x^4-5x^3+x^2+6x+2}{x^2-6x+8}$ представьте в виде суммы простых дробей.

<u>Решение.</u> Заданная в условии задачи дробь не является правильной. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4-5x^3+x^2+6x+2 & x^2-6x+8 \\
\underline{x^4-6x^3+8x^2} & x^2+x-1 \\
-\;x^3-7x^2+6x & \\
\underline{x^3-6x^2+8x} & \\
-\;-x^2-2x+2 & \\
\underline{-x^2+6x-8} & \\
-8x+10 &
\end{array}.$$

Итак, целая часть дроби равна x^2+x-1, числитель правильной дроби равен $-8x+10$.

Получили $\dfrac{x^4-5x^3+x^2+6x+2}{x^2-6x+8}=x^2+x-1+\dfrac{-8x+10}{x^2-6x+8}$.

Правильную дробь представим в виде суммы простых дробей. Разложим знаменатель на множители $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ и запишем разложение дроби с неопределенными коэффициентами $\dfrac{-8x+10}{x^2-6x+8}=\dfrac{A}{x-2}+$ $+\dfrac{B}{x-4}$. Приведя правую часть равенства к общему знаменателю $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-4}=\dfrac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$, получим равенство $\dfrac{-8x+10}{x^2-6x+8}=\dfrac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$. Из равенства дробей с равными знаменателями следует равенство их числителей. Используя это условие, получаем равенство $-8x+10=A(x-4)+B(x-2)$.

Для вычисления коэффициентов воспользуемся определением равенства многочленов в функциональном смысле.

Пусть $x=2$. Тогда $-2A+0B=-6$, откуда $A=3$.

Пусть $x=4$. Тогда $0A+2B=-22$, откуда $B=-11$.

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^4-5x^3+x^2+6x+2}{x^2-6x+8}=x^2+x-1+\frac{3}{x-2}-\frac{11}{x-4}.$$

Рассмотрим правильную рациональную дробь, знаменатель которой раскладывается в произведение линейных множителей $\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}$, где все $a_1, a_2, ..., a_n$ различны. Для вычисления коэффициентов разложения такой дроби в сумму простых дробей существует интересная формула. Пусть разложение имеет вид

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Умножим это равенство на знаменатель:

$$P(x)(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)=A_1(x-a_2)...(x-a_n)+$$
$$+A_2(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_n)+...+A_n(x-a_1)...(x-a_{n-1}).$$

Применим определение равенства многочленов в функциональном смысле. Полагая последовательно $x=a_1$, $x=a_2$, …, $x=a_n$, получим

$$\begin{array}{l} P(a_1)=A_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n) \\ P(a_2)=A_2(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_n) \\ \quad ... \quad ... \quad ... \\ P(a_n)=A_n(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1}) \end{array} \qquad (*)$$

Множители в правой части равенств отличны от нуля и выражаются через производную многочлена

$G(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, стоящего в знаменателе дроби. Действительно,

$$G'(x)=(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)+(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_n)+$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1})$$. Из этой формулы следует, что

$$\begin{aligned} G'(a_1)&=(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)\\ G'(a_2)&=(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_n)\\ &...\quad ...\quad ...\\ G'(a_n)&=(a_n-a_1)(a_n-a_2)...(a_n-a_{n-1}) \end{aligned} \qquad (**)$$

Подставляя (**) в (*), находим значения коэффициентов

$$A_1=\frac{P(a_1)}{G'(a_1)},\quad A_2=\frac{P(a_2)}{G'(a_2)},...,A_n=\frac{P(a_n)}{G'(a_n)}$$

Для разложения дроби на простые получаем формулу

$$\frac{P(x)}{G(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{G'(a_k)(x-a_k)}.$$

Эта формула называется ***формулой Лагранжа***.

Пример 47. Дробь $\frac{x^3+x^2-2x+5}{x^4-10x^2+9}$ представьте в виде суммы простых дробей.

Решение. Обозначим знаменатель дроби через $G(x)$, разложим на множители, решив биквадратное уравнение $x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, и вычислим его производную $G'(x)=4x^3-20x$. Применим формулу Лагранжа

$$\frac{P(x)}{G(x)}=\frac{P(1)}{G'(1)(x-1)}+\frac{P(-1)}{G'(-1)(x+1)}+\frac{P(3)}{G'(3)(x-3)}+$$
$$+\frac{P(-3)}{G'(3)(x+3)}.$$

Вычислим значения каждого слагаемого:

$$\frac{P(1)}{G'(1)(x-1)}=\frac{5}{-16(x-1)},\quad \frac{P(-1)}{G'(-1)(x+1)}=\frac{7}{16(x+1)},$$

$$\frac{P(3)}{G'(3)(x-3)}=\frac{35}{48(x-3)},\quad \frac{P(-3)}{G'(-3)(x+3)}=\frac{-7}{-48(x+3)}.$$

Искомое разложение дроби на простые имеет вид

$$\frac{P(x)}{G(x)}=-\frac{5}{16(x-1)}+\frac{7}{16(x+1)}+\frac{35}{48(x-3)}+\frac{7}{48(x+3)}.$$

Упражнения

118. Разложите на простые следующие дроби

а) $\dfrac{8x+1}{(x-3)(x+2)}$; б) $\dfrac{5x+10}{(x+3)(x-2)}$;

в) $\dfrac{55}{2x^2+5x-12}$; г) $\dfrac{3x-7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

д) $\dfrac{2x^2+5x-17}{(x+3)(x+1)(x-4)}$; е) $\dfrac{3x^2+13x+40}{(x+3)(x+1)(x-4)}$.

119. Разложите на простые следующие дроби

а) $\dfrac{4x+3}{x^3+3x^2}$; б) $\dfrac{2x^2+3x+4}{(x+2)^2(x-1)}$; в) $\dfrac{13-3x}{(x-2)^2(x+1)}$;

г) $\dfrac{5x-18}{x(x-3)^2}$; д) $\dfrac{x^3+2x^2-10x-11}{(x-1)^2(x+2)^2}$; е) $\dfrac{4x^2-2x-3}{x^4-3x^3}$.

120. Разложите на простые следующие дроби

а) $\dfrac{7x-5}{x^3-4x^2+5x}$; б) $\dfrac{x^2-4}{(x^2-x+3)(x-1)}$;

в) $\dfrac{13x-10}{(x+2)(x^2-3x+8)}$; г) $\dfrac{x^2-4x-8}{(x+1)(x^2+5x+7)}$;

д) $\dfrac{x^2-11x+28}{x^3-5x^2+13x-9}$; е) $\dfrac{x^2+2x+12}{x^3-2x-4}$.

121. Разложите на простые следующие дроби

а) $\dfrac{x^3+2x^2-4x-13}{x^2-x-6}$; б) $\dfrac{x^4-x^3-10x^2+26x-26}{x^3+x^2-10x+8}$.

§11. Интерполяционные формулы

Пусть многочлен $f(x)$, степень которого не больше n, задан таблично, причем известны его значения $f(\alpha_i)$ ($i=0,1,...,n$) в $(n+1)$ точке. Согласно следствию 3.5 два многочлена, степени которых не превосходят n, и значения которых совпадают в $(n+1)$ точке, равны. Следовательно, если существует многочлен, принимающий в данных точках заданные значения, то он единственный. Таким является многочлен

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(\alpha_i)(x-\alpha_0)...(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})...(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_0)...(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})...(\alpha_i-\alpha_n)}.$$

(11.1)

Итак, существует единственный многочлен степени меньше или равной n, который при заданных $(n+1)$ значениях переменной $\alpha_0, \alpha_1,...,\alpha_n$ принимает заданные значения $f(\alpha_0), f(\alpha_1),..., f(\alpha_n)$. Этот многочлен задается формулой (11.1). Формула (11.1) называется ***интерполяционной формулой Лагранжа***.

Многочлен, удовлетворяющий заданным условиям, можно получить также с помощью ***интерполяционной формулой Ньютона***.

$$\begin{aligned}f(x)&=\lambda_0+\lambda_1(x-\alpha_0)+\lambda_2(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)+...+\\&+\lambda_{n+1}(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)...(x-\alpha_n),\end{aligned} \qquad (11.2)$$

где коэффициенты $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_{n+1}$ определяются последовательно при подстановке значений аргумента в формулу (11.2).

Положим $x=\alpha_0$, получим $\lambda_0=f(\alpha_0)$.

Вычтем полученное значение коэффициента из (11.2) и разделим на $x-\alpha_0$:

$$\frac{f(x)-f(\alpha_0)}{x-\alpha_0}=\lambda_1+\lambda_2(x-\alpha_1)+\lambda_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+$$
$$+\ldots+\lambda_{n+1}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$
(11.3)

Обозначим левую часть через $f(\alpha_0,x)$. Тогда при $x=\alpha_1$ получим $\lambda_1=f(\alpha_0,\alpha_1)$.

Далее имеем $\dfrac{f(\alpha_0,x)-f(\alpha_0,\alpha_1)}{x-\alpha_1}=\lambda_2+\lambda_3(x-\alpha_2)+$
$+\ldots+\lambda_{n+1}(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$

Обозначим левую часть через $f(\alpha_0,\alpha_1,x)$. Тогда при $x=\alpha_2$ получим

$$\lambda_2=f(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2). \tag{11.4}$$

Эти вычисления можно продолжить. Обозначим $f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{k-1},x)=\dfrac{f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{k-2},x)-f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1})}{x-\alpha_{k-1}}$.

Тогда при $x=\alpha_k$ из $f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{k-1},x)=\lambda_k+\lambda_{k+1}(x-\alpha_k)+$
$+\ldots+\lambda_{n+1}(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)$. получим

$$\lambda_k=f(\alpha_0,\ldots,\alpha_k). \tag{11.5}$$

Константу $f(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$ называют k-тым разностным отношением функции $f(x)$ в точках $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$.

Итак, имеем последовательность разностных отношений

$$
\begin{aligned}
&f(\alpha_0,\alpha_1)=\frac{f(\alpha_1)-f(\alpha_0)}{\alpha_1-\alpha_0},\\
&f(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=\frac{f(\alpha_0,\alpha_2)-f(\alpha_0,\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1},\\
&\quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\
&f(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)=\frac{f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-2},\alpha_n)-f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-2},\alpha_{n-1})}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}.
\end{aligned}
\qquad (11.
$$

6)

Таким образом, интерполяционный многочлен Ньютона имеет вид

$$
\begin{aligned}
&f(x)=f(\alpha_0)+f(\alpha_0,\alpha_1)(x-\alpha_0)+\\
&+f(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+\ldots+\\
&+f(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n).
\end{aligned}
\qquad (11.7)
$$

Ответы.

2. $2x^7+8x^6+4x^5+3x^4+9x^3+5x^2+6x+7$; **4б.** 3; **9а.** –2; 0; **10б.** 37; **11б.** $a=-3, b=2, c=4, d=-5$; **12а.** $a=-5, b=-3, c=-1, d=19$; **12в.** $a=-1,\ b=3,\ c=4, d=24,\ e=-24$; **14а.** x^3+3x^2-10;

17. x=1 **18.** x=1, x=–2 19. $1-\sqrt{2}, -2, \pm 1$

18а. x^3-3x^2+x+2; **18д.** x^2-x-4; **19а.** $Q=3x^2+6x+12$, $R=23x^2-7x-3$; **19г.** $Q=3x+1$, $R=14x^2-2x-2$; **19д.** $Q=x-1$, $R=6x-4$; **19е.** $Q=0$, $R=x^2+3x+1$; **21а.** 74; **22.** 147; **26.** $-3x-5$; 0; **29.** 5,75; **32.** $a=2, b=-1$; **37а.** $Q=x^3-7x^2+4x-9, R=38$; **37в.** $Q=x^3+2x^2-11x-12, R=26$; **37д.** $Q=x^4-2x^3+$ $+4x^2-11x+15$, $R=-28$; **38а.** $Q=x^2+x+2, R=-16x+3$; **39.** 3; **41.** 4; **44.** $c=-50, c=-54$; **45.** $a=31, b=44$; **46б.** $(x-3)^2(x+5)$; **46д**. $(x+1)(x-2)(x+2)(x-4)$; **47б.** $(x-2)^2(x^2+x-3)$; **47в**. $(x-2)(x+2)(x^2-3x-2)$; **47д**. $(x+2)(x-4)(x^2-x-1)$; **48б**. $(x+2)(3x-1)(x^2+3)$; **48в**. $(2x+1)^2(3x+1)$; **50а.** $x_1^2+x_2^2=\frac{274}{9}, x_1^3+x_2^3=\frac{3032}{27}$; **53г.** 238; **53е.** 1471; **54г.** $-\frac{406}{27}$; **54д.** $-\frac{55}{27}$; **54е.** $-\frac{55}{3}$; **58.** $k=5,\ x_1=10, x_2=3$; $k=-1{,}8$; **60.** 19; **62.** $x^2-3x-14$; **63.** $x^2-23x-174$; **64а.** 23; **64б.** 3; **64в.** 43; **64г.** – 93; **65а.** $\frac{67}{9}$; **65б.** $\frac{20}{9}$; **65в.** 1; **65г.** $-\frac{548}{27}$; **69.** $k=24,\ x_1=2$; $x_2=4$; $x_3=-3$; **71.** $b=12$, $x_1=0{,}5$; $x_2=1{,}5$; $x_3=-4$; **72.** $x^3-5x^2+12x-7$; **73.** x^3-4x^2+7x-1; **75.** $m=-24$,

$x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=4$; **76.** $m=216$, $x_1=4$; $x_2=-6$; $x_3=9$;

77в. $(x+1)(x+2)(x^2-2x+3)$; **77д.** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

78б. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+1}$; **78г.** $\dfrac{x-3}{x+4}$; **78д.** $\dfrac{(x+1)^2(x+3)}{x^2+1}$;

78е. $x-3$; **79а.** $\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{3}{x-2}$; **79г.** $\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$;

79е. $\dfrac{2}{x+3}+$ $+\dfrac{4}{x-4}-\dfrac{3}{x+1}$; **80а.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x+3}$;

80г. $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}-$ $-\dfrac{2}{x}$; **80д.** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$;

80е. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+$ $+\dfrac{1}{x^3}$; **81а.** $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+3}{x^2-4x+5}$;

81в. $-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2x+3}{x^2-3x+8}$; **81д.** $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2x+1}{x^2-4x+9}$;

81е. $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+4}{x^2+2x+2}$; **82а.** $x+$ $+3+\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x+2}$;

82б. $x-2+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+4}$.

Литература

1. А. М. Абрамов, Н.Я.Виленкин, Г.В.Дорофеев. Избранные вопросы математики. М., Просвещение, 1980.

2. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. М., Наука, 1976.

3. Э. Б. Винберг. Алгебра многочленов. М., Просвещение, 1980.

4. С.Я. Гриншпон, И.Э. Гриншпон Элементы теории многочленов. Учебное пособие для физ-мат. классов, Томск, ТОИПКРО, 1995.

5. С.Я. Гриншпон, И.Э.Гриншпон, В.П. Колмакова. Многочлены от одной переменной. Учебное пособие. Томск, ТОИПКРО, 2005.

6. А. И. Кострикин. Введение в алгебру. М., Наука, 1977.

7. Сборник задач по алгебре. Под редакцией А. И. Кострикина. М., Наука, 1987.

8. Л. Я. Куликов. Алгебра и теория чисел. М., Высшая школа, 1979.

9. Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М., Просвещение, 1993.

10. С. В. Ларин. Многочлены. Красноярск, 2007.

11. Л. Я. Окунев. Высшая алгебра. М., Просвещение, 1966.

12. М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. Алгебра и анализ элементарных функций. М., Наука. 1980.

13. В.В.Прасолов. Многочлены. М., МЦНМО, 1999.

14. Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре. М., Наука, 1984.

15. W.S. Burnside, A.W. Panton. The theory of equations. Dublin Univ. Press. 1928.

14. P.J. Cahen, J.L. Chabert. Integer-valued polynomials. AMS, 1997.

Оглавление

Учебное издание

Гриншпон Ирина Эдуардовна
Гриншпон Самуил Яковлевич

**МНОГОЧЛЕНЫ ОТ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Учебное пособие

Компьютерная верстка И.Э. Гриншпон