

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО «Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники»
Кафедра комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем
(КИБЭВС)

Д.В. Кручинин, Л.Д. Сеитбекова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Часть I)

Учебно-методическое пособие

В-Спектр
Томск, 2017

УДК 517.1, 517.2

Кручинин Д.В, Сеитбекова Л.Д. Сборник задач по курсу дифференциального исчисления.
Ч. 1: учебно-методическое пособие. – Томск: В-Спектр, 2017. – 46 с.

Данное учебно-методическое пособие создано к тренажерам по высшей математике для студентов первого курса высших технических учебных заведений. В задачнике каждое задание это пример к соответствующему тренажеру. В учебно-методическом пособии приведены задачи по школьной программе, теории пределов и дифференциальному исчислению. Приведены задачи для самостоятельного решения.

СОДЕРЖАНИЕ

I	ШКОЛЬНАЯ ПРОГРАММА	7
	§ 1. Упрощение числовых дробей	7
	§ 2. Квадратные уравнения	7
	§ 3. Тригонометрия	7
	§ 4. Графики	7
	§ 5. Геометрия	8
	§ 6. Упрощение выражений	8
	§ 7. Логарифмы	8
	§ 8. Тригонометрические уравнения	8
	§ 9. Квадратное показательное уравнение	8
	§ 10. Дополнительные задания	9
II	ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ	10
	§ 1. Деление многочленов без остатков	10
	§ 2. Кубические уравнения остатков	10
	§ 3. Деление многочленов с остатком	10
	§ 4. Система уравнений	10
	§ 5. Неравенства	10
	§ 6. Область определения функции	10
	§ 7. Факториалы	10
	§ 8. Дополнительные задания	11
III	ПОНЯТИЯ МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИЯ. ПОДСТАНОВКИ ФУНКЦИЙ	12
	§ 1. Подстановка значений	12
	§ 2. Уравнения	12
	§ 3. Функции	12
	§ 4. Написать в явном виде функции	12
	§ 5. Найти область определения	13
	§ 6. Дополнительные задания	13
IV	ПОНЯТИЯ МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИЯ. ПОДСТАНОВКИ ФУНКЦИЙ	14
	§ 1. Интервалы знакопостоянства	14
	§ 2. Тест на четность	14
	§ 3. Тест на периодичность	14
	§ 4. Наибольшее и наименьшее значение функции	14
	§ 5. Задачи	14
	§ 6. Обратные функции	15
	§ 7. Показательная функция. Сопоставление графиков	15
	§ 8. Логарифмическая функция. Сопоставление графиков	16
	§ 9. Исследование тригонометрической функции	17
	§ 10. Обратные тригонометрические функции. Сопоставление графиков	17
	§ 11. Физическая задача	18
	§ 12. Дополнительные задания	18
V	ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	19
	§ 1. Общий элемент	19

§ 2. Предел простой	19
§ 3. Предел с корнем	19
§ 4. Предел с факториалом.....	19
§ 5. Предел с прогрессией	19
§ 6. Предел с показательной	19
§ 7. Дополнительные задания.....	20
VI ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.....	21
§ 1. Предел функции. Подставить.....	21
§ 2. Простой предел $0/0$	21
§ 3. Простой предел $\infty - \infty$	21
§ 4. Простой предел ∞/∞	21
§ 5. Дополнительные задания.....	21
VII ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.....	22
§ 1. Простой предел ∞/∞	22
§ 2. Предел с корнем ∞/∞	22
§ 3. Умножение на сопряженное $0/0$	22
§ 4. Умножение на сопряженное $\infty - \infty$	22
§ 5. Показательная	22
§ 6. Дополнительные задания.....	22
VIII ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ	23
§ 1. Простой 1-й замечательный.....	23
§ 2. 1-ый замечательный предел (косинус)	23
§ 3. 1-ый замечательный предел $\infty - \infty$	23
§ 4. 1-ый замечательный предел $x_0 \neq 0$	23
§ 5. 1-ый замечательный предел (сложный).....	23
§ 6. Дополнительные задания.....	24
IX ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ	25
§ 1. 2-ой замечательный предел (простой).....	25
§ 2. 2-ой замечательный предел (степени).....	25
§ 3. 2-ой замечательный предел (сложный).....	25
§ 4. 2-ой замечательный предел (обманка)	25
§ 5. 2-ой замечательный предел (с функциями).....	25
§ 6. 2-ой замечательный предел (следствие лог.)	25
§ 7. Дополнительные задания.....	26
X ПРОИЗВОДНАЯ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ	27
§ 1. Производная по определению	27
§ 2. Отношение приращений	27
§ 3. Предел по определению	27
§ 4. Производная простая	27
§ 5. Производная простая (дробь)	27
§ 6. Производная простая (корни).....	27
§ 7. Производная простая (умножение)	27
§ 8. Производная простая (деление).....	27

§ 9. Производная простая (физика)	28
§ 10. Дополнительные задания	28
XI СЛОЖНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	29
§ 1. Сложная функция (простая)	29
§ 2. Сложная функция (корень)	29
§ 3. Производная (задача на скорость)	29
§ 4. Производная (тригонометрия)	29
§ 5. Дополнительные задания	30
XII ОБРАТНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ, ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬ- НЫЕ ФУНКЦИИ	31
§ 1. Обратные тригонометрические функции	31
§ 2. Логарифмические функции	31
§ 3. Показательные функции	31
§ 4. Дополнительные задания	31
XIII РАЗНЫЕ ФУНКЦИИ	32
§ 1. Продифференцировать функцию	32
§ 2. Дополнительные задания	32
XIV ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ	33
§ 1. Логарифмическое дифференцирование (простое)	33
§ 2. Логарифмическое дифференцирование (тригонометрия)	33
§ 3. Логарифмическое дифференцирование (дробь)	33
§ 4. Логарифмическое дифференцирование (дробь)	33
§ 5. Логарифмическое дифференцирование ($\partial y/\partial x$)	33
§ 6. Логарифмическое дифференцирование (неявная функция)	33
§ 7. Дополнительные задания	33
XV ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ	34
§ 1. Производная параметрически заданной функции	34
§ 2. Задачи на производную	34
§ 3. Дополнительные задания	35
XVI ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	36
§ 1. Найти производную	36
§ 2. Дополнительные задания	36
XVII ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ	37
§ 1. Приращение функции	37
§ 2. Дифференциал функции	37
§ 3. Дополнительные задания	37
XVIII ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ...	38
§ 1. Приближенное значение приращения	38
§ 2. Дифференциал высших порядков	38
§ 3. Дополнительные задания	38
XIX ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВОДНУЮ	40
§ 1. Дополнительные задания	41
XX ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ	43

§ 1. Приближенное значение функции	43
§ 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции	43
§ 3. Дополнительные задания.....	43
XXI ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ И АСИМПТОТЫ	45
§ 1. Найти предел.....	45
§ 2. Асимптота функции	45
§ 3. Дополнительные задания.....	45

I ШКОЛЬНАЯ ПРОГРАММА

§ 1. Упрощение числовых дробей

1. Вычислить значение выражения $\frac{21}{36} : 1\frac{1}{6} + \left(24 - \frac{2}{81}\right) : 20\frac{104}{189} - 1\frac{1}{2}$.

§ 2. Квадратные уравнения

2. Найти дискриминант квадратного уравнения $7x^2 + 7x - 84 = 0$.
 3. Найти корни квадратного уравнения $3x^2 - 12x - 15 = 0$.
 4. Разложить на множители квадратный трехчлен $6x^2 - 18x + 12 = 0$.

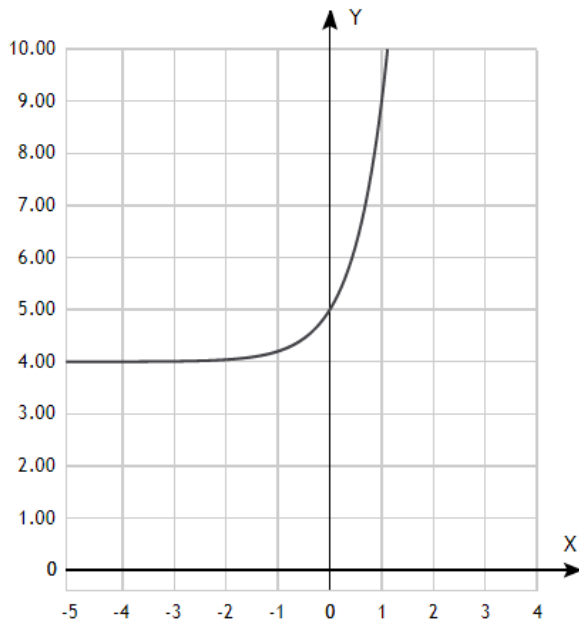
§ 3. Тригонометрия

5. Перевести угол 90° в радианы. Найти значение выражения $\sin(90^\circ)$.
 6. Найти значение выражения $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
 7. Вычислить значение $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
 8. Найти значение выражения $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$. Выделить целую часть аргумента тригонометрической функции (например, $\sin(x)$ в виде $\sin(a + \pi n)$, $n \in \mathbb{R}$).

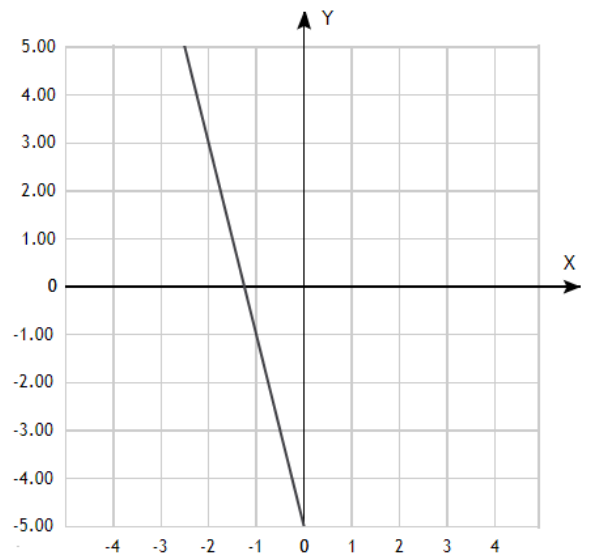
§ 4. Графики

9. Сопоставить функции и графики:

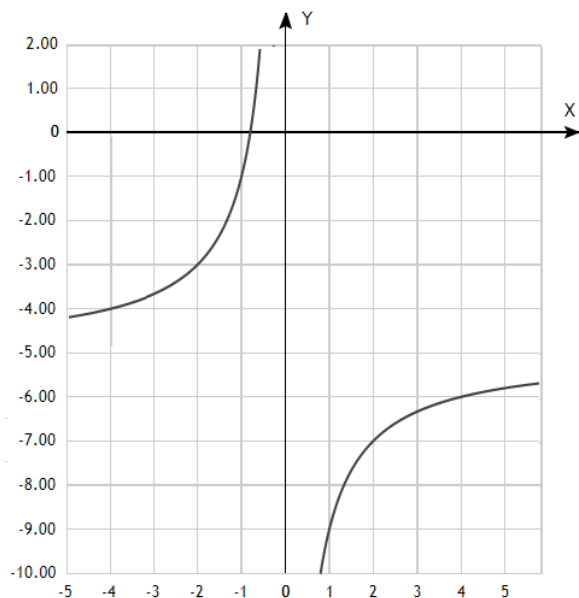
1) $y = -4x - 5$; 2) $y = \sqrt{3 \cdot x - 5} - 5$; 3) $y = 5^x + 4$; 4) $y = -\frac{4}{x} - 5$



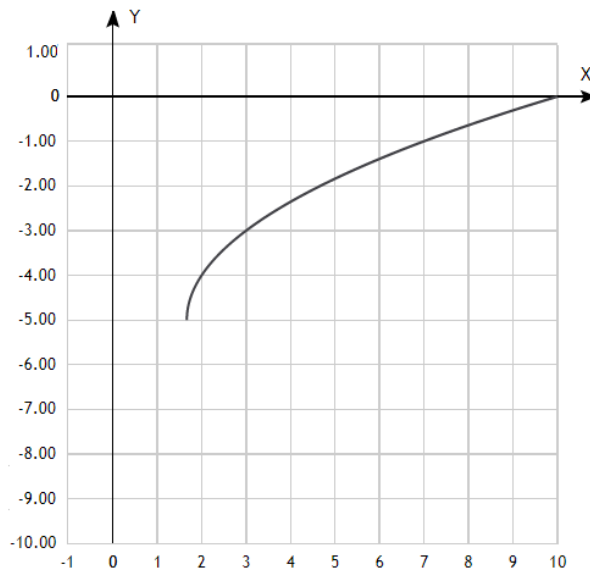
а)



б)



в)



г)

§ 5. Геометрия

10. У треугольника ABC сторона $AB = 9$, $AC = 2$, угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$, найти сторону BC и площадь треугольника.

§ 6. Упрощение выражений

11. Упростить выражение $\left(\frac{a-6}{a^2+6a}\right) : \left(-\frac{a^2+36}{a^3-36a} - \frac{1}{a^2+6a} + \frac{a}{a^2-6a}\right)$

§ 7. Логарифмы

12. Дан логарифм $\log_{0.125} 32$. Представить подлогарифмическое выражение и основание логарифма в виде чисел a^n , где $n \in \mathbb{Z}$. Вычислить значение логарифма.

13. Найти значение выражения $8^{3 \log_8 2} - 2 \log_8 3$.

14. Вычислить значение выражения $e^{3 \ln 4} + 4 \ln 3$.

15. Вычислить значение выражения $\frac{\log_{0.6} 16}{\log_{0.6} 64}$.

§ 8. Тригонометрические уравнения

16. Решить уравнение $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(x-8)}{4} \right) = \sqrt{3}$.

§ 9. Квадратное показательное уравнение

17. Найти корни уравнения $9^x - 28 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$.

§ 10. Дополнительные задания

Упростить выражения 18 -23

$$18. \frac{\sqrt{21 + 8\sqrt{5}} \cdot \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{4 + \sqrt{5}}.$$

$$19. \frac{3\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}} + 8\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}} + 6\sqrt[3]{125}}.$$

$$20. 5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}.$$

$$21. \frac{\frac{2a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{a-b}}{1 + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}} \cdot \frac{2b}{(a+b)\sqrt{a+b} - (a-b)\sqrt{a-b}}.$$

$$22. \frac{\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$$

$$23. \left(\frac{a-b}{a+b + \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2}} + \frac{2(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (a+b - \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2})} \right) \cdot \frac{a-b}{a+b}.$$

$$24. \text{Вычислить } 1 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) + \dots$$

Решить уравнения 25 - 30:

$$25. \sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7.$$

$$26. \sqrt{3x^2 - 6x + 7} + x^2 = 2x + 7.$$

$$27. \sqrt{x\sqrt{x^2 - 24}} + 1 + 1 = x.$$

$$28. \log_3(3^x - 2) = 1 - x.$$

$$29. \log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3^{-x})}.$$

$$30. \log_{2x+7}(2\sqrt{2x+7} - 2x + 5) = 0.5.$$

II ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

§ 1. Деление многочленов без остатков

Поделить многочлен на многочлен 2 - 3:

1. $\frac{5x^2 + 11x - 12}{x + 3}$.
2. $\frac{4x^3 + 97x^2 + 355x + 300}{x + 3}$.

§ 2. Кубические уравнения

3. Найти корни кубического уравнения $7x^3 - 38x^2 + 43x - 12 = 0$.

§ 3. Деление многочленов с остатком

Поделите многочлен на многочлен 4-6:

4. $\frac{4x^3 - 2x^2 - 16x + 8}{x^2 + 2}$.
5. $\frac{-x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 3x}$.
6. $\frac{-4x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 1}{x^4 - x^3 - x^2}$.

§ 4. Система уравнений

Решить систему уравнений 7 - 8:

7.

$$\begin{cases} 4x - 7y = 66, \\ 2y + 9x = 42. \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -29, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 8x_1 + 9x_2 - 10x_3 = -15. \end{cases}$$

§ 5. Неравенства

9. Решить неравенство $-1 < 3 \cdot (5 - 2x) < 2$.

§ 6. Область определения функции

10. Найти область определения функции $y = \sqrt{-6x^3 - 9x^2 + 5x - 2}$

§ 7. Факториалы

11. Найти значение выражения $\frac{8! - 6!}{165}$.
12. Упростить выражение $\frac{4n! + 5(n+2)!}{(n-1)!}$.

§ 8. Дополнительные задания

13. Найти сумму действительных корней уравнения $x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.

14. Найти произведение действительных корней уравнения $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$.

15. Найти сумму действительных корней уравнения $(x - 1)^3 = x(x + 2)^2 - 9$.

Решить систему уравнений уравнений 16 - 21:

16.

$$\begin{cases} x + xy^3 = 9, \\ xy + xy^2 = 6. \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} xy - \frac{x^3}{y} = -24, \\ xy - \frac{y^3}{x} = 6. \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 5, \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 15. \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 51, \\ 3x_1 - 26x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 141, \\ -5x_1 + 47x_2 - 15x_3 + 5x_4 = -225, \\ 6x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -49. \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решить неравенство 22 - 24:

22. $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} < \frac{5}{x}$.

23. $\frac{35x}{-6x^2 + 10x + 4} \geq \frac{x + 2}{3x + 1} - \frac{3x - 1}{x - 2}$.

24. $\frac{6x^2 - x - 18}{3x^2 - 12} + \frac{5 - 2x}{2 - x} \geq \frac{1}{x - 2} + 5$.

25. Вычислить $\frac{5! - 5!!}{7}$.

III ПОНЯТИЯ МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИЯ. ПОДСТАНОВКИ ФУНКЦИЙ

§ 1. Подстановка значений

1. Дана функция $\frac{-2x-4}{2x-5}$. Найти $f(2), f(-2), f(-4), f(e), f(0), f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right)$.
2. Даны функции $f(z) = (-4)^{z-3}$ и $g(z) = (-4)^{|z|-3}$. Найти $f(-1), f(3), f(-4), g(4), g(0), f(-3) \cdot f(4)$.
3. Даны функции $f(z) = a^{-2z-2}z$ и $g(z) = a^{|z|+4}z$. Найти $f(-1), f(4), f(2), g(-4), g(-2)$.

§ 2. Уравнения

4. Дано $f(x) = -x^2 + 9x + 10$. Найти все корни уравнения $f(x) = f(-7)$.
5. Дано $f(x) = 7x^3 + 35x^2 - 14x - 161$ и $g(x) = 7x^3 - 14x^2 - 14x + 3689$. Найти все корни уравнения $g(x) = f(7)$.
6. Даны $f(x) = x - 2$ и $g(x) = x + 4$. Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$.
7. Дано $f(x) = ax^2 + bx + 3$. Найти значения a и b , для которых справедливо тождество $f(x+1) - f(x) = -8x + 5$.

§ 3. Функции

8. Даны функции для которых выразить y как функцию z :
1) $y = -4x^4$ и $x = \cos(4z - 6)$; 2) $y = -\operatorname{arctg}(4x - 6)$ и $x = \ln(z - 1)$.
9. Даны функции для которых выразить u как функцию x . 1) $y = \sqrt{(2 \cdot x - 3)}, v = 1 - 3y, u = \operatorname{arctg}(2v - 2)$; 2) $y = \ln(x - 2), z = 2y^2 + 2, v = -2z^3 - 2$.
10. Следующие функции представить с помощью цепочек, составленных из основных элементарных функций:
1) $f(x) = h(g(x)) = (\ln(x))^{\frac{2}{3}}$;
2) $f(x) = h(g(x)) = (\ln(5x + 1))$;
3) $f(x) = t(g(h(x))) = (\ln(\cos(x)))^{\frac{1}{2}}$.
11. Даны функции $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ и $g(x) = \cos(3\pi x)$.
Найти $f[g(-2)], f[g(1)], g[f(-3)], f[f(-2)], f\left[f\left(\frac{d}{3}\right)\right], g[g(0)], g[g(x)]$.

§ 4. Написать в явном виде функции

12. Написать в явном виде функции:

- 1) $x^3 - y^3 = 27$;
- 2) $e^{xy} = 3$;
- 3) $\log_{10}(y - 3) + \log_{10}(x) = 4$;
- 4) $3^{x+y} \cdot (x^2 - 3) = x^3 + 4$;
- 5) $(1 + x) \cdot \cos(y) - \frac{1}{x^3} = 0$.

§ 5. Найти область определения

13. $y = \log_7(-5x - 7)$.

14. $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 13x + 42}}$.

15. $f(x) = \arccos\left(-\frac{4x - 2}{5}\right)$.

16. $f(x) = \frac{3}{\log_8\left(\frac{x}{3} - 6\right)} + 3 \cdot \sqrt{-4x + 75}$.

17. $f(x) = -\sqrt{-x - 4} - 2 \cdot \arccos\left(\frac{9 - 2x}{3}\right)$.

18. $f(x) = \frac{5}{\log_3\left(\frac{x^2 - 12x}{-35}\right)}$.

19. $f(x) = -2 \cdot \log_3 \cdot \cos(x - 4) - 5\sqrt{1 - x^2}$.

§ 6. Дополнительные задания

20. Дана функция $f(x) = x^2 + 8x - 5$. Решить уравнение $f(2x - 4) = 2f(x - 1) + 3f(1 - x)$.21. Найти значения a , b , c в выражении функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, для которых справедливо тождество $f(2x - 1) + f(x - 4) = 5x^2 + 1$.22. Даны функции $F(x) = x^2 + 15$ и $g(x) = \frac{48x^2\sqrt{x^2 - 16x + 64}}{6x^2 - 48x}$. Для уравнения $F(x) - |g(x)| = 0$ найти сумму всех корней S и их произведение P .23. Даны функции $4yz^2 - 2z^2 = -5yz - 5z$ и $z = 3x + 4$. Выразить y как функцию x и упростить ее.24. Найти сумму целых значений S , принадлежащих области определения функции $y = \frac{\sqrt{-5x^2 + 85x - 260}}{\log_{13-x}(x - 7)}$.

IV ПОНЯТИЯ МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИЯ. ПОДСТАНОВКИ ФУНКЦИЙ

§ 1. Интервалы знакопостоянства

1. Найти корни кубического уравнения и интервалы знакопостоянства $6x^3 + 32x^2 + 34x + 8 = 0$.

§ 2. Тест на четность

2. Определить вид функции:

1) $f(x) = 6x^4 + 6x^2$;

2) $f(x) = -x^9 - \frac{4x^3}{3} + 8x$;

3) $f(x) = 6x^2 - 6$;

4) $f(x) = \frac{5^{8x} + \frac{1}{5^{8x}}}{2}$;

5) $f(x) = 9 \operatorname{tg}(8x)$;

6) $f(x) = 5^{-5x^4 - 6x}$.

§ 3. Тест на периодичность

3. Определить вид функции

1) $f(x) = \sin(x^6)$;

2) $f(x) = 3x \cos(2x)$;

3) $f(x) = \sin(3 \cos(7x))$.

§ 4. Наибольшее и наименьшее значение функции

4. Найти наибольшее и наименьшее значение следующих функций:

1) $f(x) = 2 \cos^4(4x + 2)$;

2) $f(x) = 2 \cos(6x^4 + 5x^2 + 4x + 2)$;

3) $f(x) = 3 \sin(x) - 5$;

4) $f(x) = 3^{x^8}$.

§ 5. Задачи

5. В сосуд произвольной формы налита жидкость, на глубине $h = 44.7$ см давление этой жидкости $p = 6.258 \cdot 10^3$ Па, необходимо:

1) составить функцию, выражающую зависимость давления от глубины;

2) определить давление на глубине $h = 67$ см;

3) определить глубину (в метрах), давление на которой станет равным $10.304 \cdot 10^3$ Па.

6. График некоторой линейной функции $y(x)$ проходит через точки $(15, 90)$ и $(8, 55)$. Найти уравнение данной прямой.

7. Равномерно движущаяся по прямой точка через 10 с после начала движения находилась на расстоянии 247 см от некоторой точки этой прямой; через 14 с после начала движения расстояние стало равным 325.4 см. Выразить расстояние s как функцию времени t .

8. В треугольнике сумма сторон, заключающих данный угол, равна 12 см. Чему должны быть равны эти стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшей.

§ 6. Обратные функции

9. Найти функции, обратные данным:

1) $y = -3x - 2$;

2) $y = \frac{1-2x}{4x-3}$;

3) $y = 4 - 5x^2$;

4) $y = \frac{4^{x-2}}{4^{x-2} - 3}$;

5) $y = -2 \sin\left(\frac{x-4}{x+1}\right) - 3$.

§ 7. Показательная функция. Сопоставление графиков

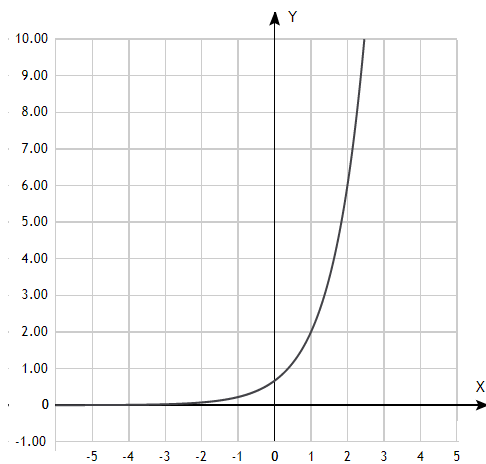
10. Сопоставить графики и их уравнения:

1) $y = 2 \cdot 3^{x-1}$;

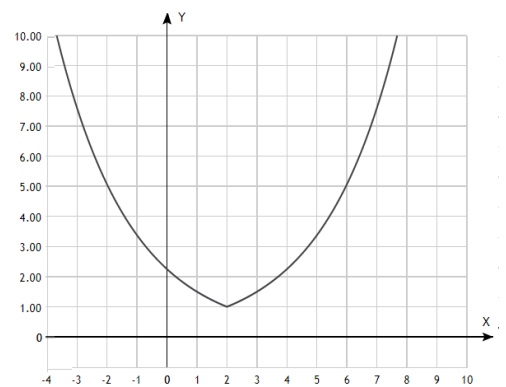
2) $y = \frac{1}{5^{2x^2}}$;

3) $y = 2^{x-2} + 2$;

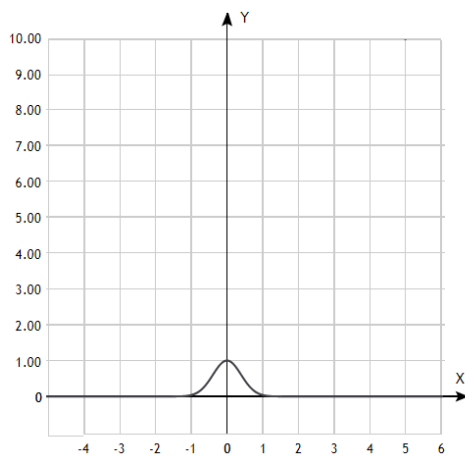
4) $y = \frac{3^{|x-2|}}{2^{|x-2|}}$



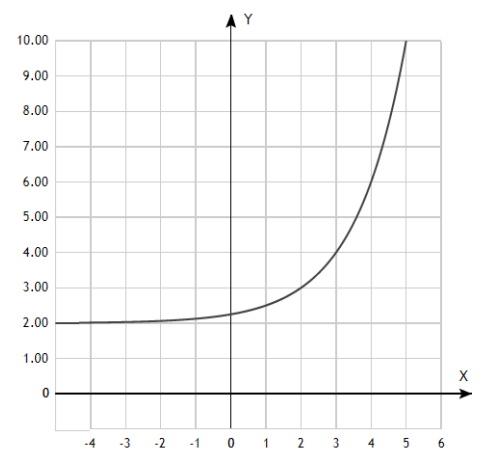
a)



б)



в)



г)

§ 8. Логарифмическая функция. Сопоставление графиков

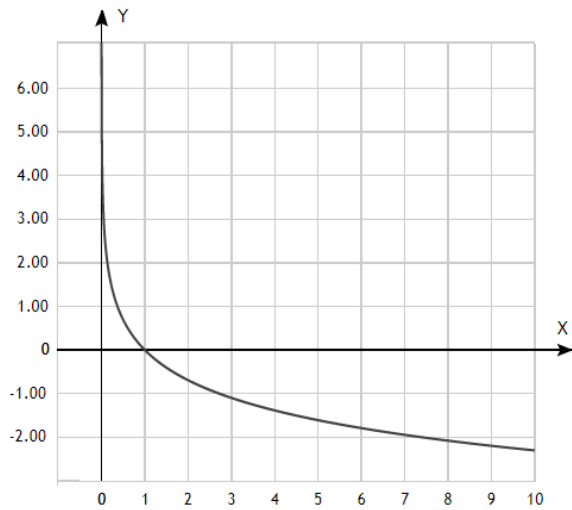
11. Сопоставить графики и их уравнения:

1) $y = -\ln(x)$;

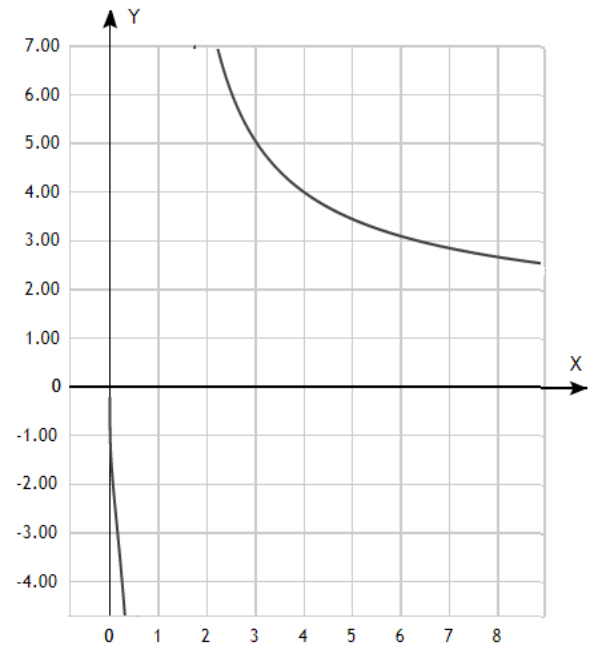
2) $y = \frac{\ln(|x|)}{\ln(3)}$;

3) $y = \frac{4 \cdot \ln(4)}{\ln(x)}$;

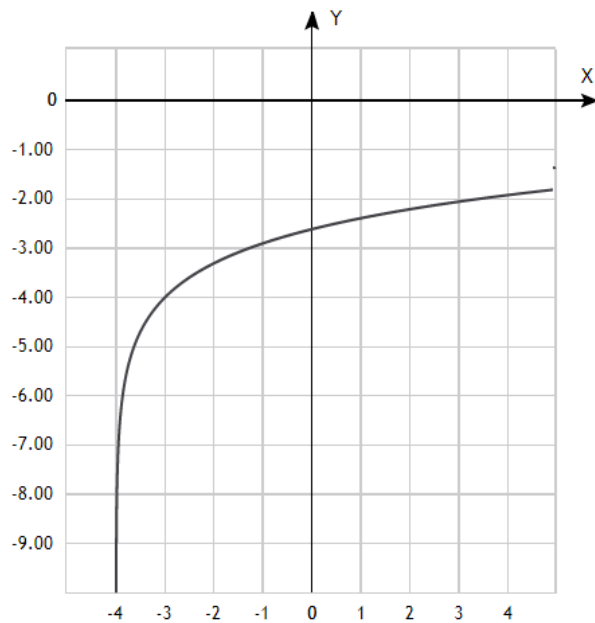
4) $y = \ln(x + 4) - 4$.



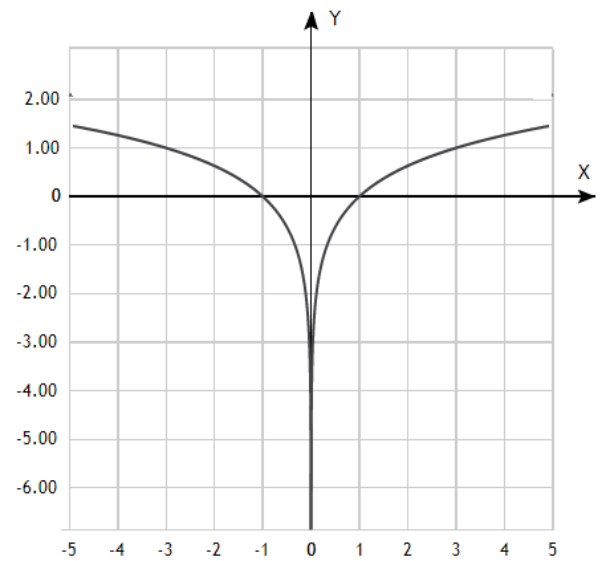
а)



б)



в)



г)

§ 9. Исследование тригонометрической функции

12. Указать амплитуду, частоту и начальную фазу для гармонического колебания, заданного функцией $y = 4 \cos(5t + 2)$.

§ 10. Обратные тригонометрические функции. Сопоставление графиков

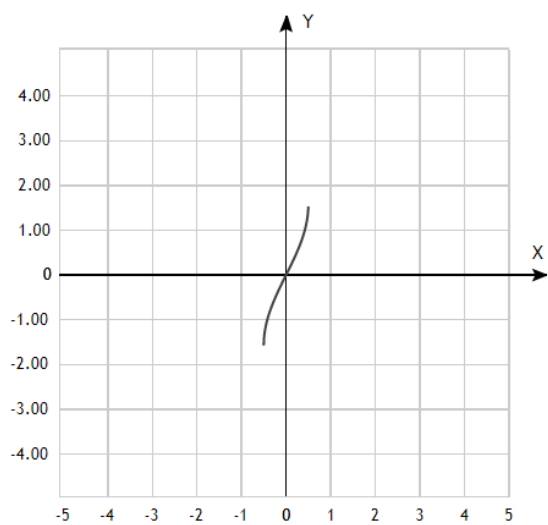
13. Сопоставить графики и их уравнения:

1) $y = -4 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)$;

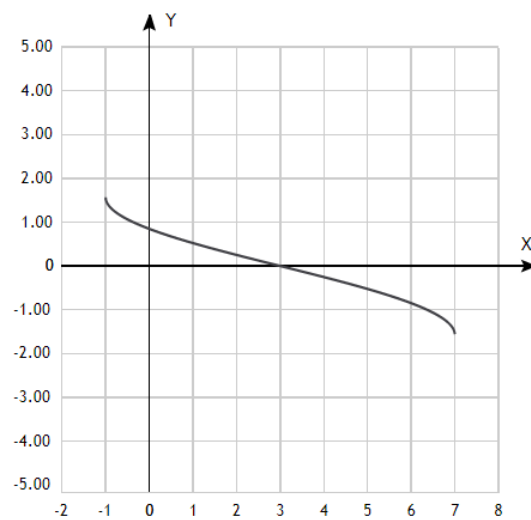
2) $y = \frac{\pi}{2} - \arccos(2x)$;

3) $y = \arcsin\left(\frac{3-x}{4}\right)$;

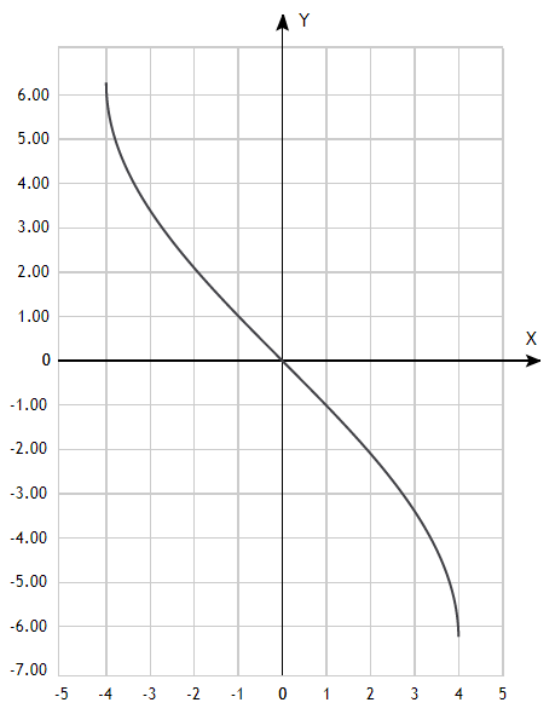
4) $y = \operatorname{arctg}(4x) + 2$.



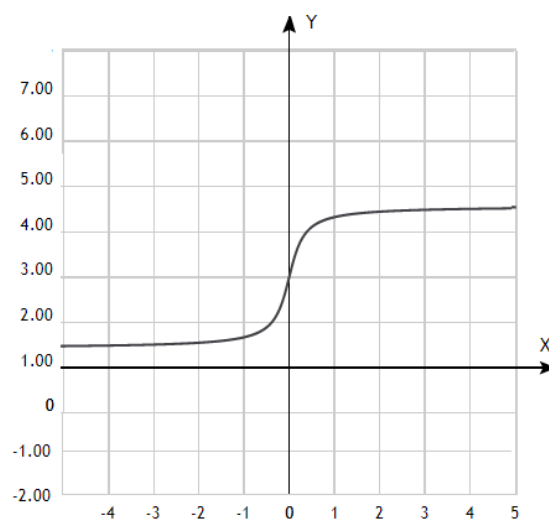
а)



б)



в)



г)

§ 11. Физическая задача

14. Деревянный шар с радиусом, равным 10 см, и плотностью, равной 0.8 г/см^3 , плавает на поверхности воды, найти высоту сегмента погруженного в воду. По данному условию составить уравнение и решить его графически.

§ 12. Дополнительные задания

15. Тело движется прямолинейно под действием силы F . Исходя из закона Ньютона, написать функцию, выражающую зависимость между силой F и ускорением a . Известно, что если тело движется с ускорением 15 м/с^2 , то на пути $s = 27 \text{ м}$ производится работа $A = 139 \text{ Дж}$.

16. Решить уравнение $\log_{5x-6}(x-5) - \log_{x-5}(5x^2 - 31x + 30) = -1$.

17. Кусок проволоки длиной 7 м нужно разрезать на две части; из одной сделать квадрат, из другой - правильный треугольник. Как нужно разрезать проволоку, чтобы сумма площадей полученных таким образом была наименьшей.

Выяснить, для каких интервалов изменения x справедливы тождества 18 - 25:

18. $\arcsin(\sqrt{x}) + \arccos(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}$.

19. $\arccos(\sqrt{1-x^2}) = \arcsin(x)$.

20. $\arccos(\sqrt{1-x^2}) = -\arcsin(x)$.

21. $\operatorname{arctg}(x) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

22. $\operatorname{arctg}(x) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} - \pi\right)$.

23. $\arccos\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right) = 2\operatorname{arctg}(x)$.

24. $\arccos\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right) = -2\operatorname{arctg}(x)$.

25. $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$.

V ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Общий элемент

1. Задана числовая последовательность $a_1 = \frac{6}{10}, a_2 = \frac{6}{11}, a_3 = \frac{6}{12}, \dots, a_n = \frac{6}{n+9}$, найти:
 1) a_{90} ; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{n+9}$.
2. Задана числовая последовательность $a_1 = \frac{10}{5}, a_2 = \frac{10}{8}, a_3 = \frac{10}{13}, a_4 = \frac{10}{20}, \dots, a_n$. Найти:
 1) a_n ; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$.

§ 2. Предел простой

Вычислить предел 3 - 20:

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n+5}{5n}$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+7)^2}{n^2+7}$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+10)^3 - (3n-10)^3}{(5n-8)^2 + (2n+8)^2}$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^3 + 6n^2 + 3}{8n^2 + 3n}$.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 6n^2 - 2n}{4n^5 + 5n^4}$.

§ 3. Предел с корнем

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n^2 - 2n}}{5n + 8}$.
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{81n^8 - 9n^3 + 8n^2}}{(\sqrt{4n^2 + 1} + 9n)^2}$.
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{81n^4 + 5n^3 - 6n^2} + \sqrt[3]{4n^2 - 4n + 5}}{\sqrt[6]{6n^4 - 5n^3 - 3n^2} + \sqrt[5]{243n^5 + 7n^4 - 2n^3}}$.

§ 4. Предел с факториалом

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 4)((n+1)! + (n+2)!)}{4(n+4)!}$.

§ 5. Предел с прогрессией

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{8^n}}{1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{(-8)^n}}$.
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-6n^2} (20 + 25 + 30 + \dots + (20 + 5n))$.

§ 6. Предел с показательной

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot 5^{4n} + 1}{9 \cdot 5^{4n} + 7}$.
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 4^{\frac{5}{n}} + 8}{-8 \cdot 4^{\frac{5}{n}} + 3}$.

§ 7. Дополнительные задания

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4 - 2n)^4 - (3n - 3)^4}{(4 - 2n)^4 + (3n - 1)^4}$.
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - 8 + 13 - 10 + \dots + (3n + 7) - (2n + 6)}{\sqrt[3]{27n^6 - 5n^5 + 42}}$.
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n - 1)}$.
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}$.
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^{11} + (n + 2)^{11} + \dots + (n + 90)^{11}}{n^{11} + 6^{11}}$.

VI ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Предел функции. Подставить

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^4 - 2x^2 + 3}{-5x^4 - 1}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{4}} \frac{x^2 - 4}{-x^4 - 4x^2 - 2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - 5x}{x^2 - 1}$.

§ 2. Простой предел 0/0

Определить тип неопределенности и найти предел 4-12:

4. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x - 7\sqrt{13 - x})}{x^2 - 49}$
5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 9x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-10x^3 + 20x^2 + 36x - 8}{x^2 + 2x - 15}$
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 15x^2 + 20x - 20}{-5x^3 + 5x^2 + 70x - 120}$

§ 3. Простой предел $\infty - \infty$

8. $\lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{2}{x + 5} - \frac{150}{x^3 + 125} \right)$
9. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x + 3}{x^2 + 8x + 7} - \frac{x + 3}{2x^2 + 10x + 8} \right)$

§ 4. Простой предел ∞/∞

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7 + 5x^6 + 3x^5}{6x^6 - x^4 - x^3}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^6 - 5x^5 + x^4}{2x^6 - 4x^3 + 2x^2}$

§ 5. Дополнительные задания

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{18} - 1}{x^{23} - 1} - 1$

13. Дан правильный треугольник со стороной 8; из трех высот его строится новый правильный треугольник и так n раз. Найти предел суммы S площадей всех треугольников при $n \rightarrow \infty$.

14. В круг вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг снова вписан квадрат и так n раз. Найти предел суммы S площадей всех кругов при $n \rightarrow \infty$.

15. Если $x \rightarrow \infty$, то $f(x) = \frac{10x^2 + 7}{7x^2 + 4} \rightarrow \frac{10}{7}$. Каково должно быть N (натуральное число), чтобы из $|x| > N$ следовало $\left| f(x) - \frac{10}{7} \right| < 0.01$.

16. Три цилиндра, радиусы которых соответственно равны 5, 3 и 2 м, а высоты одинаковы и равны 4 м, поставлены друг на друга, необходимо:

- 1) выразить площадь поперечного сечения получившегося тела как функцию $S(h)$ расстояния сечения от нижнего основания нижнего цилиндра;
- 2) определить будет ли эта функция непрерывной;
- 3) найти $S(3)$;
- 4) если функция имеет разрывы при $h \in (0; 12)$, то указать сумму абсцисс точек разрыва.

VII ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Простой предел ∞/∞

Определить тип неопределенности и найти предел 1 - 7:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-16x^7 + 24x^6 + 5x^3 + x + 2}{3x^2 - 2x^3} - 8x^4.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^7 + 3x^5 - 4x^4 + 1}{x^5 - 4x^6} - \frac{6x^7 - 4}{2x^5 - 4x^6}.$$

§ 2. Предел с корнем ∞/∞

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{64x^3 + 6x^2 + 7x} + \sqrt[3]{27x^3 - x^2 + 4x}}{\sqrt[4]{81x^2 - 7x + 10} + \sqrt[4]{16x^3 - 3x^2 + 10x}}$$

§ 3. Умножение на сопряженное $0/0$

$$4. \lim_{x \rightarrow 82} \frac{\sqrt{x-1} - 9}{x - 82}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 11} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{8}}{x^2 - 121}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 36} - 6}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{8-x}}{5x}$$

§ 4. Умножение на сопряженное $\infty - \infty$

Найти предел 8 - 16:

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 20} - \sqrt{4x^2 - 20}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 8} - x)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{25x^2 - 3x - 4} - \sqrt{25x^2 + 5x + 1}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 - 2} - \sqrt{x^3 + 3})$$

§ 5. Показательная

$$12. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3 \cdot 4^{5x}}{4 \cdot 4^{5x} - 9}.$$

§ 6. Дополнительные задания

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{4 \cdot \left(\left(x^{\frac{1}{3}} + 27 \right)^{\frac{1}{3}} - 3 \right)} \right).$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 26} - \sqrt{x^2 + 8}}{x - 1}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[14]{x} - 1}{\sqrt[12]{x} - 1}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 \cdot \left(\sqrt{\sqrt{289x^4 + 1} + 8x^2} - 5x \right).$$

$$17. \text{Найти односторонние пределы } \lim_{x \rightarrow 7} 9^{\frac{7x}{49-x^2}}.$$

VIII ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Определить тип неопределенности и найти предел 1-21:

§ 1. Простой 1-й замечательный

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(-9x)}{7x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \operatorname{tg}(6x)}{9x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 \cdot \sin(3x)}{11 \cdot \sin(9x)}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{3 \cdot \operatorname{tg}(-10x)}{4 \cdot \sin(2x)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 \cdot \sin(4x)}{11x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{8 \cdot \arcsin(6x)}{9x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(9x)}{-2x^2}.$$

§ 2. 1-ый замечательный предел (косинус)

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3(4x)}{x \cdot \sin(2x)}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos(4x))^2}{\operatorname{tg}^3(4x) - \sin^3(4x)}.$$

§ 3. 1-ый замечательный предел $\infty - \infty$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8}{x \sin(4x)} - \frac{8}{x \operatorname{tg}(4x)} \right).$$

§ 4. 1-ый замечательный предел $x_0 \neq 0$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sin(x^2 + 4x - 5)}{x^2 + 4x - 5}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{7 \sin(2x)}{6 \sin(6x)}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{9 \sin(x)}{-\cos(x) - 1}.$$

§ 5. 1-ый замечательный предел (сложный)

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{10} - \sqrt{\cos(x) + 9}}{\sin^2(5x)}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x \sin(4x) + 1} - \sqrt{\cos(2x)}}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{5}\right)}.$$

§ 6. Дополнительные задания

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{24x + \pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{24x - \pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{24x + \pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{24x - \pi}{3}\right)}.$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin\left(\frac{48x + \pi}{6}\right) - 6 \sin\left(\frac{24x + \pi}{6}\right) + \frac{3}{2}}{27x^2}.$
19. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 \cdot \operatorname{tg}^2 x (\sqrt{7 \sin^2(x) + 6 \sin(x) + 13} - \sqrt{6 \sin^2(x) + 12 \sin(x) + 8}).$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(7x) + 1} - \sqrt[3]{1 - \arcsin(5x)}}{\sqrt{1 - \arcsin(6x)} - \sqrt{\operatorname{arctg}(4x) + 1}}.$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8\sqrt{x+1}}{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos(x)}}.$

IX ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

§ 1. 2-ой замечательный предел (простой)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{9x+5}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x} + 1\right)^{\frac{4x^2 - 3}{6x}}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-8x + 8}{-8x + 9}\right)^{7x+5}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 10}{5x + 6}\right)^{\frac{7x^2 + 4}{-2x + 5}}$.

§ 2. 2-ой замечательный предел (степени)

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 5}{3x^2 + 4}\right)^{x^2 + 7}$.

§ 3. 2-ой замечательный предел (сложный)

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 7x + 3}{4x^2 + 9x - 10}\right)^{x+16}$.

§ 4. 2-ой замечательный предел (обманка)

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{4x^3 + 3}\right)^{3x-15}$.

§ 5. 2-ой замечательный предел (с функциями)

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin(6x)}{7}\right)^{\frac{1}{\sin(10x)}}$.

§ 6. 2-ой замечательный предел (следствие)

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{11x}{7} + 1\right)}{9x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x + 9) - \ln(9)}{4x}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{e^{x-6} - e^4}{x - 10}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(9x)} - e^{\sin(12x)}}{\arcsin(2x)}$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x \cdot \left(e^{\frac{1}{7x}} - 1\right)$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(10 \arcsin(9x) + \cos(3x)\right)^{\frac{1}{4x}}$.

§ 7. Дополнительные задания

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{x-1} \cdot (x+5)^{x+5}}{(x+4)^{2x+4}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} 8 \left(1 - \cos \left(\frac{4}{5x} \right) \right) \cdot x^2.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(9x)}{9x} \right) \frac{2 \arcsin(2x)}{9x - \sin(9x)}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{5x+3}{8x-1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{5x+6}{8x-1} \right) \right).$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{7x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x}{4} \right) \dots \cos \left(\frac{7x}{2^n} \right) \right).$$

X ПРОИЗВОДНАЯ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Производная по определению

1. Найти приращение функции $y = -2x^2 + 3x + 2$ в точке $x_1 = 3$, полагая приращение Δx независимой переменной равным: 1) $\Delta x = 2$; 2) $\Delta x = 0.2$.

§ 2. Отношение приращений

2. Найти предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ для функции: $y = 3x^3 - 9$ при $x = 1$.

§ 3. Предел по определению

3. Найти производную функции $f(x_0) = \sin(4x)$ по определению при $x_0 = 0$.
Найти производную 4 -16:

§ 4. Производная простая

4. $f(x) = -5x^2 + 4x - 6$.

§ 5. Производная простая (дробь)

5. $f(x) = \frac{9x^2}{53} + \frac{7x}{64} + \frac{10}{29}$.

§ 6. Производная простая (корни)

6. $f(x) = 10\sqrt[4]{x} - \frac{3x^4}{2} + \frac{5}{9x^4}$.

7. $f(x) = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{x^4}{\sqrt{x}}\right) + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{x^5}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.

8. $f(x) = 3\sqrt[3]{x}(9x^7 - x^{\frac{1}{4}} - 10)$.

9. $f(x) = \frac{-8x^4 - 4x^{\frac{1}{3}} + 3}{-5x^4}$.

§ 7. Производная простая (умножение)

10. $f(x) = (-6x^4 + 3\sqrt{x} + 2) \cdot (10x^4 - 3\sqrt{x} - 2)$.

11. $f(x) = (3 + 3x^{\frac{1}{4}}) \cdot (9 + 7x^{\frac{1}{4}}) \cdot (-10 + 4x^{\frac{1}{3}})$.

§ 8. Производная простая (деление)

12. $f(x) = \frac{7x - 11}{3x - 8}$.

13. $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x - 3} - (9x + 1) \cdot (9x^2 - 5)$.

14. $f(x) = \frac{x^3 + 4}{4\sqrt{\pi}}$.

15. $f(x) = \frac{2x^2 + 10x - 9}{10x^2 - 8x + 2}$.

16. $f(x) = \frac{10}{(3 - 5x^2) \cdot (5 - 5x^3)}$.

§ 9. Производная (физика)

17. Точка M удаляется от неподвижной точки A так, что расстояние AM растёт пропорционально квадрату времени. В начальный момент времени точки совпадают, начальная скорость равна нулю. По истечении 2 секунд от начала движения расстояние AM равнялось 16 м. Найти:

- 1) среднюю скорость движения за первые 4 с.;
- 2) среднюю скорость движения за промежуток от $t_1 = 2$ с. до $t_2 = 6$ с.;
- 3) скорость в момент $t = 5$.

§ 10. Дополнительные задания

18. Имеется тонкий неоднородный стержень AB . Длина его $L = 16$ см. Масса отрезка AM растёт пропорционально квадрату расстояния точки M от точки A , причем известно, что масса отрезка $AM = 11$ см равна 363 г. Найти:

- 1) среднюю линейную плотность отрезка стержня $AM = 11$ см;
- 1) среднюю линейную плотность всего стержня;
- 3) плотность стержня в точке M .

19. Найти угловые коэффициенты касательных, проведённых к параболе $y = x^2 - 5$ в точках пересечения её с прямой $y = -4$. В ответе указать их сумму.

20. Под какими углами пересекаются парабола $y = 4x^2$ и прямая $y + 8x - 32 = 0$.

21. В какой точке касательная к параболе $y = 4x^2 + 3$ параллельна прямой $y = 40x - 93$.

22. Написать уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 7$, которая перпендикулярна прямой $y = \frac{x}{12} - 19$.

XI СЛОЖНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Найти производную 1 - 15:

§ 1. Сложная функция (простая)

1. $f(x) = (9x^3 + 2)^7$
2. $f(x) = (-4x^6 - 3)^{17}$
3. $f(x) = \left(10x^6 + \frac{5}{x^4} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^2$
4. $f(x) = \left(\frac{8x^4 + 6}{8x^4 - 8}\right)^{\frac{1}{5}}$

§ 2. Сложная функция (корень)

5. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2x^2 + 64}}$
6. $f(x) = \frac{8}{(-6x^3 - 3)^{\frac{8}{7}}} + \frac{8}{(8x + 7)^{\frac{1}{10}}}$
7. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 7x + 2}{4x^3 - 2x + 10}}$. Найти значение производной в точке $f'(0)$.

§ 3. Производная (задача на скорость)

8. Дано уравнение прямолинейного движения $S(t) = 7t^3 + 4t^2 + 12$. Вычислить:
- 1) среднюю скорость на промежутке времени $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$;
 - 2) скорость в момент времени $t = 2$.

§ 4. Производная (тригонометрия)

9. $f(x) = 7 \sin(x) - 7 \cos(x)$.
10. $f(x) = \frac{x^2}{\cos(x) + 8}$.
11. $f(x) = \frac{x \cos(x)}{\operatorname{tg}(x) + 9}$.
12. $f(x) = 4(\sin(x))^{-2}$.
13. $f(x) = -2 \cos^3(3x - 1)$.
14. $f(x) = \sqrt[4]{5 - 3 \operatorname{tg}(x)}$.
15. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(\sin(10x))}}$.

§ 5. Дополнительные задания

16. Продифференцировать функцию $f(x) = \sqrt[7]{\operatorname{tg}\left(3x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 4}$.

17. Продифференцировать функцию $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^{\frac{1}{5}} + 1}{1 - x^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{9}{2}}$.

18. Продифференцировать функцию $f(x) = \sin^n(x) \cdot \sin(nx)$.

19. На параболе $y = x^2 + 2x - 2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = -2, x_2 = 1$. Через эти точки проведена секущая. Определить в какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей.

20. Точка движется по прямой так, что ее расстояние s от начального пункта через t секунд равно $s = t^5 - 8t^4 + 15t^3$, необходимо определить в какие моменты:

- 1) точка была в начальном пункте (в качестве ответа указать их сумму);
- 2) ее скорость равна нулю (в качестве ответа указать их сумму).

XII ОБРАТНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ, ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Найти производную 1-19:

§ 1. Обратные тригонометрические функции

1. $f(x) = 2x^4 \arcsin(x)$.

2. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{arctg}(x)}$.

3. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{6x-14}{\sqrt{7}}\right)$.

4. $f(x) = -3 \operatorname{arctg}^3\left(\frac{3}{x}\right)$.

5. $f(x) = \sqrt{5 - \operatorname{arctg}^3(7x)}$.

§ 2. Логарифмические функции

6. $f(x) = x^3 \ln(x) \operatorname{tg}(x)$.

7. $f(x) = \frac{\log_7(x)}{x^3 + 9}$.

8. $f(x) = \ln(\operatorname{arctg}(7x))$.

9. $f(x) = (4 + \ln(\cos(x) + 5))^6$.

§ 3. Показательные функции

10. $f(x) = \frac{6x^2}{15^x}$.

11. $f(x) = \frac{6^x + 9x^5}{e^x + 5}$.

12. $f(x) = 6x^4 \cdot 7^{\ln(x)}$.

13. $f(x) = \cos(e^{9x^2+x-1})$.

14. $f(x) = e^{\frac{\ln(5x^2+4x-6)}{4}}$.

§ 4. Дополнительные задания

15. $f(x) = \arccos\left(\frac{\sin(4) \sin(x)}{1 - \cos(4) \sin(x)}\right)$.

16. $f(x) = \arcsin\left(\frac{8 \cos(x) + 4}{4 \cos(x) + 8}\right)$.

17. $f(x) = \ln\left(\arcsin\left(\sqrt{3 - 2x^2}\right)\right)$.

18. $f(x) = \operatorname{arctg}^3(\ln(5 - 4x^4))$.

19. $f(x) = \ln\left(\sin\left(\left(\operatorname{arctg}(e^{2x})\right)^{\frac{1}{4}}\right)\right)$.

XIII РАЗНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Продифференцировать функцию

1. $f(x) = 6 \arccos\left(\frac{9x}{4} + 4\right) + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{6}\right).$

2. $f(x) = e^{5 \arccos(x)} \operatorname{arctg}(x).$

3. $f(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2-x^3}\right)}{\sqrt{3}}.$

4. $f(x) = \ln\left(x^2 + \sqrt{27 + x^4}\right).$

5. $f(x) = x^{14} - \sqrt{9 - x^2} \cdot \operatorname{arctg}(x).$

6. $f(x) = \cos^2\left(\frac{2 - \ln(2x)}{x^2}\right).$

7. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{10-x}{x+10}}\right).$

8. $f(x) = e^{11x} \sqrt[4]{\sin^3(13x) + 5}.$

9. $f(x) = 0,7 \left(\sin\left(\frac{4x+2}{6}\right) + \cos(0,9x) \right)^8.$

10. $f(x) = \frac{\ln(\sin(5x))}{\ln(\cos(4x))}.$

11. $f(x) = \frac{x \cdot \operatorname{arctg}(x) + 8}{\sqrt{x^3 + 5}}.$

12. $f(x) = 8^{\frac{10x}{\ln(6x)}}.$

13. $f(x) = 3^{x \cdot \sin(10x)}.$

§ 2. Дополнительные задания

14. $f(x) = \sqrt[5]{\left(x \cdot e^{\sqrt{5}\sqrt{x}} + 3\right)^2}.$

15. $f(x) = -\frac{1}{10\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x^{\frac{5}{2}}e^{-5x}}{\sqrt{3}}\right).$

16. $f(x) = \ln\left(\frac{(4x+3)^4}{3x^2-x+3}\right) + \frac{\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{5x+5}{\sqrt{2}}\right)}{3} - \frac{2x}{2x^4+4}.$

17. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - t + 4$. Функция пути s выражена в сантиметрах, t - в секундах. Определить кинетическую энергию тела через 8 с после начала движения.

18. На линии $y = -\frac{4}{x^2 - 5x + 10}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

XIV ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Найти производную 1 - 14:

§ 1. Логарифмическое дифференцирование (простое)

1. $f(x) = -5x^{9x^5}$.
2. $f(x) = 10x^{4 \cos(x)}$.

§ 2. Логарифмическое дифференцирование (тригонометрия)

3. $f(x) = \left(\frac{5x}{7+x} \right)^x$.
4. $f(x) = (x^6 + 6)^{\cos(x)}$.
5. $f(x) = x^5 e^{x^2} \cos(6x)$.

§ 3. Логарифмическое дифференцирование (дробь)

$$6. f(x) = \frac{(x-7) \sqrt[10]{x+10}}{(x-3)^3}.$$

§ 4. Логарифмическое дифференцирование (корень)

$$7. f(x) = \sqrt{x \cdot \cos(7x) \sqrt{5 - e^x}}.$$

§ 5. Логарифмическое дифференцирование ($\frac{\partial y}{\partial x}$)

$$8. \text{Найти выражение для } \frac{\partial y}{\partial x}: x = e^{\arccos(5y)}.$$

§ 6. Логарифмическое дифференцирование (неявная функция)

9. $\frac{y^3}{10} + \frac{x}{2} = 4$.
10. $2y^2 + 6xy - 8 = -7$.
11. $9y \cdot \ln(9y) = x^6$.
12. $3x^{10y} = y^x$.
13. $y = \arccos(10y) + x^7$.

§ 7. Дополнительные задания

$$14. \sqrt[7]{\frac{x(x^5+5)}{(x^5-4)^6}}.$$

15. Чему равен угловой коэффициент касательной, проведенной к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{50} = 1$ в точке $(-4, 3; \sqrt{2})$.

16. Чему равен угловой коэффициент касательной, проведенной к окружности $(y-10)^2 + (x+2)^2 = 4$ в точке $(8; 2)$.

Найти производную:

17. $e^{\sin(x)} (\sin(x))^{\cos(x)}$.
18. $\cos^7(x) \sqrt[8]{\cos^5(x) + 3}$.

XV ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ПРИМЕНЕНИЕ
ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Производная параметрически заданной функции

Найти производную параметрически заданной функции y_x 1-7:

1.

$$\begin{cases} y = 7t^3 + 6t - 5, \\ x = 10t^2 - 10. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y = 3t^2 - 10t + 10, \\ x = 19 \ln(9t). \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} y = \frac{t^3}{15} - t - 10, \\ x = 7 \arccos(t). \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{1-81t^2}}{36}, \\ x = -4 \arcsin(9t). \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} y = 8 \cdot \ln\left(-\frac{64}{\sqrt{1-64t^2}}\right), \\ x = 8 \arccos(8t). \end{cases}$$

6.

1)

$$\begin{cases} y = 64 \cos^3(4t), \\ x = 64 \sin^3(4t). \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} y = -\frac{2e^{-6t} \cos(24t)}{3}, \\ x = \frac{2e^{-6t} \sin(24t)}{3}. \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} y = -10 \sin^2(t), \\ x = 8 \cos(2t). \end{cases}$$

§ 2. Задачи на производную

8. Угол α поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\alpha = 6t^2 + 10t + 11$. Найти угловую скорость при $t=3$ с.

9. Составить уравнение касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

10. Составить уравнение касательной и нормали к линии $y = -10 \ln(6 - 10x)$ в точке $M_0(1; -10 \ln(-4))$.

11. Составить уравнение касательной и нормали к линии $y = \frac{128}{x^4 + 128}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

12. Найти углы под которыми пересекаются данные линии $y_1 = \frac{x-10}{x-20}$ и $y_2 = \frac{x^2+4x+8}{16}$.

§ 3. Дополнительные задания

13. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = -\frac{10}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$. Найти подкасательную и поднормаль.

14. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени, первый оборот был сделан колесом за 29 с. Найти угловую скорость ω через 58 секунд после начала движения.

15. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t=0$, дается формулой $Q = -3t^2 - 2t - 8$. Найти силу тока в конце 22 секунды.

16. Найти расстояние d от начала координат до нормали к линии $y = e^{-2x} + 9x^2$, проведенной в точке $x=0$.

17. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, перпендикулярных к прямой $6y - 4x + 5 = 0$.

XVI ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Найти производную

1. $f(x) = -5x^4 - x^3 + 5x^2$, найти $f''(x)$.
2. $f(x) = (x + 1)^5$, найти $f'''(4)$.
3. $f(x) = e^{2x+10}$, найти $f''(0)$.
4. $p = -\cos(4\varphi)$, найти $\frac{d^4 p}{d\varphi^4}$.
5. $f(x) = \arccos(6 \cos(x))$, найти $f''(x)$.
6. $y = \ln(4x - 2)$, найти общее выражение для производной n -го порядка $f^{(n)}(x)$.
7. $3x^2 - 9y^2 = 729$, найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
8. $e^{5x} = 10xy$, найти $y''(x)$.
9. Определить выражение $m = \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$, если $y^3 = 2x^5$.
10. $x = 3 \sin(5t)$, $y = 7 \cos(4t)$, найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
11. $x = \ln(6t)$, $y = t^5 + 1$, найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
12. Прямолинейное движение происходит в соответствии с формулой $S = 8t^2 - t + 4$. Найти скорость и ускорение движения.

§ 2. Дополнительные задания

13. Точка движется прямолинейно, причем $S = \frac{8}{11} \cos\left(\frac{11\pi t}{6}\right) + S_0$. Найти ускорение в конце первой секунды (S выражено в сантиметрах, t - в секундах).
14. Определить в какой точке эллипса $9y^2 + 16x^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает.
15. y связан с x соотношением $y^2 = 4x$. Аргумент x возрастает равномерно со скоростью 2 единицы в секунду. Определить с какой по модулю скоростью возрастает y при $x = 4$.
16. Баржу, палуба которой на 8 м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот со скоростью 4 м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на 16 м (по горизонтали).
17. Тяжелую балку длиной 13 м спускают на землю так, что нижний её конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот (рисунок 1). Канат сматывается со скоростью 4 м/мин. Определить с каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она находится на расстоянии 5 м от точки O . Ответ представить в виде дроби.

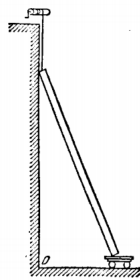


Рис. 1

XVII ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Приращение функции

1. Найти приращение функции $y = 3x^2$ соответствующее приращению dx независимой переменной. Вычислить dy , если $x_0 = 2$ и $dx = 0,1$.

2. Дана функция $y = -x^3 + 2x$. . Найти значения приращения и его линейной главной части, соответствующее изменению x от $x = 6$ до $x = 6 + 0,1$. Ответ округлять с точностью до третьей цифры после запятой.

3. Дана функция $y = x^2$. Известно, что в некоторой точке приращению независимой переменной $dx = 0,2$ соответствует главная часть приращения функции $df(x) = -0,8$. Найти начальное значение независимой переменной x_0 .

4. Найти приращение и дифференциал функции $y = 3x^2 - (-7x)$ при $x = 10$ и $dx = 0,1$. Ответ округлять с точностью до третьей цифры после запятой.

5. Найти приращение и дифференциал функции: $y = x^{\frac{1}{4}}$ при $x = 4$ и $\Delta x = 0,41$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности. Необходимо округлять каждый ответ до шестого знака после запятой включительно.

§ 2. Дифференциал функции

Найти дифференциал функции 6-12:

$$6. y = \frac{x^{\frac{1}{5}}}{5}.$$

$$7. y = (6x^2 + 10x + 6)^2.$$

$$8. y = (x^5 + 6x^{\frac{1}{2}}) \cdot (7x^5 - 2x^4 + 7).$$

$$9. y = 8 \operatorname{arctg}^3(x) - 3 (\arccos(x))^{\frac{1}{5}}.$$

$$10. y = \frac{2 \operatorname{ctg}(x)}{9x^3 - 6}.$$

$$11. y = 6x^{\frac{1}{4}} - 10x^4 - x^{\frac{1}{2}}.$$

$$12. y = -\operatorname{arctg}(x) + \frac{3 \arcsin(x)}{4} - 2 \operatorname{arctg}(x) + 9 \arccos(x).$$

§ 3. Дополнительные задания

13. Найти приращение dv объема v шара при изменении радиуса $R = 2$ на dR . Вычислить dv , если $dR = 0,1$. Округлить ответ до трех цифр после запятой.

14. Известно, что при увеличении сторон данного квадрата на $0,3$ см линейная часть приращения площади составляет $2,4$ см². Найти линейную главную часть приращения площади, соответствующую приращению каждой стороны на $0,6$.

15. Найти дифференциал функции $p = 9(\operatorname{tg}(9\varphi))^{\frac{1}{4}}$.

16. Найти дифференциал функций:

$$1) y_1 = \frac{1}{(\operatorname{tg}(x) + 9)^3} \text{ при изменении независимой переменной } x \text{ от } \frac{\pi}{3} \text{ до } \frac{61\pi}{180};$$

$$2) y_2 = \sin(x) \text{ при изменении независимой переменной } x \text{ от } 60^\circ \text{ до } 60^\circ 7';$$

$$3) y_3 = -\sin(7x) \text{ при изменении независимой переменной } x \text{ от } \frac{\pi}{3} \text{ до } \frac{61\pi}{180}.$$

XVIII ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Приближенное значение приращения

1. Найти приближенное значение приращения функции $y = \operatorname{tg}(x)$ при изменении x от 30° до $30^\circ 7'$.

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = \frac{\sin(x) + 1}{1 - \sin(x)}$ при изменении x от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{25}$.

3. $y = 5^{\frac{3}{x}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt{x}$. Вычислить dy при $x = 1$ и $dx = 0,1$.

4. $f(x) = e^{0,9x(8-x)}$. Подсчитать приближенно $f(1,07)$.

5. Вычислить приближенно $\arccos(-0,4937)$. Ответ дать в радианах, с точностью 3 знака после запятой.

6. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал $y = \sqrt[3]{x^6 - 10x}$, $x = t^3 - 9t - 9$.

7. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал $z = 15 \operatorname{arctg}(v)$, $v = \frac{1}{\operatorname{ctg}(s)}$.

§ 2. Дифференциал высших порядков

8. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \sqrt[17]{x^{10}}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(9x)}{5}\right)$.

10. Найти дифференциал третьего порядка функции $y = 8 \sin^2(2x)$.

11. Найти дифференциал второго порядка функции $y^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{4}{5}} = 8^{\frac{4}{5}}$.

§ 3. Дополнительные задания

12. Если длина тяжелой нити (провода, цепи) (рисунок) равна $2s$, полупролет l , а стрелка провеса f , то имеет место приближенное равенство: $s = \left(\frac{4f^3}{9l^4} + 14\right) \cdot l$. Подсчитать, какое изменение произойдет в длине нити при изменении ее стрелки провеса f на величину df .

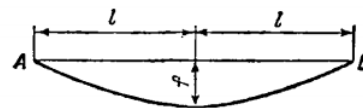


Рис. 2

13. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал

$$y = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\right), \quad u = \arcsin(v), \quad v = \cos(8s).$$

14. $y = \sin(2z)$, $z = 10^x$. Выразить d^2y через z и dz .

15. Найти дифференциал второго порядка функции:

$$\cos^3(Bp^2) - 81 \sin^3(B) = 0.$$

16. Сравнить погрешности при нахождении угла по его тангенсу и по его синусу с помощью логарифмических таблиц, то есть сопоставить точность нахождения угла x по формулам $\lg(\sin(x)) = y$

и $\lg(\operatorname{tg}(x)) = z$, если y и z даны с одинаковыми погрешностями. Ответ указать в виде отношения $\frac{\Delta x_s}{\Delta x_t}$, где x_s – погрешность при определении угла по его синусу, Δx_t – погрешность при определении угла по его тангенсу.

XIX ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВОДНУЮ

1. Решить задачи:

1) Точка движется по архимедовой спирали (см. рисунок 3) по закону $\rho = 51\varphi$; Найти скорость v изменения полярного радиуса ρ относительно полярного угла φ .

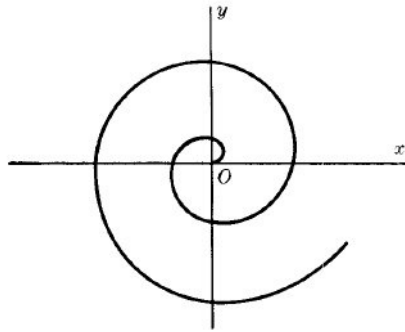


Рис. 3

2) Точка движется по логарифмической спирали $\rho = e^{10\varphi}$ (см. рисунок 4). Найти скорость изменения полярного радиуса ρ , если известно, что он вращается с угловой скоростью $\omega = 13$.

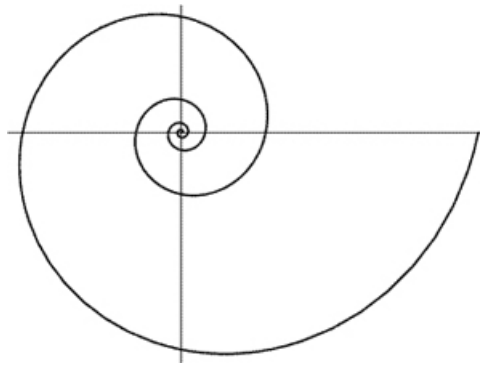


Рис. 4

2. Точка движется по окружности $\rho = 8r \cdot \cos \phi$ (см. рисунок 5). Найти скорость изменения абсциссы и ординаты точки, если полярный радиус вращается со скоростью $\omega = -15$. Полярная ось служит осью абсцисс, полюс - началом системы декартовых координат.

3. Круг радиуса $R = 1$ катится без скольжения по прямой. Центр круга движется с постоянной скоростью $v = 13$. Определить скорость изменения абсциссы x и ординаты y для точки лежащей на границе круга.

4. Сторона квадрата увеличивается со скоростью $v = 17$. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна 66.

5. Радиус шара изменяется со скоростью $v = 20$. Определить с какой скоростью изменяются объем и поверхность шара.

6. Найти угловой коэффициент касательной к данной линии для:

1) $x = 5 \sin(t)$, $y = 3 \sin(t)$ в точке $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$;

2) $y = 8t^2 + 9t$, $x = t^2 - 9t^4$ в точке $(0,0)$.

7. Дана окружность $\rho = r \cdot \sin(u)$. Найти угол θ между полярным радиусом и касательной, угол α между полярной осью и касательной.

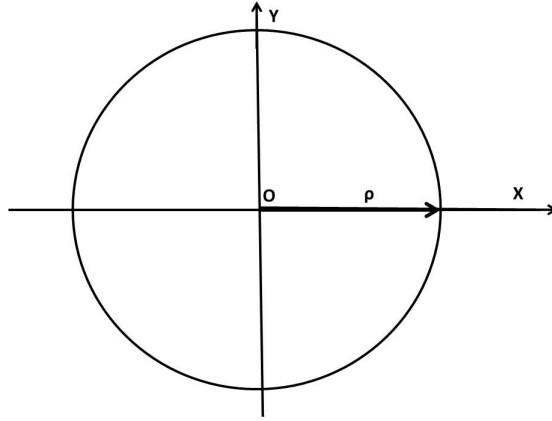


Рис. 5

8. Найти тангенс угла между полярной осью и касательной к линии $\rho = -4\sec^2 u$ в точках, в которых $\rho_0 = -20$.

9. Линия задана уравнениями $\rho = -9t^4$, $u = 10t^2$. Найти угол между полярным радиусом и касательной.

§ 1. Дополнительные задания

10. Барометрическое давление p изменяется с высотой h в соответствии с функцией $\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = c \cdot h$, где через p_0 обозначено нормальное давление, а c постоянная. На высоте $h_1 = 5848$ давление достигает половины нормального p_1 . Найти скорость изменения барометрического давления с высотой.

11. Для линии, заданной в параметрической форме, указать связь между параметром (t) и углом (α), образованным касательной к линии с осью абсцисс:

$$x = -5\sqrt{7} \cos(t) \sqrt{-\cos(6t)}$$

$$y = -5\sqrt{7} \sin(t) \sqrt{-\cos(6t)}$$

12. Решить задачи:

1) Найти длины касательной, нормали, подкасательной и поднормали к кардиоиде $x = 24 \cos(t)$, $y = 36 \sin(t)$ в произвольной ее точке (см. рисунок 6).

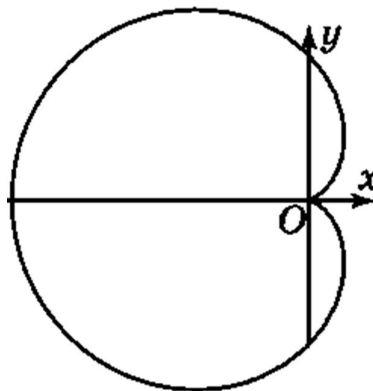


Рис. 6

2) Найти длины касательной, нормали, подкасательной и поднормали к астройде $x = \sin^2(t)$, $y = \cos^2(t)$ в произвольной ее точке (см. рисунок 7).

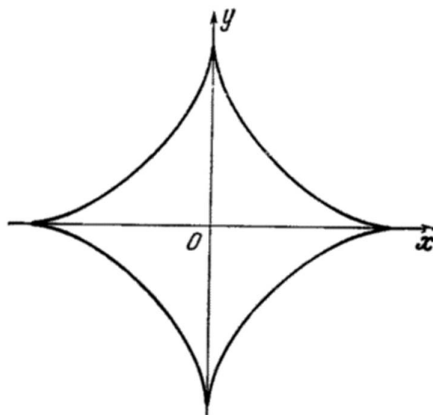


Рис. 7

13. Дан эллипс $x = 9 \cos(t), y = -7 \sin(t)$. Выразить полярный радиус ρ и полярный угол ϕ как функции параметра t . Использовать полученную форму задания эллипса для вычисления угла α между касательной и полярным радиусом.

14. Лестница длиной 10 м одним концом прислонена к вертикальной стене, а другим опирается о пол. Нижний конец отодвигается от стены со скоростью 2 м/мин. Определить с какой скоростью опускается верхний конец лестницы, когда основание отстоит от стены на 6 м. Определить направление вектора скорости.

XX ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

§ 1. Приближенное значение функции

1. Применяя на отрезке $[1; 1,09]$ к функции $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ формулу

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\Delta x$ найти приближенное значение $\operatorname{arctg}(1,09)$. Ответ дать в радианах, с точностью 3 знака после запятой.

2. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\Delta x$ вычислить приближенное значение $\arcsin\left(\frac{807}{100}\right)$. Ответ дать с точностью 3 знака после запятой.

§ 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

3. $y = 6x^6 - 27x^4 + 3$ на отрезке $[-5, 5]$.

4. $y = \frac{8x^3}{3} - 8x^2 + 8x - 4$ на отрезке $[-2, 4]$.

5. $y = \frac{-3x^2 + 12x - 10}{3x^2 - 12x + 6}$ на отрезке $[-1, 3]$.

6. $y = \cos(12x) - 6x$ на интервале $\left(\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi\right)$.

Найти экстремумы функции пользуясь второй производной в заданиях 3-6

7. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

8. $y = x + \frac{36}{x}$

9. Определить при каком значении α функция $f(x) = 2\cos(5x) + \alpha\cos(x)$ имеет экстремум при $x = \frac{\pi}{4}$.

10. Найти значения α и β , при которых функция $y = 2\alpha \cdot \ln(x) + 4\beta x^2 + 4x$ имеет экстремумы в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

11. Число 26 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

§ 3. Дополнительные задания

12. Требуется изготовить ящик с крышкой объем, которого был бы равен 400 см^3 , причем стороны основания относились бы как 3 : 5. Определить размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей.

13. Из углов квадратного листа картона размером $48 \times 48 \text{ см}^2$ нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (см. рисунок 8), получить коробку наибольшей вместимости. Определить сторону вырезаемого квадрата.

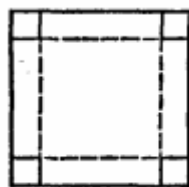


Рис. 8

14. Из круга вырезан сектор с центральным углом 4α . Из сектора свернута коническая поверхность. Определить при каком значении α объем полученного конуса будет наибольшим. Ответ дать в радианах.

15. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом $R = 6$.

16. Дождевая капля, начальная масса которой 36 мг, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен 3). Определить через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Ответы предоставить в дробном виде, $g = 10 \frac{m}{c^2}$.

XXI ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ И АСИМПТОТЫ

§ 1. Найти предел

Найти предел с помощью правила Лопиталья 1-7:

$$1. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^{\frac{1}{6}} - 6^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{x} - \sqrt{6}}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{e^{4x} - \cos(4x)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^5 + 32}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{7x} - 6^{2x}}{9^{2x} - 10^{9x}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} 6 \operatorname{tg} \left(\frac{4}{5x} \right) x.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{1}{3}} (x+3)^{\frac{1}{3}} (x+5)^{\frac{1}{3}} - x.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 5} \left(2 - \frac{x}{5} \right)^{\left(\frac{\pi x}{10} \right)}.$$

§ 2. Асимптота функции

Найти асимптоты функции

$$8. \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

$$9. y = \frac{1}{-2x^2 + 2x - 3}.$$

$$10. 3xy^2 + 6x^2y = 343.$$

$$11. 7(x^2 - 18x + 72)y = x^3 - 15x^2 + 125.$$

§ 3. Дополнительные задания

12. Найти асимптоты декартова листа $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ (рисунок 9).

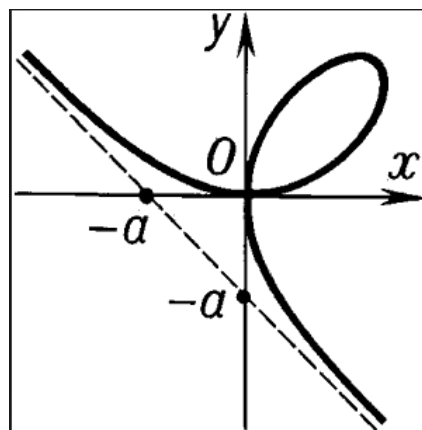


Рис. 9

13. Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час. Определить при какой скорости парохода v общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей и какова будет при этом общая сумма расходов в час r .

14. Мальчик плывет со скоростью в два раза меньшей скорости течения воды в реке. Определить в каком направлении он должен плыть к другому берегу, чтобы его снесло как можно меньше (обозначим этот угол за α , ответ дать в градусах) и на какое расстояние его снесет в этом случае, если ширина реки $h = 100$ (обозначим это расстояние за S).

15. Бревно длиной 65 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 1 м и 5 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объём которой был бы наибольшим. Определить размеры балки (высота и ширина - это стороны квадрата в сечении балки).