Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

Е. Б. Грибанова, А. А. Мицель

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Томск
2017

УДК [519.8 + 519.85](075.8)
ББК 22.183.41я73
Г 820

Рецензенты:

А. А. Шелестов, канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизированных систем управления Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники;

О. Л. Крицкий, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики Национального исследовательского Томского политехнического университета

Грибанова Е. Б., Мицель А. А.

Г 820 Исследование операций и методы оптимизации / Е. Б. Грибанова, А. А. Мицель. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2017. – 185 с.

В пособии рассматриваются основные понятия исследования операций, представлены методы нахождения минимума одномерной и многомерной функций, а также способы решения задачи линейного и нелинейного программирования, транспортной задачи, обратной задачи. Приведены примеры использования рассмотренных методов для решения различных экономических задач.

Оглавление

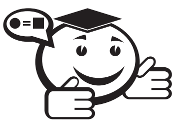
Введение

Исследование операций изучает применения количественных методов для управления сложными системами людей, машин, материалов, денег и информации. Методология исследования операций позволяет понять сущность управленческих проблем и разработать модели для оценки последствий принимаемых решений.

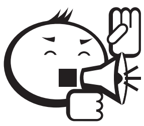
«Исследование операций» как самостоятельная научная дисциплина возникло в годы Второй мировой войны, когда для решения сложных проблем логистики и проектирования систем вооружений создавались команды практиков, в которые входили специалисты из самых различных областей: математики, инженеры, экономисты, психологи и т. д. Эти команды анализировали и формулировали проблему в количественных терминах, чтобы найти ее оптимальное решение. Сегодня методы исследование операций широко используются в операционном менеджменте и других бизнес-ориентированных дисциплинах.

Соглашения, принятые в учебном пособии

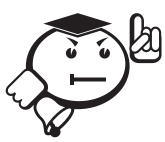
Для улучшения восприятия материала в данном учебном пособии используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.



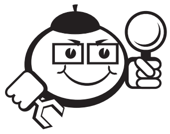
Эта пиктограмма означает «Внимание!». Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.

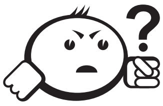
Эта пиктограмма означает совет. В данном блоке можно указать более простые или иные способы выполнения определенной задачи. Совет может касаться практического применения только что изученного или содержать указания на то, как немного повысить эффективность и значительно упростить выполнение некоторых задач.

Эта пиктограмма означает теорему.



Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Контрольные вопросы по главе

1 Методы одномерной оптимизации функций

1.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим простейшие задачи минимизации, в которых целевая функция зависит от одной переменной, а допустимым множеством является отрезок вещественной оси [1, 2]:

$$f(x) \to \min;$$
$$x \in [a;b].$$

*Число $x^* \in [a;b]$ называется **точкой глобального** (абсолютного) **минимума**, или просто точкой минимума, функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если $f\left(x^*\right) \le f\left(x\right)$ для всех $x \in [a;b]$.*

На рисунке 1.1 точка M – глобальный минимум, точка N – глобальный максимум.

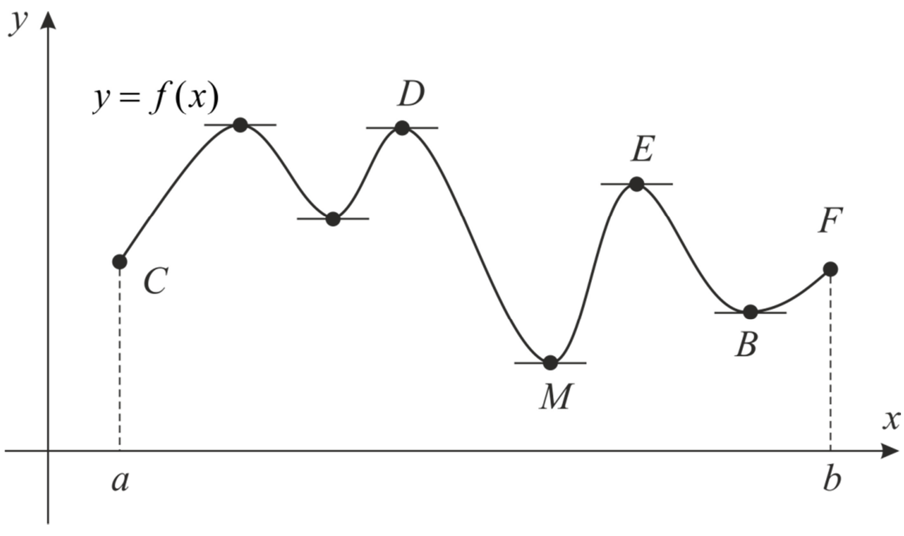
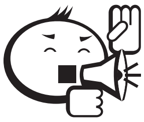


Рис. 1.1 – График функции

*Число $x^* \in [a;b]$ называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если $f\left(x^*\right) \le f\left(x\right)$ для всех $x \in [a;b]$, достаточно близких к x^*.*

На рисунке 1.1 точки A и B – локальные минимумы.



Любая точка глобального минимума целевой функции (ЦФ) $f(x)$ является одновременно и точкой локального минимума этой функции. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Точность. Характеристикой точности полученного решения может служить величина абсолютного отклонения значения минимизируемой функции, достигнутого в точке $x^n \in [a;b]$, от точного значения ее минимума на отрезке $[a;b]$:

$$\delta = \left| f\left(x^n\right) - f\left(x^*\right) \right|, \quad x^n, x^* \in [a;b].$$

Ясно, что чем меньше неотрицательная величина δ, тем точнее полученное решение. Недостатком использования абсолютной погрешности является то обстоятельство, что она меняется при умножении ЦФ на положительную константу α:

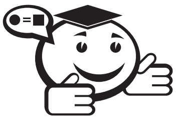
$$f(x) \to \alpha \cdot f(x).$$

Целесообразнее использовать следующую оценку точности:

$$\frac{\left| f\left(x^n\right) - f\left(x^*\right) \right|}{f\left(x^*\right)} = \delta,$$

где $f\left(x^*\right)$ – либо точное значение минимума ЦФ, либо полученное «точным» алгоритмом.

Унимодальные функции. Многие методы оптимизации применимы только тогда, когда целевая функция $f(x)$ является унимодальной, т. е. любой локальный минимум ЦФ одновременно является и глобальным.



Функция $f(x)$ является ***унимодальной****, если слева от x^* она монотонно убывает, справа – монотонно возрастает.*

На рисунке 1.2 изображены графики унимодальных функций. Пример функции, не являющейся унимодальной, приведен на рисунке 1.1.

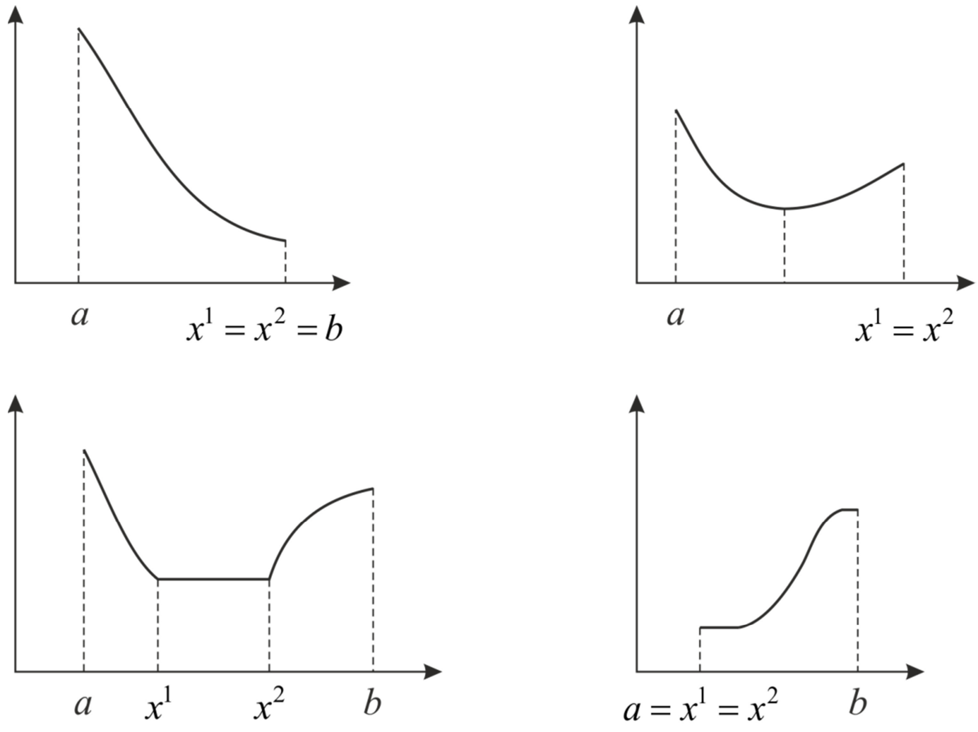


Рис. 1.2 – Примеры унимодальных функций

Функция $f(x)$ называется ***унимодальной*** *на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на $[a,b]$ и существуют числа x^1и x^2, удовлетворяющие условию $a \le x^1 \le x^2 \le b$, такие, что:*

1) *на отрезке $\left[a, x^1\right]$ функция $f(x)$ монотонно убывает;*
2) *отрезке $\left[x^2, b\right]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает;*
3) *при $x \in \left[x^1, x^2\right]$ имеем $f\left(x^*\right) = f^* = \min\limits_{[a,b]} f(x)$.*

Отметим, что возможно вырождение в точку одного или двух из отрезков $\left[a, x^1\right]$, $\left[x^1, x^2\right]$ и $\left[x^2, b\right]$. Некоторые варианты расположения и вырождения в точку отрезков монотонности и постоянства унимодальных функций представлены на рисунке 1.2.

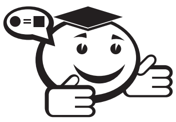
Очевидно, что в некоторых вырожденных случаях ЦФ $f(x)$ не является дифференцируемой на отрезке $[a,b]$.

Для проверки унимодальности функции $f(x)$ на практике обычно используют следующие критерии, при выполнении которых функция является унимодальной:

- если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке;
- если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и вторая производная $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$.

Если эти критерии не выполняются, то функция $f(x)$ является мультимодальной или многоэкстремальной.

Выпуклые функции.



Функция $f(x)$ ***выпукла*** *(«вниз») на $[a,b]$, если справедливо неравенство Иенссена:*

$$f\left[\mu x^1 + (1-\mu)x^2\right] \leq \mu f\left(x^1\right) + (1-\mu) f\left(x^2\right),$$

для произвольных $x^1, x^2 \in [a,b]$ и $\mu \in [0,1]$.

Геометрически это означает, что все точки функции $f(x)$ для всех $x \in [a,b]$ лежат ниже прямой $\mu f\left(x^1\right) + (1-\mu) f\left(x^2\right)$.

Если функция $f(x)$ – выпуклая на $[a;b]$, то на любом отрезке $[x';x''] \subset [a;b]$ ее график расположен не выше хорды, проведенной через точки графика с абсциссами x' и x'' (рис. 1.3).

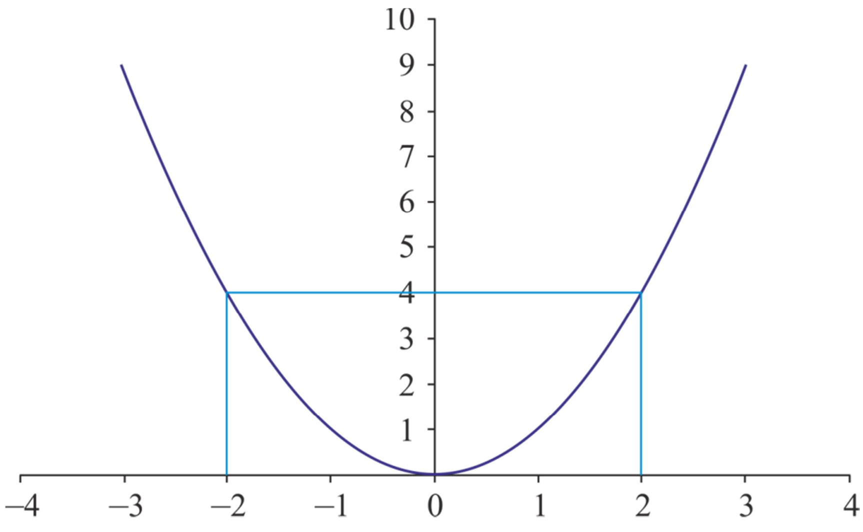


Рис. 1.3 – Выпуклая функция $f(x) = x^2$

Величина $\mu x^1 + (1-\mu)x^2$ определяет множество точек x на интервале $[a;b]$. При μ, равном единице, мы получим точку x^1, в случае если μ равно нулю, – точку x^2. Величина $\mu f\left(x^1\right)+\left(1-\mu\right)f\left(x^2\right)$ определяет множество точек оси ординат, соответствующих точкам интервала $[a;b]$. При μ, равном единице, получим $f\left(x^1\right)$, равном нулю – $f\left(x^2\right)$, равном 0,5 – $\dfrac{f\left(x^1\right)+f\left(x^2\right)}{2}$. Таким образом, $\mu f\left(x^1\right)+\left(1-\mu\right)f\left(x^2\right)$ описывает хорду, соединяющую точки x^1 и x^2. Так, на рисунке 1.3 данное значение в случае, если $x^1=-2$, $x^2=2$, будет постоянно и равно 4. Это равно (в точках x^1 и x^2) или больше (во всех остальных точках), чем значение функции на интервале $\left[x^1;x^2\right]$.

Можно показать, что всякая выпуклая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция является унимодальной. Обратное, вообще говоря, неверно (рис. 1.4).

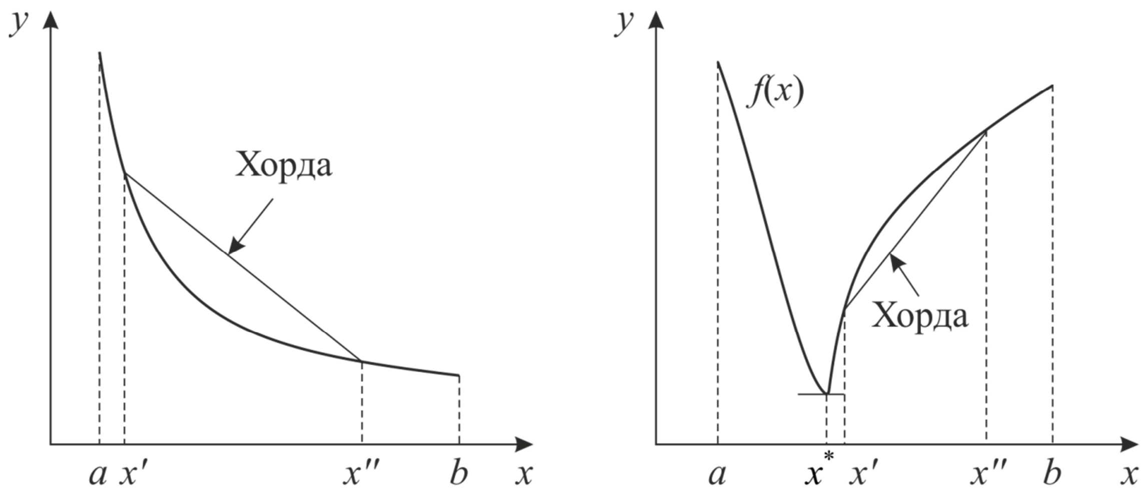
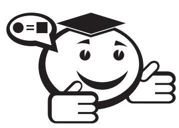


Рис. 1.4 – Выпуклая функция (слева), унимодальная, но не выпуклая функция (справа)

На практике обычно используют следующий критерий: дважды дифференцируемая функция $f(x)$ выпукла на $[a,b]$, если вторая производная $f''(x)\geq 0$ при всех $x\in[a,b]$.



Стационарной точкой *функции* $f(x)$ *называется такая точка* x^**, в которой производная функции равна нулю:*

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^*}=0.$$

Если стационарная точка не соответствует локальному экстремуму, то она является *седловой точкой*.

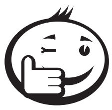
1.2 Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Если в точке x^* первые $(n-1)$ производные функции $f(x)$ обращаются в нуль, а производная порядка n отлична от нуля, т. е.

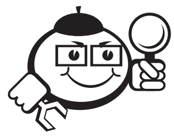
$$f^{(n)} = d^{(n)} f(x) \big/ dx^n \,|_{x=x^*} \neq 0,$$

то

1) если n – нечетное, то x^* – точка перегиба;
2) если n – четное, то x^* – локальный экстремум;
   причем, если
   - $f^{(n)}(x) > 0$, то x^* – точка локального минимума;
   - $f^{(n)}(x) < 0$, то x^* – точка локального максимума [1, 2].



При поиске глобального минимума функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$, необходимо найти все точки локальных минимумов, вычислить в них значения функции, а также вычислить значения функции на границах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ и выбрать среди этих значений наименьшее.



Пример 1.1

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Первая производная равна:

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(x^2\right)' = 2x.$$

Найдем стационарную точку, приравняв к нулю полученное значение производной и выразив x:

$$2x = 0;$$

$$x = 0.$$

Вторая производная равна:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (2x)' = 2.$$

Вторая производная равна $2 > 0$. Следовательно, точка $x^* = 0$ является точкой локального минимума (рис. 1.3).

Таким образом, методика нахождения экстремум на интервале включает следующие шаги:

1. Найти стационарную точку x^* из решения уравнения $f'\left(x^*\right) = 0$.
2. Проверить значение функции в граничных точках интервала и в стационарной точке: $f(a), f(b), f\left(x^*\right)$.
3. Проверить знак $f''\left(x^*\right)$ для оценки типа экстремума.

1.3 Характеристики алгоритмов оптимизации

Прежде чем приступить к решению конкретной задачи оптимизации (ЗО), следует выяснить вопрос, какому из методов оптимизации отдать предпочтение в данном случае. Для этого *необходимо уметь сравнивать методы*, например, *на определенных классах задач* [1].

Очень важна роль *априорных характеристик* методов: трудоемкость вычислений, скорость сходимости, устойчивость метода к ошибкам в вычислениях, чувствительность метода к значениям параметров алгоритма и ряд других.

Сходимость алгоритма является наиболее важным вопросом оптимизации. Большинство методов решения ЗО имеют итерационную природу: $\{x_k\}$, т. е. исходя из некоторой начальной точки x_0, они порождают последовательность $\{x_0, x_1, ..., x_k, ...\}$ на основе алгоритма A, сходящуюся к точке экстремума x^*.

Глобальная сходимость*. Алгоритм А обладает свойством глобальной сходимости, если для любой начальной точки* x_0 *последовательность* $\{x_k\}$, *определяемая выражением* $x_{k+1} = A\left(x_k\right)$, *сходится к точке, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности. Данное свойство отражает надежность работы алгоритма.*

Асимптотическая сходимость и скорость сходимости. С практической точки зрения эффективность алгоритма зависит от числа итераций, необходимых для получения приближенного решения x^* с заданной точностью ε.

Для получения критерия с некоторым абсолютным значением необходимо прибегнуть к другому типу анализа, взяв за объект исследования *асимптотическую сходимость* – поведение последовательности точек $\{x_k\}$ в окрестности предельной точки x^*. Это значит, что каждому алгоритму приписывается *индекс эффективности – скорость сходимости* p:

$$\frac{\left|x_{k+1} - x^*\right|}{\left|x_k - x^*\right|^p} = C,$$

где C – некоторая конечная ненулевая константа.

Наиболее распространены случаи линейной и квадратичной сходимости, когда $p = 1$ и $p = 2$ соответственно.

Исследование скорости сходимости алгоритма позволяет оценить его эффективность и осуществить его сравнение с другими алгоритмами.

Иногда к выражению скорости сходимости последовательности $\{x_k\}$ приходят и при исследовании способа сходимости последовательности $f\left(x_k\right)$ к $f\left(x^*\right)$.

Для оценки эффективности выбранных методов можно рекомендовать три характеристики: *время*, затраченное на получение решения; *точность* решения; *чувствительность* к изменению параметра сходимости. Для одномерных методов оптимизации первые две характеристики можно исследовать на типовых тестовых функциях, например,

$$f\left(x\right) = \sin^k\left(x\right), \quad 0 \le x \ge 2\pi,$$

путем варьирования значений показателя степени k на множестве нечетных чисел от 1 до 79. Отметим, что для всех k $\min f(x)$ достигается в точке $x^* = 3\pi/2 = 4{,}71239$, при этом $f\left(x^*\right) = -1{,}0$. Однако с увеличением k степень гладкости функции, которая обладает узкими впадинами в окрестности x^*, уменьшается. Проверку методов на чувствительность можно осуществить путем варьирования значений параметра сходимости k и параметров алгоритма.

Точность решения можно измерить как относительную (в процентах) ошибку оценивания координаты истинного минимума.

Задача оптимизации функций одной переменной относится к наиболее простому классу оптимизационных задач. Тем не менее, анализ задач такого типа занимает центральное место в оптимизационных исследованиях. Такие задачи обычно решаются в инженерной практике. Вместе с тем, одномерные методы оптимизации часто используются для анализа подзадач, которые возникают при решении многомерных задач оптимизации. Существует большое число методов решения задач с одной переменной.

1.4 Прямые методы поиска минимума

Большую группу приближенных методов минимизации составляют прямые методы, основанные на вычислении только значений минимизируемой функции в некоторых точках и не использующие значения ее производной.

К данному классу относятся такие методы, как метод равномерного поиска, метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи (псевдоним Леонарда Пизанского, первым изучившего эту последовательность в 1202 г.).

В качестве наиболее распространенных критериев останова оптимизационных методов (ε – заданная точность) используются следующие условия:

1) $\left|\Delta x\right| = \left|x^{k+1} - x^{k}\right| \le \varepsilon$;

2) $\left|f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^{k}\right)\right| \le \varepsilon$;

3) $\left|\dfrac{\partial f\left(x\right)}{\partial x}\right|_{x^{k+1}} \le \varepsilon$,

где k – номер итерации.

1.4.1 Метод равномерного поиска

Задается начальный интервал неопределенности $L_0 = \left[a_0, b_0\right]$ и количество вычислений функции N. Вычисления производятся в N равноотстоящих друг от друга точках (при этом интервал L_0 делится на $N+1$ равных интервалов). Путем сравнения величин $f\left(x_i\right)$, $i = 1..N$ находится точка x_k, в которой значение функции наименьшее. Чем больше точек будет выбрано, тем точнее полученное решение.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, N – количество вычислений функции.

Шаг 2. Вычислить точки $x_i = a_0 + i\dfrac{(b_0 - a_0)}{N-1}$, $i = 0..N-1$, равноотстоящие друг от друга.

Шаг 3. Вычислить значения функции в N найденных точках: $f(x_i)$, $i = 0..N-1$.

Шаг 4. Среди точек x_i, $i = 0..N-1$, найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $f(x_k) = \min f(x_i)$.

Пример 1.2

Рассмотрим пример поиска минимума функции $f(x) = x^2$ (рис. 1.5).

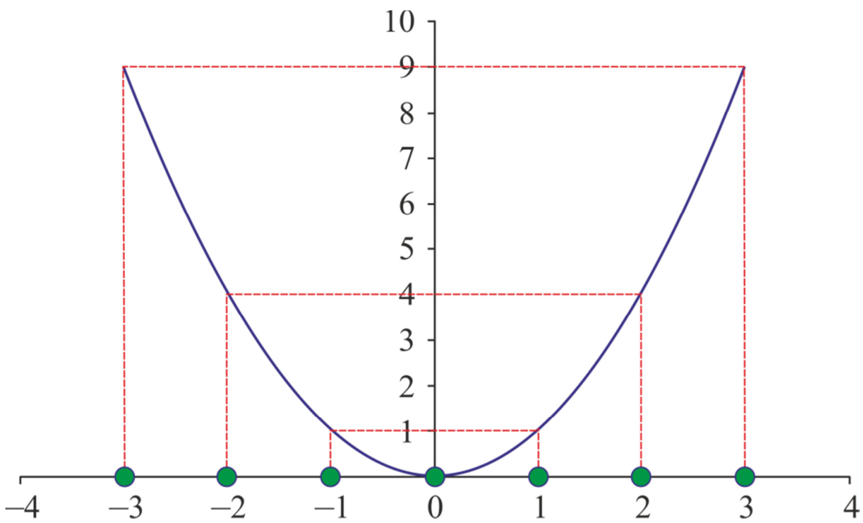


Рис. 1.5 – Поиск минимума функции методом равномерного поиска

Пусть интервал $L_0 = [-3, 3]$, количество вычислений N внутри интервала равно 7. Вычислим точки x_i:

1) $x_0 = -3 + 0 \cdot \dfrac{(3-(-3))}{6} = -3$;

2) $x_1 = -3 + 1 \cdot \dfrac{(3-(-3))}{6} = -2$;

3) $x_2 = -3 + 2 \cdot \dfrac{(3-(-3))}{6} = -1$;

4) $x_3 = -3 + 3 \cdot \dfrac{(3-(-3))}{6} = 0$;

5) $x_4 = -3 + 4 \cdot \dfrac{(3-(-3))}{6} = 1$;

6) $x_5 = -3 + 5 \cdot \dfrac{(3-(-3))}{6} = 2$;

7) $x_6 = -3 + 6 \cdot \dfrac{(3-(-3))}{6} = 3$.

Вычислим значения функции в N найденных точках:

1) $f(x_0) = f(-3) = (-3)^2 = 9$;

2) $f(x_1) = f(-2) = (-2)^2 = 4$;

3) $f(x_2) = f(-1) = (-1)^2 = 1$;

4) $f(x_3) = f(0) = (0)^2 = 0$;

5) $f(x_4) = f(1) = (1)^2 = 1$;

6) $f(x_5) = f(2) = (2)^2 = 4$;

7) $f(x_6) = f(3) = (3)^2 = 9$.

Среди точек x_i, $i = 0..N-1$ минимальное значение, равное 0, функция принимает в точке $x_3 = 0$ (рис. 1.5), следовательно, эта точка и будет решением задачи.

. . . .

1.4.2 Метод дихотомии

Метод относится к последовательным стратегиям. Задаются начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. Для их нахождения текущий интервал неопределенности делится пополам и в обе стороны от середины откладывается по $\dfrac{\varepsilon}{2}$, где ε – малое положительное число. Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, $\varepsilon > 0$ – малое число, $l > 0$ – точность $(\varepsilon \in (0, 2l))$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $y_k = \dfrac{a_k + b_k - \varepsilon}{2}$, $f(y_k)$, $z_k = \dfrac{a_k + b_k + \varepsilon}{2}$, $f(z_k)$.

Шаг 4. Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ и перейти к шагу 5;

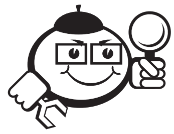
б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$.

Шаг 5. Вычислить $L_k = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $L_k \le l$, процесс поиска завершается и в качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала:

$$x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$$

б) если $L_k > l$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.



Пример 1.3

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ на интервале $[-2, 3]$ (рис. 1.3). Пусть $l = 2$, $\varepsilon = 0,5$.

Вычислим значения y_0 и z_0:

$$y_0 = \frac{a_0 + b_0 - \varepsilon}{2} = \frac{-2 + 3 - 0,5}{2} = 0,25,$$

$$z_0 = \frac{a_0 + b_0 + \varepsilon}{2} = \frac{-2 + 3 + 0,5}{2} = 0,75.$$

Эти точки мы получим, если от середины отрезка $[a_0, b_0]$ отложим в обе стороны величину $\varepsilon/2$.

Значения функции в этих точках (рис. 1.6):

$$f(y_0) = 0,25^2 = 0,0625;$$

$$f(z_0) = 0,75^2 = 0,5625.$$

Т. к. $f(y_0) \le f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = -2$, $b_1 = z_0 = 0,75$.

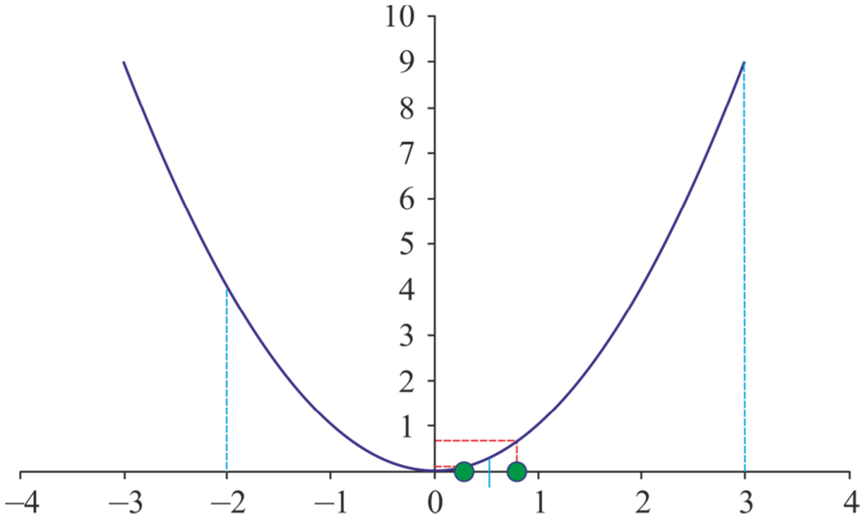


Рис. 1.6 – Первая итерация метода дихотомии

Вычислим длину интервала: $L_0 = |b_1 - a_1| = |0,75 - (-2)| = 2,75$. Значение больше 2, поэтому переходим к следующей реализации.

Вычислим значения y_1 и z_1 (рис. 1.7):

$$y_1 = \frac{a_1 + b_1 - \varepsilon}{2} = \frac{-2 + 0,75 - 0,5}{2} = -0,875;$$

$$z_1 = \frac{a_0 + b_0 + \varepsilon}{2} = \frac{-2 + 0,75 + 0,5}{2} = -0,375.$$

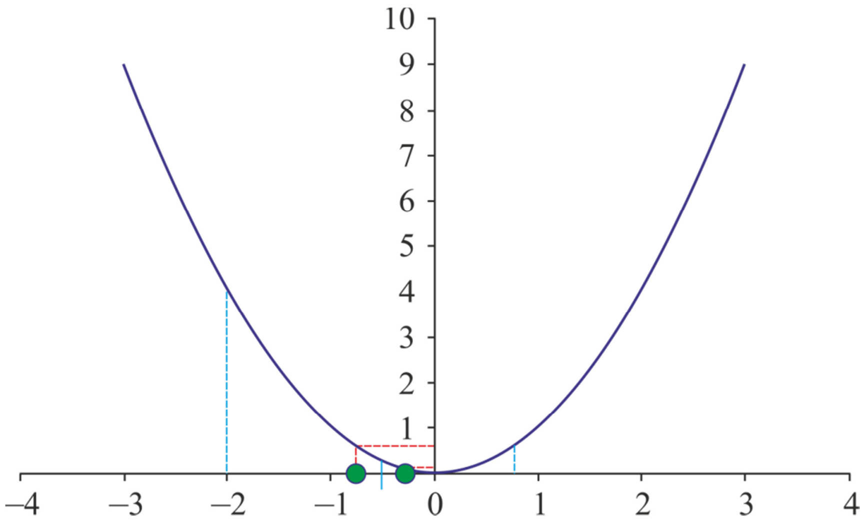


Рис. 1.7 – Вторая итерация метода дихотомии

Значения функции в полученных точках:

$$f(y_1) = (-0,875)^2 = 0,77;$$

$$f(z_1) = (-0,375)^2 = 0,14.$$

Выполняется условие $f(y_k) > f(z_k)$, значит, $a_2 = -0,875, b_2 = 0,75$.

Длина интервала: $L_1 = |b_2 - a_2| = |0,75 - (-0,875)| = 1,625$. Значение меньше двух, следовательно, вычисления завершаются. В качестве решения принимается точка:

$$x^* = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{-0,875 + 0,75}{2} = -0,0625.$$

. . . .

1.4.3 Метод золотого сечения

Задаются начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм уменьшения интервала опирается на анализ значений функции в двух точках. В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения. Тогда с учетом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, точность $l > 0$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить

$$y_0 = a_0 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0); \; z_0 = a_0 + b_0 - y_0.$$

Шаг 4. Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, то положить $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$ и $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$. Перейти к шагу 6;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k$ и $y_{k+1} = z_k, z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$.

Шаг 6. Вычислить $L_k = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $L_k \le l$, процесс поиска завершается и в качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала:

$$x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$$

б) если $L_k > l$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 4.

Пример 1.4

Выполним поиск минимума рассмотренной на рисунке 1.3 функции методом золотого сечения. Пусть начальный интервал равен $[-3;2]$. Точность $l = 2$.

Вычислим величины y_0, z_0 (рис. 1.8):

$$y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) = -3 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(2-(-3)) = -1,09;$$

$$z_0 = a_0 + b_0 - y_0 = -3 + 2 - (-1,09) = 0,09.$$

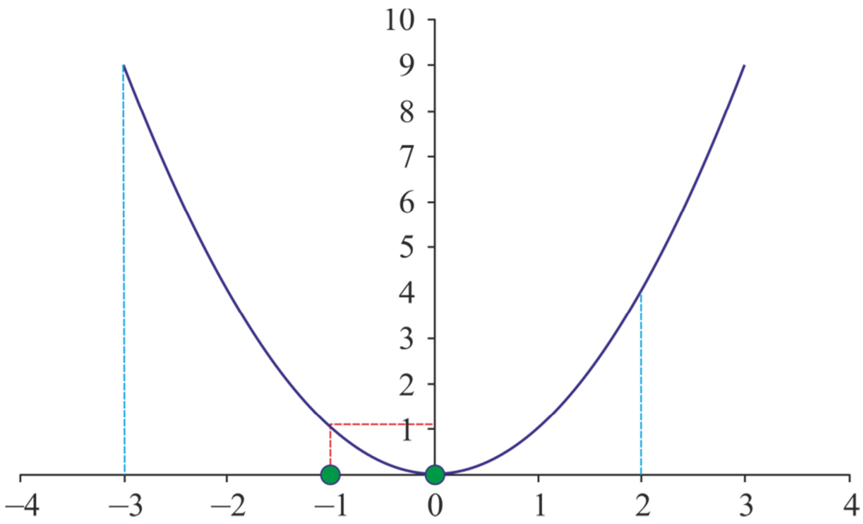


Рис. 1.8 – Нахождение точек золотого сечения (итерация 1)

Значения функции в точках:

$$f(y_0) = (-1,09)^2 = 1,19;$$

$$f(z_0) = (0,09)^2 = 0,01.$$

Выполняется условие: $f(y_0) > f(z_0)$. Значит, $a_1 = -1,09$, $b_1 = 2$, $y_1 = 0,09$, $z_1 = -1,09 + 2 - 0,09 = 0,82$ (рис. 1.9).

Вычисляем $L_k = |b_1 - a_1| = 2 - (-1,09) = 3,09$. Эта величина больше заданной точности $(l = 2)$, поэтому переходим к следующей итерации.

Рассчитаем значения функции в точках y_1, z_1:

$$f(y_1) = (0,09)^2 = 0,01;$$

$$f(z_1) = (0{,}82)^2 = 0{,}67.$$

Так как $f(y_1) \le f(z_1)$, то полагаем $a_2 = -1{,}09, b_2 = 0{,}82$ и $y_2 = -1{,}09 +$ $+ 0{,}82 - 0{,}09 = -0{,}36$, $z_2 = 0{,}09$.

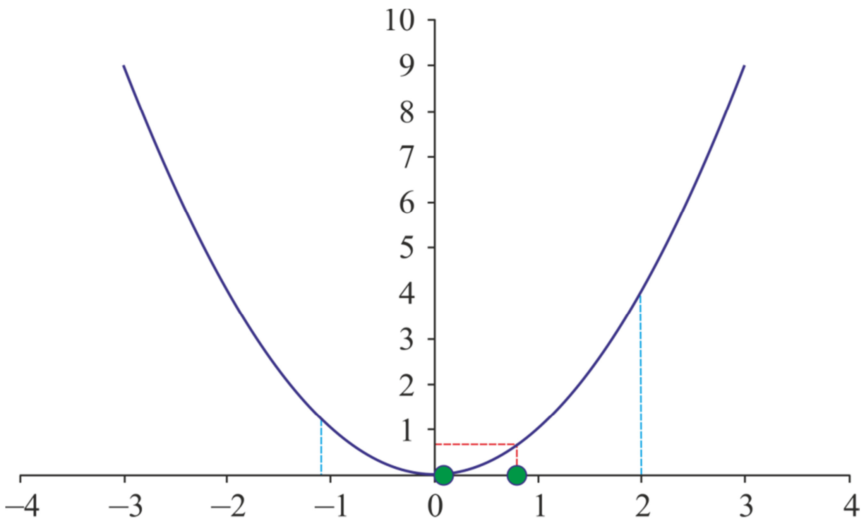


Рис. 1.9 – Нахождение точек золотого сечения (итерация 2)

Вычисляем $L_1 = |b_2 - a_2| = 0{,}82 - (-1{,}09) = 1{,}91$. Полученное значение меньше точности, поэтому поиск минимума завершается и в качестве решения можно взять точку:

$$x^* = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{-1{,}09 + 0{,}82}{2} = -0{,}135.$$

. . . .

Таким образом, алгоритм схож с методом дихотомии, отличие заключается в выборе точек для определения поведения функции: в методе дихотомии малое число откладывалось по обе стороны от средней точки, в методе золотого сечения берутся точки золотого сечения.

1.4.4 Метод Пауэлла

Этот метод основан на последовательном применении процедуры оценивания с использованием квадратичной аппроксимации [2].

Алгоритм

Пусть x_1 – начальная точка; Δx – выбранная величина шага по оси x, $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ – заданные точности.

Шаг 1. Вычислить $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Шаг 2. Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Шаг 3. Если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$, если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \Delta x$. Если $x_3 < x_1$, то перенумеровать точки в естественном порядке: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$.

Шаг 4. Определить $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(x_3)$, найти

$$F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}.$$

$X_{\min}$ равно точке x_i, которая соответствует $F_{\min}$.

Шаг 5. По трем точкам x_1, x_2, x_3 вычислить $\bar{x}$, используя квадратичную аппроксимацию:

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right],$$

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2}.$$

Шаг 6. Проверка на окончание поиска:

а) $\left|F_{\min} - f(\bar{x})\right| \le \varepsilon$;

б) $\left|X_{\min} - \bar{x}\right| \le \delta$.

Если условия а) и б) выполняются одновременно, то закончить поиск (в качестве результата взять точку $\bar{x}$). Иначе переход на шаг 7.

Шаг 7. Выбрать «наилучшую» точку ($X_{\min}$ или $\bar{x}$) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в естественном порядке и перейти на шаг 4.

Замечание: после пятого шага необходимо провести дополнительную проверку, т. к. точка $\bar{x}$ может находиться за интервалом (x_1, x_3). В этом случае точка x_1 заменяется $\bar{x}$ и осуществляется переход к шагу 1.

Пример 1.5

Рассмотрим применение алгоритма для функции (рис. 1.3). Пусть начальная точка равна $x_1 = -2$, $\Delta x = 1{,}5$, $\varepsilon = 1$ и $\delta = 1$.

Вычислим $x_2 = x_1 + \Delta x = -2 + 1{,}5 = -0{,}5$.

$$f(x_1) = (-2)^2 = 4;$$

$$f(x_2) = (-0,5)^2 = 0,25.$$

Так как $f(x_1) > f(x_2)$, то $x_3 = x_1 + 2\Delta x = -2 + 2 \cdot 1,5 = 1$, $f(x_3) = 1^2 = 1$.

$F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\} = 0,25$, $X_{\min} = -0,5$.

По трем точкам x_1, x_2, x_3 вычислим $\bar{x}$, используя квадратичную аппроксимацию (рис. 1.10):

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0,25 - 4}{-0,5 - (-2)} = -2,5;$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right] =$$

$$= \frac{1}{1 - (-0,5)}\left[\frac{1 - 4}{1 - (-2)} - \frac{0,25 - 4}{-0,5 - (-2)}\right] = 1;$$

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2} = \frac{-0,5 - 2}{2} - \frac{-2,5}{2 \cdot 1} = 0.$$

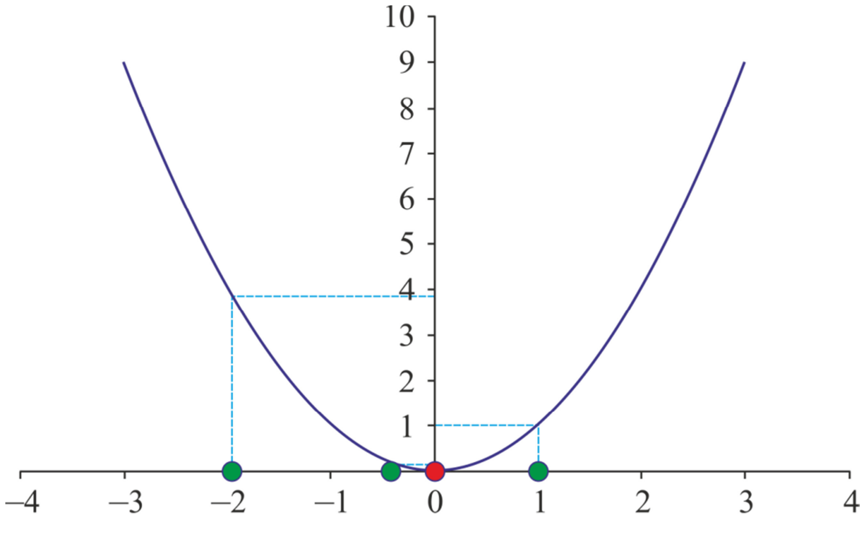


Рис. 1.10 – Метод Пауэлла (первая итерация)

Проверим окончание поиска $\left|F_{\min} - f(\bar{x})\right| \le \varepsilon$:

- условие не выполняется $|0,25 - 0| \le 0,1$;
- $|-0,5 - 0| \le 0,5$ выполняется.

Наилучшей точкой из $X_{\min}$ или $\bar{x}$ является $\bar{x}$, т. к. значение функции в этой точке минимально и равно 0. Нужно выбрать две точки по обе стороны от неё. Это будут точки $-0{,}5$ и 1. Обозначим эти точки в естественном порядке: $x_1=-0{,}5,\ x_2=0,\ x_3=1.$

$$f(x_1)=(-0{,}5)^2=0{,}25;\ f(x_2)=0^2=0;\ f(x_3)=1^2=1.$$

$$F_{\min}=\min\{f_1,f_2,f_3\}=0.$$

$$X_{\min}=0.$$

Вычислим $\bar{x}$ (рис. 1.11):

$$a_1=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{0-0{,}25}{0-(-0{,}5)}=-0{,}5;$$

$$a_2=\frac{1}{x_3-x_2}\left[\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]=$$

$$=\frac{1}{1-0}\left[\frac{1-0{,}25}{1-(-0{,}5)}-\frac{0-0{,}25}{0-(-0{,}5)}\right]=1;$$

$$\bar{x}=\frac{x_2+x_1}{2}-\frac{a_1}{2a_2}=\frac{0-0{,}5}{2}-\frac{-0{,}5}{2\cdot 1}=0.$$

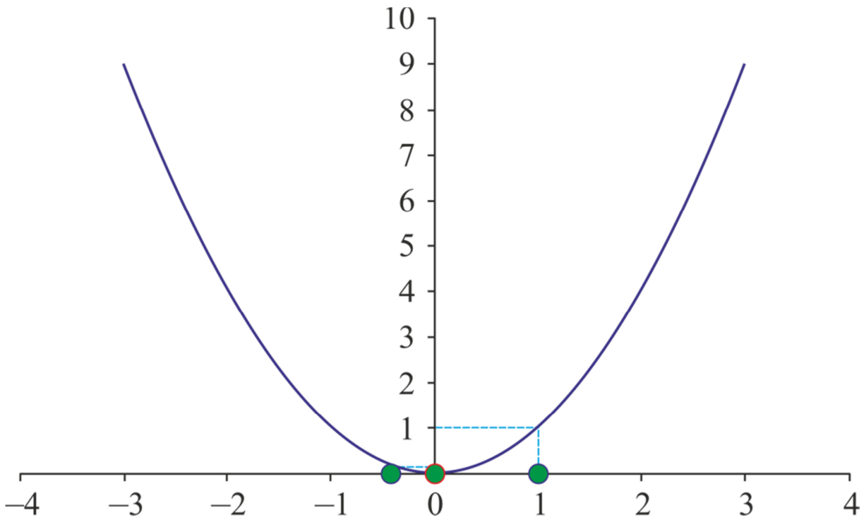


Рис. 1.11 – Метод Пауэлла (вторая итерация)

Проверим окончание поиска $\left|F_{\min}-f(\bar{x})\right|\le\varepsilon$:

- условие $|0-0|\le 0{,}1$ выполняется;
- условие $|0-0|\le 0{,}5$ также выполняется;
- условия окончания поиска выполняются, в качестве решения принимается точка $\bar{x}=0$, значение функции в этой точке равно $f(\bar{x})=0$.

. . . .

1.5 Методы, основанные на использовании производных

Данные методы предполагают вычисление производной, следовательно, к функции предъявляют требование дифференцируемости. Вычисление производной может быть выполнено аналитически либо с помощью формул численного дифференцирования. Приведем простейшие формулы численного дифференцирования.

Вычисление первой производной. В качестве приближенных формул первой производной можно использовать:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Здесь $h > 0$ – шаг.

Формула с большей точностью:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Вычисление второй производной. В качестве приближенных формул второй производной можно использовать:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

1.5.1 Метод Ньютона

Пусть $f(x)$ – унимодальная, дважды дифференцируемая на $L_0 = [a_0, b_0]$ функция [2].

Выбрав начальное приближение x_0, построим последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

Считая неравенство $|f'(x_{n+1})| \le \varepsilon$ (ε – малое число) условием достижения требуемой точности вычислений, положим $x^* \approx x_{n+1}$.

Пример 1.6

Рассмотрим применение данного метода для поиска минимума функции $f(x) = x^2$ (рис. 1.3). Пусть начальная точка $x_0 = 2$, точность $\varepsilon = 0{,}1$.

Первая производная равна:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x,$$

$$f'(x_0) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Вторая производная:

$$f''(x) = (2x)' = 2.$$

Новое значение x равно:

$$x_1 = 2 - \frac{2 \cdot 2}{2} = 0.$$

Выполним проверку условия: $\left|f'(x_1)\right| \le \varepsilon$, $\left|f'(x_1)\right| = 2 \cdot 0 = 0$. Данное значение меньше точности ε, следовательно, выполнение алгоритма завершается и в качестве решения принимается точка $x^* = x_1 = 0$.

. . . .

1.5.2 Метод средней точки

Пусть $f(x)$ – унимодальная, дифференцируемая на $L_0 = [a_0, b_0]$ функция. Рассмотрим алгоритм метода средней точки [2].

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, $\varepsilon > 0$ – точность.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить среднюю точку $z_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, $f'(z_k)$.

Шаг 4. Сравнить $f'(z_k)$ с нулем:

а) если $f'(z_k) < 0$, положить $a_{k+1} = z_k, b_{k+1} = b_k$ и перейти к шагу 5;

б) если $f'(z_k) > 0$, положить $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$.

Шаг 5. Проверить условие окончания:

а) если $\left|f'(z_k)\right| \le \varepsilon$, процесс поиска завершается и в качестве приближенного решения можно взять точку $x^* = z_k$;

б) если $\left|f'(z_k)\right| > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

Пример 1.7

Рассмотрим поиск минимума функции $f(x)=(x+2)^2$ методом средней точки на интервале $[-5;0]$, $\varepsilon=0{,}5$ (рис. 1.12). Как видно из рисунка, минимальное значение функции, равное нулю, наблюдается в точке -2.

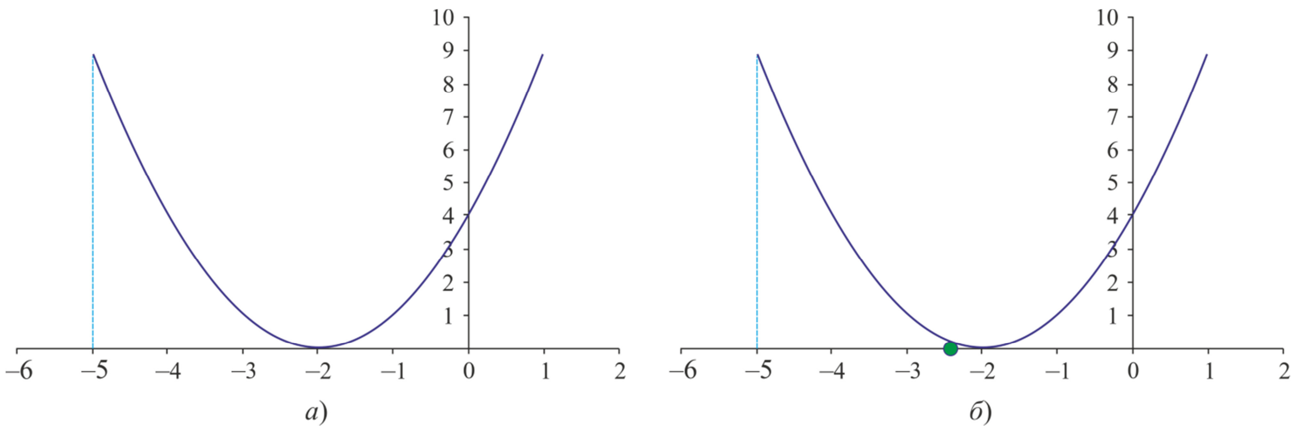


Рис. 1.12 – График функции $f(x)=(x+2)^2$

Вычислим $z_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{-5+0}{2}=-2{,}5$ (рис. 1.12, *б*).

Производная функции равна:

$$f'(x)=2(x+2).$$

Значение производной в средней точке z_0:

$$f'(-2{,}5)=2(-2{,}5+2)=-1.$$

Так как $f'(z_0)<0$, то положим $a_1=z_0=-2{,}5, b_1=b_0=0.$

Поскольку $|f'(z_0)|>\varepsilon$, то переходим к расчету новой средней точки.

$z_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}=\dfrac{-5+0}{2}=-1{,}25$ (рис. 1.13, *а*).

Значение производной в средней точке z_1:

$$f'(-1{,}25)=2(-1{,}25+2)=1{,}5.$$

Так как $f'(z_1)>0$, установим $a_2=a_1=-2{,}5, b_2=z_1=-1{,}25.$

Критерий останова снова не выполняется.

$z_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}=\dfrac{-2{,}5-1{,}25}{2}=-1{,}875$ (рис. 1.13, *б*).

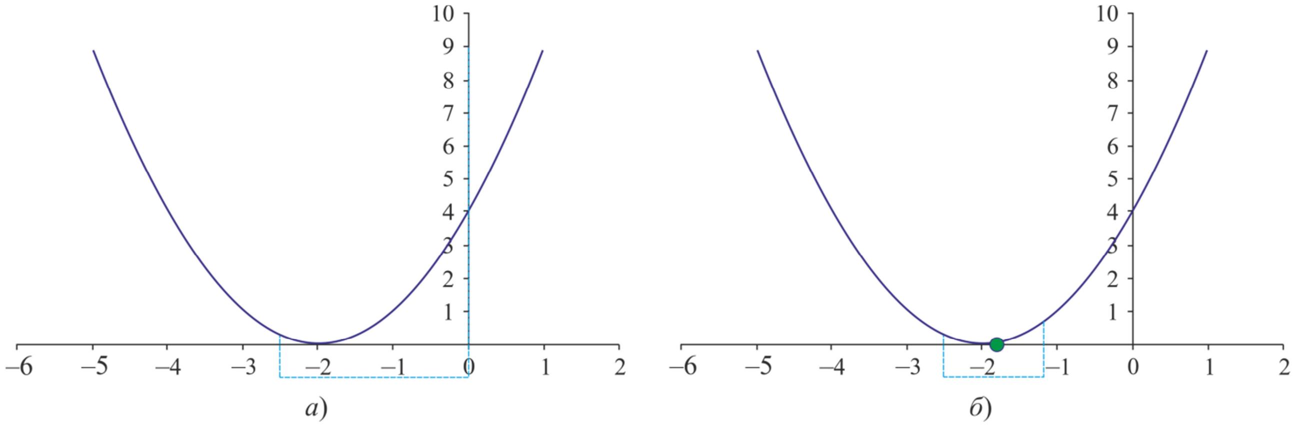


Рис. 1.13 – Вторая и третья итерации метода средней точки

Значение производной

$$f'(-1{,}875) = 2(-1{,}875 + 2) = 0{,}25.$$

$f'(z_2) > 0$, поэтому установим $a_3 = a_2 = -2{,}5,\ b_3 = z_2 = -1{,}875.$

Условие $|f'(z_2)| < 0{,}5$ выполняется, поэтому работа алгоритма завершается и в качестве решения принимается точка $z_2 = -1{,}875.$

. . . .

1.6 Решение задачи определения цены на товар

Предприятие, изменяя цену на товар $price$, фиксировало значение спроса $demand$. В итоге с помощью метода наименьших квадратов была построена функция зависимости спроса от цены:

$$demand = 90 - 17{,}92 \cdot price.$$

Тогда зависимость выручки $income$ предприятия от цены может быть представлена с помощью уравнения:

$$income = price \cdot (90 - 17{,}92 \cdot price).$$

График этой функции представлен на рисунке 1.14.

Задача заключается в определении цены, при которой выручка будет максимальной. Задачу определения максимума функции можно свести к задаче определения минимума путем умножения функции на -1. Тогда минимизируемая функция имеет вид:

$$f(price) = -price \cdot (90 - 17{,}92 \cdot price).$$

Воспользуемся методом равномерного поиска на интервале $[0;5]$ с шагом $0{,}1$. Результаты представлены в таблице 1.1.

Минимальное значение функции достигается в точке $price = 2{,}5$.

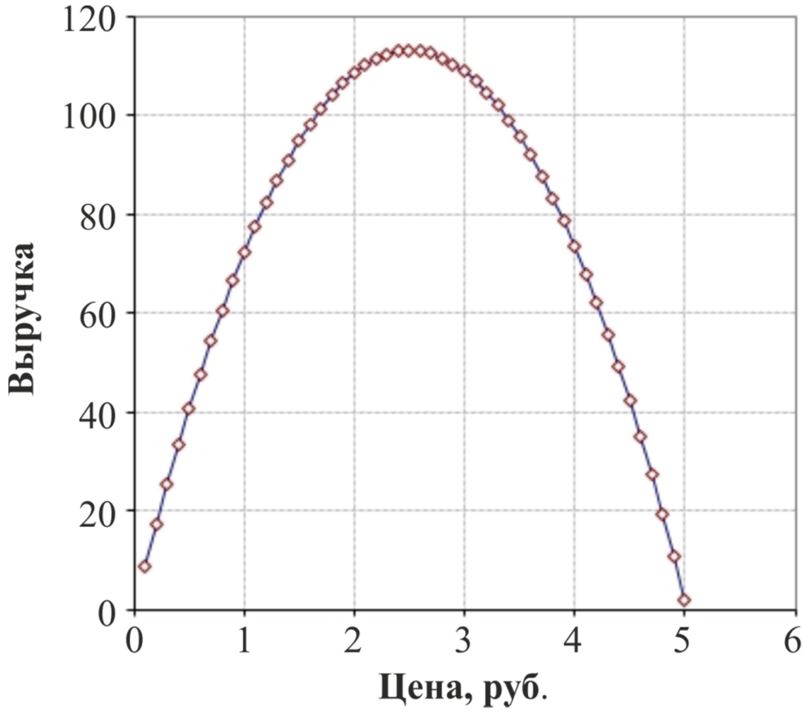


Рис. 1.14 – Зависимость выручки от цены

Таблица 1.1 – Результаты равномерного поиска

price	0	0,1	…	2,4	2,5	2,6	…	4,9	5
$f(price)$	0	–8,821		–112,781	–113	–112,861		–10,741	–2

Решим задачу с использованием метода Ньютона (начальная точка $x_0 = 5$, $\varepsilon = 0{,}1$). Для этого будем использовать итерационную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

Производная функции имеет вид:

$$f'(x_n) = 35{,}84x_n - 90.$$

В начальной точке значение производной функции равно 89,2:

$$f'(5) = 35{,}84 \cdot 5 - 90 = 89{,}2.$$

Значение второй производной равно $f''(x_n) = 35{,}84$.

Вычислим значение новой точки:

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 5 - \frac{89{,}2}{35{,}84} = 2{,}511.$$

Выполним проверку условия: $\left|f'(x_1)\right| \le \varepsilon$, $\left|f'(x_1)\right| = 35,84 \cdot 2,511 - 90 = 0$. Данное значение меньше точности ε, следовательно, выполнение алгоритма завершается и в качестве решения принимается точка $x^* = x_1 = 2,511$.

1.7 Сравнение методов одномерной оптимизации

С помощью теоретических выкладок можно показать, что такие методы точечного оценивания, как метод Пауэлла, метод поиска с использованием производных, существенно эффективнее методов исключения интервалов, среди которых выделяется метод золотого сечения. Данный вывод справедлив лишь в предположении, что интервалы сходимости сравнимы между собой, а исследуемая функция является достаточно гладкой и унимодальной. Выбор того или иного метода определяется из следующих соображений [1]:

1. Если необходимо получить решение с очень высокой степенью точности, то лучшими оказываются методы на основе полиномиальной аппроксимации.
2. Если важно добиться надежной работы алгоритма, то целесообразно выбрать метод золотого сечения (МЗС).
3. Поисковые методы типа метода Пауэлла следует использовать совместно с МЗС, когда возникают затруднения с реализацией соответствующих итераций на ЭВМ.

Для оценки эффективности методов обычно используются три характеристики:

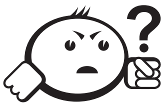
- время, затраченное на получение решения;
- точность решения;
- чувствительность к изменениям параметра сходимости.

Например, метод средней точки, метод Пауэлла могут быть исследованы при поиске минимума функции $f(x) = \sin^k(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ для различных нечетных значений k:

$$k \in [1,79],\ x^* = 4,71239,\ f\left(x^*\right) = -1,0 \text{ для любого } k.$$

При возрастании значения k увеличивается время решения и уменьшается точность. Однако МЗС не чувствителен к росту k.

В заключение отметим, что МЗС обладает высокой вычислительной эффективностью и простотой реализации. Методы точечного оценивания позволяют определить точки экстремума с помощью квадратичной аппроксимации целевой функции. Если интервалы сходимости сравнимы между собой, а целевая функция гладкая и унимодальная, то методы точечного оценивания сходятся значительно быстрее, чем методы исключения интервалов. Однако при исследовании мультимодальных или быстроизменяющихся функций (типа $f(x) = \sin^k x$, которая обладает узкими впадинами вблизи точки минимума) наиболее надежным оказывается метод золотого сечения.



Контрольные вопросы по главе 1

1. Какая точка называется точкой глобального минимума?
2. Какая точка называется точкой локального минимума?
3. Какая функция называется унимодальной?
4. Какая функция называется выпуклой?
5. Какая точка называется стационарной?
6. Какая точка называется седловой?
7. В чем суть метода равномерно поиска?
8. В чем суть метода дихотомии?
9. В чем суть метода Ньютона?
10. В чем суть метода средней точки?

2 Методы многомерной оптимизации функций

Задачи, которые будут рассмотрены в этой части, имеют следующий вид: найти

$$\min f(x),$$

где $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $x_i \in (-\infty, \infty)$.

Для выпуклой непрерывно дифференцируемой функции для существования локального минимума необходимо и достаточно лишь выполнение равенства: $\nabla f(x^*) = 0$.

Методы, ориентированные на решение задач безусловной оптимизации, можно условно разделить на три больших класса:

- *методы прямого поиска* (нулевого порядка), основанные на вычислении только значений ЦФ;
- *градиентные методы* (методы 1-го порядка), в которых используются значения первых производных;
- *методы 2-го порядка*, в которых используются также вторые производные целевой функции $f(x)$.

Ни один метод или класс методов не отличается высокой эффективностью при решении оптимизационных задач различных типов. В некоторых ситуациях вычисление значений ЦФ требует чрезмерных затрат времени. Иногда невозможно или очень трудно найти аналитическое выражение для производных целевой функции. Поэтому при использовании градиентных методов следует применять процедуру разностной аппроксимации производных. Таким образом, в каждом конкретном случае необходимо приспосабливать применяемый метод к конкретным характеристикам решаемой ЗО.

2.1 Методы прямого поиска

Рассмотрим три метода прямого поиска локального минимума:

1. Метод Гаусса.
2. Поиск по симплексу, или s^2-метод.
3. Метод Хука – Дживса.

Достоинства данных методов: относительная простота вычислительных процедур, легкость реализации и корректировки.

Недостатки: значительные затраты времени по сравнению с градиентными методами.

2.1.1 Метод Гаусса

Это простейший алгоритм, заключающийся в том, что на каждом шаге (каждой итерации) минимизация осуществляется только по одной компоненте вектора переменных x (остальные равны фиксированным значениям). Таким образом, алгоритм сводится к многократному выполнению процедуры одномерной оптимизации. В качестве критериев останова могут быть использованы следующие условия:

$$\left\|x^j - x^{j-1}\right\| \le \varepsilon_1,\ \left|f\left(x^j\right) - f\left(x^{j+1}\right)\right| \le \varepsilon_2.$$

Пример 2.1

Рассмотрим пример минимизации функции $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$ (рис. 2.1).

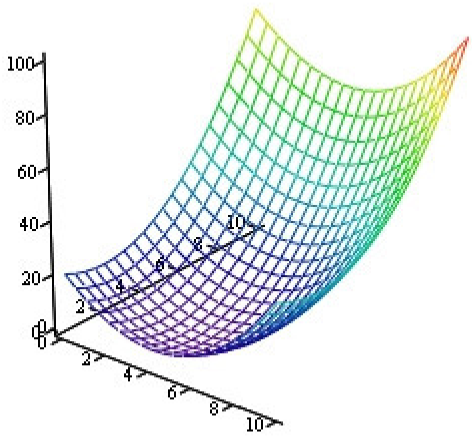


Рис. 2.1 – График функции $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$

Пусть начальная точка равна $x^0 = (-10;-10)$. Значение функции в этой точке равно $f\left(x^0\right) = (-10-4)^2 + (-10-2)^2 = 340$. Зафиксировав значение $x_2 = -10$, определим минимум функции $f(x_1) = (x_1 - 4)^2 + (-10-2)^2$ на интервале $[0;10]$. Используем метод равномерного поиска с шагом 1 (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Равномерный поиск минимума функции $f(x_1) = (x_1 - 4)^2 + (-10 - 2)^2$

x_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_1)$	160	153	148	145	144	145	148	153	160	169	180

Из таблицы 2.1 видно, что минимальное значение функции наблюдается в точке $x_1 = 4$. Зафиксируем полученное значение x_1, найдем значение x_2, при котором минимальна функция $f(x_2) = (4 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$ (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Равномерный поиск минимума функции $f(x_2) = (4 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$

x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_2)$	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49	64

Минимум функции находится в точке $x_2 = 2$. Таким образом, полученная точка $x^1 = (4;2)$, значение функции в этой точке равно 0: $f(x) = (4 - 4)^2 + (2 - 2)^2 = 0$.

Поверим условие останова $\left| f\left(x^j\right) - f\left(x^{j+1}\right) \right| \le \varepsilon_2$ (при $\varepsilon_2 = 0{,}1$):

$$\left| f\left(x^0\right) - f\left(x^1\right) \right| = |340 - 0| = 340.$$

Значение больше 0,1, следовательно, условие останова не выполняется.

Зафиксируем точку $x_2 = 2$ найдем минимум функции $f(x_1) = (x_1 - 4)^2 + (2 - 2)^2$ на интервале $[0;10]$. Полученное значение, так же как и на предыдущей итерации, равно $x_1 = 4$. Фиксируя это значение, снова получим, что $x_2 = 2$ и точка $x^2 = (4;2)$.

Поверим условие останова:

$$\left| f\left(x^1\right) - f\left(x^2\right) \right| = 0,$$

значение меньше 0,1, следовательно, работа алгоритма завершается. В качестве решения принимается точка $x^* = (4;2)$.

. . . .

2.1.2 Симплексный метод

Метод поиска по симплексу был предложен в 1962 г. Спендли (W. Spendley), Хекстом (G. R. Hext) и Химсвортом (F. R. Himsworth). Этот метод называют *последовательным симплекс-методом* (ПСМ). Следует отметить, что указанный метод и другие подобные методы не имеют отношения к симплекс-методу линейного программирования (ЛП), а сходство названий носит чисто случайный характер.

*В k-мерном эвклидовом пространстве **k-мерный симплекс** представляет собой фигуру, образованную $k+1$ точками (вершинами), не принадлежащими одновременно ни одному пространству меньшей размерности* [2].

В одномерном пространстве симплекс есть отрезок прямой; в двумерном – треугольник; в трехмерном – треугольная пирамида (тетраэдр) и т. д.

Из любого симплекса, отбросив одну его вершину, можно получить новый симплекс, если к оставшимся добавить всего лишь одну точку.

***Симплекс** называется **регулярным**, если расстояния между вершинами равны. В ПСМ используются регулярные симплекс-планы.*

Для оценки направления движения во всех вершинах симплекса V_j, $j=1,2,\ldots,n+1$, где n – размерность вектора x, необходимо оценить значение ЦФ $f_j = f\left(V_j\right)$.

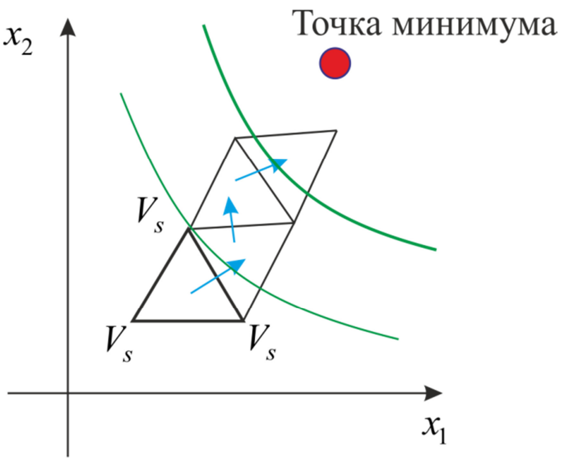


Рис. 2.2 – Траектория движения по симплексу

При поиске минимума наиболее целесообразно будет движение от вершины V_s с наибольшим значением f_s к противоположной грани симплекса. Шаг поиска выполняется переходом из некоторого симплекса S_{m-1} в новый симплекс S_m путем исключения вершины V_s и построения ее зеркального отображения относительно общей грани V_s (рис. 2.2). Многократное отражение худших вершин приводит к шаговому движению центра симплекса к цели по траектории некоторой ломаной линии.

Алгоритм ПСМ

Шаг 1. Задается исходная вершина симплекса [1].

$$x^0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right).$$

Задается коэффициент сжатия $\gamma \in [0,1]$ и размер симплекса L. Строится симплекс:

$$\left(x_i^j\right) = \begin{pmatrix} x_1^0 & ... & x_n^0 \\ x_1^1 & ... & x_n^1 \\ ... & ... & ... \\ x_1^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \\ x_1^n & ... & x_n^n \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь j-я строка – это координаты j-й вершины V_j $\left(j = 1, ..., n+1\right)$, где n – размерность пространства (размерность вектора x), i – номер координаты $i = 1, ..., n$.

Определение координат x_i^j, начиная со второй, производится по формуле

$$x_i^j = x_i^0 + \tilde{x}_i^j, \quad \left(j = 1, ..., n; i = 1, ..., n\right), \quad (2.2)$$

где $\tilde{x}_i^j$ – матрица размерности $\left(n+1\right) \times n$.

$$\left(\tilde{x}_i^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ p_n & q_n & q_n & ... & q_n \\ q_n & p_n & q_n & ... & q_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ q_n & q_n & q_n & ... & p_n \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $p_n = \dfrac{L}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1} + n - 1\right)$, $q_n = \dfrac{L}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$.

Векторы, соответствующие вершинам $V_1,...,V_n$, определяемые формулой (2.2), составят одинаковые углы с координатными осями $x_1,...,x_n$.

Шаг 2. В вершинах симплекса вычисляется ЦФ $f\left(x^j\right),\ j=0,...,n.$

Шаг 3. Проверяем условия: $\left\|x^j - x^{j-1}\right\| \le \varepsilon_1,\ \left|f\left(x^j\right) - f\left(x^{j+1}\right)\right| \le \varepsilon_2.$

Если «да», то конец; если «нет», то переходим на шаг 4.

Шаг 4. Находится «наихудшая» вершина симплекса (при поиске минимума «наихудшая» вершина – та, в которой значение функции максимально).

$$f\left(x^p\right) = \max_j \left\{ f\left(x^j\right), j = \overline{1, n+1} \right\}.$$

Шаг 5. Осуществляется расчет координат новой вершины (вершина отражения x^p):

$$\tilde{x}^p = \frac{2}{n}\left(\sum_{j=0}^{n} x^j - x^p\right) - x^p.$$

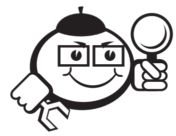
Шаг 6. Если точка $\tilde{x}^p$ оказывается «хуже» всех остальных точек симплекса, то осуществляется возврат к исходному симплексу с последующим его сжатием относительно «лучшей» из вершин x^k:

$$f\left(x^k\right) = \min_j \left\{ f\left(x^j\right), j = \overline{1, n+1} \right\};$$

$$\tilde{x}^s = \gamma x^k + \left(1-\gamma\right) x^s,\ s = 0,1,...,n;\ s \ne k.$$

Переход на шаг 2.

Если $\tilde{x}^p$ не является «худшей» в новом симплексе, то перейти на шаг 3.



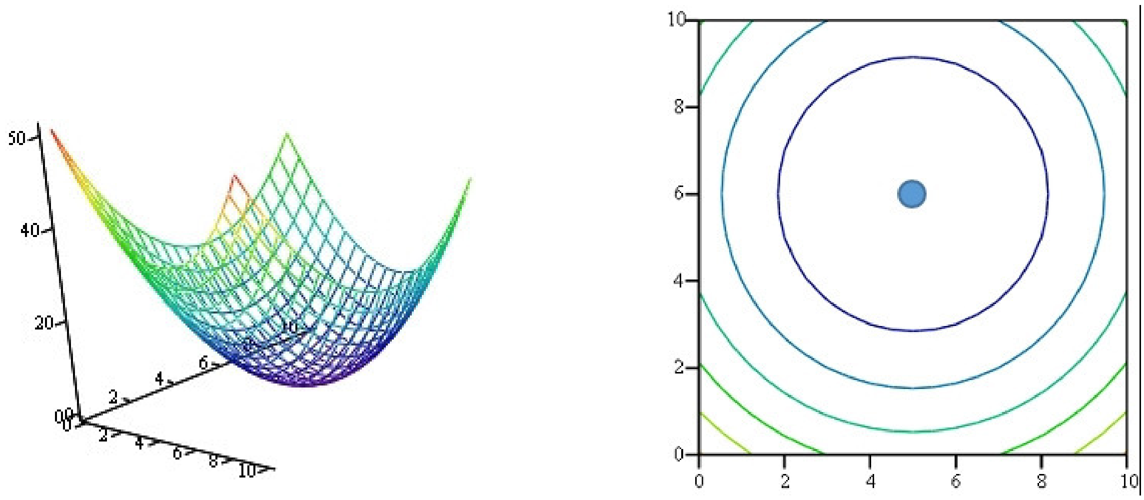
Пример 2.2

Рассмотрим пример оптимизации функции $f\left(x\right) = \left(x_1 - 5\right)^2 + \left(x_2 - 6\right)^2$ $\left(\gamma = 0{,}5\right)$. Минимальное значение функции находится в точке $\left(5;6\right)$ (рис. 2.3).

Пусть длина ребра симплекса равна $L = 2$, размерность пространства равна 2, $\varepsilon_1 = 1{,}3$, $\varepsilon_2 = 1$. Тогда

$$p_n = \frac{L}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1} + n - 1\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+1} + 2 - 1\right) = 1{,}932;$$

$$q_n = \frac{L\left(\sqrt{n+1} - 1\right)}{n\sqrt{2}} = \frac{2\left(\sqrt{2+1} - 1\right)}{2\sqrt{2}} = 0{,}518.$$



а) *б*)

Рис. 2.3 – *а*) график функции $f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$;
б) контурный график

Матрица $\tilde{x}_i^j$ (2.1):

$$\tilde{x}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1{,}932 & 0{,}518 \\ 0{,}518 & 1{,}932 \end{pmatrix}.$$

Пусть точка $x^0 = (2;2)$. Тогда матрица

$$\left(x_i^j\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3{,}932 & 2{,}518 \\ 2{,}518 & 3{,}932 \end{pmatrix}.$$

То есть значения матрицы $\tilde{x}_i^j$ (2.3) увеличены на 2 (2.2).

В вершинах симплекса вычислим ЦФ:

$$f\left(x^0\right) = f(2,2) = (2-5)^2 + (2-6)^2 = 25;$$

$$f\left(x^1\right) = f(3{,}932, 2{,}518) = (3{,}932-5)^2 + (2{,}518-6)^2 = 13{,}268;$$

$$f\left(x^2\right) = f(2{,}518, 3{,}932) = (2{,}518-5)^2 + (3{,}932-6)^2 = 10{,}439.$$

Проверяем условия: $\left\|x^j - x^{j-1}\right\| \le \varepsilon_1$, $\left|f\left(x^j\right) - f\left(x^{j+1}\right)\right| \le \varepsilon_2$.

Разность значений функции в двух вершинах симплекса:

$$\left|f\left(x^0\right) - f\left(x^1\right)\right| = |25 - 13{,}268| = 11{,}732;$$

$$\left|f\left(x^1\right) - f\left(x^2\right)\right| = |13{,}268 - 10{,}439| = 2{,}828;$$

$$\left|f\left(x^2\right) - f\left(x^0\right)\right| = |10{,}439 - 25| = 14{,}561.$$

Расстояние между точками:

$$\left\|x^1-x^0\right\|=\sqrt{\left(3{,}932-2\right)^2+\left(2{,}518-2\right)^2}=2.$$

Полученные значения превышают ε_1 и ε_2. Поэтому продолжаем вычисления.

Наихудшей вершиной является вершина x^0, поскольку значение функции в этой точке максимально и равно 25.

Вычислим координаты новой вершины:

$$\tilde{x}^0=\frac{2}{n}\left(\sum_{j=0}^{n}x^j-x^0\right)-x^0=(4{,}449;4{,}449).$$

Значение функции в этой точке равно 2,707:

$$f\left(4{,}449{,}4{,}449\right)=\left(4{,}449-5\right)^2+\left(4{,}449-6\right)^2=2{,}707.$$

Следовательно, точка не является наихудшей. Обозначим её x^0.

Условие останова не выполняется:

$$\left|f\left(x^0\right)-f\left(x^1\right)\right|=\left|2{,}707-13{,}268\right|=10{,}561;$$

$$\left|f\left(x^1\right)-f\left(x^2\right)\right|=\left|13{,}268-10{,}439\right|=2{,}828;$$

$$\left|f\left(x^2\right)-f\left(x^0\right)\right|=\left|10{,}439-2{,}707\right|=7{,}732.$$

Наихудшей вершиной является вершина x^1, поскольку значение функции в этой точке максимально и равно 13,268.

Вычислим координаты новой вершины:

$$\tilde{x}^1=\frac{2}{n}\left(\sum_{j=0}^{n}x^j-x^1\right)-x^1=\left(3{,}035;5{,}864\right).$$

Значение функции в этой точке равно 3,879:

$$f\left(3{,}035{,}5{,}864\right)=\left(3{,}035-5\right)^2+\left(5{,}864-6\right)^2=3{,}879.$$

Точка не является наихудшей. Эта точка становится точкой x^1.

Условие останова не выполняется:

$$\left|f\left(x^0\right)-f\left(x^1\right)\right|=1{,}172;$$

$$\left|f\left(x^1\right)-f\left(x^2\right)\right|=6{,}561;$$

$$\left|f\left(x^2\right)-f\left(x^0\right)\right|=7{,}732.$$

Наихудшей вершиной является вершина x^2, поскольку значение функции в этой точке максимально и равно 10,432.

Вычислим координаты новой вершины:

$$\tilde{x}^2 = \frac{2}{n}\left(\sum_{j=0}^{n} x^j - x^2\right) - x^2 = \left(4,967; 6,381\right).$$

Значение функции в этой точке равно 0,147. Точка не является наихудшей. Эта точка становится точкой x^2.

Условие останова не выполняется:

$$\left|f\left(x^0\right) - f\left(x^1\right)\right| = 1,172;$$

$$\left|f\left(x^1\right) - f\left(x^2\right)\right| = 3,732;$$

$$\left|f\left(x^2\right) - f\left(x^0\right)\right| = 2,561.$$

Наихудшей вершиной является вершина x^1, поскольку значение функции в этой точке максимально и равно 3,879.

Вычислим координаты новой вершины:

$$\tilde{x}^1 = \frac{2}{n}\left(\sum_{j=0}^{n} x^j - x^1\right) - x^1 = \left(6,381; 4,967\right).$$

Значение функции в этой точке равно 2,975. Точка $\tilde{x}^1$ оказалась «хуже» всех остальных точек симплекса, осуществляется возврат к исходному симплексу с последующим его сжатием относительно «лучшей» из вершин – x^2:

$$\tilde{x}^s = \gamma x^k + \left(1-\gamma\right)x^s,\ s = 0,1,\dots,n;\ s \neq k,$$

$$\tilde{x}^0 = 0,5x^2 + \left(1-0,5\right)x^0 = \begin{pmatrix} 4,708 \\ 5,415 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{x}^1 = 0,5x^2 + \left(1-0,5\right)x^1 = \begin{pmatrix} 4,001 \\ 6,123 \end{pmatrix}.$$

Значения функции в новых точках равно $\left(f\left(x^2\right) = 0,147\right)$:

$$f\left(\tilde{x}^0\right) = 0,427;$$

$$f\left(\tilde{x}^1\right) = 1,013.$$

Выполним проверку критерия останова:

$$\left|f\left(x^0\right)-f\left(x^1\right)\right|=0,586;$$

$$\left|f\left(x^1\right)-f\left(x^2\right)\right|=0,281;$$

$$\left|f\left(x^2\right)-f\left(x^0\right)\right|=0,867.$$

$$\left\|x^1-x^0\right\|=\sqrt{\left(4,001-4,708\right)^2+\left(6,123-5,415\right)^2}=1.$$

Условие останова выполняется, т. к. полученные значения меньше ε_1 и ε_2.

В качестве решения примем точку $x^2=\begin{pmatrix}4,967\\6,381\end{pmatrix}$, в которой функция минимальна и равна 0,147.

На рисунке 2.4 представлено перемещение симплекса к точке минимума.

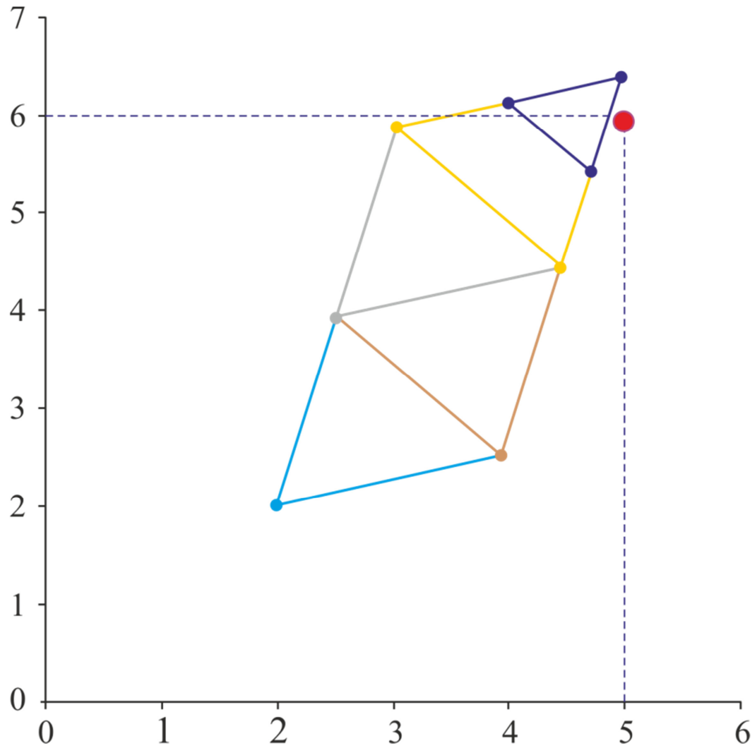


Рис. 2.4 – Перемещение симплекса

. . . .

2.1.3 Метод Хука – Дживса

Процедура Хука – Дживса представляет собой комбинацию двух поисков [2]:

1) *исследующий поиск* (для выявления характера локального поведения ЦФ и определения направления движения вдоль «оврагов») с циклическим изменением переменных;

2) *ускоряющий поиск по образцу* с использованием определенных эвристических правил.

Исследующий поиск. Выбирается некоторая исходная точка x^0. Задается величина шага Δ_i, которая может быть различной для разных координатных направлений и изменяться в процессе поиска.

Если значение ЦФ в пробной точке меньше значения ЦФ в исходной точке, то шаг поиска успешный. В противном случае из исходной точки делается шаг в противоположном направлении. После перебора всех n координат исследующий поиск завершается. Полученная точка называется *базовой.*

Поиск по образцу. Осуществляется шаг из полученной базовой точки вдоль прямой, соединяющей эту точку с предыдущей базовой. Новая точка образца определяется по формуле:

$$x_p^{k+1} = x^k + \left(x^k - x^{k-1}\right).$$

Как только движение по образцу не приводит к уменьшению ЦФ, точка x_p^{k+1} фиксируется в качестве временной базовой точки и вновь проводится исследующий поиск. Если в результате получается точка с меньшим значением ЦФ, чем в точке x^k, то она рассматривается как новая базовая точка x^{k+1}. Но если исследующий поиск неудачен, то следует вернуться в точку x^k и провести исследующий поиск с целью выявления нового направления минимизации. В конечном итоге возникает ситуация, когда такой поиск не приводит к успеху. В этом случае уменьшается шаг путем введения коэффициента α и возобновляется исследующий поиск.

Схема алгоритма Хука – Дживса

Введем следующие обозначения: x^k – текущая базовая точка; x^{k-1} – предыдущая базовая точка; x_p^{k+1} – точка, построенная при движении по образцу; x^{k+1} – следующая (новая) базовая точка [2].

Критерий останова: $\|\Delta x\| \le \varepsilon$.

Шаг 1. Определить начальную точку x^0; приращения (шаги) $\Delta_i, i = \overline{1,n}$; коэффициент уменьшения шага $\alpha > 1$; параметр окончания поиска ε.

Шаг 2. Провести исследующий поиск.

Шаг 3. Был ли исследующий поиск удачным (найдена ли точка с меньшим значением ЦФ)?

Да: переход на шаг 5. Нет: продолжить, т. е. переход на шаг 4.

Шаг 4. Проверка на окончание поиска. Выполняется ли неравенство $\|\Delta x\| \le \varepsilon$? Да: окончание поиска, т. е. текущая точка аппроксимирует точку экстремума x^*.

Нет: уменьшить приращение Δ_i / α; $i = 1, 2, \dots, n$. Переход на шаг 2.

Шаг 5. Провести поиск по образцу: $x_p^{k+1} = x^k + \left(x^k - x^{k-1}\right)$.

Шаг 6. Провести исследующий поиск, используя точку x_p^{k+1} в качестве временной базовой точки. Пусть в результате получена точка x^{k-1}.

Шаг 7. Выполняется ли неравенство: $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$?

Да: положить $x^{k-1} = x^k$; $x^k = x^{k+1}$. Переход на шаг 5.

Нет: переход на шаг 4.

Пример 2.3

Найти точку минимума ЦФ (рис. 2.5):

$$f(x) = 8x_1^2 + 4x_1 x_2 + 5x_2^2.$$

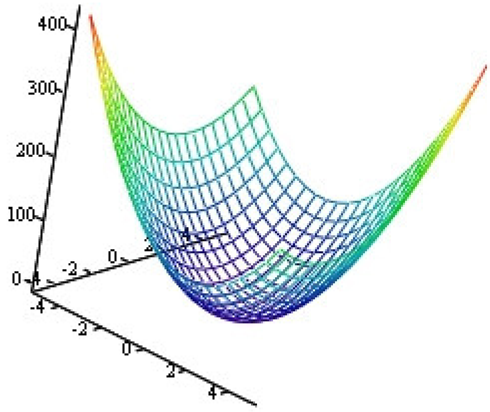


Рис. 2.5 – График функции $f(x) = 8x_1^2 + 4x_1 x_2 + 5x_2^2$

Начальная точка: $x^0 = [-4; -4]^T$.

Решение. Зададим следующие величины:

- $\Delta x = [1;1]^T$ – векторная величина приращения шага;
- $\alpha = 2$ – коэффициент уменьшения шага Δx;
- $\varepsilon = 10^{-4}$ – параметр окончания поиска.

Итерации начинаются с исследующего поиска вокруг точки x^0, которой соответствует значение ЦФ $f\left(x^0\right)=272$ (рис. 2.6).

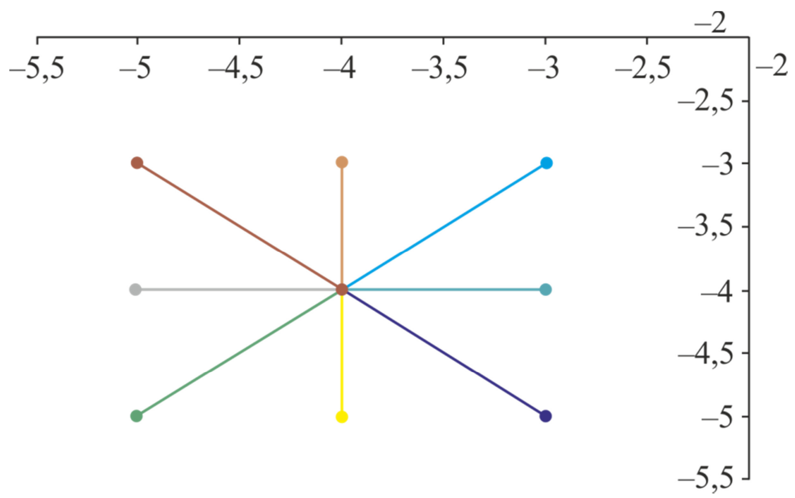


Рис. 2.6 – Исследующий поиск, предполагающий вычисление значения функции в точках вокруг точки (–4;–4)

Фиксируя переменную $x_2=-4$, дадим приращение x_1:

$$x_1=-4+1 \rightarrow f(-3;-4)=200<f\left(x^0\right) \rightarrow \text{успех.}$$

Далее, фиксируем $x_1=-3$ и дадим приращение x_2:

$$x_2=-4+1 \rightarrow f(-3;-3)=153<200 \rightarrow \text{успех.}$$

Таким образом, в результате исследующего поиска найдена точка $x^1=[-3;-3]^T$, в которой значение ЦФ $f\left(x^1\right)=153$.

Так как исследующий поиск был удачным, переходим к поиску по образцу (рис. 2.7):

$$x_p^2=x^1+\left(x^1-x^0\right)=[-2;-2]^T;$$

$$f\left(x_p^2\right)=68.$$

Далее проводится исследующий поиск вокруг точки x_p^2. В результате получаем точку $x^2=[-1;-1]^T$, в которой значение ЦФ $f\left(x^2\right)=17$.

Поскольку $f\left(x^2\right)<f\left(x^1\right)$, поиск по образцу следует считать успешным и x^2 становится новой базовой точкой. Итерации продолжаются до тех пор, пока уменьшение величины шага не укажет на окончание поиска в ε-окрестности точки минимума $x^*=[0;0]^T$.

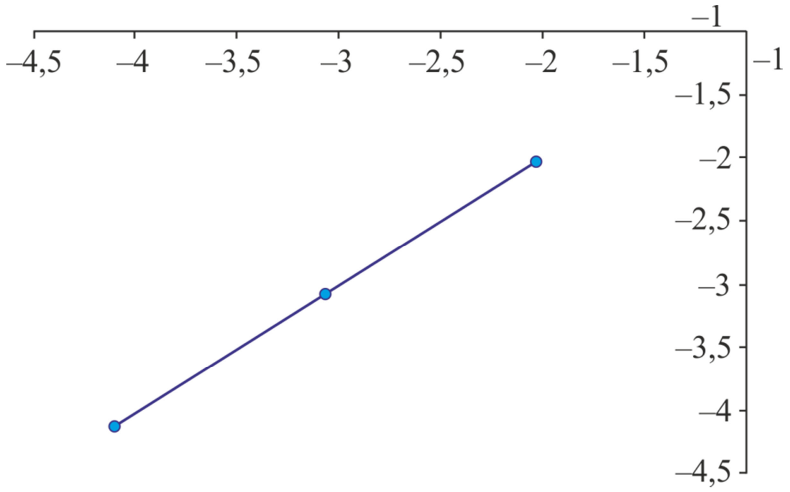


Рис. 2.7 – Поиск по образцу, предполагающий движение в направлении наилучшего значения функции (из точки [–4;–4] в точку [–2;–2])

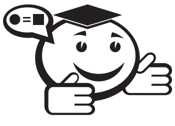
Достоинства метода Хука – Дживса: несложная стратегия поиска, простота вычислений, малый объем требуемой памяти (меньше чем в симплекс-методе).

Недостатки: при наличии значительных нелинейных эффектов процесс вырождается в последовательность исследующих поисков без перехода к ускоряющему поиску по образцу.

Возможные варианты модификации метода Хука – Дживса:

а) если движение по образцу приводит к успеху, то желательно увеличить длину шага по образцу, чтобы полностью использовать возможность поиска вдоль прямой;
б) введение дополнительных правил увеличения и уменьшения приращения переменных и др.

2.2 Градиентные методы



Градиент *функции $f(x)$ многих переменных в некоторой точке x – это вектор, координатами которого являются частные производные функции в этой точке:*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right).$$

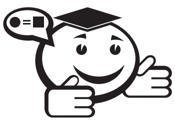
В малой окрестности точки x градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции, а его норма характеризует скорость этого возрастания. Вектор-антиградиент указывает направление наискорейшего убывания функции.

В любой точке поверхности целевой функции $f(x)$ вектор-антиградиент перпендикулярен касательной к линии уровня $f(x)=\mathrm{const}$ в этой точке.

Норма вектора-градиента:

$$\|\nabla f(x)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^2}.$$

В точке, где имеет место экстремум функции, вектор-градиент и все его компоненты обращаются в ноль: $f'\left(x^*\right)=\left(0;0;\ldots;0\right)$.



Матрица Гессе функции $f(x)$ ***многих переменных*** *– это матрица вторых производных:*

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что целевая функция $f\left(x\right)$ непрерывна и имеет по крайней мере непрерывные первые производные. Необходимым условием существования экстремума является наличие стационарной точки ЦФ. Таким образом, основная идея многих методов оптимизации без ограничений в пространстве R^n заключается в отыскании стационарной точки x^*, в которой градиент ЦФ $\nabla f\left(x^*\right)=0$.

Эта задача эквивалентна решению нелинейной системы уравнений вида:

$$\left\{ \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \right.$$

Можно отыскивать решение непосредственно этой системы, что приводит к методу Ньютона. При этом предполагается, что функция дважды дифференцируема.

В данном случае речь идет об итерационных процессах, порождающих последовательность точек $x^0, x^1, \ldots, x^k$, сходящихся к локальному экстремуму функции f в точке x^*.

На каждом k-м этапе значение x^{k+1} определяется выражением:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k,$$

где d_k – направление перемещения, которое может быть:

- либо градиентом функции в точке x^k, т. е. $d_k = -\nabla f\left(x^k\right)$;
- либо вычисленным, исходя из направления градиента $\nabla f\left(x^k\right)$;
- либо выбранным произвольно при условии, что это будет направление спуска. В этом случае должно выполняться неравенство вида: $\nabla f^T\left(x^k\right) d_k < 0$.

Здесь λ_k – параметр, характеризующий длину шага.

Способ определения d_k и λ_k на каждой итерации связан с особенностями применяемого метода. Обычно выбор λ_k осуществляется путем решения задачи минимизации $f(x)$ в направлении d_k. Поэтому при реализации изучаемых методов необходимо использовать эффективные методы одномерной оптимизации.

В семействе градиентных методов следует выделить методы с заданным шагом, в которых заранее задаются значения λ_k.

Доказано, что построенная последовательность сходится к решению, т. е. $x^k \to x^*$, если выполняются два условия:

1) $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k \to +\infty$ $\left(\text{например}, \ \lambda_k = \dfrac{1}{k}\right)$.

Данная процедура («*метод расходящегося ряда*») может оказаться медленной.

Критерии останова (наиболее употребительные).

Пусть $\varepsilon > 0$ – заданная точность:

1) $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon$;

2) $\left\|\nabla f\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \le \varepsilon;$

3) $\left|f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right)\right| \le \varepsilon;$

4) $\left\|\nabla f\right\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2} \le \varepsilon;$

5) $\left\|\Delta x\right\| = \left\|x^{k+1} - x^k\right\| \le \varepsilon.$

2.2.1 Градиентный спуск

Итерационная формула метода градиентного спуска имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f\left(x^k\right).$$

Здесь α – параметр спуска (обычно используются значения $\alpha = 1;\ 0,1;\ 0,001;\ 0,0001$). В случае если α слишком большое, возможна ситуация, когда метод не будет сходиться (значение функции будет увеличиваться). При малом значении параметра возможна медленная сходимость.

Пример 2.4

Методом градиентного спуска найти минимум функции $f(x) = \left(x_1 - 5\right)^2 + {}$ $+\left(x_2 - 6\right)^2$. Пусть $\alpha = 0,4$.

Критерий останова $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \le \varepsilon$, $\varepsilon = 0,3$. Начальная точка [10;10].

Частные производные равны:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 - 10;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f\left(x_1, x_2\right) = 2x_2 - 12.$$

Вычислим координаты новой точки по итерационной формуле:

$$x^1 = x^0 - \alpha \nabla f\left(x^0\right);$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - 0,4\begin{pmatrix} 2\cdot 10 - 10 \\ 2\cdot 10 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6,8 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие останова:

$$\left\| x^1 - x^0 \right\| = \sqrt{(6-10)^2 + (6{,}8-10)^2} = 5{,}122.$$

Значение больше 0,3, следовательно, переходим к следующей итерации.

$$x^2 = x^1 - \alpha \nabla f\left(x^1\right);$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6{,}8 \end{pmatrix} - 0{,}4 \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 10 \\ 2 \cdot 6{,}8 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 6{,}16 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие останова:

$$\left\| x^2 - x^1 \right\| = \sqrt{(5{,}1-6)^2 + (6{,}16-6{,}8)^2} = 1{,}024.$$

Значение превышает 0,3, следовательно, условие останова не выполняется. Вычислим новую точку:

$$x^3 = x^2 - \alpha \nabla f\left(x^2\right);$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 6{,}16 \end{pmatrix} - 0{,}4 \begin{pmatrix} 2 \cdot 5{,}2 - 10 \\ 2 \cdot 6{,}16 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}04 \\ 6{,}032 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие останова:

$$\left\| x^3 - x^2 \right\| = \sqrt{(5{,}04-5{,}2)^2 + (6{,}032-6{,}16)^2} = 0{,}205.$$

Значение меньше 0,3, следовательно, работа алгоритма завершается. Решением задачи является точка (5,04;6,032).

. . . .

2.2.2 Метод наискорейшего спуска (метод Коши)

Известный французский математик Огюстен Луи Коши первым использовал аналогичный алгоритм для решения системы линейных уравнений [1].

В широко используемом методе Коши (МК) λ_k выбираются так, чтобы минимизировать функцию по λ:

$$g(\lambda) = f\left[x^k - \lambda \nabla f\left(x^k\right)\right],$$

на множестве значений $\lambda \geq 0$ (одномерная минимизация).

Алгоритм Коши

Шаг 1. Выбрать начальную точку x^0.

Шаг 2. На k-й итерации, где $d_k = -\nabla f\left(x^k\right)$, найти такое λ_k, что

$$f\left(x^k+\lambda_k d_k\right)=\min_{\lambda\geq 0} f\left(x^k+\lambda d_k\right).$$

Положить $x^{k+1}=x^k+\lambda_k d_k$.

Шаг 3. Проверка критерия останова.

Да: окончание поиска $\to$ конец. Нет: $k=k+1$, $\to$ шаг 2.

МК обладает устойчивостью, т. е. при достаточно малом значении λ_k обеспечивается выполнение неравенства:

$$f\left(x^{k+1}\right)\leq f\left(x^k\right).$$

МК позволяет существенно уменьшить значение ЦФ (быстро спуститься на «дно оврага») при движении из точек, расположенных на значительных расстояниях от точки x^*, но в дальнейшем может произойти «зацикливание». Поэтому МК часто используются совместно с другими градиентными методами (например, методом Ньютона) в качестве начальной процедуры.

Недостаток: для некоторых типов функций сходимость может оказаться медленной. В самом деле, если λ_k минимизирует функцию

$$g(\lambda)=f\left(x^k+\lambda d_k\right),$$

то должно быть

$$\frac{dg(\lambda_k)}{d\lambda}=d_k\nabla f\left(x^k+\lambda_k d_k\right)=d_k^T\nabla f\left(x^{k+1}\right)=0,$$

откуда вытекает равенство:

$$d_k^T d_{k+1}=0,$$

которое доказывает, что последовательные направления ортогональны. В случае ярко выраженной нелинейности («овражности») ЦФ происходит «зацикливание» (см. рис. 2.8).

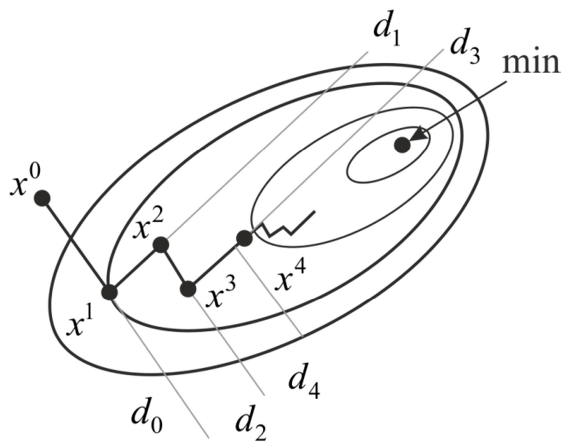


Рис. 2.8 – Метод Коши – «зацикливание» траектории спуска

Пример 2.5

Методом Коши найти

$$\min f\left(x\right)=8x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2;\ \ x^0=\left[10;10\right]^T.$$

Критерии останова: $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|\le \varepsilon,\ \ \varepsilon=0{,}1.$

Решение. Вычислим компоненты градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=16x_1+4x_2;\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=10x_2+4x_1.$$

С помощью формулы $x^{k+1}=x^k-\lambda_k\nabla f\left(x^k\right)$ построим первое приближение:

$$x^1=x^0-\lambda_0\nabla f\left(x^0\right).$$

Вычислим значение антиградиента в точке x^0:

$$16x_1+4x_2=16\cdot 10+4\cdot 10=200;$$
$$10x_2+4x_1=10\cdot 10+4\cdot 10=140;$$
$$-\nabla f\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}-200\\-140\end{pmatrix}.$$

Выберем λ_0 таким образом, чтобы минимизировать функцию по λ_0.

$$f\left(\lambda_0\right)=8\cdot\left(10-200\lambda_0\right)^2+4\cdot\left(10-200\lambda_0\right)\cdot\left(10-140\lambda_0\right)+5\cdot\left(10-140\lambda_0\right)^2.$$

Для решения задачи одномерной оптимизации используем метод равномерного поиска (табл. 2.3).

Таблица 2.3 – Значения функции

λ_0	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$f\left(\lambda_0\right)$	1700	1157	720	389	164	45	32	125	324	629	1040

Из таблицы 2.3 видно, что минимальное значение функции наблюдается при $\lambda_0=0{,}06$.

Следовательно, координаты новой точки будут равны:

$$x^1=x^0-\lambda_0\nabla f\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}10-0{,}06\cdot 200\\10-0{,}06\cdot 140\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1{,}6\end{pmatrix}.$$

Значение функции в данной точке равно:

$$f\left(x^1\right)=8\left(-2\right)^2+4\left(-2\right)\cdot 1,6+5\cdot 1,6^2=32.$$

Выполним проверку критерия останова $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|\le\varepsilon$:

$$\left\|x^{k+1}-x^k\right\|=\sqrt{\left(-2-10\right)^2+\left(1,6-10\right)^2}=14,648.$$

Условие останова не выполняется, переходим к следующей итерации. Вычислим новую точку:

$$x^2=x^1-\lambda_1\nabla f\left(x^1\right).$$

Значение антиградиента в точке x^1:

$$16x_1+4x_2=16\cdot\left(-2\right)+4\cdot\left(1,6\right)=-25,6;$$
$$10x_2+4x_1=10\cdot 1,6+4\cdot\left(-2\right)=8;$$

$$-\nabla f\left(x^1\right)=\begin{pmatrix}25,6\\-8\end{pmatrix}.$$

Выберем λ_1 таким образом, чтобы минимизировать функцию по λ_1.

$$f\left(\lambda_1\right)=8\cdot\left(-2+25,6\lambda_1\right)^2+4\cdot\left(-2+25,6\lambda_1\right)\cdot\left(1,6-8\lambda_1\right)+5\cdot\left(1,6-8\lambda_1\right)^2.$$

Для решения задачи одномерной оптимизации используем метод равномерного поиска (табл. 2.4).

Таблица 2.4 – Значения функции $f\left(\lambda_1\right)$

λ_1	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$f\left(\lambda_1\right)$	32	25,281	19,51	14,681	10,815	7,891	5,916	4,889	4,811	5,681	7,501

Из таблицы 2.4 видно, что минимальное значение функции наблюдается при $\lambda_1=0,08$.

Следовательно, координаты новой точки будут равны:

$$x^2=x^1-\lambda_1\nabla f\left(x^1\right)=\begin{pmatrix}-2+0,08\cdot 25,6\\1,6-0,08\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,048\\0,96\end{pmatrix}.$$

Значение функции в полученной точке равно:

$$f\left(x^2\right)=8\left(0,048\right)^2+4\cdot 0,048\cdot 0,96+5\cdot 0,96^2=4,811.$$

Проверим условие останова алгоритма:

$$\left\|x^{k+1}-x^k\right\|=\sqrt{\left(0,048+2\right)^2+\left(0,96-1,6\right)^2}=2,146.$$

Значение превышает ε, поэтому работа алгоритма продолжается.

Результаты последующих итераций представлены в таблице 2.5. Таким образом решением задачи будет точка $x^5 = \begin{pmatrix} -0,029 \\ 0,045 \end{pmatrix}$.

Таблица 2.5 – Результаты выполнения итераций

k	x_1^k	x_2^k	$f\left(x^k\right)$	$\left\| x^{k+1} - x^k \right\|$
1	–2	1,6	32	14,648
2	0,048	0,96	4,811	2,146
3	–0,275	0,275	0,678	0,758
4	0,022	0,126	0,095	0,332
5	–0,029	0,045	0,012	0,096

Несмотря на то, что МК не имеет большого практического значения, он реализует важнейшие шаги большинства градиентных методов.

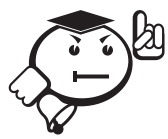
2.2.3 Метод Ньютона

Итерационная формула метода Ньютона (МН) имеет вид [2]:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f\left(x^k\right)\right]^{-1} \nabla f\left(x^k\right).$$

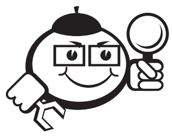
Эта формула есть не что иное, как МН в применении к решению системы нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$



В МН и направление, и шаг перемещения фиксированы.

Если $f\left(x\right)$ строго выпуклая функция, то МН сходится за одну итерацию.



Пример 2.6

Методом Ньютона найти

$$\min f\left(x\right) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2, \text{ где } x^0 = \left[10\,;10\right]^T.$$

Решение. Найдем градиент и матрицу Гессе в начальной точке

$$\nabla f\left(x\right)=\left(16x_1+4x_2;10x_2+4x_1\right),$$

$$H_f\left(x\right)=\nabla^2 f\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}16 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}.$$

Используя формулу МН, получаем:

$$x^1=\left[10;10\right]^T-\frac{1}{144}\cdot\begin{pmatrix}10 & -4\\ -4 & 16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\ 140\end{pmatrix}=\left[0;0\right]^T,$$

что совпадает с точным решением.

. . . .

Если функция $f\left(x\right)$ не квадратичная, то МН не отличается высоким быстродействием и надежностью.

2.2.4 Задача определения параметров регрессии

Руководитель торговой точки изменял цену на товар и фиксировал спрос при каждом значении. Результаты наблюдений представлены в таблице 2.6. Необходимо построить линейную функцию регрессии вида $y'=a+bx$, используя метод наименьших квадратов. Для этого нужно минимизировать квадрат разности наблюдаемого значения y и модельного значения $y'=a+bx$. Полученная функция имеет вид:

$$f(a,b)=\left(4-a-2\cdot b\right)^2+\left(6-a-4\cdot b\right)^2+\left(5-a-6\cdot b\right)^2\to\min.$$

Таблица 2.6 – Данные о спросе

Цена (x, тыс. руб.)	**Спрос (y, тыс. шт.)**
2	4
4	6
6	5

Для нахождения параметров a и b используем метод градиентного спуска $\alpha=0,01$, начальная точка [5;5].

Частные производные равны:

$$\frac{\partial}{\partial a}f(a,b)=-2\cdot\left(\left(4-a-2b\right)+\left(6-a-4b\right)+\left(5-a-6b\right)\right)=6a+24b-30;$$

$$\frac{\partial}{\partial b}f(a,b)=-2\cdot\left(2\cdot\left(4-a-2b\right)+4\cdot\left(6-a-4b\right)+6\cdot\left(5-a-6b\right)\right)=24a+112b-124.$$

Вычислим координаты новой точки по итерационной формуле $x^1 = x^0 - \alpha \nabla f\left(x^0\right)$:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - 0,01 \begin{pmatrix} 6 \cdot 5 + 24 \cdot 5 - 30 \\ 24 \cdot 5 + 112 \cdot 5 - 124 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,8 \\ -0,56 \end{pmatrix}.$$

Результаты последующих 6 итераций представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – Результаты выполнения итераций

№ итерации, *k*	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_0^k	4,006	3,971	3,977	3,977	3,977
x_1^k	0,395	0,231	0,259	0,254	0,255

Таким образом, уравнение зависимости спроса от цены будет иметь вид:

$$y' = 3,977 + 0,255x.$$

2.3 Глобальная оптимизация с помощью случайных величин

Целевая функция может иметь несколько локальных минимумов на заданном интервале (рис. 2.9). В этом случае решаются задачи глобальной оптимизации, в которых определяются все локальные минимумы функции либо осуществляется выбор лучшего из них.

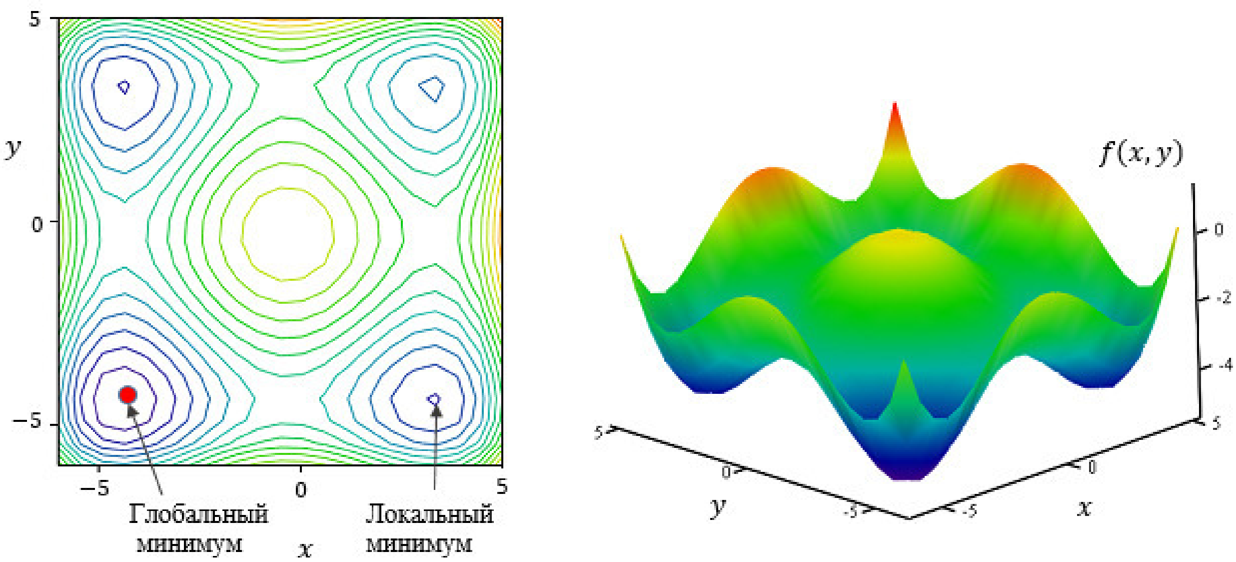


Рис. 2.9 – График функции

$$f(x,y) = \frac{\left[\left(x+0,5\right)^4 - 30x^2 - 20x\right] + \left[\left(y+0,5\right)^4 - 30y^2 - 20y\right]}{100}$$

Появление идеи использования случайных величин при поиске глобального минимума связывают с именем У. Р. Эшби. В нашей стране исследования алгоритмов случайного поиска берут начало в работах Л. А. Растригина. Алгоритмы поиска подразделяют на ненаправленные (все случайные испытания строят независимо друг от друга) и направленные (испытания связаны между собой).

Наиболее простым методом решения задач глобальной оптимизации является метод ненаправленного случайного поиска. Он заключается в получении случайных значений аргументов из заданного интервала, расчете целевой функции и сравнении её величины с наилучшим из вычисленных. Если новое рассчитанное значение результата оказалось меньше, то осуществляется запоминание полученного решения. Таким образом, для функции одного аргумента последовательность шагов будет следующая:

Шаг 1. Генерирование на интервале $[r;R]$ равномерно распределенной случайной величины x.

Шаг 2. Если $f(x) < f_{\min}$ ($f_{\min}$ – минимальное найденное значение функции), то происходит запоминание новой точки в качестве текущего решения $f_{\min} = f(x)$, $x_{\min} = x$.

Шаги повторяются в течение заданного числа реализаций либо до получения решения с указанной точностью. Такой способ нахождения решения является реализацией метода проб и ошибок.

Данный алгоритм может быть совмещен с локальным поиском, когда из случайно выбранных точек осуществляется локальный спуск в ближайший минимум. Из найденных локальных минимумов выбирается точка с наименьшим значением.

Пример 2.7

Рассмотрим использование данного алгоритма для определения на интервале [–10;10] минимума следующей функции:

$$f(x,y) = \frac{x}{1+|y|}.$$

Её график представлен на рисунке 2.10. Минимальное значение функции достигается в точке $x = -10,\ y = 0$.

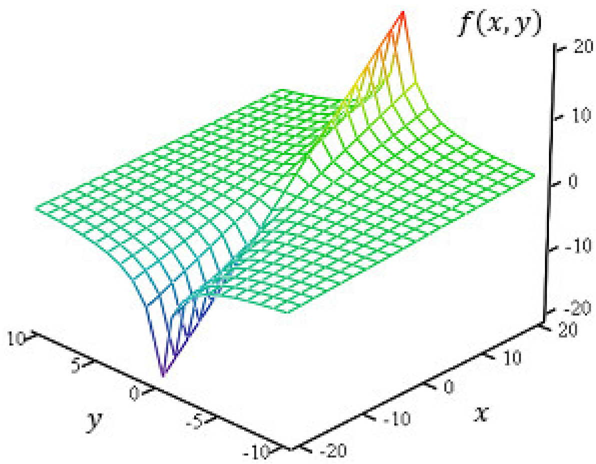


Рис. 2.10 – График функции $f(x, y) = \dfrac{x}{1+|y|}$

Для решения задачи необходимо случайным образом моделировать величины x и y из интервала [–10;10] и рассчитывать значение функции $f(x, y)$. Пять первых итераций представлены в таблице 2.8.

Таблица 2.8 – Результаты выполнения пяти итераций

№ итерации	x	y	$f(x, y)$	$[x_{\min}; y_{\min}]$
1	1,5	–7	0,188	[1,5;–7]
2	–5	8	–0,556	[–5;8]
3	9	2	3	[–5;8]
4	–6,5	–2	–2,167	[–6,5;–2]
5	2	–4	0,4	[–6,5;–2]

На первой итерации генерируются случайные величины $x = 1{,}5$, $y = -7$. Значение функции в этой точке равно:

$$f(1{,}5, -7) = \frac{x}{1+|y|} = \frac{1{,}5}{1+|-7|} = 0{,}188.$$

На второй итерации $x = -5$, $y = 8$, значение функции в полученной точке равно –0,556. Эта величина меньше, чем полученная на предыдущей итерации, поэтому точка [–5;8] принимается в качестве текущего решения. По истечении пяти итераций в качестве решения рассматривается точка [–6,5;–2].

С увеличением количества точек возрастает точность решения.

. . . .

2.4 Решение обратных задач с помощью обратных вычислений

Причинно-следственная связь величин обусловливает разделение задач исследования операций на прямые и обратные. Прямая задача заключается в определении результирующего показателя по имеющимся значениям исходных величин и виду зависимости с целью оценки текущего состояния объекта, прогноза его изменения в будущем, исследования влияния входных параметров на выходную величину. В качестве примера можно привести определение выручки предприятия по заданным значениям цены и количества проданного товара.

Обратная задача является более сложной по сравнению с прямой и заключается в таком подборе исходных величин, который обеспечил бы заданное значение результирующей переменной. Целью решения подобных задач, как правило, является формирование оптимальных управленческих решений. Например, определение количества проданного товара и цены, которые бы обеспечили необходимый прирост выручки.

Встречаются задачи, в которых минимальное значение функции известно заранее и нужно определить величины аргументов, обеспечивающие значение функции. Данная задача может быть сведена к задаче минимизации, при этом минимизировать нужно разность:

$$\left| f_{\min} - f(x) \right| \to \min,$$

где $f_{\min}$ – заранее известное минимальное значение функции.

Также для решения таких задач может быть использован подход на основе обратных вычислений. Рассмотрим пример функции двух аргументов (рис. 2.11): выручка (r) равна произведению цены (p) и количества товара (c):

$$r = p \cdot c.$$

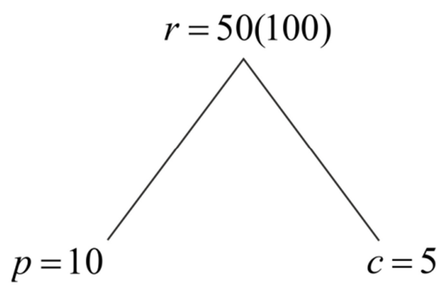
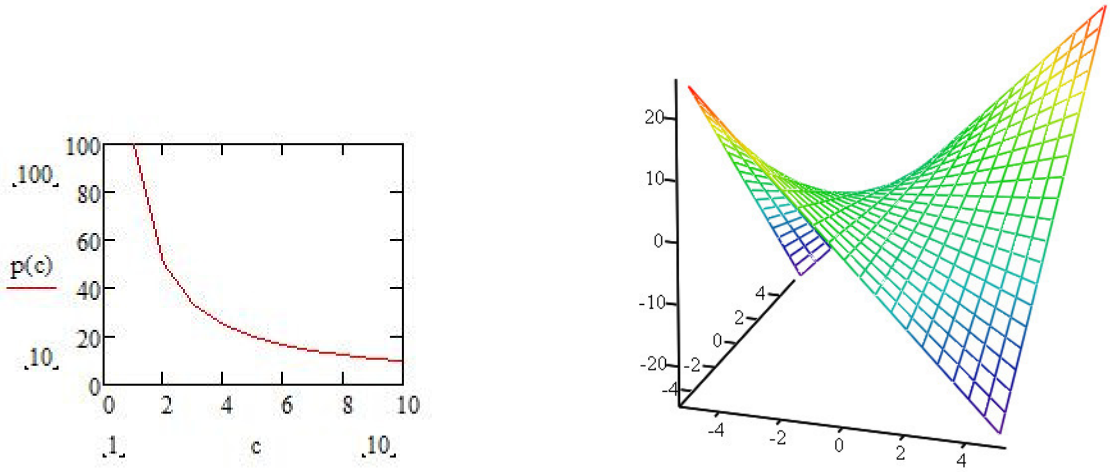


Рис. 2.11 – Зависимость показателей

Исходные данные: $r = 50$, $p = 10$, $c = 5$. Необходимо определить значения цены и количества, которые обеспечат величину выручки, равную 100. Без дополнительных ограничений данная задача может иметь множество решений.

На рисунке 2.12, *а* изображена изокванта – линия, в которой функция постоянна и равна заданному числу (в данном случае 100). По оси x представлены значения цены, по y – количества. Любая точка графика позволит получить решение задачи (произведение x и y будет равно 100). На рисунке 2.12 представлен вид поверхности функции r. Так, например, выручка, равная 100, может быть получена при следующих комбинациях:

1) $p = 10$; $c = 10$;
2) $p = 20$; $c = 5$;
3) $p = 12{,}5$; $c = 8$, и т. д.



а) *б*)

Рис. 2.12 – Изокванта

Решение обратных задач с помощью обратных вычислений – это получение точечных значений приростов аргументов функции на основании ее задаваемого значения и дополнительной информации, поступающей от лица, формирующего решение. В частности, в качестве такой информации могут быть указаны индивидуальные коэффициенты прироста аргументов (коэффициенты относительной важности), начальные значения функции и аргументов. С помощью коэффициентов относительной важности определяется, за счет какого аргумента изменение функции произойдет в большей степени [3].

В случае использования коэффициентов относительной важности решение задачи может быть получено путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f\left(x \pm \Delta x(\alpha), z \pm \Delta z(\beta)\right); \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}; \\ \alpha + \beta = 1, \end{cases}$$

где Δx, Δz – приращение аргументов;

α, β – коэффициенты относительной важности приращений Δx, Δz соответственно;

$y, \Delta y$ – исходное значение и приращение результирующей функции.

Знак «плюс» или «минус» говорит о том, будет ли значение аргумента уменьшатся или увеличиваться для решения поставленной задачи.

Определение цены и количества товара может быть выполнено тремя способами в зависимости от соотношения величин прироста аргументов (табл. 2.9). Так, если нужно увеличить значение выручки, то это может быть достигнуто следующими способами:

1) увеличение цены $\left(p^+\right)$ и количества $\left(c^+\right)$;
2) увеличение цены $\left(p^+\right)$ и уменьшение количества $\left(c^-\right)$. В этом случае, чтобы произошло увеличение выручки, увеличение цены должно быть выполнено в большей степени, чем уменьшение количества, поэтому коэффициент относительной важности цены (α) должен быть выше, чем коэффициент относительной важности количества (β);
3) уменьшение цены $\left(p^-\right)$ и увеличение количества $\left(c^+\right)$. В этом случае, чтобы произошло увеличение выручки, увеличение количества должно быть выполнено в большей степени, чем уменьшение цены, поэтому коэффициент относительной важности количества (β) должен быть выше, чем коэффициент относительной важности цены (α).

Таблица 2.9 – Варианты достижения цели

Вид зависимости	**Прирост результата**					
	+			–		
Мультипликативная $p(\alpha) \cdot c(\beta)$	p^+, c^+	p^+, c^-, $\alpha > \beta$	p^-, c^+, $\alpha < \beta$	p^-, c^-	p^+, c^-, $\alpha < \beta$	p^-, c^+, $\alpha > \beta$

Установим значения коэффициентов важности приращений аргументов функции: $\alpha = 0,75$ и $\beta = 0,25$.

Тогда решение задачи для случая увеличения аргументов может быть получено следующим образом:

$$\begin{cases} r + \Delta r = \left(p + \Delta p\right)\left(c + \Delta c\right); \\ \dfrac{\Delta p}{\Delta c} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta c} = 3;$$

$$\Delta p = 3\Delta c.$$

Подставим полученное выражение в уравнение и решим его:

$$\left(c + \Delta c\right)\left(p + 3\Delta c\right) = 100;$$

$$\left(5 + \Delta c\right)\left(10 + 3\Delta c\right) = 100;$$

$$3\Delta c^2 + 25\Delta c - 50 = 0;$$

$$\Delta c = 1,67;$$

$$\Delta p = 3 \cdot 1,67 = 5.$$

Значения количества проданного товара и цены равны: $c = 6,67$, $p = 15$.

Рассмотрим также решение детерминированной обратной задачи с аддитивной исходной функцией.

Прибыль, направленная на потребление $\left(\Pi_{\text{п}}\right)$, и прибыль, направляемая на инвестиции $\left(\Pi_{\text{и}}\right)$, образует общую прибыль $\left(\Pi\right)$:

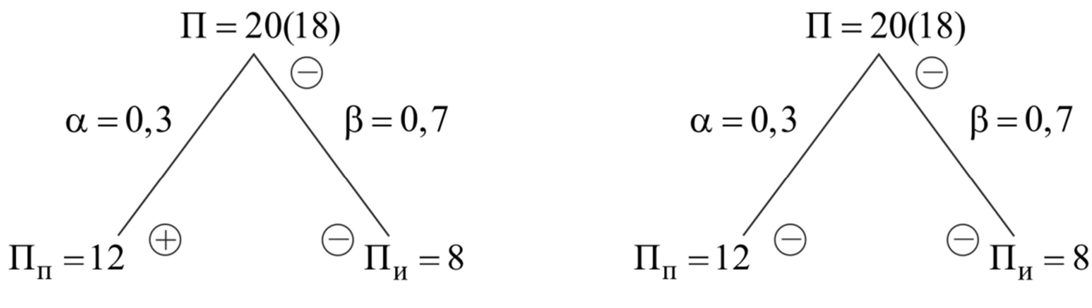
$$\Pi = \Pi_{\text{п}} + \Pi_{\text{и}}.$$

Исходные данные: $\Pi = 20$, $\Pi_{\text{п}} = 12$, $\Pi_{\text{и}} = 8$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,71$. Нужно определить такие значения $\Pi_{\text{п}}$ и $\Pi_{\text{и}}$, при которых общая прибыль будет равна 18. Этого можно добиться двумя способами: уменьшив значения $\Pi_{\text{п}}$ и $\Pi_{\text{и}}$, либо увеличив $\Pi_{\text{п}}$ и уменьшив $\Pi_{\text{и}}$ (рис. 2.13, *а*, *б*).

Решение для случая на рисунке 2.13, *а*:

$$\begin{cases} \Pi - \Delta\Pi = \Pi_{\text{п}} + \Delta\Pi_{\text{п}} + \left(\Pi_{\text{и}} - \Delta\Pi_{\text{и}}\right), \\ \dfrac{\Delta\Pi_{\text{п}}}{\Delta\Pi_{\text{и}}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

$$\Delta\Pi_{\text{п}} = \frac{\alpha\Delta\Pi_{\text{и}}}{\beta}, \qquad \Delta\Pi_{\text{и}} = -\frac{\Delta\Pi}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 1}.$$



а) *б*)

Рис. 2.13 – Дерево расчета общей прибыли в случае изменения показателей: *а*) в разных направлениях; *б*) в одном направлении

Подставив значение, получим:

$$\Delta П_и = -\frac{2}{\frac{0,3}{0,7}-1} = 3,5;$$

$$\Delta П_п = \frac{0,3 \cdot 3,5}{0,7} = 1,5;$$

$$П_и = 8 - 3,5 = 4,5;$$

$$П_п = 12 + 1,5 = 13,5.$$

В случае на рисунке 2.13, *б* уменьшаются оба показателя, причем в большей степени уменьшение происходит за счет величины $П_и$:

$$\begin{cases} П - \Delta П = П_п - \Delta П_п + \left(П_и - \Delta П_и\right); \\ \dfrac{\Delta П_п}{\Delta П_и} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

$$\Delta П_п = \frac{\alpha \Delta П_и}{\beta}, \qquad \Delta П_и = -\frac{\Delta П}{\frac{\alpha}{\beta}+1}.$$

Подставив значение, получим:

$$\Delta П_и = -\frac{2}{\frac{0,3}{0,7}+1} = 1,4;$$

$$\Delta П_п = \frac{0,3 \cdot 1,4}{0,7} = 0,6;$$

$$П_и = 8 - 1,4 = 6,6;$$

$$П_п = 12 - 0,6 = 11,4.$$

Рассмотрим другой вид целевой функции: прибыль равна выручка минус себестоимость $(\text{П} = \text{В} - \text{С})$.

Целевая установка состоит в следующем: необходимо нарастить прибыль за счет повышения выручки и себестоимости, причем большая часть прироста прибыли должна произойти за счет повышения прибыли, а меньшая – за счет повышения себестоимости. Такая целевая установка отражается следующим образом:

$$\text{П}^{+} = \text{В}^{+}(\alpha) - \text{С}^{+}(\beta),\ \alpha > \beta.$$

Представим эту задачу в виде системы уравнений:

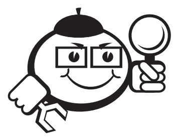
$$\begin{cases} \text{П} + \Delta\text{П} = \text{В} + \Delta\text{В} - \text{С} - \Delta\text{С}; \\ \dfrac{\Delta\text{В}}{\Delta\text{С}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее относительно $\Delta\text{В}$ и $\Delta\text{С}$ получим:

$$\Delta\text{В} = \frac{\alpha}{\beta}\Delta\text{С}.$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение, получим:

$$\Delta\text{С} = \frac{\Delta\text{П}}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\right)}.$$



Пример 2.8

Пусть исходные значения равны: $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $\text{В} = 20$; $\text{С} = 12$; $\text{П} = 8$; $\Delta\text{П} = 4$ (рис. 2.14). Тогда:

$$\Delta\text{С} = \frac{\Delta\text{П}}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\right)} = \frac{4}{\left(\dfrac{0{,}7}{0{,}3} - 1\right)} = 3;$$

$$\Delta\text{В} = \frac{0{,}7}{0{,}3} \cdot 3 = 7.$$

Следовательно, новое значение выручки будет равно: $\text{В} = 20 + 7 = 27$, значение себестоимости составит $\text{С} = 12 + 3 = 15$, а прибыль будет равна $\text{П} = 27 - 15 = 12$, т. е. её увеличение равно заданному значению $(\Delta\text{П} = 4)$.

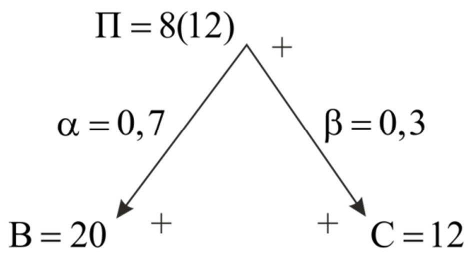


Рис. 2.14 – Задача определения выручки и себестоимости

Пример 2.9

Рассмотрим следующий пример. Рентабельность Р рассчитывается делением прибыли П на себестоимость продукции С. Необходимо увеличить рентабельность за счет повышения прибыли и снижения себестоимости, причем большая часть увеличения рентабельности должна произойти за счет повышения прибыли, а меньшая – за счет снижения себестоимости. Такая целевая установка представляется следующим образом:

$$\text{Р}^{+} = \frac{\text{П}^{+}(\alpha)}{\text{С}^{-}(\beta)}, \alpha > \beta.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{Р} + \Delta\text{Р} = \dfrac{\text{П} + \Delta\text{П}}{\text{С} - \Delta\text{С}}; \\ \dfrac{\Delta\text{П}}{\Delta\text{С}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения изменение прибыли:

$$\Delta\text{П} = \frac{\alpha}{\beta}\Delta\text{С}.$$

Подставляем его в первое уравнение:

$$\text{Р} + \Delta\text{Р} = \frac{\text{П} + \dfrac{\alpha}{\beta}\Delta\text{С}}{\text{С} - \Delta\text{С}};$$

$$\text{П} + \frac{\alpha}{\beta}\Delta\text{С} = (\text{Р} + \Delta\text{Р})(\text{С} - \Delta\text{С});$$

$$\text{П} + \frac{\alpha}{\beta}\Delta\text{С} = \text{С} \cdot \text{Р} - \Delta\text{С} \cdot \text{Р} + \text{С} \cdot \Delta\text{Р} - \Delta\text{С} \cdot \Delta\text{Р};$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\Delta\text{С} + \Delta\text{С} \cdot \text{Р} + \Delta\text{С} \cdot \Delta\text{Р} = \text{С} \cdot \text{Р} + \text{С} \cdot \Delta\text{Р} - \text{П};$$

$$\Delta C\left(\frac{\alpha}{\beta}+P+\Delta P\right)=C\cdot P+C\cdot\Delta P-\Pi;$$

$$\Delta C=\frac{C\cdot P+C\cdot\Delta P-\Pi}{\frac{\alpha}{\beta}+P+\Delta P}=\frac{C\cdot\left(P+\Delta P\right)-\Pi}{\frac{\alpha}{\beta}+P+\Delta P}.$$

Исходные значения: $\alpha=0{,}7$; $\beta=0{,}3$; $\Pi=24$; $C=4$; $P=6$; $\Delta P=4$.

Тогда изменение себестоимости составит:

$$\Delta C=\frac{C\cdot\left(P+\Delta P\right)-\Pi}{\frac{\alpha}{\beta}+P+\Delta P}=\frac{4\cdot\left(6+4\right)-24}{\frac{0{,}7}{0{,}3}+6+4}=1{,}3.$$

Изменение прибыли:

$$\Delta\Pi=\frac{0{,}7}{0{,}3}1{,}3=3.$$

Следовательно, новые значения себестоимости и прибыли будут равны $4-1{,}3=2{,}7$ и $24+3=27$ соответственно. Рентабельность составит $27/2{,}7=10$.

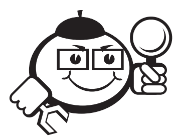
. . . .

Если результирующая величина зависит от нескольких переменных, можно использовать процедуру свертки либо решить систему с $n+1$ уравнениями (n – число аргументов).

Рассмотрим случай зависимости от трех аргументов. Общие затраты $(З)$ включают материальные затраты $(М)$, затраты на оплату труда $(Т)$ и затраты на аренду помещения $(А)$: $З=М+Т+А$. Допустим, необходимо снизить уровень затраты за счет снижения всех элементов. Тогда целевая установка будет иметь следующий вид:

$$З^{-}=М^{-}(\alpha)+Т^{-}(\beta)+А^{-}(\gamma).$$

Свернем эту формулу. Введем величину, которая будет равна сумме двух последних затрат: $Т^{-}(\beta)+А^{-}(\gamma)=О^{-}(\sigma)$, $\sigma=\beta+\gamma$. Тогда $З^{-}=М^{-}(\alpha)+О^{-}(\sigma)$. Далее последовательно решаются две задачи с двумя аргументами, при этом значения коэффициентов относительной важности нормируются.



. . . . Пример 2.10 . . . .

Рассмотрим эту задачу для следующих исходных данных (рис. 2.15): $\alpha=0{,}5$; $\beta=0{,}3$; $\gamma=0{,}2$; $З=15$; $М=7$; $Т=5$; $А=3$; $\Delta З=8$.

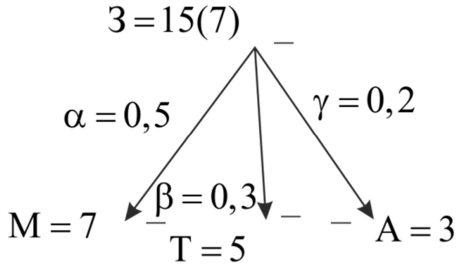


Рис. 2.15 – Задача с тремя аргументами

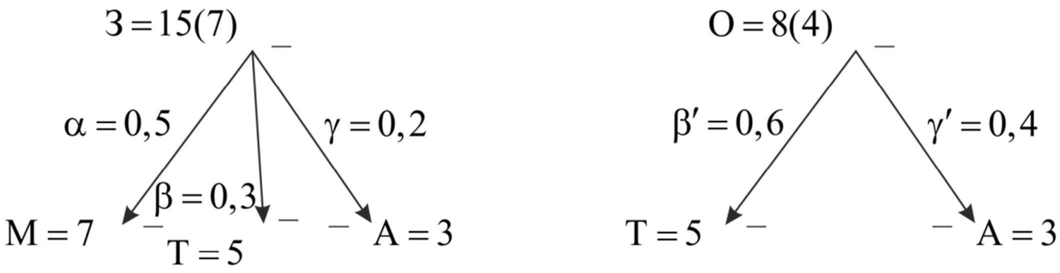
Тогда

$$\text{О} = \text{Т} + \text{А} = 8;$$
$$\sigma = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$$

Решаем систему (графическое представление задачи на рисунке 2.16, *а*):

$$\begin{cases} \text{З} - \Delta\text{З} = \text{М} - \Delta\text{М} + \text{О} - \Delta\text{О}; \\ \dfrac{\Delta\text{М}}{\Delta\text{О}} = \dfrac{\alpha}{\sigma}; \end{cases}$$

$$\Delta\text{М} = \Delta\text{О}\frac{\alpha}{\sigma}.$$



а) *б*)

Рис. 2.16 – Представление задачи и подзадачи

Подставляем выражение в первое уравнение, получим:

$$\Delta\text{О} = \frac{\Delta\text{З}}{1 + \dfrac{\alpha}{\sigma}} = \frac{8}{1 + \dfrac{0{,}5}{0{,}5}} = 4;$$

$$\Delta\text{М} = \Delta\text{О}\frac{\alpha}{\sigma} = 4\frac{0{,}5}{0{,}5} = 4.$$

Теперь нужно рассмотреть вторую модель $\text{Т}^{-}(\beta) + \text{А}^{-}(\gamma) = \text{О}^{-}(\sigma)$, $\sigma = \beta + \gamma$ и найти значения Т и А (рис. 2.16, *б*).

Выполним нормирование коэффициентов относительной важности (т. к. их сумма должна быть равна 1). Для этого разделим значение каждого коэффициента важности на сумму двух коэффициентов:

$$\beta' = \frac{\beta}{\beta + \gamma} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6;$$

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{O} - \Delta\text{O} = \text{T} - \Delta\text{T} + \text{A} - \Delta\text{A}; \\ \dfrac{\Delta\text{T}}{\Delta\text{A}} = \dfrac{\beta'}{\gamma'}. \end{cases}$$

Из этой системы:

$$\Delta\text{T} = \Delta\text{A}\frac{\beta'}{\gamma'};$$

$$\Delta\text{A} = \frac{\Delta\text{O}}{1 + \dfrac{\beta'}{\gamma'}} = \frac{4}{1 + \dfrac{0,6}{0,4}} = 1,6;$$

$$\Delta\text{T} = 1,6 \cdot \frac{0,6}{0,4} = 2,4.$$

Таким образом, новые значения величин будут равны: $\text{T} = 5 - 2,4 = 2,6$; $\text{A} = 3 - 1,6 = 1,4$; $\text{M} = 7 - 4 = 3$. Сумма затрат составит: $2,6 + 1,4 + 3 = 7$, что соответствует искомому значению общих затрат.

. . . .

Модифицированный метод обратных вычислений

Модифицированный метод обратных вычислений заключается в определении аргументов функции на основании её указанного значения и коэффициентов относительной важности. Он предполагает построение уравнения связи между аргументами вида $y = a \pm bx$ и подстановку полученного уравнения в исходное соотношение [4].

Для построения функции используются следующие формулы ($f(x,y)$ – функция, x_0, y_0 – начальные значения аргументов):

$$b = \frac{\alpha}{\beta}.$$

В случае обратной зависимости между аргументами (один увеличивается – другой уменьшается, т. е. изменение происходит в разных направлениях): $a = x_0 + b \cdot y_0$. В случае прямой зависимости: $a = x_0 - b \cdot y_0$.

В итоге получаем уравнение:

$$x = a + b \cdot y \text{ (в случае прямой зависимости)}$$

или

$$x = a - b \cdot y \text{ (в случае обратной зависимости).}$$

В отличие от классического метода обратных вычислений он позволяет избежать проверок согласованности дополнительной информации, поступающей от человека: соответствия поставленной цели коэффициентам важности.

Пример 2.11

Рассмотрим пример определения цены и количества проданного товара (рис. 1.1) с помощью линейного уравнения ($\alpha = 0,75$; $\beta = 0,25$). В случае прямой зависимости расчет осуществляется следующим образом:

$$a = 10 - \frac{0,75}{0,25} \cdot 5 = -5;$$

$$p = -5 + 3c.$$

Подставляем полученную зависимость в исходную формулу:

$$(-5 + 3c)c = 100.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$c = 6,67;$$

$$p = -5 + 3 \cdot 6,67 = 15.$$

Рассмотрим также реализацию алгоритма на примере задачи на рисунке 2.13, *а*: $\text{П}_\text{п} = 12$, $\text{П}_\text{и} = 8$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,7$. Величина, имеющая наименьший коэффициент пропорциональности – $\text{П}_\text{п}$.

Построим линейное уравнение:

$$\frac{\alpha}{\beta}\text{П}_\text{и} + \text{П}_\text{п} = 0,43 \cdot 8 + 12 = 15,44;$$

$$\text{П}_\text{п} = 15,44 - 0,43\text{П}_\text{и}.$$

Подставляем полученное уравнение в исходную формулу зависимости:

$$\text{П} = 15,44 - 0,43 \cdot \text{П}_\text{и} + \text{П}_\text{и} = 18;$$

$$0,57\text{П}_\text{и} = 2,56;$$

$$\Pi_и = 4,5;$$

$$\Pi_п = 15,44 - 0,43\Pi_и = 15,44 - 0,43 \cdot 4,5 = 13,5.$$

Результат совпал с полученным ранее.

Аналогично найдем решение для случая на рисунке 2.13, *б*:

$$\Pi_п = 12,\ \Pi_и = 8,\ \alpha = 0,3,\ \beta = 0,7.$$

Величина $\Pi_п$ имеет наименьший коэффициент пропорциональности.

Построим линейное уравнение:

$$\Pi_п - \frac{\alpha}{\beta}\Pi_и = 12 - 0,43 \cdot 8 = 8,56;$$

$$\Pi_п = 8,56 + 0,43\Pi_и.$$

Подставляем полученное уравнение в формулу:

$$\Pi = 8,56 + 0,43 \cdot \Pi_и + \Pi_и = 18;$$

$$1,43\Pi_и = 9,44;$$

$$\Pi_и = 6,6;$$

$$\Pi_п = 8,56 + 0,43\Pi_и = 8,56 + 0,43 \cdot 6,6 = 11,4.$$

. . . .

Пример 2.12

Также рассмотрим следующий пример зависимости функции от трех аргументов. Прибыль организации (p) равна разности выручки (r) и постоянных (c) и переменных (v) затрат:

$$p = r - c - v.$$

Исходные данные (тыс. руб.): $p = 200, r = 400, c = 50, v = 150$. Ставится задача определения уровня выручки, переменных и постоянных затрат для увеличения прибыли на 150 тыс. При этом коэффициенты относительной значимости равны: $\alpha = 0,8, \beta = 0,1, \gamma = 0,1$ (рис. 2.17).

Задача может быть решена с помощью процедуры свертки. Нужно определить дополнительную переменную s, характеризующую общие затраты. Тогда задача разбивается на две подзадачи (рис. 2.18). Сначала необходимо определить прирост выручки и общих затрат, а затем изменение постоянных и переменных затрат. Значения коэффициентов пропорциональности нормируются таким образом, чтобы их сумма была равна единице.

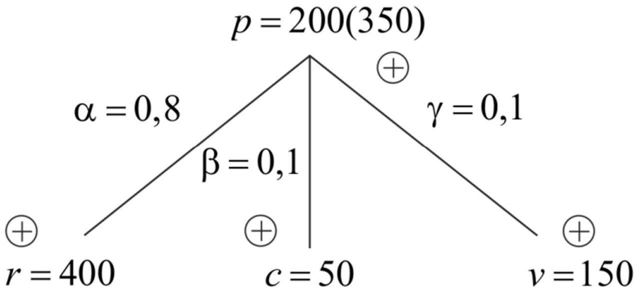


Рис. 2.17 – Трехфакторная модель

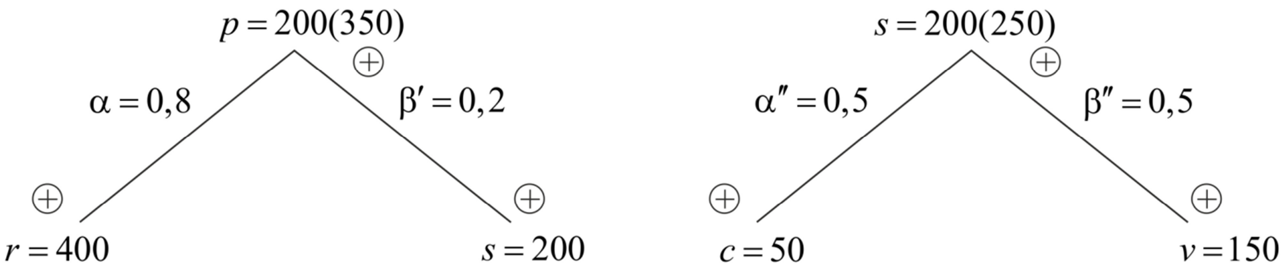


Рис. 2.18 – Разбиение на подзадачи

Решение первой подзадачи:

$$r = -400 + 4 \cdot s;$$
$$-400 + 4 \cdot s - s = 350;$$
$$s = 250;$$
$$r = 600.$$

Решение второй подзадачи:

$$c = -100 + v;$$
$$-100 + v + v = 250;$$
$$2 \cdot v = 350;$$
$$v = 175;$$
$$c = 75.$$

. . . .

Аналогичным способом происходит решение задачи при большем числе аргументов. В качестве примеров таких моделей можно привести рейтинговую оценку организации, интегральные показатели (кредитоспособности, платежеспособности и т. д.) и др.

Контрольные вопросы по главе 2

1. Какие существуют методы прямого писка?
2. Опишите метод Гаусса.
3. В чем суть симплексного метода?
4. В чем суть метода Хука – Дживса?
5. Что такое градиент?
6. В чем суть метода градиентного спуска?
7. В каком случае метод градиентного спуска расходится?
8. В чем суть метода Ньютона?
9. Что такое обратная задача?
10. В чем суть обратных вычислений?

3 Линейное программирование

3.1 Постановка задачи линейного программирования

Приведем обратную задачу, рассмотренный в гл. 2 (рис. 3.1). Выручка (r) равна произведению цены (p) и количества товара (c):

$$r = p \cdot c.$$

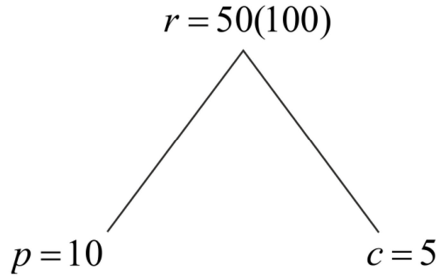


Рис. 3.1 – Зависимость показателей

Рассматривалось определение значения цены и количества, которые обеспечили бы величину выручки, равную 100. Исходные данные: $r = 50$, $p = 10$, $c = 5$.

Предположим теперь, что рассматриваются два вида товаров, их цена изменяться не может и равна фиксированной величине: $p_1 = 10$ и $p_2 = 5$, нужно определить такое количество товара каждого вида: c_1 и c_2, чтобы выручка r за месяц предприятия была максимальна:

$$r = p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2. \tag{3.1}$$

Из формулы (3.1) следует, что данная задача не имеет конкретного решения: чем больше будет количество проданного товара c_1 и c_2, тем больше будет и выручка. С другой стороны, количество проданного товара не может увеличиваться до бесконечности и ограничено максимальным спросом: пусть $c_{\max 1} = 6$ (максимальное значение спроса на первый товар) и $c_{\max 2} = 8$ (максимальное значение спроса на второй товар) и возможностями предприятия: предприятие может выпускать только ограниченное количество товара в месяц: $c_1 + c_1 = 10$. Полученная задача может быть представлена в следующем виде:

- $r(p,c) = 10 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 \to \max$ (максимизируем выручку);
- $\begin{matrix} c_1 \le 6 \\ c_2 \le 8 \end{matrix}$ (ограничение максимальным спросом);

- $c_1 + c_2 = 10$ (ограничение на объем производимой продукции предприятием).

Задачи нахождения наилучшего значения (максимального или минимального) при заданных ограничениях называют оптимизационными задачами. Не прибегая к методам решения подобных задач, которые будут рассмотрены далее, можно сказать, что решением данной задачи будет следующее: $c_1 = 6$, $c_2 = 4$. Это следует из того, что цена первого товара максимальна, следовательно, чтобы максимизировать выручку, нужно продать наибольшее количество этого товара, которое равно 6 $(c_{\max 1} = 6)$. В месяц предприятие может выпустить 10 товаров, а значит, ещё 4 товара можно выпустить первого вида. Следовательно, выручка составит (3.1): $r(p,c) = 10 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 80$ д. е.

Задачи подобного вида называют задачами линейного программирования (ЗЛП). В общем виде их можно представить следующим образом.

Максимизировать *целевую* функцию (искомые величины $x_j, j = 1..n$ входят в функцию без степени) [5]:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_x, \tag{3.2}$$

при некоторых *ограничениях*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \quad =, \quad \ge\} b_i, \ i = 1,...,m, \tag{3.3}$$

$$N_j^L \le x_j \le N_j^U, \ j = 1,...,n, \tag{3.4}$$

где c_j – величина, показывающая, какой вклад в результат дает единица продукции j-го вида. В качестве данной величины может рассматривать цена товара, его полезность и т. д.;

N_j^L – минимальное значение x_j;

N_j^U – максимальное значение x_j;

a_{ij} и b_i – некоторые величины, определяющие смысл неравенства. Например, в задаче определения набора товаров (поиск количества товаров x_j каждого вида, которое нужно купить) неравенство может иметь вид: $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \le b$, где a_1 – цена товара первого вида, a_2 – цена товара второго вида, x_1 – количество товара первого вида, x_2 – количество товара второго вида (величина $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$ определит стоимость набора товаров), b – доход покупателя.

Ограничения могут отличаться в зависимости от конкретной задачи.

Решение задачи состоит в нахождении значений x_j, обеспечивающих при заданных ресурсах получение максимального результата.

Также может быть рассмотрена задача определения минимума целевой функции:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_x. \tag{3.5}$$

Задачи такого вида встречаются в случаях, когда, например, рассматриваются затраты (их нужно минимизировать).

Таким образом, задачами линейного программирования называются задачи оптимизации, в которых ограничения, представленные в виде равенств или неравенств, и целевая функция линейны.

Каждая задача линейного программирования содержит целевую функцию (3.2, 3.5) и ограничения (3.3, 3.4).

Задача линейного программирования может быть представлена в матричном виде:

$$\min\ f(x) = \min c^t x,$$

$$Ax \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b,$$

$$x \ge 0,$$

где $A = \{a_{ij}\}$ – действительная матрица $m \cdot n$ ограничений; $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$ – вектор строка; $b = (b_1, \ldots, b_m)$ – вектор ограничений $\left(b_j \ge 0,\ j = 1, \ldots m\right)$;

$f(x) = c^t x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – целевая функция.

Неотрицательность элементов вектора b легко получить, если это необходимо, умножив соответствующие неравенства на (–1).

ЗЛП имеет *стандартную форму*, если все ее ограничения имеют форму равенства (кроме ограничений неотрицательности $x_j \ge 0$):

$$f(x) = c^t x \to \min_x;$$

$$Ax = b;$$
$$x \ge 0.$$

Если ищется максимум ЦФ $f(x)$, то заменой ЦФ на $-f(x)$ сводят исходную задачу к минимизации функции $-f(x)$, то есть $\min\left(-f(x)\right) = \max f(x)$.

Основные методы решения ЗЛП ориентированы на использование стандартной (канонической) формы записи.

Любую ЗЛП всегда можно представить в стандартной форме, введя дополнительные переменные.

Пример 3.1

Представим в стандартной форме задачу:

$$\min\left(5x_1 - 3x_2\right);$$
$$x_1 - x_2 \ge 2;$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 4;$$
$$-x_1 + 6x_2 = 10;$$
$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Введя дополнительные переменные $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$ в 1-м и 2-м ограничениях, получим задачу в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \min\left(5x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4\right); \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4; \\ -x_1 + 6x_2 = 10; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Мы получили стандартную форму записи задачи.

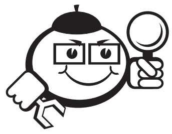
Следует подчеркнуть, что дополнительные переменные столь же необходимы, как и исходные переменные задачи.

В некоторых случаях возникает необходимость рассмотрения переменных x_j, на которые не наложены ограничения, т. е. x_j может принимать и положительные, и отрицательные значения. Поскольку переменные задачи линейного программирования в стандартной форме предполагаются неотрицательными, неограниченные переменные заменяют выражением:

$$x_j = u_j - v_j,$$

где $u_j \ge 0, v_j \ge 0.$

Значения x_j могут быть >0 или <0 в зависимости от соотношения величин u_j и v_j.



Пример 3.2

Рассмотрим задачу линейного программирования в нестандартной форме или в общем виде [1]:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max;$$

ограничения:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \ge 2,$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ (\ge/\le) \ 0,$$

где x_3 – переменная, неограниченная по знаку.

Преобразуем эту задачу к стандартной форме (СФ):

1) заменим x_3 на $x_4 - x_5$, где $x_4, x_5 \ge 0$;
2) умножим обе части уравнения на (–1);
3) введем дополнительные переменные x_6, x_7 в ограничения;
4) припишем нулевой коэффициент переменным x_6, x_7, а целевую функцию умножим на (–1).

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к следующей задаче линейного программирования в СФ:

$$-f(x) = -x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 3x_5 - 0 \cdot x_6 - 0 \cdot x_7 \to \min;$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7;$$

$$x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2;$$

$$-3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5;$$

$$x_j \ge 0; j = 1, \ldots, 7.$$

Если b – вектор ресурсов, то дополнительная переменная x_6 означает резерв ресурса. В первом ограничении введена переменная x_7 со знаком «–». Это значит, что переменная x_7 представляет собой количество дополнительного ресурса, необходимого для выполнения плана.

. . . .

Для решения задач линейного программирования используют графический и аналитический методы.

3.2 Примеры задач линейного программирования

3.2.1 Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства)

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов: S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 3.1 (цифры условные). Также в таблице приведена стоимость продажи единицы продукции [1].

Таблица 3.1 – Исходные данные

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции**	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	–	1
S_4	21	3	–
Стоимость ед. продукции		2 д. е.	3 д. е.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно P_1 и P_2, запланированных к производству. Для их изготовления (см. табл. 3.1) потребуется (x_1+3x_2) единиц ресурса S_1, $(2x_1+x_2)$ единиц ресурса S_2, (x_2) единиц ресурса S_3 и $(3x_2)$ единиц ресурса S_4. Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицу, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 18, \\ 2x_1+x_2\le 16, \\ x_2\le 5, \\ 3x_1\le 21. \end{cases} \tag{3.6}$$

По смыслу задачи переменные $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ (количество изготавливаемой продукции не может быть отрицательной).

Суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ руб. – от реализации продукции P_2, т. е.

$$f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2. \tag{3.7}$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $X=(x_1,x_2)$ (x_1 – количество изготавливаемой продукции первого вида, x_2 – количество изготавливаемой продукции второго вида), удовлетворяющий системе (3.6) и условию $(x_1\ge 0,\ x_2\ge 0)$, при котором функция (3.7) принимает *максимальное* значение.

Выполним решение задачи с помощью Excel (рис. 3.2). Для этого в ячейках C2:C5 нужно записать ограничения (3.6):

<C2>=A2+3*B2;

<C3>=2*A2+B2;

<C4>=B2;

<C5>=3*A2.

	A	B	C	D
1	x1	x2	Ограничения	
2	6	4	18	18
3			16	16
4			4	5
5			18	21
6			Прибыль	24

Рис. 3.2 – Решение задачи

В ячейке D6 приводится расчет прибыли:

<D6>=2*A2+3*B2.

После этого вызывается надстройка «Поиск решения» («Данные» → «Поиск решения»), в которой указываются ограничения и целевая функция (рис. 3.3).

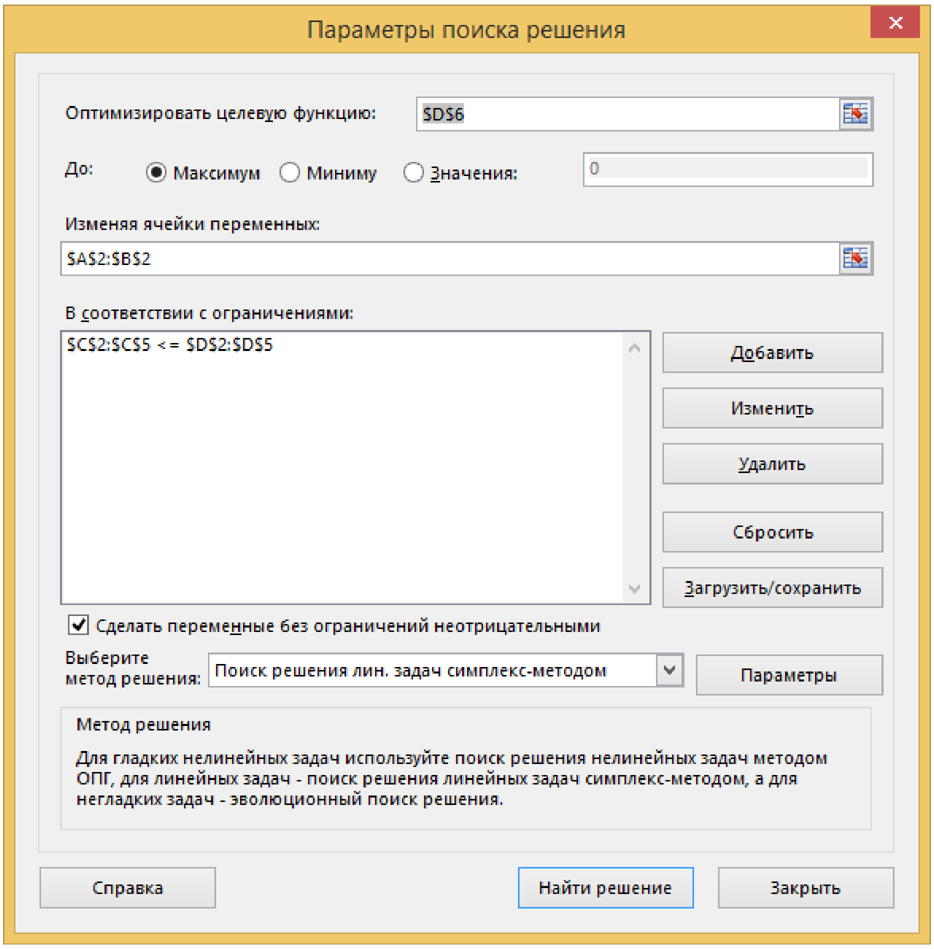


Рис. 3.3 – Надстройка «Поиск решения»

В итоге было получено, что $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. Ограничения (3.6) выполняются (на рисунке 3.2 значения в ячейках C2:C5 меньше или равны D2:D5). Суммарная прибыль составит:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 = 12 + 12 = 24 \text{ д. е.}$$

Задачу легко обобщить на случай выпуска n видов продукции с использованием m видов ресурсов.

Обозначим x_j $(j = 1,\ldots,n)$ – число единиц продукции P_j, запланированной к производству; b_i $(i = 1,\ldots,m)$ – запас ресурсов S_i, a_{ij} – число единиц ресурса S_i, затрачиваемого на изготовление единицы продукции P_j (числа a_{ij} часто называют технологическими коэффициентами); c_j – прибыль от реализации единицы продукции P_j.

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании ресурсов в общей постановке примет вид: найти такой план $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ выпуска продукции, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

и условию

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0,$$

при котором функция

$$f(x) = c_1x_1 + c_{21}x_2 + ... + c_nx_n$$

принимает *максимальное* значение.

Рассмотрим пример подобной задачи. В таблице 3.2 представлены сведения о производстве товаров двух видов: печение «Ромашка» и печенье «Глаголик». Приводится состав этих продуктов. Так, для изготовления 1 кг печенья «Ромашка» понадобится 495 г муки, 6 г яйца, 210 г сахара, 330 г маргарина, 1 г ванилина, 1 г соли и 156 г повидла. На предприятии имеются следующие ресурсы: 300 кг муки, 200 кг яйца, 300 кг сахара, 200 кг маргарина, 100 кг ванилина, 100 кг соли, 50 кг повидла, 70 кг сахарной пудры. Маржинальная прибыль за 1 кг печенья «Ромашка» составляет 84,61 руб. за 1 кг, «Глаголик» – 86,84 руб. за 1 кг.

Таблица 3.2 – Сведения о продуктах

Продукты	**Печенье «Ромашка»**	**Печенье «Глаголик»**	**Ограничение сырья, кг**
Мука, кг	0,495	0,37	300
Яйцо, кг	0,06	0,12	200
Сахар, кг	0,21	0,21	300
Маргарин, кг	0,33	0,405	200
Ванилин, кг	0,001	0,001	100
Соль, кг	0,001	0,001	100

Продукты	Печенье «Ромашка»	Печенье «Глаголик»	Ограничение сырья, кг
Повидло, кг	0,156	0	50
Сахарная пудра, кг	0	0,001	70
Маржинальная прибыль, руб. за 1 кг	84,61	86,84	

Математико-экономическая модель будет иметь вид. x_1 – искомое количество (в кг) печенья «Ромашка», x_2 – искомое количество (в кг) печенья «Глаголик». Связь между потребляемыми ресурсами и их запасами будет иметь вид:

$$\begin{cases} 0,495x_1 + 0,37x_2 \le 300, \\ 0,06x_1 + 0,12x_2 \le 200, \\ 0,21x_1 + 0,21x_2 \le 300, \\ 0,33x_1 + 0,405x_2 \le 200, \\ 0,001x_1 + 0,001x_2 \le 100, \\ 0,001x_1 + 0,001x_2 \le 100, \\ 0,156x_1 \le 50, \\ 0,001x_2 \le 70. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ (количество изготавливаемой продукции не может быть отрицательной).

Суммарная маржинальная прибыль f составит $84,61x_1$ руб. от реализации печенья «Ромашка» и $86,84x_2$ руб. – от реализации печенья «Глаголик», т. е.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 84,61x_1 + 86,84x_2.$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $X = \left(x_1, x_2\right)$, удовлетворяющий системе уравнений и условию $\left(x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\right)$, при котором функция $f\left(x_1, x_2\right)$ принимает *максимальное* значение.

Решение задачи в Excel представлено на рисунке 3.4. Согласно полученным результатам нужно произвести 320,513 кг печенья «Ромашка» и 232,669 кг печенья «Глаголик». Общая маржинальная прибыль будет равна 47 323,53 руб.

Расход ресурсов (244,741 кг муки, 47,151 кг яиц, 116,168 кг сахара и т. д.) соответствует ограничениям, обусловленным их наличием на предприятии.

		«Ромашка»	«Глаголик»	Ограничение	Расход
11		«Ромашка»	«Глаголик»	Ограничение	Расход
12	Мука	0,495	0,37	300	244,741
13	Яйцо	0,06	0,12	200	47,151
14	Сахар	0,21	0,21	300	116,168
15	Маргарин	0,33	0,405	200	200,000
16	Ванилин	0,001	0,001	100	0,553
17	Соль	0,001	0,001	100	0,553
18	Повидло	0,156	0	50	50,000
19	Сахарная пудра	0	0,001	70	0,233
20	Марж. прибыль за кг	84,61	86,84		
21					
22	**Количество, кг**	**320,512821**	**232,668564**		
23	Маржинальная прибыль	47323,53			

Рис. 3.4 – Решение задачи об использовании ресурсов

3.2.2 Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях)

Имеются два вида корма P_1 и P_2, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице 3.3 (цифры условные). Также в таблице представлена стоимость 1 кг корма каждого вида [1].

Таблица 3.3 – Исходные данные

Питательное вещество	**Необходимый минимум питательных веществ**	**Число единиц питательных веществ в 1 кг корма**	
		P_1	P_2
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6
Стоимость 1 кг корма		4 д. е.	6 д. е.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – количество кормов P_1 и P_2, входящих в дневной рацион. Тогда этот рацион (см. табл. 3.3) будет включать $(3x_1 + x_2)$ единиц питательного вещества S_1, $(x_1 + 2x_2)$ единиц вещества S_2 и $(x_1 + 6x_2)$ единиц питательного вещества S_3. Так как содержание питательных веществ S_1, S_2 и S_3 в рационе должно быть не менее соответственно 9, 8 и 12 единиц, то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases} \tag{3.8}$$

Кроме того, переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (количество корма в рационе не может быть отрицательным).

Общая стоимость рациона составит (в д. е.):

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2. \tag{3.9}$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: составить дневной рацион $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе (3.8) и условию ($x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$), при котором функция (3.9) принимает *минимальное* значение.

Полученное с помощью Excel решение:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3.$$

Ограничения (2.8) выполняются, т. к.:

$$3x_1 + x_2 = 3 \cdot 2 + 3 = 9;$$

$$x_1 + 2x_2 = 8;$$

$$x_1 + 6x_2 = 20.$$

Общая стоимость рациона составит (в д. е.)

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$$

Для формулировки задачи в общей постановке обозначим: x_j $(j = 1, ..., n)$ – число единиц корма j-го вида; b_i $(i = 1, ..., m)$ – необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества S_i; a_{ij} – число единиц питательного вещества S_i в единице корма j-го вида; c_j – стоимость единицы корма j-го вида.

Тогда экономико-математическая модель задачи примет вид:
найти такой рацион $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

и условию

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0,$$

при котором функция

$$f(x) = c_1x_1 + c_{21}x_2 + ... + c_nx_n$$

принимает *минимальное* значение.

Рассмотрим пример задачи о диете.

В таблице 3.4 представлены сведения о продуктах и о содержании в них витаминов C и E.

Таблица 3.4 – Исходные данные

Витамин	**Содержание в 100 г лимона, мг**	**Содержание в 100 г миндаля, мг**
C	40	1,5
E	0,2	25,2

Суточная потребность человека в витамине C составляет 75 мг, в витамине E – 14 мг. Стоимость 100 г лимона составляет 17 руб., миндаля – 58 руб.

Таким образом, модель имеет вид (x_1 – количество лимона (× 100 г), x_2 – количество миндаля (× 100 г)). Ограничения:

$$\begin{cases} 40x_1 + 1,5x_2 \ge 75, \\ 0,2x_1 + 25,2x_2 \ge 14, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

Целевая функция:

$$f\left(x_1, x_2\right) = 17x_1 + 58x_2 \to \min.$$

Полученное с помощью Excel решение (рис. 3.5):

$$x_1 = 1,85,\ \ x_2 = 0,54$$

т. е. в день нужно употребить 185 г лимона и 54 г миндаля.

Потребление витамина C составит:

$$40x_1 + 1,5x_2 = 40 \cdot 1,85 + 1,5 \cdot 0,54 = 75\ \text{мг}.$$

Потребление витамина Е составит:

$$0,2x_1 + 25,2x_2 = 0,2 \cdot 1,85 + 25,2 \cdot 0,54 = 14 \text{ мг},$$

что соответствует суточной потребности (рис. 3.5).

Суточная потребность		Витамин	Содержание в 100 г лимона, мг	Содержание в 100 г миндаля, мг
Витамин С	Витамин Е	С	40	1,5
75	14	Е	0,2	25,2
		цена	17	58
		x1	x2	Стоимость
		1,854718666	0,540835566	62,9
				Суточное потребление
			Витамин С	75
			Витамин Е	14

Рис. 3.5 – Решение задачи о диете

При этом стоимость набора продуктов составит:

$$f(x_1, x_2) = 17x_1 + 58x_2 = 17 \cdot 1,85 + 58 \cdot 0,54 = 63 \text{ руб.}$$

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$c := \begin{pmatrix} 17 \\ 58 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := c \cdot x$$

$$A := \begin{pmatrix} 40 & 1.5 \\ 0.2 & 25.2 \end{pmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 75 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad x \ge 0$$

$$x_2 := 0$$

Given

$$A \cdot x \ge b$$

$$\text{Minimize}(f, x) = \begin{pmatrix} 1.855 \\ 0.541 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.6 – Решение задачи в MathCad при представлении исходных данных в матричном виде

На рисунке 3.6 представлено решение задачи в MathCad. Здесь исходные данные представлены в матричном виде. Результат совпал с решением, полученным ранее.

3.2.3 Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить $n_1, n_2, ..., n_k$ единиц продукции P_1, P_2, …, P_k. Продукция производится на станках S_1, S_2, …, S_m. Для каждого станка известны производительность a_{ij} (т. е. число единиц продукции P_j, которое можно произвести на станке S_i за единицу времени) и затраты b_{ij} на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени [1].

Необходимо составить такой план работы станков (т. е. так распределить выпуск продукции между станками), чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_{ij} – время, в течение которого станок S_i $(i = 1, ..., m)$ будет занят изготовлением продукции P_j $(j = 1, ..., k)$.

Так как время работы каждого станка ограничено и не превышает T, то справедливы неравенства:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1k} \le T, \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2k} \le T, \\ .... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mk} \le T. \end{cases} \tag{3.10}$$

Для выполнения плана выпуска по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + ... + a_{m1}x_{m1} = n_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + ... + a_{m2}x_{m2} = n_2, \\ .... \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + ... + a_{mk}x_{mk} = n_k. \end{cases} \tag{3.11}$$

Кроме того,

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., k).$$

Затраты на производство всей продукции выразятся функцией

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_{ij}. \tag{3.12}$$

Экономико-математическая модель задачи об использовании мощностей примет вид: найти такое решение $X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mk})$, удовлетворяющее системам (3.10) и (3.11) и условию $\left(x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., k)\right)$, при котором функция (3.12) принимает минимальное значение.

3.2.4 Задача о раскрое материалов

На раскрой (распил, обработку) поступает материал одного образца в количестве V единиц. Требуется изготовить из него m разных комплектующих изделий в количествах, пропорциональных числам $b_1, b_2, ..., b_m$ (условие комплектности). Каждая единица материала может быть раскроена n различными способами, причем использование j-го способа $(j = 1, 2, ..., n)$ дает a_{ji} единиц i-го изделия $(i = 1, 2, ..., m)$ [1].

Необходимо найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_j – число единиц материала, раскраиваемых j-м способом, и x – число изготавливаемых комплектов изделий.

Так как общее количество материала равно сумме его единиц, раскраиваемых различными способами, то

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = V. \tag{3.13}$$

Требование комплектности выразится уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji} = x b_i \ \ (i = 1, 2, ..., m). \tag{3.14}$$

Очевидно, что

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1, ..., n).$$

Экономико-математическая модель задачи: найти такое решение $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющее системе уравнений (3.13)–(3.14) и условию $\left(x_j \geq 0 \ (j = 1, ..., n)\right)$, при котором функция

$$f = x$$

принимает *максимальное* значение.

Пример 3.3

Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить экономико-математическую модель задачи.

Прежде всего определим всевозможные способы распила бревен, указав соответствующее число получаемых при этом брусьев (табл. 3.5).

Таблица 3.5 – Исходные данные

Способ распила j	**Кол-во получаемых брусьев**		
	1,2 м	3,0 м	5,0 м
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Обозначим: x_j – число бревен, распиленных j-м способом $\left(j = 1,2,3,4\right)$; x – число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$f = x \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2x, \\ x_2 + 2x_3 = x, \\ x_4 = 3x, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = 1,2,3,4\right).$$

3.2.5 Задача технического контроля

В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры 1-го и 2-го разрядов. Норма выработки ОТК за 8-часовой рабочий день составляет не менее 1 800 изделий. Контролер 1-го разряда проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер 2-го разряда проверяет 15 изделий в час; его точность – 95% [1].

Зарплата контролера К_1 – 4 д. е. в час, контроля К_2 – 3 д. е. в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере 2 д. е. Фирма может использовать не более 8 К_1 и не более 10 К_2. Определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Составим экономико-математическую модель.

Пусть x_1, x_2 обозначают количество К_1 и К_2 соответственно. Число контролеров каждого разряда ограничено, т. е.

$$x_1 \le 8 \ \text{(разряд 1)};$$

$$x_2 \le 10 \ \text{(разряд 2)}.$$

Ежедневно необходимо проверять не менее 1 800 изделий. Поэтому должно выполняться неравенство

$$8 \cdot 25 \cdot x_1 + 8 \cdot 15 \cdot x_2 = 200x_1 + 120x_2 \ge 1800$$

$$\text{или } 5x_1 + 3x_2 \ge 45.$$

При построении целевой функции следует иметь в виду, что расходы фирмы, связанные с контролем, включают две составляющие:

- зарплату контролеров;
- убытки, вызванные ошибками контролеров.

Расходы на одного контролера К_1 составляют

$$4 + 2 \cdot 25 \cdot 0{,}02 = 5_{\text{д.е./час}}.$$

Расходы на одного контролера К_2 составляют

$$3 + 2 \cdot 15 \cdot 0{,}05 = 4{,}5_{\text{д.е./час}}.$$

Следовательно, целевая функция, выражающая ежедневные расходы на контроль, имеет вид

$$f(x_1, x_2) = 8(5x_1 + 4{,}5x_2) = 40x_1 + 36x_2.$$

Экономико-математическая модель отдела технического контроля примет вид:

$$f(x) = 40x_1 + 36x_2 \to \min$$

при ограничениях: $5x_1 + 3x_2 \geq 45$

$$0 \leq x_1 \leq 8; \quad 0 \leq x_2 \leq 10.$$

3.2.6 Задача об оптимальном ассортименте

Имеются два вида товара, характеризующиеся ценой, переменными затратами, трудозатратами (время на изготовление одного товара), необходимым количеством сырья (табл. 3.6). На предприятии существует ограничения трудозатрат (80 часов) и сырья (50 кг).

Таблица 3.6 – Исходные данные

Характеристика	**Товар 1**	**Товар 2**
Цена, д. е.	10	8
Переменные затраты, д. е.	4	3
Трудозатраты, час	5	10
Сырье, кг	4	2

Необходимо определить количество товара каждого вида, имеющее максимальную маржинальную прибыль, в при этом трудозатраты и сырье не должны превышать ограничений.

Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – количество товаров первого и второго вида. Тогда общие трудозатраты будут равны $5x_1 + 10x_2$ (см. рис. 3.7), а объем необходимого сырья составит $4x_1 + 2x_2$. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 80, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 50. \end{cases} \tag{3.15}$$

Кроме того, переменные $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (количество товара не может быть отрицательным).

Маржинальная прибыль составит:

$$f(x_1, x_2) = x_1(10 - 4) + x_2(8 - 3). \tag{3.16}$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: определить количество товаров каждого вида $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющего системе (3.15) и условию $(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$, при котором функция (3.16) принимает *максимальное* значение.

Решением задачи являются значения: $x_1 = 11{,}333,\ x_2 = 2{,}333$ кг.

	A	B	C	D
1			Товар 1	Товар 2
2		Переменные затраты	4	3
3		Цена	10	8
4		Трудоемкость	5	10
5		Сырье	4	2
6		Количество	11,33333	2,333333
7				
8		Трудоемкость	80	80
9		Сырье	50	50
10				
11		Маржинальная прибыль	79,66667	

Рис. 3.7 – Решение задачи

Трудоемкость составит: $5x_1 + 10x_2 = 5 \cdot 11{,}333 + 10 \cdot 2{,}333 = 80$ часов.

Расход сырья: $4x_1 + 2x_2 = 4 \cdot 11{,}333 + 2 \cdot 2{,}333 = 50$ кг.

Таким образом, ограничения задачи выполняются.

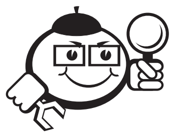
Маржинальная прибыль составит:

$$f(x_1, x_2) = x_1(10 - 4) + x_2(8 - 3) = 79{,}67 \text{ д. е.}$$

3.3 Решение задач линейного программирования

3.3.1 Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод применяют, когда число переменных не превосходит 2. На практике задачи такой размерности встречаются редко, однако графический метод хорошо иллюстрирует основные понятия, используемые при решении ЗЛП большой размерности. Графический метод рассмотрим на примере задачи (задача технического контроля) [1].



Пример 3.4

$$\min f(x) = 40x_1 + 36x_2;$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 45;$$
$$x_1 \le 8,\ x_2 \le 10;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

В качестве первого шага решения следует определить допустимую область, или область допустимых решений (ОДР).

Для изображения ОДР следует начертить графики всех ограничений. Все допустимые решения лежат в первом квадранте, т. к. $x_1, x_2 \ge 0$ (см. рис. 3.7).

ОДР задачи является треугольник ABC (рис. 3.8) (в общем случае многогранник M при $m > 2$), который содержит бесконечное число допустимых точек. Нужно найти точку, в которой $f(x) = \min$.

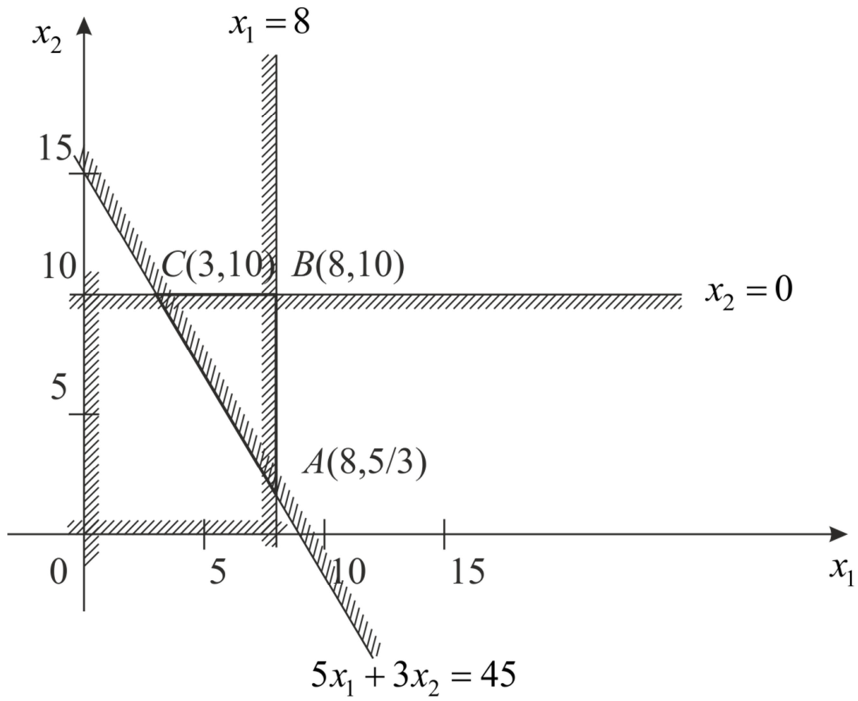


Рис. 3.8 – ОДР задачи технического контроля

Если зафиксировать значение ЦФ $f = 40x_1 + 36x_2$, то соответствующие ему точки будут лежать на некоторой прямой. При изменении величины f прямая подвергается параллельному переносу. При поиске максимума линия смещается в направлении градиента, при поиске минимума – антиградиента до точки последнего касания границы ОДР.

Рассмотрим прямые, соответствующие различным значениям f, имеющие с ОДР хотя бы одну общую точку. Построим линию уровня ЦФ, проходящую через ОДР, например, через точку $B(8,10)$. Значение ЦФ в этой точке $f(8,10) = 40 \cdot 8 + 36 \cdot 10 = 680$, построим прямую

$$f(x) = 680 \Rightarrow 40x_1 + 36x_2 = 680 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x_1 + 9x_2 = 170.$$

Также укажем на рисунке направление антиградиента ЦФ (рис. 3.9):

$$-\nabla f(x) = -\begin{pmatrix} 40 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -36 \end{pmatrix}.$$

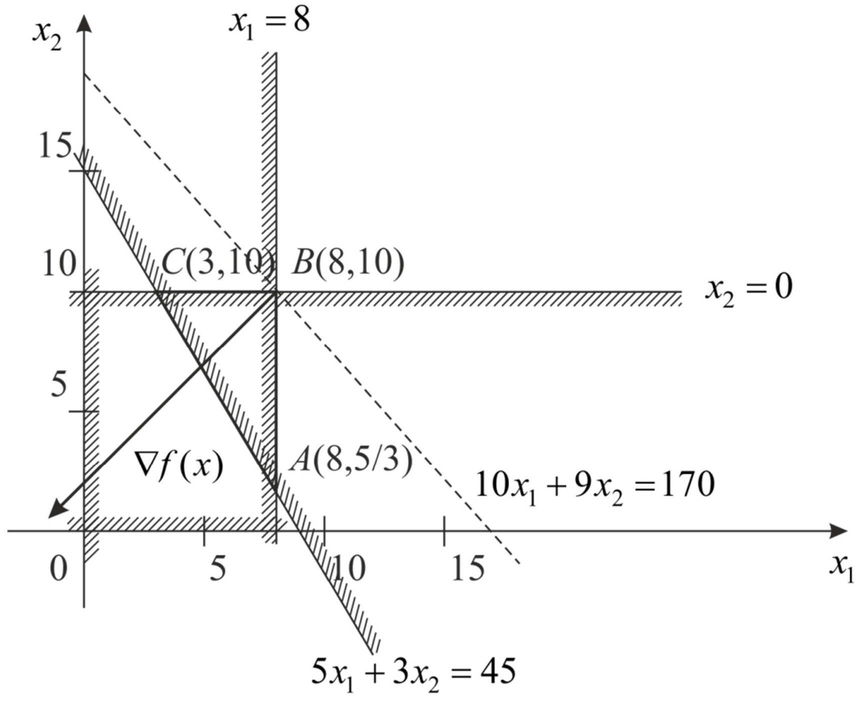


Рис. 3.9 – Линия уровня ЦФ и направление антиградиента

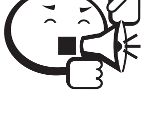
При приближении прямой ЦФ к началу координат значение f уменьшается. Минимальное значение ЦФ достигается в узловой точке $A(8,\ 5/3)$. Следовательно, $x^* = (8,\ 5/3)$; $f^* = 380$ – оптимальное решение задачи. Таким образом $x^* = (8,\ 5/3)$ – оптимальный план.

Итак, для оптимального режима работы ОТК необходимо использовать 8 контролеров 1-го разряда и 1,6 контролера 2-го разряда. Дробное значение $x_2 = 1{,}6$ соответствует ситуации, когда один из двух К2 используется в течение неполного рабочего дня. При недопустимости неполной загрузки контролеров дробные значения обычно округляются, получая приближенное оптимальное целочисленное решение $x_1 = 8,\ x_2 = 2$.

. . . .

Из рассмотренного примера решения задачи ОТК мы видим, что оптимальное решение задачи соответствует одной из вершин многогранника.

. . . .

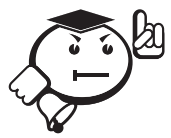


Отсюда можно сделать исключительно важный вывод: оптимальное решение – координаты вершины области допустимых решений.

. . . .

Из этого вывода следует метод *решения* задач линейного программирования, который заключается в следующем:

1. Найти вершины области допустимых решений как точки пересечения ограничений.
2. Определить последовательно значения целевой функции в вершинах.
3. Вершина, в которой целевая функция приобретает оптимальное (max или min) значение, является оптимальной вершиной.
4. Координаты оптимальной вершины есть оптимальные значения искомых переменных.



Возможны следующие частные случаи:

1. При параллельном переносе прямая $f(x) = \text{const}$ совпадает с одной из сторон многогранника решений. Имеем бесконечное множество решений (рис. 3.10). В данном примере каждая точка отрезка AE является оптимальным решением.

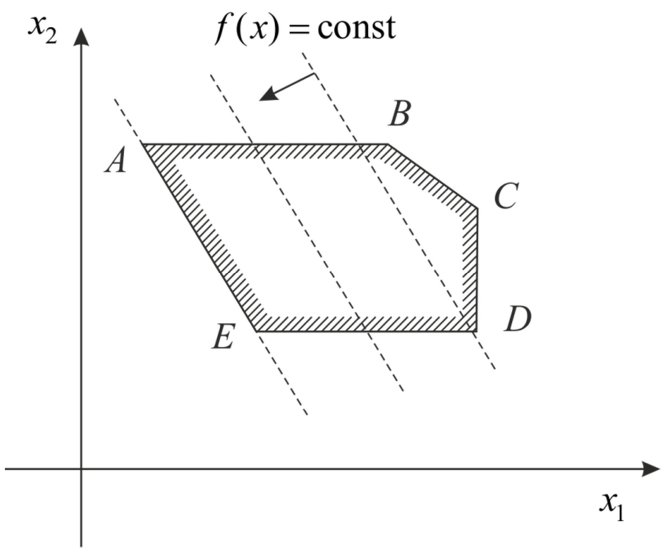


Рис. 3.10 – ЗЛП, имеющая бесконечное множество решений

2. ОДР не ограничена сверху (так называемый «стакан», рис. 3.11).

Если антиградиент направлен ко «дну стакана» (вниз), то задача будет иметь решение только на минимум, в противном случае – только на максимум.

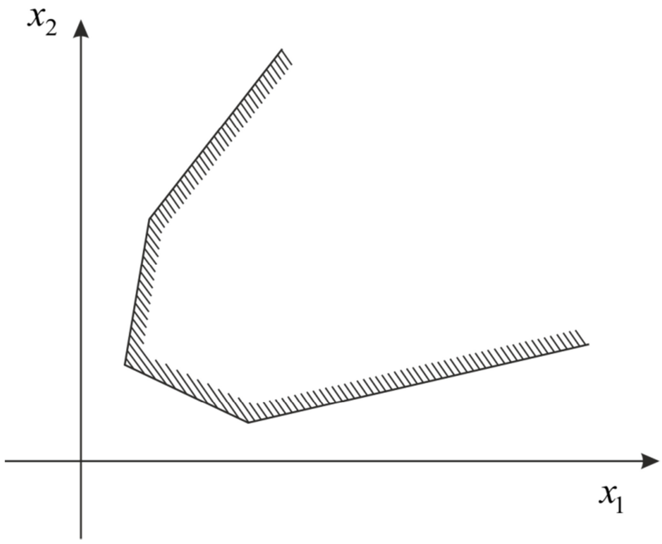


Рис. 3.11 – ОДР ЗЛП не ограничена сверху

3. ОДР не ограничена снизу («перевернутый стакан», рис. 3.12).

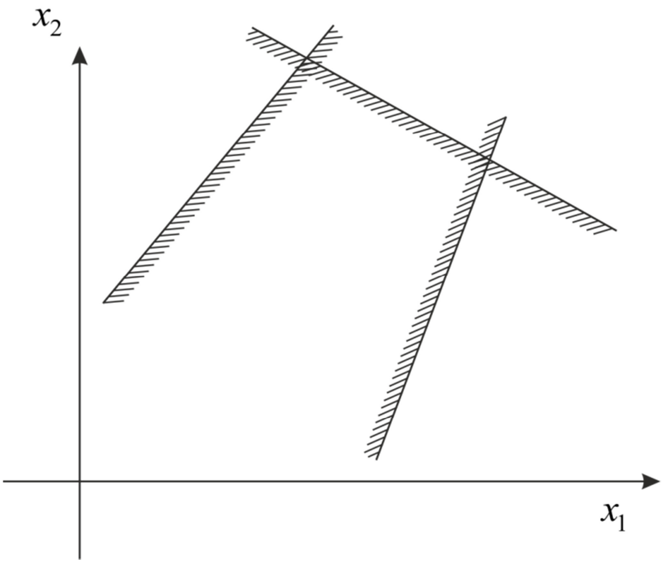


Рис. 3.12 – ОДР ЗЛП не ограничена снизу

Аналогично, если антиградиент направлен ко «дну стакана» (вверх), то задача будет иметь решение только на минимум, в противном случае – только на максимум.

. . . .

3.3.2 Основы симплекс-метода

Рассмотрим общую ЗЛП с m ограничениями и n переменными, записанную в стандартной (канонической) форме:

$$f(x) = c^t x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;$$
$$\ldots \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m;$$
$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,n}.$$

Как правило, число уравнений задачи меньше числа переменных (т. е. $m < n$), поэтому множество ее допустимых решений равно ∞. Задача состоит в том, чтобы найти наилучшее решение в смысле принятого критерия (минимума целевой функции).

Выше было отмечено, что оптимальное решение представляет собой одну из вершин многогранника допустимой области. Другими словами, оптимальное решение – это одно из базисных решений.

Получение одного из базисных решений основано на известном классическом методе решения систем линейных уравнений – методе Гаусса – Жордана. Основная идея этого метода состоит в сведении системы m уравнений с n неизвестными к *каноническому* или *ступенчатому* виду при помощи элементарных операций над строками:

1) умножение любого уравнения системы на положительное или отрицательное число;
2) прибавление к любому уравнению другого уравнения системы, умноженного на положительное или отрицательное число.

При использовании первых m переменных такая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1 + a^0_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a^0_{1,s}x_s + \ldots + a^0_{1,n}x_n &= b^0_1; \\ x_k + a^0_{k,m+1}x_{m+1} + \ldots + a^0_{k,s}x_s + \ldots + a_{k,n}x_n &= b^0_k; \\ x_m + a^0_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a^0_{m,s}x_s + \ldots + a_{m,n}x_n &= b^0_m. \end{aligned} \tag{3.17}$$

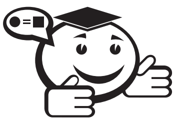
Подставляя эти переменные в целевую функцию, получим

$$f(x) = p^0_0 + \sum_{j=m+1}^{n} p^0_j x_j,$$

где $p^0_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b^0_i$; $p^0_j = -\sum_{i=1}^{m} c_i a^0_{ij} + c_j$, $j = m+1, \ldots, n.$

Систему уравнений можно переписать следующим образом:

$$x_i = b_i^0 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^0 x_j, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.18}$$



Переменные $x_1,\ldots,x_m$, *входящие с единичными коэффициентами в одно уравнение системы* (3.17)*,* (3.18) *и с нулевыми – в остальные, называются* ***базисными*** *или* ***зависимыми****. В канонической системе* (3.17)*,* (3.18) *каждому уравнению соответствует ровно одна базисная переменная.*

Остальные $(n-m)$ переменные $(x_{m+1},\ldots,x_n)$ называются *небазисными* или *независимыми* переменными.

При записи системы в каноническом виде все ее решения можно получить, присваивая независимым переменным произвольные значения и решая затем получающуюся систему относительно зависимых переменных.

Базисным решением системы (3.17) называется решение, полученное при нулевых значениях небазисных переменных.

Например, в системе (3.17) одно из базисных решений задается как

$$\left.\begin{matrix} x_1 = b_1^0, \ x_2 = b_2^0, \ldots, \ x_m = b_m^0 \\ x_{m+1} = 0; \ldots; \ x_n = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Базисное решение называется *допустимым* базисным решением, если значения входящих в него базисных переменных $x_j \geq 0, \ j = \overline{1,m}$, что эквивалентно условию $b_j^0 \geq 0, \ j = \overline{1,m}$.

Так как различные базисные решения системы (3.14) соответствуют различным вариантам выбора (m) из общего числа (n) переменных x_j, то число допустимых базисных решений (угловых точек) не превышает

$$c_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Поэтому ЗЛП можно решать посредством перебора конечного числа угловых точек допустимого множества S, сравнивая значения ЦФ в этих точках. Это наихудший вариант решения ЗЛП, т. к. требует огромного объема вычислений.

Пример 3.5

Если $n=50$, $m=25$ (задача небольшой размерности), то количество переборов составит $1{,}26\cdot10^{14}$ (количество вариантов). Даже если ЭВМ будет выполнять 10^5 переборов вариантов в 1 с, то ей потребуется 40 лет для поиска решения.

Обычно $n=1500\div2000$; $m=1000\div1500$.

Идея симплекс-метода (*СМ*) состоит в направленном переборе угловых точек допустимого множества S с последовательным уменьшением ЦФ $f(x)$.

СМ разработал Дж. Данциг (американский ученый) в 1947 г. Этот метод также называют методом последовательного улучшения решения (плана).

Гарантии результативности СМ обеспечиваются следующей теоремой.

Теорема о конечности алгоритма симплекс-метода. Если существует оптимальное решение ЗЛП, то существует и базисное оптимальное решение. Это решение может быть получено через конечное число шагов симплекс-методом, причем начать можно с любого исходного базиса.

3.3.3 Алгоритм симплекс-метода

Ручные вычисления по симплекс-методу удобно оформлять в виде так называемых симплекс-таблиц. Для удобства составления симплекс-таблицы (СТ) будем считать, что ЦФ и система ограничений переписаны в форме [1]:

$$f(x)=p_0^0+\sum_{j=m+1}^{n}p_j^0x_j,$$

где $\quad p_0^0=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i^0;\ p_j^0=-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}^0+c_j,\ \ j=m+1,\ldots,n;$

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}^0x_j=b_i^0,\ \ i=\overline{1,m}.$$

По исходным данным заполняется исходная СТ (табл. 3.7). В первый столбец выписывают базисные переменные, в последний столбец – свободные члены. В первую строку выписывают небазисные переменные, в последнюю строку – коэффициенты при переменных в целевой функции. В последней клетке последней строки заносим p_0^0 со знаком «минус».

В остальные клетки заносятся коэффициенты ограничений.

Сформулируем алгоритм СМ применительно к данным, внесенным в таблицу 3.7.

Таблица 3.7 – Симплекс-таблица

			$\downarrow$			
	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	Свободные члены
x_1	a_{1m+1}^0		a_{1k}^0		a_{1n}^0	b_1^0
…						…
$\rightarrow x_j$	a_{jm+1}^0		a_{jk}^0		a_{jn}^0	b_j^0
…						…
x_m	a_{mm+1}^0		a_{mk}^0		a_{mn}^0	b_m^0
Целевая функция f	p_{m+1}^0	…	p_k^0	…	p_n^0	$-p_0^0$

Шаг 1. Выяснить, имеются ли в последней строке таблицы отрицательные числа (p_0^0 не принимается во внимание). Если все числа неотрицательны, то процесс закончен; базисное решение $\left(b_1^0,\dots,b_m^0,0,\dots,0\right)$ является оптимальным: $f^* = p_0^0$.

Если в последней строке имеются отрицательные числа $p_{m+1}^0, p_{m+2}^0,\dots,p_n^0$, перейти к шагу 2.

Шаг 2. Просмотреть столбец, соответствующий наименьшему отрицательному числу p_k^0, $m+1 \le k \le n$, и выяснить, имеются ли в нем положительные числа a_{ik}, $i = \overline{1,m}$. Если ни в одном из таких столбцов нет положительных чисел, то оптимального решения не существует.

Если найден столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент (если таких столбцов несколько взять любой из них), отметить его вертикальной стрелкой (см. табл. 3.7) и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Разделить свободные члены на соответствующие положительные числа из выделенного столбца и выбрать наименьшее частное. Отметить строку, соответствующую наименьшему частному горизонтальной стрелкой. Выделить разрешающий элемент a_{jk}^{0}, стоящий на пересечении отмеченных строки и столбца. Перейти к шагу 4.

Шаг 4.

1. Поменять местами переменные x_k и x_j, остальные переменные оставить на прежних местах.
2. На место опорного элемента поставить число $\dfrac{1}{a_{jk}^{0}}$.
3. На остальных местах разрешающей (опорной) строки записать соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.
4. На свободные места разрешающего столбца поставить со знаком «минус» соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.

Шаг 5. Оставшиеся свободные места в новой СТ заполнить построчно следующим образом: из строки элементов исходной таблицы вычесть произведение ее элемента из разрешающего столбца на уже заполненную разрешающую строку новой таблицы.

Например, для строки i-й базисной переменной имеем:

$$\left(a_{i,m+1}^{1},\ldots,\neg,\ldots a_{i,n}^{1},b_{i}^{1}\right)=\left(a_{i,m+1}^{0},\ldots,\neg,\ldots a_{i,n}^{0},b_{i}^{0}\right)-a_{i,k}^{0}\left(a_{k,m+1}^{1},\ldots,\neg,\ldots a_{k,n}^{1},b_{k}^{1}\right).$$

Знак «$\neg$» стоит на месте элемента разрешающего столбца, заполненного согласно определению операции 4.

На этом заполнение новой таблицы заканчивается и происходит переход к шагу 1.

Если целевую функцию необходимо максимизировать, то предварительно нужно умножить ее на –1.

Пример 3.6

Решить ЗЛП симплекс-методом:

$$x_1 - x_4 + x_5 = 2;$$
$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7;$$
$$x_3 + x_4 - 2x_5 = 1;$$
$$f = 3 + x_4 - 2x_5 \to \min.$$

Из системы ограничений видно, что переменные x_1, x_2, x_3 являются базисными. Эти переменные используем в качестве начального опорного плана (начального базиса). Поэтому 1-й, 2-й и 3-й столбцы исключаем из таблицы. Результаты расчета представлены в таблице 3.8. Приведем решение.

Шаг 1. В таблице в последней строке два элемента: 1 и –2. Один из них является отрицательным, поэтому переходим к шагу 2.

Шаг 2. В столбце, соответствующем числу «–2», есть два положительных элемента: 1 и 3. Выделяем столбец стрелкой.

Шаг 3. Разделим свободные члены на соответствующие положительные числа из выделенного столбца:

1) 2/1=2;
2) 7/3=2,33

и выберем наименьшее частное: $\min(2/1; 7/3) = 2$.

Отметим строку, соответствующую наименьшему частному горизонтальной стрелкой (это первая строка). Выделим квадратом разрешающий элемент, стоящий на пересечении отмеченных строки и столбца (пересечение первой строки и второго столбца – элемент «1»).

Шаг 4. Поменять местами переменные x_1 и x_5, остальные переменные оставить на прежних местах.

На место опорного элемента поставить число $\frac{1}{1} = 1$.

На остальных местах разрешающей (опорной) строки запишем соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент. Поскольку элемент равен единице, то все значения останутся прежними.

На свободные места разрешающего столбца поставить со знаком минус соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.

Следовательно, элементы «3», «–2» и «–2» второго столбца будут изменены на «–3», «2», «2».

Шаг 5. Оставшиеся свободные места в новой СТ заполнить построчно следующим образом: из строки элементов исходной таблицы вычесть произведение ее элемента из разрешающего столбца на уже заполненную разрешающую строку новой таблицы ($a_{i,j}$, i -я строка, j -й столбец).

Элемент первого столбца второй строки $\left(a_{2,1}\right)$ будет преобразован: $2-3\times\times\left(-1\right)=2+3=5$. Преобразование последующих элементов:

$$a_{2,3}=7-3\cdot 2=1;$$

$$a_{3,1}=1-\left(-2\right)\cdot\left(-1\right)=1-2=-1;$$

$$a_{3,3}=1-\left(-2\right)\cdot 2=1+4=5.$$

Элементы последней строки:

$$p_1=1-\left(-2\right)\cdot\left(-1\right)=1-2=-1;$$

$$p_3=-3-\left(-2\right)\cdot 2=-3+4=1.$$

Заполнение новой таблицы 3.8, *б* закончено и происходит переход к шагу 1.

Шаг 1. В таблице в последней строке два элемента: –1 и 2. Один из них является отрицательным, поэтому переходим к шагу 2.

Шаг 2. В столбце, соответствующему числу «–1» есть один положительный элемент: 5. Следовательно, вторая строка будет разрешающей.

Выделим квадратом разрешающий элемент, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца – элемент «5».

Шаг 3. Поменяем местами переменные x_2 и x_4, остальные переменные оставить на прежних местах.

На место опорного элемента поставить число $\frac{1}{5}=0,2$.

На остальных местах разрешающей (опорной) строки запишем соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент. Получим элемент второй строки второго столбца: $-3/5=-0,6$. Элемент второй строки третьего столбца: $1/5=0,2$. Элемент второй строки третьего столбца: $1/5=0,2$.

На свободные места разрешающего столбца поставить со знаком минус соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.

Следовательно, элемент первой строки первого столбца будет равен: $-(-1)/5 = = 0{,}2$. Элемент третьей строки первого столбца будет равен: $-(-1)/5 = 0{,}2$. Элемент четвертой строки первого столбца будет равен: $-(-1)/5 = 0{,}2$.

Шаг 4. Оставшиеся свободные места в новой СТ заполнить построчно следующим образом: из строки элементов исходной таблицы вычесть произведение ее элемента из разрешающего столбца на уже заполненную разрешающую строку новой таблицы:

$$a_{1,2} = 1 - (-0{,}6) \cdot (-1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$

$$a_{1,3} = 2 - (-0{,}2) \cdot (-1) = 2 + 0{,}2 = 2{,}2;$$

$$a_{3,2} = 2 - (-0{,}6) \cdot (-1) = 2 - 0{,}6 = 1{,}4;$$

$$a_{3,3} = 5 - 0{,}2 \cdot (-1) = 5 + 0{,}2 = 5{,}2.$$

Элементы последней строки:

$$p_2 = 2 - (-0{,}6) \cdot (-1) = 2 - 0{,}6 = 1{,}4;$$

$$p_3 = 1 - 0{,}2 \cdot (-1) = 1 + 0{,}2 = 1{,}2.$$

Заполнение новой таблицы (табл. 3.8, *в*) завершено, переходим к шагу 1.

В последней строке все элементы положительны, следовательно, решение задачи найдено. Полученное решение: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 5{,}2,\ x_4 = 0{,}2,\ x_5 = 2{,}2$. Подставляя решение в исходную функцию, получим её значение: $f = 3 + x_4 - -2x_5 = 3 + 0{,}2 - 2 \cdot 2{,}2 = -1{,}2$.

Таблица 3.8*а* – Решение задачи симплекс-методом (первая итерация)

		Небазисные переменные		**Свободные члены**
		x_4	x_5 $\downarrow$	
Базисные переменные	$\to x_1$	–1	$\boxed{1}$	2
	x_2	2	3	7
	x_3	1	–2	1
Целевая функция f		1	–2	–3

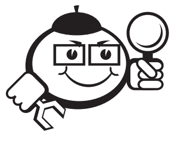
Таблица 3.8*б* – Решение задачи симплекс-методом (вторая итерация)

		Небазисные переменные		**Свободные члены**
		x_4 ↓	x_1	
Базисные переменные	x_5	–1	1	2
	$\to x_2$	$\boxed{5}$	–3	1
	x_3	–1	2	5
Целевая функция f		–1	2	1

Таблица 3.8*в* – Решение задачи симплекс-методом (решение)

		Небазисные переменные		**Свободные члены**
		x_2	x_1	
Базисные переменные	x_5	0,2	0,4	2,2
	x_4	0,2	–0,6	0.2
	x_3	0,2	1,4	5.2
Целевая функция f		0,2	1,40	1.2

Ответ: $x^* = (0;\ 0;\ 5,2;\ 0,2;\ 2,2);\ f^* = -1,2$.



Пример 3.7

Решить ЗЛП симплекс-методом:

$$f\left(x\right) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 18 \\ 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_2 &\le 5 \\ 3x_1 &\le 21 \end{aligned}\right\}.$$

Приведем задачу к стандартному виду с помощью дополнительных переменных:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 16 \\ x_2 + x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_6 &= 21 \end{aligned}\right\}.$$

Дальше решаем симплексным методом (табл. 3.9, *а*–*г*).

Таблица 3.9*а* – Симплекс-таблица (первая итерация)

		Небазисные переменные		**Свободные члены**
		x_1	x_2 ↓	
Базисные переменные	x_3	1	3	18
	x_4	2	1	16
	→ x_5	0	$\boxed{1}$	5
	x_6	3	0	21
Целевая функция f		–2	–3	0

Таблица 3.9*б* – Симплекс-таблица (вторая итерация)

		Небазисные переменные		**Свободные члены**
		x_1 ↓	x_5	
Базисные переменные	→ x_3	$\boxed{1}$	–3	3
	x_4	2	–1	11
	x_2	0	1	5
	x_6	3	0	21
Целевая функция f		–2	3	15

Таблица 3.9*в* – Симплекс-таблица (третья итерация)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Небазисные переменные</td><td rowspan="2">Свободные члены</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>x_5
$\downarrow$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Базисные переменные</td><td>x_1</td><td>1</td><td>–3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\rightarrow x_4$</td><td>–2</td><td>$\boxed{5}$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>x_6</td><td>–3</td><td>9</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="2">Целевая функция f</td><td>2</td><td>–3</td><td>21</td></tr>
</table>

Таблица 3.9*г* – Симплекс-таблица (результат)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Небазисные переменные</td><td rowspan="2">Свободные члены</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>x_4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Базисные переменные</td><td>x_1</td><td>–1/5</td><td>3/5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>x_5</td><td>–2/5</td><td>1/5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>2/5</td><td>–1/5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x_6</td><td>3/5</td><td>–9/5</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Целевая функция f</td><td>4/5</td><td>3/5</td><td>24</td></tr>
</table>

Ответ: $x^* = (6;\, 4;\, 0;\, 0;\, 1;\, 3)$; $f^* = 24$.

Таким образом, мы можем записать

$$\begin{cases} x_1 = 6 + \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{3}{5}x_4, \\ x_2 = 4 - \dfrac{2}{5}x_3 + \dfrac{1}{5}x_4, \\ x_5 = 1 + \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{1}{5}x_4, \\ x_6 = 3 - \dfrac{3}{5}x_3 + \dfrac{9}{5}x_4, \end{cases}$$

$$f = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4.$$

Коэффициенты целевой функции, полученные в последней строке, мы взяли со знаком «минус», так как мы умножали целевую функцию на –1. Оптимальное значение целевой функции берем со знаком «плюс» (потому что в исходной задаче мы ищем максимум f).

Пример 3.8

Решить ЗЛП симплекс-методом:

$$Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Вводим дополнительные переменные y_5, y_6 со знаком «минус» [1]. Получим стандартную ЗЛП

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 - y_5 = 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - y_6 = 3, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

В качестве базисных переменных возьмем y_3, y_4. Для этого первое уравнение разделим на 3. Выразим базисные переменные через свободные

$$y_3 = 3 - 3y_1 - y_2 + y_6,$$
$$y_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_5$$

и подставим в целевую функцию, получим

$$Z = 29 - 4y_1 - 3y_2 + 7y_5 + 5y_6.$$

Дальше решаем симплексным методом (табл. 3.10, *а*–*в*).

Таблица 3.10*а* – Симплекс-таблица (первая итерация)

		Небазисные переменные				**Свободные члены**
		y_1 ↓	y_2	y_5	y_6	
Базисные переменные	→ y_3	3	1	0	–1	3
	y_4	1/3	2/3	–1/3	0	2/3
Целевая функция Z		–4	–3	7	5	–29

Таблица 3.10*б* – Симплекс-таблица (вторая итерация)

		Небазисные переменные				**Свободные члены**
		y_3	y_2 ↓	y_5	y_6	
Базисные переменные	y_1	1/3	1/3	0	–1/3	1
	→ y_4	–1/9	5/9	–1/3	1/9	1/3
Целевая функция Z		4/3	–5/3	7	11/3	–25

Таблица 3.10*в* – Симплекс-таблица (решение)

		Небазисные переменные				**Свободные члены**
		y_3	y_4	y_5	y_6	
Базисные переменные	y_1	2/5	–3/5	1/5	–2/5	4/5
	y_2	–1/5	9/5	–3/5	1/5	3/5
Целевая функция Z		1	3	6	4	–24

Ответ: $y^* = (4/5; 3/5; 0; 0; 0; 0)$; $Z^* = 24$.

Таким образом, мы можем записать:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4 - \frac{1}{5}y_5 + \frac{2}{5}y_6, \\ y_2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}y_3 - \frac{9}{5}y_4 + \frac{3}{5}y_5 - \frac{1}{5}y_6, \end{cases}$$

$$Z = 24 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6.$$

. . . .

3.3.4 Поиск начального базиса

Для решения задачи ЛП симплексным методом необходимо получить начальный опорный план (начальный базис).

Рассмотрим способ получения начального базиса (начальной угловой точки многогранника допустимой области). Если в исходной задаче ЛП ограничения заданы в виде неравенств, например,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3.19}$$

то введение дополнительных переменных $y_1 = x_{n+1}$, $y_2 = x_{n+2}, ..., y_m = x_{n+m}$ приведет (3.19) к виду:

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = \overline{1,m}.$$

Вектор $X = (y_1, y_2, ..., y_m, 0, 0, ..., 0)$ будет являться начальным опорным планом (начальным базисным решением).

Метод симплексного преобразования

Если ограничения исходной задачи ЛП заданы в виде равенств (то есть имеем сразу стандартную форму ЗЛП), то для получения начального базиса можно воспользоваться методом симплексного преобразования, который является одной из модификаций метода Гаусса – Жордана [1].

Запишем систему $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = \overline{1,m}$ в виде таблицы 3.11.

При этом предполагается, что все $b_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$. Алгоритм симплексного преобразования основан на идее исключения переменных методом, во многом схожим с методом преобразования симплекс-таблиц.

Таблица 3.11

x_1	x_2	…	x_n	**Свободные члены**
a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

Шаг 1. Среди столбцов из коэффициентов при неизвестных выбирается столбец, в котором имеется хотя бы один положительный элемент. Если в таком столбце несколько положительных элементов, то из них выбирается тот, который отвечает наименьшему частному при делении соответствующих свободных членов на положительные элементы выбранного столбца. Выделенный таким образом элемент называется разрешающим.

Шаг 2. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и переписываются в новую таблицу.

Шаг 3. Каждая новая строка новой таблицы образуется следующим образом: из строки элементов исходной таблицы вычитается разрешающая строка, полученная на шаге 2, которая предварительно умножается на соответствующий элемент разрешающего столбца. При этом в клетках выделенного (разрешающего) столбца появятся нули. На этом заполнение новой таблицы заканчивается и происходит переход к шагу 1.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено неотрицательное базисное решение.

Пример 3.9

Найти неотрицательное базисное решение системы:

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad - 5x_5 + 2x_6 &= -3;\\
x_2 \qquad\quad - 2x_5 - x_6 &= 5;\\
x_3 \quad - 3x_5 + x_6 &= -7;\\
x_4 + x_5 - 3x_6 &= -4.
\end{aligned}$$

Воспользуемся методом симплексного преобразования. Перед составлением начальной таблицы с целью получения неотрицательных свободных членов первое, третье и четвертое уравнения умножим на –1. Дальнейшие преобразования по нахождению начального базиса приведены в таблице 3.12.

Таблица 3.12 – Этапы решения задачи

Этап преобразований	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Свободные члены**
Этап 1	–1	0	0	0	$\boxed{5}$	–2	3
	0	1	0	0	–2	–1	5
	0	0	–1	0	3	–1	7
	0	0	0	–1	–1	3	4
Этап 2	–1/5	0	0	0	1	–2/5	3/5
	–2/5	1	0	0	0	–9/5	31/5
	$\boxed{3/5}$	0	–1	0	0	1/5	26/5
	–1/5	0	0	–1	0	13/5	23/5
Этап 3	0	0	–1/3	0	1	–1/3	7/3
	0	1	–2/3	0	0	–5/3	29/3
	1	0	–5/3	0	0	1/3	26/3
	0	0	–1/3	–1	0	$\boxed{8/3}$	19/3
Этап 4	0	0	–3/8	–1/8	1	0	25/8
	0	1	–7/8	–5/8	0	0	109/8
	1	0	–13/8	1/8	0	0	63/8
	0	0	–1/8	–3/8	0	1	19/8

Итак, получили базисное решение $(63/8, 109/8, 0, 0, 25/8, 19/8)$, что при необходимости позволяет составить первую симплекс-таблицу с начальным базисом

$$Б = (x_1, x_2, x_5, x_6).$$

В канонической системе каждому уравнению соответствует ровно одна базисная переменная.

. . . .

Метод искусственного базиса

Другим методом поиска начального базиса является метод искусственного базиса [1].

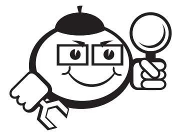
В систему ограничений вводятся искусственные переменные $x_{n+i} \geq 0$ $\left(i=1,...,m\right)$ и вводится искусственная целевая функция $z\left(x\right)=\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$. Таким образом, приходим к следующей задаче линейного программирования

$$z\left(x\right) \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{3.20}$$

$$x_k \geq 0, \quad k=1,2,...,n+m.$$

Далее ищется решение задачи (3.20) симплекс-методом. В качестве базиса используются переменные x_{n+i}. В процессе решения переменные x_{n+i} выводятся из базиса, а переменные x_j вводятся в базис. Процесс поиска заканчивается, когда все переменные x_{n+i} будут выведены из базиса, при этом значение искусственной целевой функции $z(x)$ обращается в ноль.



Пример 3.10

Найти неотрицательное базисное решение системы:

$$\begin{aligned}
-x_1 \qquad\qquad &+5x_5-2x_6=3;\\
x_2 \qquad\quad &-2x_5-x_6=5;\\
-x_3 \quad &+3x_5-x_6=7;\\
-x_4 &-x_5+3x_6=4.
\end{aligned}$$

Введем в систему ограничений дополнительные переменные x_7, x_8, x_9, x_{10}, которые будем называть искусственными. В результате получим систему:

$$-x_1+5x_5-2x_6+x_7=3;$$

$$x_2-2x_5-x_6+x_8=5;$$

$$-x_3+3x_5-x_6+x_9=7;$$

$$-x_4-x_5+3x_6+x_{10}=4.$$

Запишем искусственную целевую функцию:

$$z(x)=x_7+x_8+x_9+x_{10}.$$

Из системы ограничений выразим дополнительные переменные x_7, x_8, x_9, x_{10} через исходные, получим:

$$x_7=3+x_1-5x_5+2x_6;$$

$$x_8=5-x_2+2x_5+x_6;$$

$$x_9 = 7 + x_3 - 3x_5 + x_6;$$
$$x_{10} = 4 + x_4 + x_5 - 3x_6.$$

Подставим в целевую функцию, получим:

$$z(x) = 19 + x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6.$$

Дальше решаем задачу симплекс-методом. В результате решения все искусственные переменные должны выйти из базиса. Решение приведено в таблице 3.13.

Таблица 3.13*а* – Решение задачи (первая итерация)

		Небазисные переменные						**Свободные члены**
		x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	
Базисные переменные	x_7	–1	0	0	0	5	–2	3
	$\rightarrow x_8$	0	$\boxed{1}$	0	0	–2	–1	5
	x_9	0	0	–1	0	3	–1	7
	x_{10}	0	0	0	–1	–1	3	4
Целевая функция z		1	–1	1	1	–5	1	–19

Таблица 3.13*б* – Решение задачи (вторая итерация)

		Небазисные переменные						**Свободные члены**
		x_1	x_8	x_3	x_4	x_5 ↓	x_6	
Базисные переменные	$\rightarrow x_7$	–1	0	0	0	$\boxed{5}$	–2	3
	x_2	0	1	0	0	–2	–1	5
	x_9	0	0	–1	0	3	–1	7
	x_{10}	0	0	0	–1	–1	3	4
Целевая функция z		1	1	1	1	–7	0	–14

Таблица 3.13*в* – Решение задачи (третья итерация)

		Небазисные переменные						**Свободные члены**
		x_1	x_8	x_3	x_4	x_7	x_6 ↓	
Базисные переменные	x_5	–1/5	0	0	0	1/5	–2/5	3/5
	x_2	–2/5	1	0	0	2/5	–9/5	31/5
	x_9	3/5	0	–1	0	–3/5	1/5	26/5
	→ x_{10}	–1/5	0	0	–1	1/5	$\boxed{13/5}$	23/5
Целевая функция z		–2/5	1	1	1	7/5	–14/5	–49/5

Таблица 3.13*г* – Решение задачи (четвертая итерация)

		Небазисные переменные						**Свободные члены**
		x_1 ↓	x_8	x_3	x_4	x_7	x_{10}	
Базисные переменные	x_5	–3/13	0	0	–2/13	3/13	2/13	17/13
	x_2	–7/13	1	0	–9/13	7/13	9/13	122/13
	→ x_9	$\boxed{8/13}$	0	–1	1/13	–8/13	–1/13	63/13
	x_6	–1/13	0	0	–5/13	1/13	5/13	23/13
Целевая функция z		–8/13	1	1	–1/13	21/13	14/13	–63/13

Таблица 3.13*д* – Решение задачи (результат)

		Небазисные переменные						**Свободные члены**
		x_9	x_8	x_3	x_4	x_7	x_{10}	
Базисные переменные	x_5	3/8	0	–3/8	–1/8	0	1/8	25/8
	x_2	7/8	1	–7/8	–5/8	0	5/8	109/8
	x_1	13/8	0	–13/8	1/8	–1	–1/8	63/8
	x_6	1/8		–1/8	–3/8	0	3/8	19/8
Целевая функция z		1	1	0	0	1	1	0

Итак, получили базисное решение $(63/8;109/8;0;0;25/8;19/8)$. Это базисное решение совпало с решением, полученным симплексным преобразованием таблицы ограничений. Значение искусственной целевой функции рано нулю.

В результате получим следующую систему уравнений-ограничений:

$$x_1 - \frac{13}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 = \frac{63}{8};$$

$$x_2 - \frac{7}{8}x_3 - \frac{5}{8}x_4 = \frac{109}{8};$$

$$x_5 - \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4 = \frac{25}{8};$$

$$x_6 - \frac{1}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_4 = \frac{19}{8}.$$

. . . .

Рассмотрим случай, когда часть ограничений задана в виде неравенств, а часть ограничений – в виде равенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1,...,k,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = k+1,...,m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,...,n.$$

Дополним неравенства дополнительными переменными $x_{n+i}, i = 1,...,k$, а ограничения равенства дополним искусственными переменными x_{n+k+i}, $i = 1,...,m-k$. В результате мы получим систему ограничений в стандартной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,...,k,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = k+1,...,m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,...,n+m.$$

Затем рассматривается вспомогательная задача:

$$z(x) = \sum_{i=k+1}^{m} x_{n+i} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,...,k,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = k+1,...,m,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,...,n+m.$$

В качестве начального базиса используются переменные $x_{n+i}, i = 1,...,m$. В процессе решения искусственные переменные выводятся из базиса. При этом дополнительные переменные $x_{n+i}, i = 1,...,k$ должны остаться в базисе. На последнем шаге симплекс-метода значение искусственной целевой функции будет равно нулю.

3.4 Задачи многокритериальной оптимизации

В практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев оптимальности. Например, принятие решения о строительстве дороги в объезд города должно учитывать такие факторы, как выигрыш города в целом по соображениям экологии, проигрыш отдельных предприятий и фирм, например, из-за уменьшения проезжающих через город потенциальных покупателей, и многие другие. Если такого рода задачи решаются методами математического программирования, то говорят о *задачах многокритериальной оптимизации*. Эти задачи могут носить как линейный, так и нелинейный характер. Далее будем рассматривать только линейные задачи [1].

Задачи многокритериальной оптимизации возникают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием (например, стоимость и надежность). Требуется найти допустимое решение, которое минимизирует или максимизирует все такие критерии. Если в подобного рода задачах речь идет не о разнородных критериях некоторой системы, а о сопоставлении однородных критериев разных ее подсистем (например, отрасли, группы населения и т. п.), то эти *задачи называются задачами векторной оптимизации.*

Обозначим i-й частный критерий через $Z_i(X)$, где X – допустимое решение, а область допустимых решений – через S. Задачу многокритериальной оптимизации можно сформулировать следующим образом:

$$Z(X) = \{Z_1(X), Z_2(X),...,Z_m(X)\} \to \max,\ X \in S. \qquad (3.21)$$

Некоторые частные критерии могут противоречить друг другу, другие действуют в одном направлении, третьи – индифферентны, безразличны друг к другу. Поэтому процесс решения многокритериальных задач неизбежно связан с экспертными оценками как самих критериев, так и взаимоотношений между ними. Известен ряд методов решения задач многокритериальной оптимизации:

- оптимизация одного признанного наиболее важным критерия, остальные критерии при этом играют роль дополнительных ограничений;
- упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них (этот подход рассмотрен ниже на примере *метода* последовательных уступок);
- сведение многих критериев к одному введением экспертных весовых коэффициентов для каждого из критериев таким образом, что более важный критерий получает более высокий вес;
- метод справедливого компромисса, который допускает одинаковую важность всех частных критериев и не требует их нормализации и упорядоченности по степени важности.

Для решения задач многокритериальной оптимизации используют критерий оптимальности Парето, суть которого состоит в улучшении одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшались.

Вектор $X^* \in S$ называется эффективным (оптимальным по Парето) решением задачи (3.21), если для любого вектора $X \in S$ выполняется соотношение

$$Z_i\left(X\right) \le Z_i\left(X^*\right),\ i=1,\ldots,m,$$

причем хотя бы для одного значения i имеет место строгое неравенство.

Множество допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности (т. е. улучшить хотя бы один из них, не ухудшая остальных), принято называть *областью Парето*, или областью компромиссов, а принадлежащие ей решения – эффективными, или оптимальными по Парето.

Метод уступок

Рассмотрим один из методов решения многокритериальных задач – метод последовательных уступок [1].

Метод последовательных уступок решения задач многокритериальной оптимизации применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности. Предположим, что все частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности.

Находим максимальное значение Z_1^* первого по важности критерия в области допустимых решений путем решения однокритериальной задачи:

$$Z_1(X) \to \max,$$
$$X \in S.$$

Затем, исходя из практических соображений и принятой точности, назначается величина допустимого отклонения $\Delta_1 > 0$ (экономически оправданной уступки) критерия Z_1, и далее находится максимальное значение второго критерия Z_2^* при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимального значения более, чем на величину допустимой уступки, т. е. решается задача:

$$Z_2(X) \to \max,$$
$$Z_1(X) \geq Z_1^* - \Delta_1,$$
$$X \in S.$$

Снова назначается величина уступки $\Delta_2 > 0$ по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частного критерия:

$$Z_3(X) \to \max,$$
$$Z_1(X) \geq Z_1^* - \Delta_1,$$
$$Z_2(X) \geq Z_2^* - \Delta_2,$$
$$X \in S.$$

Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия Z_m при условии, что значение каждого из первых $m-1$ частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данному критерию. Полученное на последнем этапе решение считается оптимальным.

Рассмотрим пример решения задачи многокритериальной оптимизации методом последовательных уступок.

Пусть задача трехкритериальной оптимизации имеет вид:

$$Z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max; \tag{3.22}$$

$$Z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max; \tag{3.23}$$

$$Z_3 = x_3 - 3x_2 \to \max; \tag{3.24}$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \le 6;\\
&1 \le x_1 \le 3;\\
&1 \le x_2 \le 4.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Заметим, что т. к. коэффициенты при одних и тех же переменных в данных частных критериях имеют разные знаки, то в заданной области допустимых решений невозможно одновременно улучшить все частные критерии, т. е. в рассматриваемом случае область компромиссов (область Парето) совпадает с областью допустимых решений.

Для определенности будем считать, что допустимые уступки по первым двум критериям заданы: $\Delta_1 = 3;\ \Delta_2 = 5/3$.

Максимизируем функцию Z_1 в области допустимых решений, т. е. решаем однокритериальную задачу (3.22), (3.25). Это несложно сделать рассмотренным ранее графическим методом решения задач линейного программирования (см. рис. 3.13).

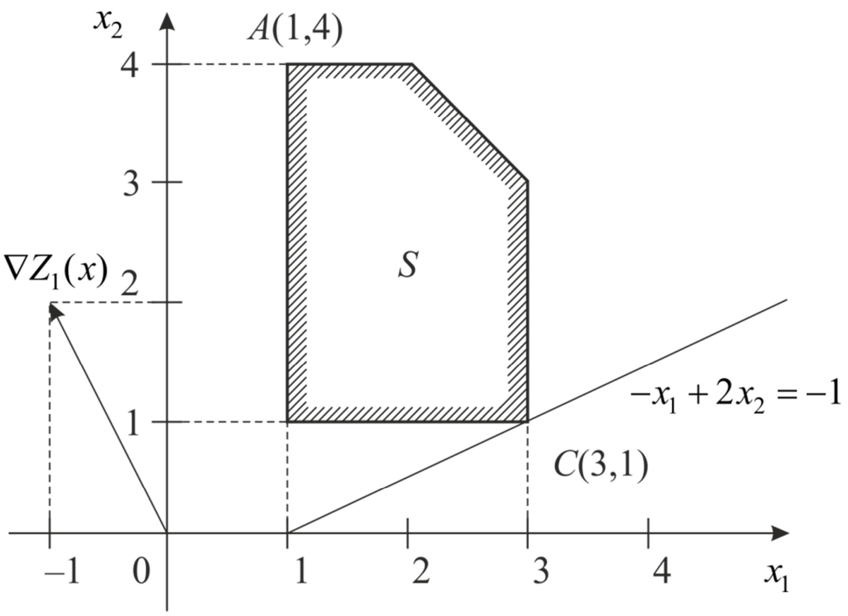


Рис. 3.13 – Решение задачи графическим способом

Максимум функции Z_1 при условиях (3.25) достигается в точке A области S с координатами (1;4), так что в данном случае

$$x_1^* = 1;\ x_2^* = 4;\ Z_1^* = Z_1(A) = 7.$$

Переходим к максимизации функции Z_2 при условиях (3.25) и дополнительном ограничении, позволяющем учесть, что по критерию Z_1 нельзя уступать более чем на Δ_1. Так как в нашем примере $Z_1^* - \Delta_1 = 4$, то дополнительное ограничение будет иметь вид:

$$-x_1 + 2x_2 \geq 4. \qquad (3.26)$$

Задачу (3.23), (3.25), (3.26) также решаем графически (рис. 3.14).

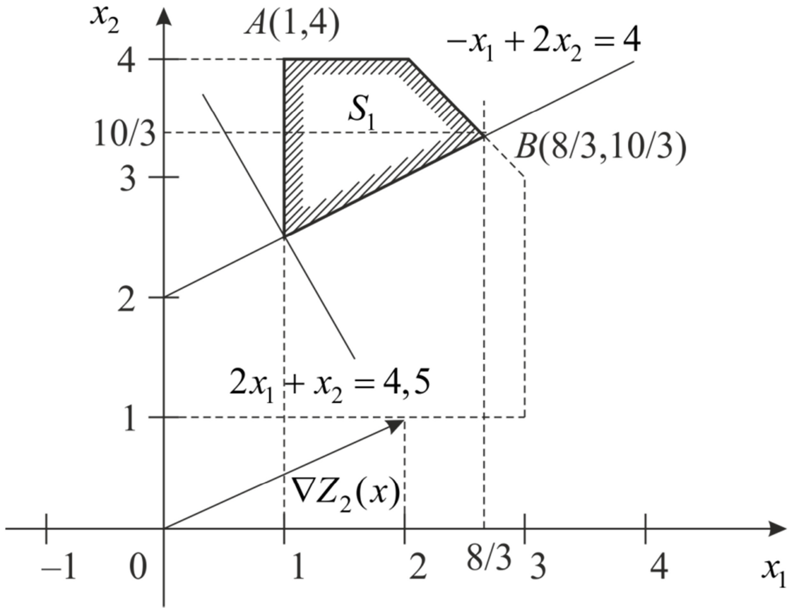


Рис. 3.14 – Решение задачи графическим способом

Получаем, что максимум функции Z_2 при условиях (3.25), (3.26) достигается в точке B части S_1 области S, так что

$$x_1^{**} = 8/3;\; x_2^{**} = 10/3;\; Z_2^* = Z_2(B) = 26/3.$$

Теперь уступаем по критерию Z_2 на величину уступки $\Delta_2 = 5/3$ $\left(Z_2^* - \Delta_2 = 26/3 - 5/3 = 7\right)$ и получаем второе дополнительное ограничение:

$$2x_1 + x_2 \geq 7. \qquad (3.27)$$

Максимизируем функцию Z_3 (3.24) при условиях (3.25), (3.26) и (3.27). Решение этой задачи графическим методом представлено на рисунке 3.15.

Таким образом, получаем оптимальное решение рассматриваемой трехкритериальной задачи (точка C на рис. 3.15):

$$x_1^{***} = 2;\; x_2^{***} = 3.$$

Соответствующие значения частных критериев при этом составляют:

$$Z_1 = 4;\; Z_2 = 7;\; Z_3 = -7.$$

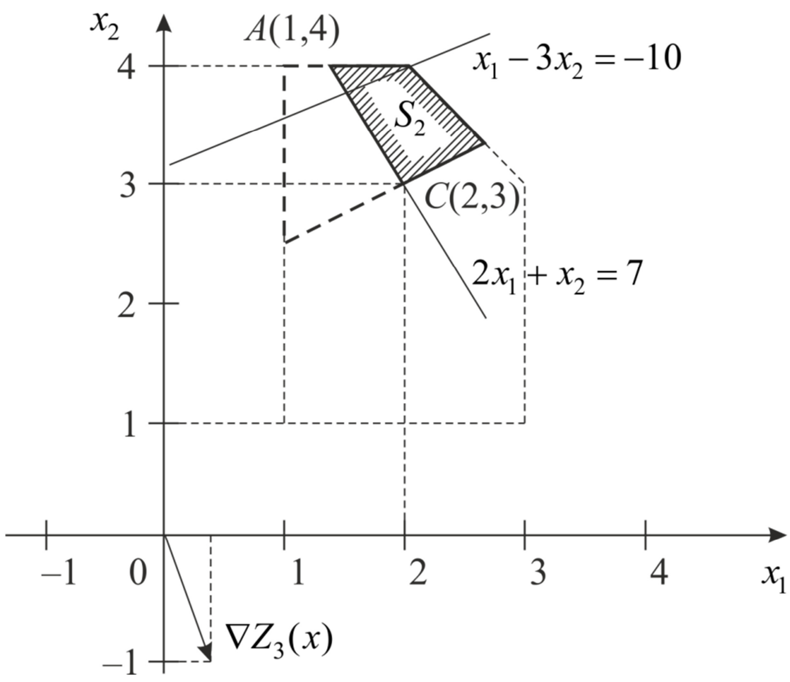


Рис. 3.15 – Решение задачи графическим способом

Рассмотрим задачу об оптимальном ассортименте (табл. 3.6). Пусть в модели используются два критерия оптимальности: максимизация прибыли и минимизация трудозатрат.

Ограничение на объем сырья имеет вид:

$$4x_1 + 2x_2 \le 50.$$

Кроме того, переменные $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ (количество товара не может быть отрицательным).

Целевые функции:

- $f\left(x_1, x_2\right) = x_1\left(10-4\right) + x_2\left(8-3\right) \to \max$ (максимизация маржинальной прибыли);
- $f\left(x_1, x_2\right) = 5x_1 + 10x_2 \to \min$ (минимизация трудоемкости).

Пусть $\Delta = 20$.

Найдем решение первой задачи (максимизация маржинальной прибыли) при ограничении на объем ресурсов (рис. 3.16).

Для решения задачи минимизации трудоемкости добавим условие:

$$6x_1 + 5x_2 \ge 105.$$

Полученное решение представлено на рисунке 3.17 (заданные ограничения и целевая функция представлены на рисунке 3.18). Таким образом, нужно произвести 5 единиц товара 1 и 15 единиц товара 2.

B	C	D
	Товар 1	Товар 2
Переменные затраты	4	3
Цена	10	8
Трудоемкость	5	10
Сырье	4	2
Количество	0	25
Сырье	50	50
Маржинальная прибыль	125	
Трудоемкость	250	

Рис. 3.16 – Решение задачи максимизации маржинальной прибыли

	A	B	C	D
1			Товар 1	Товар 2
2		Переменные затраты	4	3
3		Цена	10	8
4		Трудоемкость	5	10
5		Сырье	4	2
6		Количество	5	15
7				
8		Сырье	50	50
9				
10		Маржинальная прибыль	105	
11		Трудоемкость	175	

Рис. 3.17 – Решение задачи минимизации трудоемкости

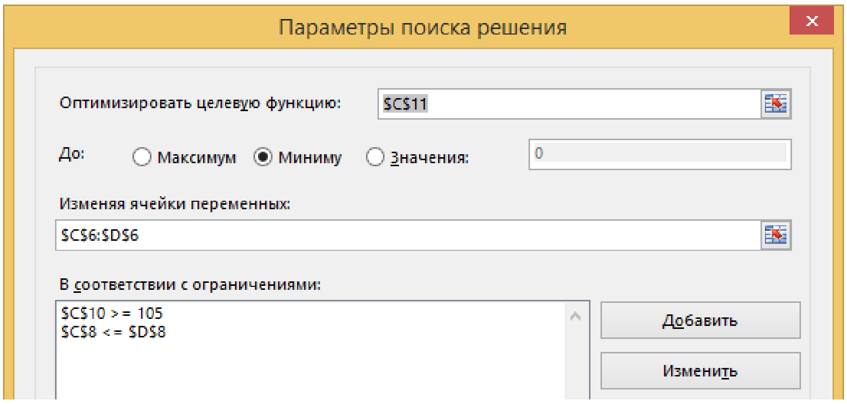
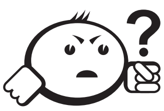


Рис. 3.18 – Форма «Поиск решения»



Контрольные вопросы по главе 3

1. В чем суть задачи линейного программирования?
2. В чем суть графического метода решения задачи линейного программирования?
3. В чем состоит основная идея симплекс-метода?
4. Опишите алгоритм симплекс-метода.
5. Как происходит поиск разрешающей строки в симплекс-таблице?

6. Как происходит поиск разрешающего элемента в симплекс-методе?
7. Какие существуют методы поиска начального базиса?
8. В чем суть метода симплексного преобразования?
9. В чем суть метода искусственного базиса?
10. В чем суть метода уступок?

4 Транспортная задача

Важным частным случаем задачи линейного программирования является так называемая транспортная задача, которую можно сформулировать следующим образом.

4.1 Экономико-математическая модель транспортной задачи

В m пунктах отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которые в дальнейшем будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим $a_i \left(i = 1,...,m\right)$. Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим $b_j \left(j = 1,...,n\right)$ (рис. 4.1). Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C = \left(c_{ij}\right)$ [1].

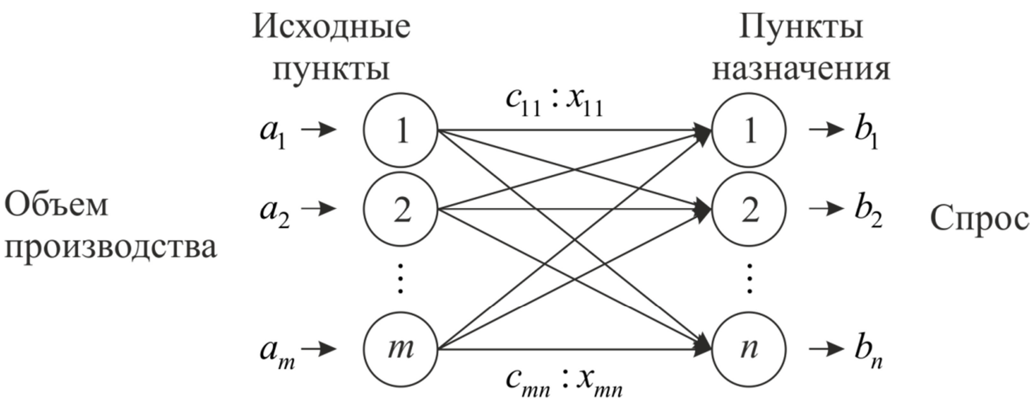


Рис. 4.1 – Геометрическая интерпретация транспортной задачи

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, т. е. план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j, через x_{ij}. Совокупность всех переменных x_{ij} для краткости обозначим x, тогда целевая функция задачи будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{4.1}$$

а ограничения будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i; \; i = 1,...,m, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j; \; j = 1,...,n, \tag{4.3}$$

$$x_{ij} > 0. \tag{4.4}$$

Первая группа ограничений (4.2) указывает, что суммарный объем перевозок продукции из некоторого исходного пункта не может превышать произведенного количества этой продукции, вторая группа ограничений (4.3) требует, чтобы суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления полностью удовлетворяли спрос на эту продукцию.

Рассмотрим задачу, исходные данные которой представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Транспортная таблица.
Стоимость доставки 1 кг конфет, д. е.

Город (производство, кг)	Город (спрос, кг)		
	Москва (2 000)	Санкт-Петербург (1 500)	Нижний Новгород (800)
Подольск (2 500)	10	20	17
Балашиха (2 000)	9	15	16

Целевая функция имеет вид:

$$f(x) = 10 \cdot x_{11} + 20 \cdot x_{12} + 15 \cdot x_{13} + 7 \cdot x_{21} + 18 \cdot x_{22} + 16 \cdot x_{23} \to \min.$$

Ограничения:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 2\,500;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 1\,800;$$

$$x_{11} + x_{21} \ge 2\,000;$$

$$x_{21} + x_{22} \ge 1\,500;$$

$$x_{31} + x_{32} \ge 800.$$

Полученное в Excel решение представлено на рисунке 4.2.

	Москва, 2000	Санкт-Петербург, 1500	Нижний Новгород, 800		Стоимость	55600
Подольск, 2500	1925,449294	0	374,5507057	2300		
Балашиха, 2000	74,55070573	1500	425,4492943	2000		
	2000	1500	800			

Рис. 4.2 – Решение транспортной задачи

Из модели (4.1)–(4.4) видно, что суммарный объем производства в исходных пунктах $\sum_{j=1}^{m} a_i$ не должен быть меньше суммарного спроса в пунктах назначения $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{4.5}$$

то модель называют сбалансированной (закрытой) транспортной моделью. Она отличается от модели (4.2), (4.3) тем, что

$$\sum_{j}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.6}$$

$$\sum_{i}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Пример 4.1

Заводы автомобильной фирмы расположены в п. A, B, C. Центры распределения (пункты назначения) расположены в п. D, E. Объемы производства в п. A, B, C равны 1 000, 1 500, 1 200 автомобилей ежеквартально. Величина спроса в п. D, E равна 2 300 и 1 400 автомобилей ежеквартально, т. е. суммарный объем производства равен суммарному спросу (3 700 автомобилей ежеквартально) (условие (4.5) выполняется). Стоимость перевозки одного автомобиля из п. A, B, C в п. D, E указана в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Стоимость перевозки

		Пункты назначения	
		D	*E*
Исходные пункты	*A*	80	215
	B	100	108
	C	102	68

Модель

$$\begin{cases} f(x) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} \to \min; \\ x_{11} + x_{12} = 1\,000; \\ x_{21} + x_{22} = 1\,500; \\ x_{31} + x_{32} = 1\,200; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2\,300; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1\,400; \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

Занесем модель в таблицу 4.3.

Таблица 4.3 – Транспортная таблица

			Спрос	
			D	*E*
			2 300	1 400
Объем производства	*A*	1 000	80 x_{11}	215 x_{12}
	B	1 500	100 x_{21}	108 x_{22}
	C	1 200	102 x_{31}	68 x_{32}

Пример 4.2

Несбалансированная модель

Изменим условия в примере 4.1. Предположим, что завод B производит не 1 500, а 1 300 автомобилей. Это приведет к дисбалансу, поскольку суммарный объем производства (3 500) не равен суммарному спросу (3 700). Другими словами, дисбаланс означает, что спрос в центрах распределения (в пунктах назначения) полностью удовлетворить не удается. В этом случае необходимо изменить транспортную модель таким образом, чтобы недостаток автомобилей $(3\,700 - 3\,500 = 200)$ оптимально распределился между D и E.

Введем фиктивный исходный пункт (фиктивный завод) с производительностью 200 автомобилей. Стоимость перевозок с фиктивного завода в п. D и E естественно положить равной нулю (т. к. никакие перевозки не осуществляются). Таким образом, сбалансированная модель имеет следующий вид (табл. 4.4). Здесь Ф – фиктивный завод. Если объем производства превышает спрос, можно ввести дополнительные фиктивные пункты назначения. Пусть, например, в п. D спрос упал с 2 300 до 1 900 автомобилей. В таблице 4.5 представлена измененная модель (здесь Ф – фиктивный пункт назначения).

Таблица 4.4 – Добавление фиктивного пункта-производителя

		D	E
		2 300	1 400
A	1 000	80	215
B	1 300	100	108
C	1 200	102	68
Ф	200	0	0

Таблица 4.5 – Добавление фиктивного пункта-потребителя

		D	E	Ф
		1 900	1 400	400
A	1 000	80	215	0
B	1 500	100	108	0
C	1 200	102	68	0

Автомобили, поступающие с некоторого завода в фиктивный пункт назначения, представляют собой избыток производства на этом заводе. Соответствующая стоимость перевозки равна нулю. Однако можно назначить штраф за хранение автомобилей на складе завода, тогда стоимость перевозки одного автомобиля (перепроизведенного) будет равна штрафу за его хранение. Аналогично в модели с недопроизведенным количеством автомобилей. Каждую недопоставленную единицу продукции в пункт назначения можно обложить штра-фом. Тогда транспортные расходы на единицу недопроизведенной продукции равны штрафу за недополученную продукцию.

Пример 4.3

Многопродуктовая транспортная модель

Пусть автомобильная компания (заводы A, B, C) производят автомобили четырех различных марок $M1, M2, M3, M4$, причем завод A выпускает модели $M3, M4$; завод B – $M1, M2, M4$; завод C – $M1, M2$ (рис. 4.3). В таблице 4.6 приведены объемы выпуска и спроса автомобилей всех марок.

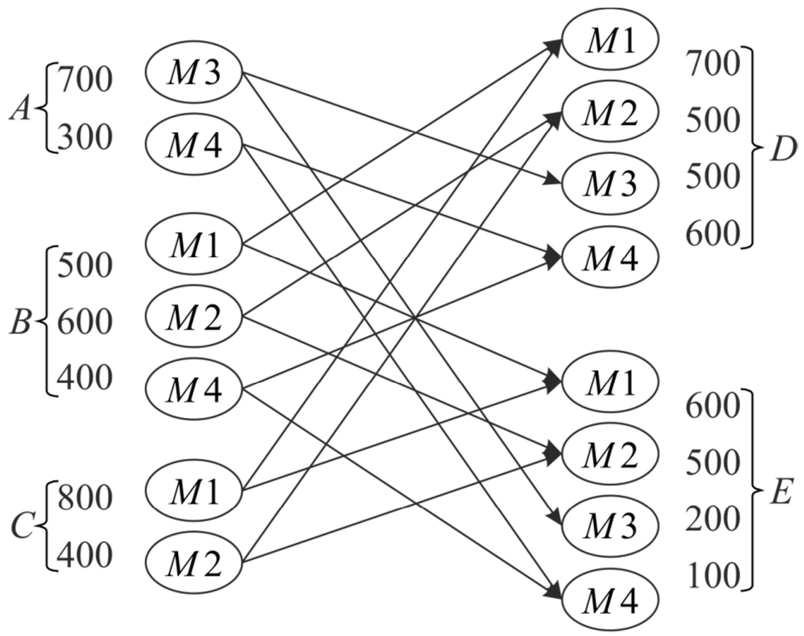


Рис. 4.3 – Геометрическая интерпретация многопродуктовой транспортной задачи

Предположим, что стоимость перевозок автомобилей любой марки одинакова (стоимость перевозки на одну милю).

Таблица 4.6 – Объемы производства и спроса

	Всего	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
Завод					
A	1 000			700	300
B	1 500	500	600		400
C	1 200	800	400		
Покупатель					
D	2 300	700	500	500	600
E	1 400	600	500	200	100

Видоизменим транспортную модель. Для этого каждый завод-изготовитель разобьем на несколько заводов (несколько пунктов), и каждого покупателя разобьем также на несколько пунктов

В результате получаем семь исходных пунктов и восемь пунктов назначения.

В таблице 4.7 приведена полная транспортная таблица. Заметим, что некоторые маршруты недопустимы (на рисунке 4.3 отсутствуют стрелки, а в таблице заштрихованы клетки), они соответствуют очень высокой стоимости перевозки. Запрещенные маршруты означают, что автомобили различных марок нельзя заменять друг другом. Например, нельзя осуществлять перевозки из п. $M1$ в п. $M2$ и т. д.

Если внимательно изучить таблицу, то можно заметить, что на самом деле задачу необязательно описывать одной моделью.

В силу независимости поставок можно было представить задачу по каждой марке автомобилей в виде отдельной таблицы перевозок, но только существенно меньшего размера. В результате получим таблицы 4.8, *а–г*.

Такое разбиение на задачи меньшей размерности оказалось возможным из-за независимости различных марок автомобилей (т. е. невозможности замены одной марки другой). Если бы можно было заменять одну марку другой, то такое разбиение не получилось бы.

Таблица 4.7 – Полная транспортная таблица

				D				E			
				$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
				700	500	500	600	600	500	200	100
				2300				1400			
A	$M3$	700	1000	M	M	80	M	M	M	215	M
	$M4$	300		M	M	M	80	M	M	M	215
B	$M1$	500	1500	100	M	M	M	108	M	M	M
	$M2$	600		M	100	M	M	M	108	M	M
	$M4$	400		M	M	M	100	M	M	M	108
C	$M1$	800	1200	102	M	M	M	68	M	M	M
	$M2$	400		M	102	M	M	M	68	M	M

Отдельные таблицы перевозок

Таблица 4.8*а*

$\underline{M3}$

		D	E
		500	200
A	700	80	215

Таблица 4.8*б*

$\underline{M4}$

		D	E
		600	100
A	300	80	215
B	400	100	108

Таблица 4.8*в*

$\underline{M1}$

		D	E
		700	600
B	500	100	108
C	800	102	68

Таблица 4.8*г*

$\underline{M2}$

		D	E
		500	500
B	600	100	108
C	400	102	68

. . . .

4.2 Решение транспортной задачи симплексным методом

Закрытая транспортная задача может быть решена симплексным методом (методом последовательного улучшения плана). Для этого необходимо переобозначить переменные следующим образом [1]:

$$x_1 = x_{11},\ x_2 = x_{12}, ..., x_n = x_{1,n};\ x_{n+1} = x_{21},\ x_{n+2} = x_{22}, ..., x_{2n} = x_{2,n}; ...$$

$$x_{(m-1)n+1} = x_{m1},\ x_{(m-1)n+2} = x_{m2}, ..., x_{mn} = x_{m,n}.$$

Точно так же переобозначаем коэффициенты c_{ij}:

$$c_1 = c_{11},\ c_2 = c_{12}, ..., c_n = c_{1,n};$$

$$c_{n+1} = c_{21},\ c_{n+2} = c_{22}, ..., c_{2n} = c_{2,n}; ... c_{(m-1)n+1} = c_{m1},\ c_{(m-1)n+2} = c_{m2}, ...,$$

$$c_{mn} = c_{m,n}.$$

Задача примет следующий вид:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{mn} c_j x_j \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{(i-1)n+j} = b_j,\ j = 1, ..., n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{(i-1)n+j} = a_i,\ i = 1, ..., m;$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, ..., mn.$$

Таким образом, пришли к стандартной форме ЗЛП.

Для получения начального базисного решения можно использовать либо метод искусственного базиса, либо метод симплексного преобразования таблицы ограничений. Однако для транспортной задачи разработаны свои методы поиска начального базиса и методы последовательного улучшения решения. Это связано со следующими особенностями транспортной задачи:

- система ограничений закрытой транспортной задачи представляет собой систему уравнений (т. е. транспортная задача задана в канонической форме);
- коэффициенты при переменных системы ограничений равны единице;
- каждая переменная входит в систему ограничений два раза: один раз – в систему (4.6) и один раз – в систему (4.7).

4.3 Первоначальное закрепление потребителей за поставщиками

Первым этапом решения закрытой транспортной задачи является составление начального распределения (начального плана перевозок или начального базиса). При этом следует отметить, что благодаря условию (4.5) ранг системы линейных уравнений (4.6), (4.7) равен $m+n-1$; таким образом из общего числа $m \cdot n$ неизвестных базисных неизвестных будет $m+n-1$. Вследствие этого при любом допустимом базисном распределении в матрице перевозок (таблице поставок), представленной в общем виде в таблице 4.9, будет занято ровно $m+n-1$ клеток, которые будем называть *базисными* в отличие от остальных *свободных* клеток; занятые клетки будем отмечать диагональной чертой [1].

Таблица 4.9 – Транспортная таблица

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**			
	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Рассмотрим два метода получения начального распределения (начального опорного плана): метод северо-западного угла и метод наименьших стоимостей. При каждом из этих методов при заполнении некоторой клетки, кроме последней, вычеркивается или только строка матрицы перевозок, или только столбец; лишь при заполнении последней клетки вычеркиваются и строка, и столбец. Такой подход будет гарантировать, что базисных клеток будет ровно $m+n-1$. Если при заполнении некоторой (не последней) клетки одновременно удовлетворяются мощности и поставщика, и потребителя, то вычеркивается, например, только строка, а в соответствующем столбце заполняется незанятая клетка так называемой «нулевой поставкой», после чего вычеркивается и столбец. Для идентификации клетки обычно в скобках указываются номера ее строки и столбца. В методе северо-западного угла всегда в первую очередь заполняется клетка (из числа невычеркнутых), стоящая в верхнем левом (северо-западном) углу матрицы перевозок.

Пример 4.4

Пример составления начального распределения методом северо-западного угла показан в таблице 4.10: заполняется клетка (1;1) и вычеркивается первый столбец, заполняется клетка (1;2) (в верхнем левом углу указана стоимость перевозки, в нижнем правом – количество) и вычеркивается первая строка; заполняется клетка (2;2) и вычеркивается второй столбец; заполняется клетка (2;3) и вычеркивается вторая строка; заполняется клетка (3;3) и вычеркивается третий столбец; наконец, заполняется клетка (3;4) и вычеркиваются последние строка и столбец. Число занятых клеток равно $m+n-1=3+4-1=6$. Суммарные затраты на реализацию данного плана перевозок составят

$$f\left(X\right)=4\cdot 30+5\cdot 30+3\cdot 70+6\cdot 30+7\cdot 10+4\cdot 110=1170.$$

Таблица 4.10 – Поиск решения методом северо-западного угла

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**			
	30	100	40	110
60	4 30	5 30	2	3
100	1	3 70	6 30	2
120	6	2	7 10	4 110

Недостатком данного метода является то, что он не учитывает значения элементов c_{ij} матрицы транспортных расходов, в результате чего полученное этим методом начальное распределение (начальный опорный план перевозок) может быть достаточно далеко от оптимального.

В методе наименьших стоимостей заполнение клеток матрицы перевозок проводится с учетом значений величин c_{ij}. Отмечают клетки с наименьшими стоимостями перевозок сначала по каждой строке, а затем по каждому столбцу. Клетки, имеющие две отметки, заполняют в первую очередь, затем заполняют клетки с одной отметкой, а данные о нераспределенном грузе записывают в неотмеченные клетки с наименьшими стоимостями. При этом из двух клеток с одинаковой стоимостью перевозок предпочтение отдается клетке, через которую осуществляется больший объем перевозок. Вычеркивание строк и столбцов при заполнении клеток проводится по описанным выше правилам. Пример начального распределения методом наименьших стоимостей для тех же исходных данных, что и ранее, представлен в таблице 4.11.

Таблица 4.11 – Поиск решения методом наименьшей стоимости

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**			
	30	100	40	110
60	4	5	2 ×× 40	3 20
100	1 ×× 30	3	6	2 × 70
120	6	2 ×× 100	7	4 20

Порядок заполнения клеток: (2;1), (3;2), (1;3), (2;4), (1;4), (3;4). Суммарные затраты на перевозки, представленные в таблице 4.12, составляют

$$f\left(X\right)=1\cdot 30+2\cdot 100+2\cdot 40+2\cdot 70+3\cdot 20+4\cdot 20=590.$$

Следовательно, данный план перевозок значительно ближе к оптимальному, чем план, составленный по методу северо-западного угла.

4.4 Метод потенциалов

Вторым этапом решения закрытой транспортной задачи служит построение системы потенциалов [1].

Введем специальные показатели u_i для каждой строки, которые можно интерпретировать как цену продукта в пункте поставщика, а каждому столбцу j (j -му потребителю) устанавливается потенциал v_j, который можно принять условно за цену продукта в пункте потребителя. В простейшем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пункте поставщика плюс транспортные расходы на его доставку, т. е.

$$v_j = u_i + c_{ij}. \tag{4.8}$$

Совокупность уравнений вида (4.8), составленных для всех заполненных клеток (всех базисных неизвестных), образует систему $m+n-1$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными u_i и v_j. Эта система всегда совместна, причем значение одного из неизвестных можно задавать произвольно (например, $u_1 = 0$), тогда значения остальных неизвестных находятся из системы однозначно.

Рассмотрим процесс нахождения потенциалов для базисного начального распределения по методу северо-западного угла, представленного в таблице 4.12. Задав $u_1 = 0$ и используя формулу (4.8) для заполненных клеток (1;1) и (1;2), находим $v_1 = 4$ и $v_2 = 5$. Зная v_2, по заполненной клетке (2;2) находим $u_2 = 2$, а зная u_2, по заполненной клетке (2;3) находим $v_3 = 8$. Зная v_3, по заполненной клетке (3;3) находим $u_3 = 1$, а затем по заполненной клетке (3;4) находим $v_4 = 5$. Результаты представлены в таблице 4.12, где потенциалы поставщиков приведены в последнем столбце, а потенциалы потребителей – в последней строке.

Таблица 4.12 – Расчет потенциалов

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**				
	30	100	40	110	u_i
60	4 30	5 30	2	3	0
100	1	3 70	6 30	2	2
120	6	2	7 10	4 110	1
v_j	4	5	8	5	

Аналогичные результаты для начального распределения по методу наименьших стоимостей, приведенного в таблице 4.12, представлены в таблице 4.13.

Чтобы оценить оптимальность распределения, для всех клеток $(i;j)$ матрицы перевозок определяются их *оценки,* которые обозначим через d_{ij}, по формуле:

$$d_{ij} = \left(u_i + c_{ij}\right) - v_j. \tag{4.9}$$

Таблица 4.13 – Расчет потенциалов

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**				
	30	100	40	110	u_i
60	4	5	2 40	3 20	0
100	1 30	3	6	2 70	1
120	6	2 100	7	4 20	–1
v_j	2	1	2	3	

Используя ранее принятую интерпретацию, выражение $\left(u_i + c_{ij}\right)$ можно трактовать как сумму цены продукта у поставщика и стоимости перевозки; эта сумма путем вычитания сравнивается с ценой продукта у соответствующего потребителя v_j. Очевидно, оценки заполненных клеток равны нулю (цена потребителя покрывает цену поставщика и стоимость перевозок). Таким образом, об оптимальности распределения можно судить по величинам оценок свободных клеток. Если оценка некоторой свободной клетки отрицательна, это можно интерпретировать так: цена, предлагаемая соответствующим потребителем, больше суммы цены поставщика и стоимости перевозки, т. е. если бы эта клетка была занята, то можно было бы получить дополнительный экономический эффект. Следовательно, условием оптимальности распределения служит условие неотрицательности оценок свободных клеток матрицы перевозок.

Оценки клеток по формуле (4.9) удобно представить в виде *матрицы оценок*. Для ранее рассматриваемого распределения, полученного методом северо-западного угла (см. табл. 4.11), матрица оценок клеток имеет вид:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Наличие большого числа отрицательных оценок свободных клеток свидетельствует о том, что данный план перевозок далек от оптимального (напомним, что суммарные затраты на перевозку по этому плану равны 1170).

Для распределения, полученного методом наименьших стоимостей (табл. 4.13), матрица оценок клеток имеет вид:

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все оценки неотрицательны, то не имеется возможности улучшить данный план перевозок, т. е. он оптимален (суммарные затраты на перевозку по этому плану равны 590). Кроме того, следует отметить, что в данном случае оценки всех свободных клеток строго больше нуля, т. е. любой другой план, предусматривающий занятие хотя бы одной из этих клеток, будет менее оптимален. Это говорит о том, что найденный оптимальный план является *единственным.* Наличие нулевых оценок свободных клеток в оптимальном плане перевозок, наоборот, свидетельствует о *неединственности* оптимального плана.

Улучшение оптимального плана перевозок (циклы перераспределения)

Чтобы улучшить неоптимальный план перевозок, выбирается клетка матрицы перевозок с отрицательной оценкой; если таких клеток несколько, то обычно (но необязательно) выбирается клетка с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой. Например, для распределения, представленного в таблице 4.13, такой клеткой может служить клетка (1;3) (см. матрицу оценок (4.10)).

Для выбранной клетки строится замкнутая линия (*контур*, в таблице 4.14 эти клетки «затенены»), начальная вершина которой лежит в выбранной клетке, а все остальные вершины находятся в занятых клетках; при этом направления отдельных отрезков контура могут быть только горизонтальными и вертикальными. Вершиной контура, кроме первой, является занятая клетка, где отрезки контура образуют один прямой угол (нельзя рассматривать как вершины клетки, где горизонтальные и вертикальные отрезки контура пересекаются). Очевидно, число отрезков контура, как и его вершин, будет четным. В вершинах контура расставляются поочередно знаки «+» и «–», начиная со знака «+» в выбранной свободной клетке. Пример простого контура показан в таблице 4.14, хотя вид контура может быть самым разнообразным.

Таблица 4.14 – Построение контура

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**				
	30	100	40	110	u_i
60	4 30	**5** – **30**	**2** +	3	0
100	1	**3** + **70**	**6** – **30**	2	2
120	6	2	7 10	4 110	1
v_j	4	5	8	5	

Таблица 4.15 – Результат перераспределения

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**				
	30	100	40	110	u_i
60	4 30	5 0	2 30	3	0
100	1	3 100	6	2	2
120	6	2	7 10	4 110	–5
v_j	4	5	2	–1	

Величина перераспределяемой поставки определяется как наименьшая из величин поставок в вершинах контура со знаком «–», и на эту величину увеличиваются поставки в вершинах со знаком «+» и уменьшаются поставки в вершинах со знаком «–». Это правило гарантирует, что в вершинах контура не появится отрицательных поставок, начальная выбранная клетка окажется занятой, в то время как одна из занятых клеток при этом обязательно освободится. Если величина перераспределяемой поставки равна поставкам не в одной, а в нескольких вершинах контура со знаком «–» (это как раз имеет место в контуре перераспределения в таблице 4.15), то освобождается только одна клетка, обычно с наибольшей стоимостью перевозки, а все другие такие клетки остаются занятыми с нулевой поставкой.

Результат указанных операций для представленного в таблице 4.14 распределения поставок показан в таблице 4.15. Суммарные затраты на перевозки по этому плану составляют

$$f(X) = 4\cdot 30 + 5\cdot 0 + 2\cdot 30 + 3\cdot 100 + 7\cdot 10 + 4\cdot 110 = 990,$$

что значительно меньше предыдущей суммы затрат 1170, хотя план перевозок в таблице 4.15 еще не является оптимальным. Об этом свидетельствует наличие отрицательных значений в матрице оценок клеток этого плана (соответствующие потенциалы u_i и v_j найдены способом, изложенным при описании этапа 2):

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 5 \\ -3 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортные задачи, в базисном плане перевозок которых имеют место занятые клетки с нулевой поставкой (или в первоначальном распределении, или в процессе итераций), называются *вырожденными*. В случае вырожденной транспортной задачи существует опасность *зацикливания,* т. е. бесконечного повторения итераций (бесконечного перебора одних и тех же базисных комбинаций занятых клеток). Как правило, в практических задачах транспортного типа зацикливание не встречается; тем не менее следует знать, что существуют специальные правила, позволяющие выйти из цикла, если зацикливание все же произойдет. При отсутствии вырождения метод потенциалов конечен и приводит к оптимальному плану перевозок за конечное число шагов.

4.5 Открытая модель транспортной задачи

Если суммарная мощность поставщиков не равна суммарной мощности потребителей $\left(\text{т.е. если нарушается условие } \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то имеем открытую модель транспортной задачи. Открытая транспортная задача решается сведением ее к закрытой транспортной задаче [1].

Пример 4.5

Найти оптимальное распределение поставок для транспортной задачи, представленной в таблице 4.16.

В данном случае суммарный спрос потребителей больше, чем суммарная мощность поставщиков $(45+35+55+65=200>40+60+90=190)$. Введем «фиктивного поставщика» и в таблицу поставок добавим дополнительную строку (табл. 4.17) так, чтобы задача стала закрытой. Для этого мощность фиктивного поставщика следует принять равной $10 = 200 - 190$. Коэффициенты затрат этой добавленной строки определяются издержками ввиду недогрузки мощностей потребителей. Если информация об этих издержках отсутствует, то их принимают равными одному и тому же числу (например, нулю, как в таблице 4.17). Конкретное значение этого числа не влияет на оптимальное распределение поставок.

Таблица 4.16 – Исходные данные

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**			
	45	35	55	65
40	4	1	2	5
60	3	2	3	7
90	4	4	5	2

Таблица 4.17 – Добавление фиктивного пункта

Мощности поставщиков	**Мощности потребителей**			
	45	35	55	65
40	4	1	2	5
60	3	2	3	7
90	4	4	5	2
10	0	0	0	0

Первоначальное распределение поставок для сформулированной закрытой транспортной задачи найдем, например, по методу наименьших затрат. Для удобства укажем последовательность заполнения таблицы поставок: $x_{44} = 10$, $x_{12} = 35$, $x_{34} = 55$, $x_{13} = 5$, $x_{23} = 50$, $x_{21} = 10$, $x_{31} = 35$. В результате приходим к следующему базисному распределению поставок (табл. 4.18).

Таблица 4.18 – Поиск решения методом наименьших затрат

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				
	45	35	55	65	u_i
40	4	1 × 35	2 5	5	0
60	3 10	2 ×	3 50	7	–1
90	4 35	4	5	2 × 55	–2
10	0 ×	0 ×	0 ×	0 × 10	0
v_j	2	1	2	0	

Рассчитаем матрицу оценок по формуле $d_{ij} = \left(u_i + c_{ij}\right) - v_j$:

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как есть отрицательные оценки свободных клеток, то полученный план перевозок неоптимальный. Строим цикл перераспределения для клетки (4; 3). В результате получим следующий цикл (выделенные клетки в таблице 4.19). Далее производим перераспределение в соответствии с описанной ранее схемой. Результат представлен в таблице 4.20.

Таблица 4.19 – Составление цикла перераспределения

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				
	45	35	55	65	u_i
40	4	1 35	2 5	5	0
60	**3** + **10**	2	**3** – **50**	7	–1

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				
	45	35	55	65	u_i
90	**4** – **35**	4	5	**2** + **55**	–2
10	0	0	**0** +	**0** – **10**	0
v_j	2	1	2	0	

Таблица 4.20 – Новое решение

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				
	45	35	55	65	u_i
40	4	1 35	2 5	5	0
60	3 20	2	3 40	7	–1
90	4 25	4	5	2 65	–2
10	0	0	0 10	0	0
v_j	2	1	2	0	

Матрица оценок для этой таблицы

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

не содержит отрицательных элементов свободных клеток, следовательно, полученный план перевозок оптимальный. Суммарная стоимость перевозок составит:

$$f(X) = 1 \cdot 35 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 65 + 0 \cdot 10 = 455.$$

. . . .

В случае, когда суммарная мощность поставщиков больше суммарной мощности потребителей, в рассмотрение вводится «фиктивный потребитель», а к таблице поставок присоединяется дополнительный столбец. Коэффициенты затрат этого добавленного столбца соответствуют затратам на хранение неотправленного груза (поставки последнего столбца – неотправленный груз для каждого из поставщиков). Если информация об этих затратах отсутствует, то их принимают равными одному и тому же числу (например, нулю).

Контрольные вопросы по главе 4

1. В чем суть транспортной задачи?
2. Какая транспортная задача называется закрытой?
3. Какую величину нужно минимизировать в транспортной задаче?
4. Как рассчитывается стоимость перевозок в транспортной модели?
5. Какие существуют методы поиска начального решения?
6. В чем суть метода северо-западного угла?
7. В чем суть метода наименьшей стоимости?
8. Какие клетки заполняются в первую очередь в методе наименьшей стоимости?
9. В чем суть метода потенциалов?
10. Как вычисляются оценки d клеток?

5 Целочисленное программирование

Целочисленным (*иногда его называют также* ***дискретным***) ***программированием*** *(ЦП) называется раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна* [1].

Изучение этого раздела вызывается тем, что огромное количество экономических задач носит дискретный, чаще всего целочисленный характер, что связано, как правило, с физической неделимостью многих элементов расчета: например, нельзя построить два с половиной завода, купить полтора автомобиля и т. д. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например симплексным методом, с последующим округлением до целых чисел. Однако такой подход оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объема (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение.

5.1 Графический метод решения задач целочисленного программирования

Приводимый ниже пример позволяет лучше понять неуловимую трудность задач целочисленного программирования (ЗЦП) [1].

Пример 5.1

$$f(x) = x_1 - 20x_2 \to \min,$$
$$-x_1 + 10x_2 \le 40,$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 29,$$
$$x_j \ge 0; \quad x_j \in \mathbb{Z} \quad j = 1,2.$$

На плоскости (x_1, x_2) допустимое множество S – многоугольник $ABCD$; отметим точки множества S с целочисленными координатами (рис. 5.1).

Здесь множество $\tilde{S}$ отмечено отдельными точками внутри многогранника $ABCD$.

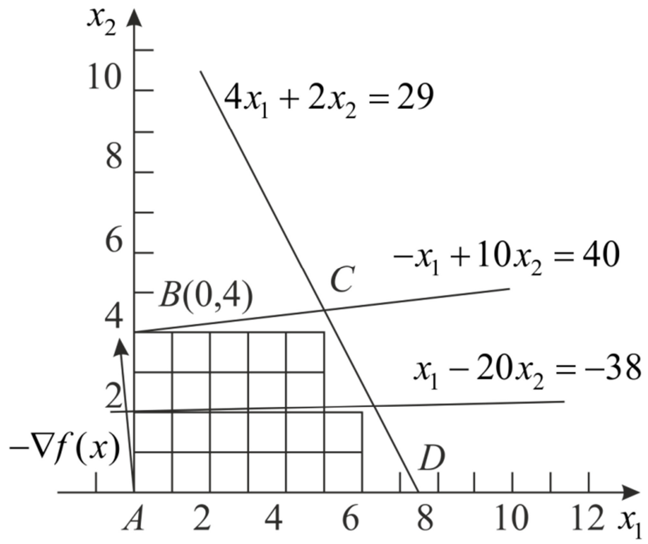


Рис. 5.1 – Решение задачи графическим методом

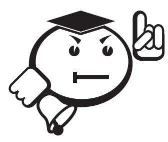
Перемещая линию уровня ЦФ $f(x)$ в направлении антиградиента $\nabla f = (-1, 20)$ (убывания f), находим крайнее положение этой линии, в котором она имеет непустое пересечение с множеством $\tilde{S}$. В этом положении линия уровня проходит через точку $B(0,4)$, поэтому решение задачи имеет вид $\tilde{x}^* = (0,4)$; $\tilde{f}^* = \min\limits_{x \in \tilde{S}} f(x) = -80$.

Из рисунка видно, что в случае непрерывной переменной оптимум есть точка $C(5;4,5)$, т. е.

$$x^* = (5;4,5); \quad f^* = -85.$$

Простой метод округления привел бы к решению $x_1 = 5$; $x_2 = 5$, которое не удовлетворяет ограничениям. Отсюда следует, что точка минимума ЦФ на допустимом множестве $\tilde{S}$ целочисленной задачи не обязательно является ближайшей к решению x^* обычной ЗЛП.

. . . .



Если округлить в сторону уменьшения, т. е. взять $\tilde{x}(5,4)$, $\tilde{f} = -75$, то эта точка будет удовлетворять ограничениям задачи.

. . . .

Для решения целочисленных задач разработаны специальные методы, которые можно разделить на две группы: методы отсечения (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

Метод отсекающих плоскостей состоит в построении дополнительных ограничений и применении модифицированного симплексного метода (метод Гомори). Представление о *комбинаторных методах* дает широко используемый на практике *метод ветвей и границ.*

По методу Гомори первый этап решения целочисленных задач не отличается от обычного расчета по симплексному алгоритму. Если среди значений переменных в оптимальном плане есть дробные, то составляется дополнительное ограничение, отсекающее дробную часть решения, но оставляющее в силе все прочие условия, которым должен удовлетворять оптимальный план. Это дополнительное ограничение присоединяется к исходным ограничениям задачи, и вновь применяется процедура симплексного метода. Алгоритм Гомори позволяет прийти к оптимальному целочисленному решению за конечное число шагов.

5.2 Метод Гомори

Метод Гомори (МГ) используется для решения задач ЦП с произвольным числом переменных [1].

Суть МГ: последовательное отсечение от допустимого множества S нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсечения производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j.

ЗЦП имеет вид:

$$f(x) \to c^t x \to \min,$$
$$Ax = b,$$
$$x \ge 0;\ x \in \mathbb{Z} \text{ – множество целых чисел.} \tag{5.1}$$

5.2.1 Алгоритм МГ с использованием СМ

Шаг 1. С помощью СМ находится решение x^* ЗЛП без учета требования целочисленности (5.1). Если для x^* условие $x \in Z$ выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел $\overline{b}_i$ последнего столбца СТ, определяющей решение x^*, есть такие, что $\{\overline{b}_i\} > 0$.

Шаг 2. Среди нецелых элементов $\overline{b}_i$ выбирается произвольный элемент $\overline{b}_r$ (например, с максимальной дробной частью $\{\overline{b}_r\}$). По r-й строке СТ составляется дополнительное ограничение вида

$$-\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\overline{a}_{rj}\right\}x_j \le -\left\{\overline{b}_r\right\}$$

(здесь для определенности полагаем, что свободные переменные x_j имеют номера $m+1, m+2, \ldots, n$).

С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \ge 0$ это ограничение представляется в виде равенства

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\overline{a}_{rj}\right\}x_j = -\left\{\overline{b}_r\right\}$$

и вводится в СТ дополнительной строкой.

$$x_{n+1}\left|\alpha_{n+1,m+1}, \ldots, \alpha_{n+1,n}\right|\beta_{n+1}, \tag{5.2}$$

где $\alpha_{n+1,j} = -\left\{\overline{a}_{r,j}\right\};\quad j = m+1, \ldots, n;$

$\beta_{n+1} = -\left\{\overline{b}_r\right\}.$

Так как $\beta_{n+1} = -\left\{\overline{b}_r\right\} < 0$, то после дополнения строкой (5.2) СТ перестает соответствовать допустимому базисному решению ЗЛП, которую она описывает.

Шаг 3. Для перехода к допустимому базисному решению производятся следующие операции:

а) строка с отрицательным свободным членом β_{n+1} считается *опорной*;

б) если все коэффициенты $\alpha_{n+1,j} > 0,\ j = m+1, \ldots, n,$ то задача не имеет решения, в противном случае номер ℓ разрешающего столбца находится из условия

$$\frac{\beta_{n+1}}{\left|\alpha_{n+1,\ell}\right|} = \min_{j:\alpha_{n+1,j}<0}\frac{\beta_{n+1}}{\left|\alpha_{n+1,j}\right|};$$

в) совершается преобразование СТ с опорным элементом $\alpha_{n+1,\ell}$. Если в новой СТ по-прежнему есть хотя бы один отрицательный свободный член, то описанная процедура повторяется, начиная с операции (*а*), необходимое число раз.

Если все элементы $\overline{b}_i$ новой СТ ≥ 0, то допустимое базисное решение найдено. Отметим, что выбор опорного элемента $\alpha_{n+1,\ell}$ гарантирует неотрицательность коэффициентов $\overline{b}_i$ новой СТ. Поэтому найденное допустимое решение является и оптимальным.

Шаг 4. Если найденное на шаге 3 решение ЗЛП удовлетворяет условию целочисленности, то – «останов», если нет → переход к шагу 2.

Описанный алгоритм позволяет найти решение полностью целочисленной ЗЛП или установить отсутствие решений за конечное число итераций.

Пример 5.2

Пусть для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади 38 м^2, фирма выделяет 20 млн руб. Имеются единицы оборудования двух типов: типа А стоимостью 5 млн руб., требующее производственную площадь 8 м^2 и имеющее производительность 7 тыс. единиц продукции за смену, и типа Б – стоимостью 2 млн руб., занимающее площадь 4 м^2 и дающее за смену 3 тыс. единиц продукции. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

Сформулируем экономико-математическую модель задачи. Пусть x_1, x_2 – количество приобретаемых машин типа А и типа Б соответственно. Тогда целевая функция задачи будет иметь вид:

$$f(X) = 7x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$5x_1 + 2x_2 \le 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 \le 38,$$

$$x_{1,2} \ge 0; \;\; x_{1,2} \equiv 0.$$

Сформулирована задача линейного целочисленного программирования.

Введем дополнительные переменные x_3, x_4, с помощью которых исходные неравенства преобразуются в равенства:

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 + x_4 = 38,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0; \quad x_i \in \mathbb{Z},$$

из которых следует, что переменные x_3, x_4 могут принимать только неотрицательные целочисленные значения.

Далее решаем задачу симплексным методом (без учета целочисленности) (рис. 5.2).

Из таблицы СТ-3 видно, что в оптимальном плане $x_1 = 1$; $x_2 = 7{,}5$ и максимум целевой функции равен $f(X) = 7 \cdot 1 + 3 \cdot 7{,}5 = 29{,}5$. Полученное решение не удовлетворяет условию целочисленности, поэтому дополняем последнюю СТ строкой (4) (рис. 5.3).

СТ-1

	x_1 ↓	x_2	b_i
$\to x_3$	$\boxed{5}$	2	20
x_4	8	4	38
f	–7	–3	0

СТ-3

	x_3	x_4	b_i
x_1	1	–1/2	1
x_2	–2	5/4	15/2
f	1	1/4	59/2

СТ-2

	x_3	x_2 ↓	b_i
x_1	1/5	2/5	4
$\to x_4$	–8/5	$\boxed{4/5}$	6
f	7/5	–1/5	28

Рис. 5.2 – Симплекс-таблицы

СТ-4

	x_3 ↓	x_4	b_i
x_1	1	–1/2	1
x_2	–2	5/4	15/2
$\to x_5$	0	$\boxed{-1/4}$	–1/2
f	1	1/4	59/2

СТ-5

	x_3	x_5	b_i
x_1	1	2	2
x_2	–2	5	5
x_4	0	4	2
f	1	1	29

Рис. 5.3 – Симплекс-таблицы

Повторив процесс решения симплексным методом для данной расширенной системы ограничений, получим новый оптимальный план, в котором переменные, входящие в базис, принимают целые значения: $x_1 = 2; x_2 = 5; x_4 = 2$. Таким образом, приобретение двух машин типа А и пяти машин типа Б обеспечивает максимум производительности участка, равный 29 тыс. единиц продукции в смену. Заметим, что если бы в качестве плана был выбран вариант, получаемый в результате округления первоначального решения задачи симплексным методом $\left(x_1 = 1; x_2 = 7^*\right)$, то суммарная производительность была бы равна лишь 28 тыс. единиц продукции.

. . . .

5.2.2 Решение частично целочисленных задач методом Гомори

Если требованию целочисленности подчинены не все переменные ЗЛП, то такая задача называется частично целочисленной [1].

Для решения частично целочисленных задач также используется метод Гомори, но его алгоритм в этом случае отличается видом коэффициентов $\alpha_{n+1,j}$ в дополнительной строке:

$$x_{n+1} \left| \alpha_{n+1,m+1}, \ldots, \alpha_{n+1,n} \right| \beta_{n+1}.$$

Если переменная x_i подчинена требованию целочисленности, то имеем

$$\text{а) } \alpha_{n+1,j} = \begin{cases} -\overline{a}_{rj}, & \text{если } \overline{a}_{rj} \geq 0, \\ \dfrac{\left\{\overline{b}_{rj}\right\}}{1 - \left\{\overline{b}_{rj}\right\}} \cdot \overline{a}_{rj}, & \text{если } \overline{a}_{rj} < 0. \end{cases}$$

Если же переменная x_i не подчинена требованию целочисленности, тогда

$$\text{б) } \alpha_{n+1,j} = \begin{cases} \left\{\overline{a}_{rj}\right\}, & \text{если } \left\{\overline{a}_{rj}\right\} \leq \left\{\overline{b}_r\right\}, \\ \dfrac{\left\{\overline{b}_r\right\}}{1 - \left\{\overline{b}_r\right\}} \cdot \left(\left\{\overline{a}_{rj}\right\} - 1\right), & \text{если } \left\{\overline{a}_{rj}\right\} > \left\{\overline{b}_r\right\}. \end{cases}$$

Вычисления заканчиваются, когда целыми являются необязательно все коэффициенты $\overline{b}_i$, а только те, которым соответствуют переменные x_i, подчиненные требованию целочисленности.

Пример 5.3

Решить частично целочисленную задачу линейного программирования.

$$f(x) = x_1 - 10x_2 \to \min,$$

$$3x_1 + x_2 \le 12,$$

$$-8x_1 + 3x_2 \le 24,$$

$$x_j \ge 0; \quad x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Запишем задачу в каноническом виде:

$$f(x) = x_1 - 10x_2 \to \min,$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$-8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24,$$

$$x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Нахождение решения представлено на рисунке 5.4.

СТ-1

	x_1	x_2 $\downarrow$	b
x_3	3	1	12
$\to x_4$	–8	$\boxed{3}$	24
	1	–10	0

СТ-2

	x_1 $\downarrow$	x_4	b
$\to x_3$	$\boxed{17/3}$	–1/3	4
x_2	–8/3	1/3	8
	–77/3	10/3	80

СТ-3

	x_3	x_4	b
x_1	3/17	–1/17	12/17
x_2	8/17	3/17	168/17
	77/17	31/17	1668/17

Рис. 5.4 – Поиск решения

Найденное решение $x^* = (12/17, 168/17)$ по второй переменной не удовлетворяет условию целочисленности.

По второй строке составим дополнительное ограничение (рис. 5.5).

Таким образом, получим: $\tilde{x}^* = (0, 9)$; $f^* = -268/3$.

	x_3	x_4	b
x_1	3/17	–1/17	12/17
x_2	8/17	3/17	168/17
x_5	–8/17	**–3/17**	–15/17
	77/17	31/17	1668/17

	x_3	x_5	b
x_1	**1**	–1/3	1
x_2	0	1	9
x_4	8/3	–17/3	15/3
	–1/3	31/3	89

	x_1	x_5	b
x_3	1	–1/3	1
x_2	0	1	9
x_4	–8/3	–43/9	7/3
	1/3	92/9	268/3

Рис. 5.5 – Учет дополнительных ограничений

5.3 Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ (МВГ) широко используется на практике для решения как полностью целочисленных задач, так и смешанных задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Он применяется в большинстве коммерческих программ решения ЗЦП. По существу МВГ представляет собой эффективную процедуру перебора всех целочисленных допустимых решений [1].

Как известно, в методе Гомори решение основано на отсечении нецелочисленных допустимых решений. В МВГ используется округление нецелочисленного оптимального решения ЗЛП.

Пример 5.4

Пусть оптимальное решение двумерной ЗЛП есть $x^* = (3{,}5; 4{,}4)$. В качестве кандидатов на роль приближенного целочисленного оптимального решения необходимо рассматривать решения (3;4), (4;4), (4;5), (3;5), полученные в результате округления. Истинное оптимальное целочисленное решение может не совпадать ни с одним из четырех, поскольку целое значение x_1 в оптимальном решении может быть > 4 или < 3. Таким образом, для получения истинного оптимального целочисленного решения приходится рассматривать все возможные значения x_1 большие и меньшие 3,5. Другими словами, оптимальное целочисленное значение x_1 должно удовлетворять неравенству $x_1 \le 3$ либо неравенству $x_1 \ge 4$. Аналогично по переменной x_2 – либо $x_2 \le 4$, либо $x_2 \ge 5$. При наличии в задаче ЦЛП большого количества переменных важно иметь процедуру, позволяющую систематически перебирать все возможные целочисленные решения, получаемые при округлении оптимального решения ЗЛП. МВГ по существу представляет собой такую процедуру эффективного перебора целочислен-ных решений, получаемых при округлении оптимального решения.

Для иллюстрации основных принципов МВГ рассмотрим следующую задачу ЦП.

Пример 5.5

Решить задачу:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x_1 + 2x_2 \to \max,\\
& x_1 \le 2;\ x_2 \le 2;\\
& x_1 + x_2 \le 3{,}5;\\
& x_1, x_2 \ge 0;\\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
\qquad (5.3)
$$

Начальный шаг решения этой задачи состоит в нахождении решения ЗЛП без учета целочисленности x_1 и x_2. На рисунке 5.6 представлено графическое решение ЗЛП. Оптимальное решение задачи (5.3) имеет вид: $x^* = (2;1{,}5)$; $f^* = 9$.

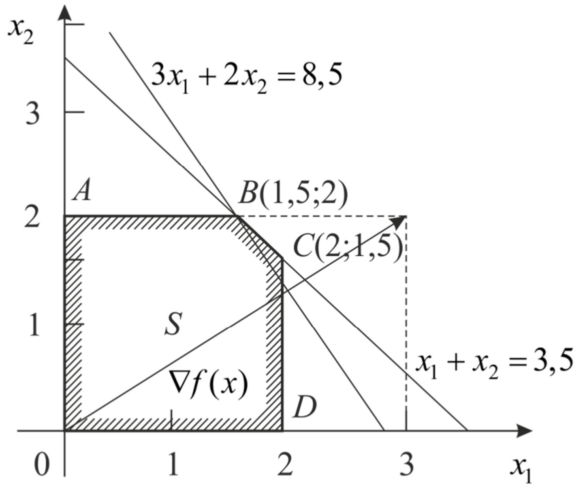


Рис. 5.6 – Решение задачи ЛП-1

Так как $x_2 = 1{,}5$, то найденное решение не может быть оптимальным решением исходной задачи ЦЛП. Но найденное значение $f^* = 9$ представляет собой верхнюю границу истинного оптимального решения, поскольку при выполнении требования целочисленности x_2 значение f может лишь уменьшиться.

Следующий шаг МВГ состоит в просмотре целочисленных значений x_2, больших или меньших 1,5. Это делается путем добавления к задаче (5.3) нового ограничения: либо $x_2 \le 1$, либо $x_2 \ge 2$. Таким образом, из задачи (5.3) получаются 2 задачи следующего вида:

$$\begin{aligned}
&f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&x_1 \le 2;\, x_2 \le 2;\\
&x_2 \le 1 \text{ новое ограничение;}\\
&x_1 + x_2 \le 3{,}5;\\
&x_1, x_2 \ge 0;\\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
&f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&x_1 \le 2;\, x_2 \le 2;\\
&x_2 \ge 2 \text{ новое ограничение;}\\
&x_1 + x_2 \le 3{,}5;\\
&x_1, x_2 \ge 0;\\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

На рисунках 5.7 и 5.8 изображены допустимые области задач (5.4) и (5.5) соответственно (на рис. 5.8 $S \equiv$ отрезок AB). Допустимые области задач обладают следующими свойствами:

1. Оптимальное решение задачи рисунка 5.6 – $(x_1 = 2; x_2 = 1{,}5)$ недопустимы для обеих задач (рис. 5.7, 5.8). Таким образом, это решение не повторится.
2. Любое целочисленное (допустимое) решение исходной задачи допустимо и для рисунков 5.8 и 5.9. Таким образом, при введении этих задач не происходит потери допустимых целочисленных решений исходной задачи.

Оптимальное решение задачи (рис. 5.7) – это точка $C(2;1)$, т. е. $x^* = (2;1)$, $F^* = 8$. Таким образом, получено допустимое (целочисленное) решение исходной задачи ЦП. Даже если задача (5.4) имеет другие целочисленные решения, значение ЦФ в них не может быть больше 8, т. е. $F^* = 8$ – нижняя граница максимального значения F для исходной задачи ЦЛП. Другими словами, оптимальное значение F исходной задачи не может быть < 8. А так как ранее получена лишь верхняя граница, равная 9, то нельзя утверждать, что решение задачи оптимально для исходной задачи. Следовательно, необходимо также рассмотреть задачу на рисунке 5.8.

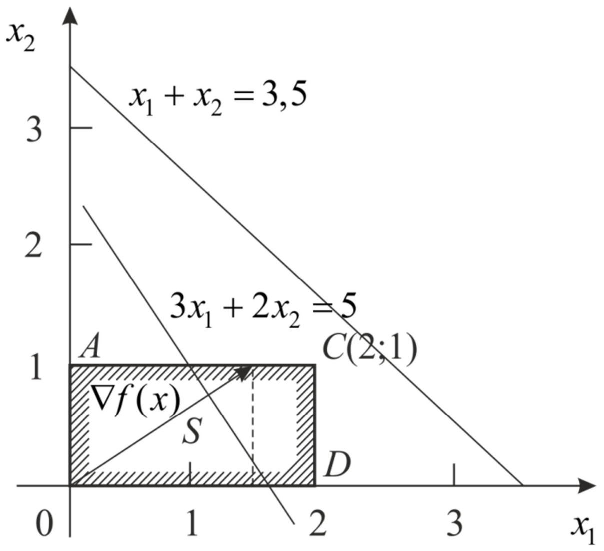


Рис. 5.7 – Решение задачи ЛП-2

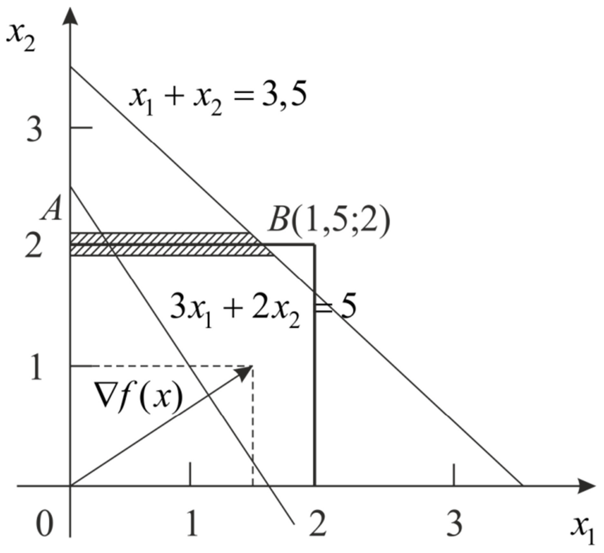


Рис. 5.8 – Решение задачи ЛП-3

Оптимальное решение задачи (рис. 5.8) $x_1 = 1,5;\ x_2 = 2;\ F^* = 8,5$.

Для исходной задачи это недопустимо, так как x_1 принимает дробное значение. Оптимальное решение $F^* = 8,5 > 8$ (нижней границы). Поэтому необходимо проверить существование в допустимой области $S_{ЛП-3}$ целочисленного решения, дающего значение ЦФ $F \geq 8$. Для этого рассмотрим задачи ЛП-4 и ЛП-5, получающиеся при добавлении к ЛП-3 ограничений $x_1 \leq 1$ и $x_1 \geq 2$ соответственно. $S_{ЛП-4}$ состоит из отрезка *DE* (рис. 5.9), а задача ЛП-5 не имеет допустимых решений, т. е. $S_{ЛП-5} = \varnothing$.

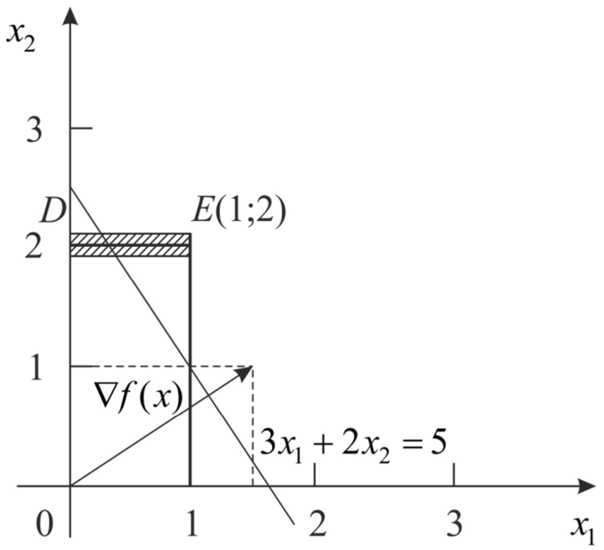


Рис. 5.9 – Решение задачи ЛП-4

Оптимальное решение ЛП-4 $x^* = (1;2)$; $F^* = 7$.

Следовательно, для любого целочисленного решения в $S_{ЛП-4}$ значение ЦФ ≤ 7. Таким образом, точка $x^* = (2;1)$ задачи ЛП-2 представляет собой оптимальное целочисленное решение исходной задачи; оптимальное значение ЦФ в этой точке равно 8.

Удобно представить последовательность задач ЛП, возникающих при использовании процедуры МВГ в виде дерева (рис. 5.10).

Дерево состоит из множества вершин и соединяющих их дуг или ветвей. Вершина 1 соответствует ЛП-1 без учета требований целочисленности. Ветвление в вершине 1, определяемое целочисленной переменной x_2 с помощью ограничения $x_2 \leq 1$, приводит к вершине 2 (ЛП-2). Так как ЛП-2 имеет оптимальное целочисленное решение, то нет необходимости производить ветвление в вершине 2. Такая вершина называется *прозондированной.*

Ветвление в вершине 1 по ограничению $x_2 \geq 2$ дает ЛП-3. Так как оптимальное решение ЛП-3 дробное, происходит дальнейшее ветвление в вершине 3 по переменной x_1. Это приводит к появлению вершин 4 и 5. Эти вершины прозондированы, поскольку ЛП-4 обладает оптимальным целочисленным решением, а ЛП-5 не имеет допустимых решений.

Наилучшее решение в прозондированных вершинах и есть оптимальное решение исходной задачи.

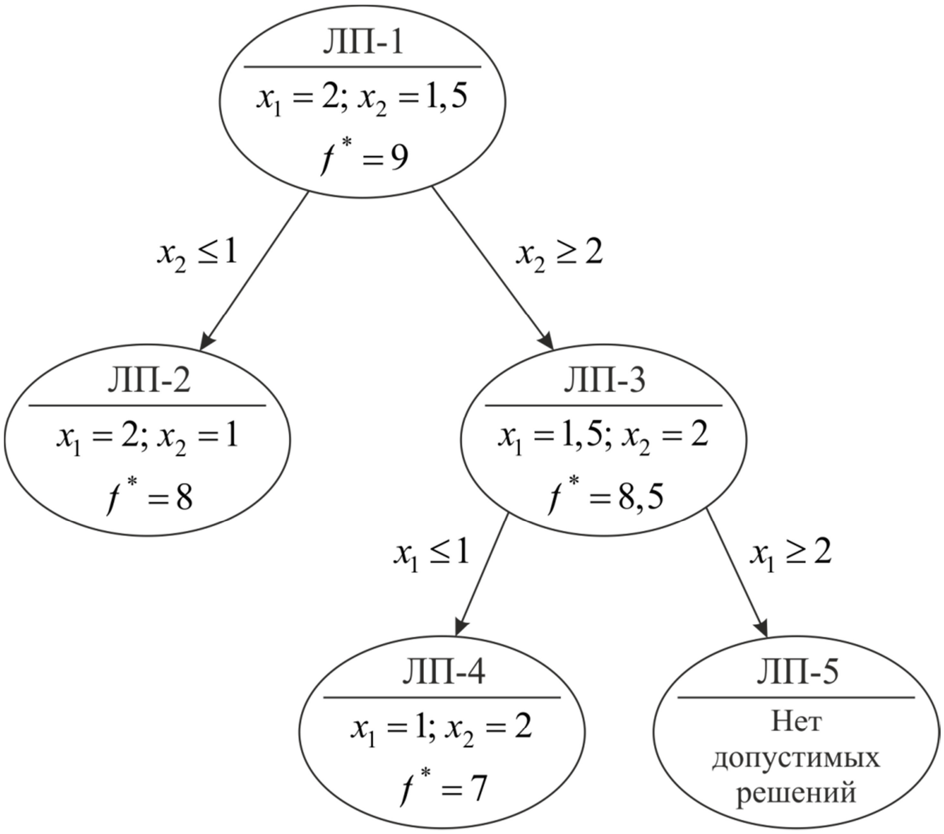


Рис. 5.10 – Дерево последовательности ЗЛП, возникающих при использовании МВГ

. . . .

Алгоритм МВГ

Рассмотрим частично целочисленную задачу вида [1]

$$F = c^T x \to \max,$$
$$Ax = b,\ \ x \ge 0,$$
$$x_j \in \mathbb{Z}\left(j \in I \right),$$

где I – множество индексов целочисленных переменных.

Шаг 1. На первом шаге решается задача ЛП-1, где все ее переменные рассматриваются как непрерывные. Пусть в оптимальном решении F_1 ЛП-1 некоторые целочисленные переменные принимают дробные значения, тогда оптимальное решение исходной задачи не совпадает с F_1. В этом случае F_1 представляет собой верхнюю границу оптимального значения F^* исходной задачи ЛП-1.

Шаг 2. Производится ветвление по одной из целочисленных переменных, имеющей дробное значение в оптимальном решении ЛП-1. Для определения переменной, по которой производится ветвление, разработан ряд правил. Приведем некоторые из них.

1. Выбор целочисленной переменной, значение которой в оптимальном решении ЛП-1 имеет наибольшее дробное значение.
2. Приписывание целочисленным переменным приоритетов и ветвление по переменной с наибольшим приоритетом, например:
   а) данная переменная представляет собой важное решение, принимаемое в рамках рассматриваемой модели;
   б) ее коэффициент стоимости или прибыли в ЦФ существенно превосходит остальные;
   в) значение данной переменной играет ключевую роль для модели с точки зрения разработчиков и пользователей.
3. Произвольные правила выбора. Например, можно выбирать переменную с наименьшим номером.

Пусть ветвление происходит по целочисленной переменной x_j, дробное значение которой в оптимальном решении ЛП-1 равно β_j. Далее рассматриваются две новые задачи ЛП-2 и ЛП-3, получаемые путем введения ограничений $x_j \le \lfloor \beta_j \rfloor$ и $x_j \ge \lfloor \beta_j \rfloor$, соответственно, где $\lfloor \beta_j \rfloor$ – наименьшее целое $\le [x_j]$; здесь $[x_j]$ – целое значение переменной x_j; $\lceil \beta_j \rceil$ – наибольшее целое $> [x_j]$.

Условия ЛП-2 и ЛП-3 можно записать следующим образом (см. рис. 5.11):

ЛП-2	ЛП-3
$F = c^T x \to \max,$	$F = c^T x \to \max,$
$Ax = b, \quad x_j \le \lfloor \beta_j \rfloor,$	$Ax = b, \quad x_j \ge \lceil \beta_j \rceil,$
$x \ge 0.$	$x \ge 0.$

Допустим, что оптимальные решения задач ЛП-2 и ЛП-3 также содержат дробные значения целочисленных переменных и поэтому не являются допустимыми для исходной задачи.

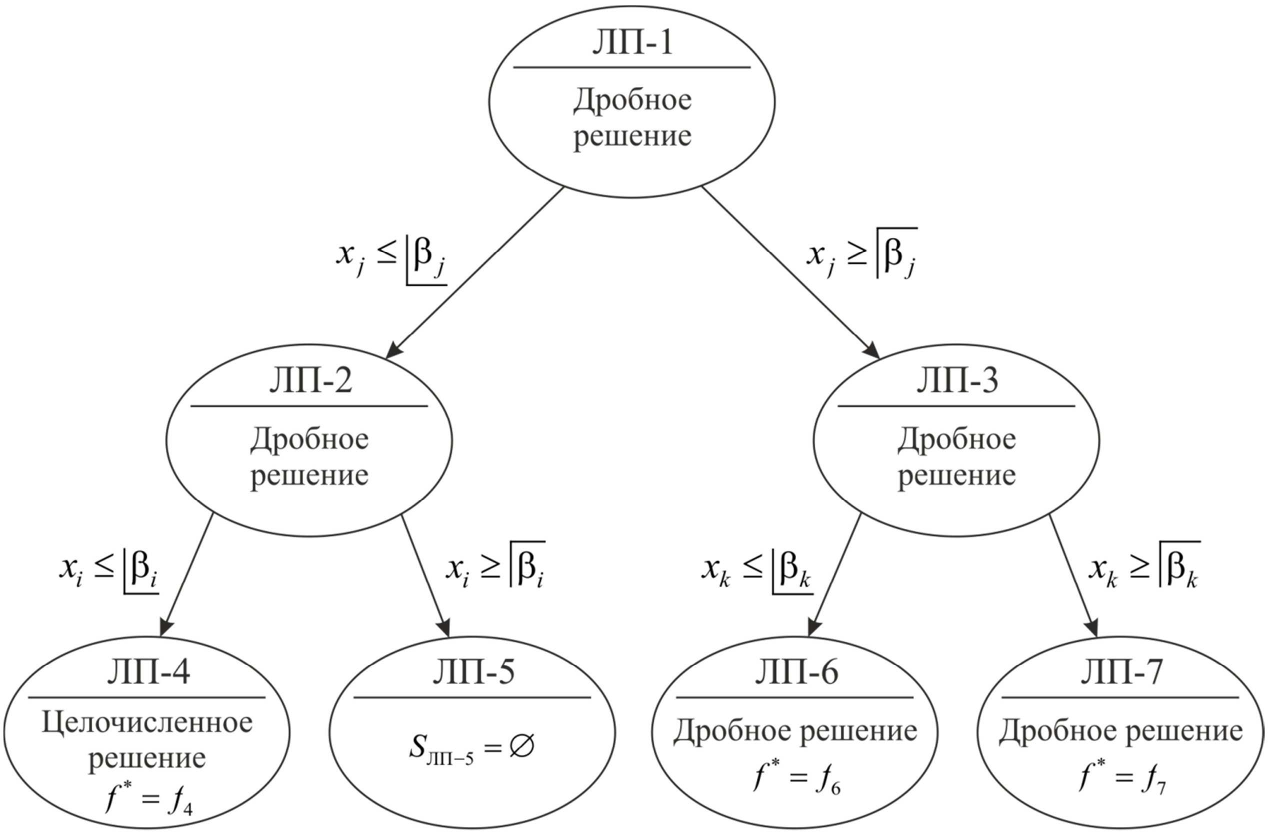


Рис. 5.11 – Алгоритм МВГ

Шаг 3. Выбрать задачу ЛП-2 или ЛП-3 и произвести ветвление в соответствующей вершине, вводя новое ограничение. Выбор вершины (задачи ЛП) осуществляется с помощью специальных правил:

1) использование оптимального значения ЦФ. Для дальнейшего ветвления следует выбирать вершину, соответствующую наибольшему оптимальному значению ЦФ задачи ЛП;
2) правило «последним пришел – первым обслужил». Для дальнейшего ветвления выбирается задача ЛП, решавшаяся последней.

После выбора вершины для дальнейшего ветвления выбирается целочисленная переменная, которая имеет в оптимальном решении соответствующей ЗЛП дробное значение, и производится ветвление по этой переменной. Процесс ветвления и решения задач ЛП продолжается до получения целочисленного оптимального решения одной из задач ЛП. Значение F в полученной точке представляет собой *истинную границу* оптимального значения ЦФ исходной задачи ЦЛП. На этом этапе отбрасываются все вершины ЗЛП, для которых оптимальное значение F не превосходит полученной нижней границы. Про такие вершины говорят, что они являются *прозондированными*, поскольку в соответствующих им допустимых областях нет целочисленных решений, лучших, чем уже полученные.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующее дерево.

Целочисленное оптимальное решение ЛП-4 дает нижнюю границу F_4 ЦФ исходной задачи (ЛП-1). Другими словами, оптимальное решение исходной задачи (ЛП-1) не может давать значение F, меньшее, чем F_4. Дальнейшее ветвление в вершине В4 излишнее, так как для любой из последующих задач оптимальное значение не может быть $> F_4$. Таким образом, вершина В4 является *прозондированной*.

Вершина В5 также прозондирована, поскольку $S_{\text{ЛП}-5} = \varnothing$. Следовательно, в дальнейшем ветвление можно производить только в В6 и В7.

Предположим, что $F_6 < F_4$, а $F_7 > F_4$. Это значит, что В6 также прозондирована (неявным образом). Но так как $F_7 > F_4$, в $S_{\text{ЛП}-7}$ может найтись целочисленное решение со значением F, большим F_4. Таким образом, для дальнейшего ветвления необходимо выбрать В7.

Вершина (ЗЛП) является прозондированной (явным или неявным образом) в том случае, если она удовлетворяет хотя бы одному из условий:

1) оптимальное решение, соответствующее данной вершине, целочисленно. В этом случае полученное решение допустимо для исходной задачи ЦЛП;
2) ЗЛП, соответствующая рассматриваемой вершине, не имеет допустимых решений;
3) оптимальное значение F соответствующей ЗЛП не превосходит нижней границы.

При использовании МВГ выбор вершин для дальнейшего ветвления происходит до тех пор, пока остается хотя бы одна непрозондированная вершина. Прозондированная вершина с наилучшим значением F дает оптимальное решение исходной задачи ЦЛП.

Рассмотрим далее ряд специальных оптимизационных задач, сводящихся к задачам линейного целочисленного программирования. Одной из таких задач является *задача о назначениях*, с помощью которой можно получить ответ на вопросы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая выработка была наибольшей или затраты на заработную плату наименьшими; как наилучшим образом распределить экипажи самолетов; как назначить людей на различные должности (отсюда и название задачи) и т. д.

5.4 Задача о назначениях

Математически такие задачи относятся к тому же типу распределительных задач, что и рассмотренная транспортная задача, с той особенностью, что в них объемы наличных и требующихся ресурсов для выполнения каждой работы равны единице $\left(a_i = b_j = 1\right)$, а все переменные x_{ij} либо равны единице, если i-й работник назначен на j-ю работу, либо равны нулю в других случаях. Исходные данные задачи о назначениях группируются в таблице, которая называется *матрицей оценок*, а результаты – в *матрице назначений* [1].

Задача о назначениях в общем виде может быть сформулирована следующим образом. Имеется n работников, которые могут выполнять n работ, причем использование i-го работника на j-й работе, например, приносит доход c_{ij}. Требуется поручить каждому из работников выполнение одной вполне определенной работы, чтобы максимизировать в данном случае суммарный доход.

Введем переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{ - й работник выполняет } j \text{ - ю работу,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы найти распределение $X = \left(x_{ij}\right)$ работников по работам (т. е. найти матрицу назначений), которое максимизирует целевую функцию:

$$f\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max, \tag{5.6}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \ldots, n; \tag{5.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \ldots, n, \tag{5.8}$$

причем x_{ij} равно либо 0, либо 1 (так называемые *булевы переменные*) для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Ограничения (5.7) отражают условие того, что за каждым работником может быть закреплена только одна работа, а ограничения (5.8) означают, что для выполнения каждой работы может быть выделен только один работник.

Если в задаче о назначениях элементы матрицы оценок представляют собой, например, время выполнения каждым работником любой из работ, то целевая функция этой задачи будет минимизироваться.

Пример 5.6

Рассмотрим пример решения данной задачи в Excel. В таблице 5.1 представлена информация о фамилиях сотрудников и о времени выполнения каждой работы.

Таблица 5.1 – Информация о времени выполнения каждой работы сотрудником

Сотрудник	**Заполнение документов**	**Настройка программы**	**Работа с клиентами**
Иванов	10	6	6
Петров	8	7	5
Сидоров	6	8	6

Тогда целевая функция (5.6) будет иметь вид:

$$f\left(X\right)=10\cdot x_{11}+6\cdot x_{12}+6\cdot x_{13}+8\cdot x_{21}+7\cdot x_{22}+$$
$$+5\cdot x_{23}+6\cdot x_{31}+8\cdot x_{32}+6\cdot x_{33}\rightarrow \min.$$

Ограничения:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1;$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1;$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1;$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1.$$

Решение задачи в Excel представлено на рисунке 5.12. Следовательно, Иванов будет выполнять настройку программы, Петров – работу с клиентами, Сидоров – заполнение документов. Общее время выполнения составит 17 часов. В ячейках B11:D11 приведены суммы столбцов:

- <B11>=СУММ(B8:B10);
- <C11>=СУММ(C8:C10);
- <D11>=СУММ(D8:D10).

	A	B	C	D	E	F
1	Фамилия	Заполнение документов	Настройка программы	Работа с клиентами		Общее время
2	Иванов	10	6	6		17
3	Петров	8	7	5		
4	Сидоров	6	8	6		
5						
6	Фамилия	Заполнение документов	Настройка программы	Работа с клиентами		
7	Иванов	0	1	0	1	
8	Петров	0	0	1	1	
9	Сидоров	1	0	0	1	
10		1	1	1		

Рис. 5.12 – Решение задачи о назначениях

В ячейках E8:E10 приведены суммы строк:

- <E8>=СУММ(B8:D8);
- <E9>=СУММ(B9:D9);
- <E10>=СУММ(B10:D10).

В ячейке F2 значение целевой функции:

<F2>=B2*B8+C2*C8+D2*D8+B3*B9+C3*C9+D3*D9+B4*B10+C4*C10+ +D4*D10.

В надстройке «Поиск решения» указывается целевая функция и ограничения (рис. 5.13).

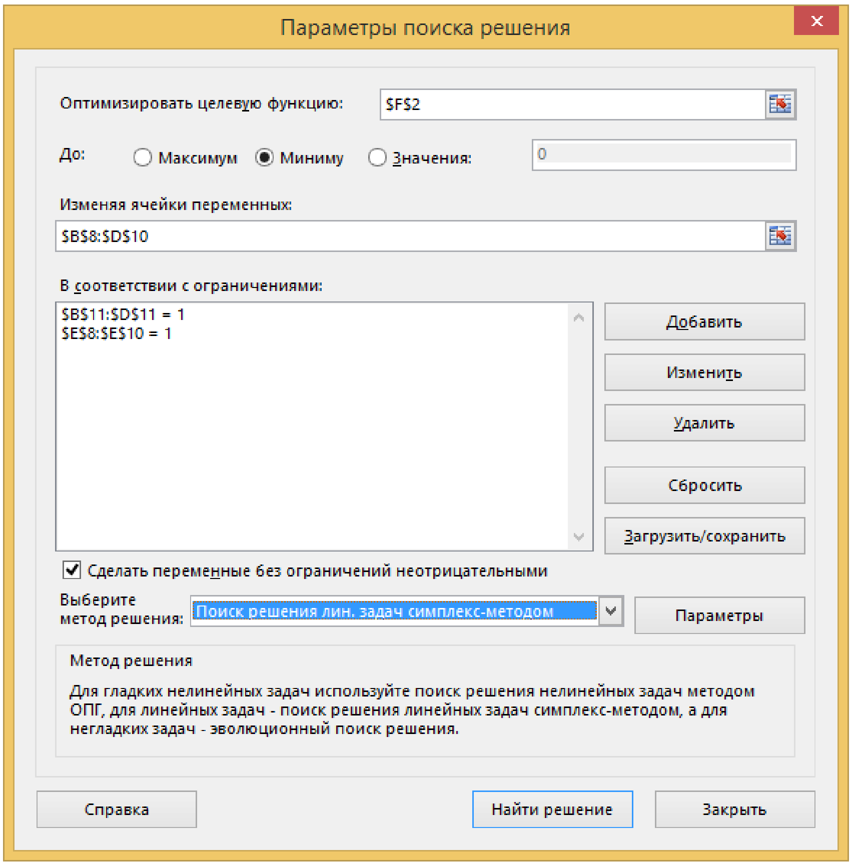


Рис. 5.13 – Надстройка «Поиск решения»

. . . .

5.5 Задача о коммивояжере

Другой задачей подобного рода является *задача о коммивояжере,* которая может быть сформулирована следующим образом. Имеется n городов, пронумерованных числами от 1 до n. Коммивояжер, выезжая из города 1, должен побывать в каждом городе ровно один раз и вернуться в исходный пункт. Пусть известны расстояния c_{ij} между городами $\left(i,\, j=1,\ldots,n;\, i\neq j\right)$. Требуется найти самый короткий маршрут.

Составим экономико-математическую модель. Введем переменные:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j,\\ 0 \text{ в противном случае } \left(i,\, j=1,\ldots,n;\, i\neq j\right).\end{cases}$$

Требование однократного въезда и выезда в города запишется в виде следующих ограничений:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ \ j=1,...,n, \tag{5.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ \ i=1,...,n. \tag{5.10}$$

Таким образом, задача о коммивояжере состоит в минимизации целевой функции:

$$f\left(X\right)=\sum\sum c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min,$$

при условиях (5.9), (5.10), где переменные x_{ij} принимают только неотрицательные целые значения.

Пример 5.7

Пример решения задачи о коммивояжере представлен на рисунке 5.14. Имеется четыре пункта: A, B, C, D (рис. 5.15). В столбце H указаны ограничения (5.9), (5.10):

- <H2>=СУММ(C9:F9);
- <H3>=СУММ(C10:F10);
- <H4>=СУММ(C11:F11);
- <H5>=СУММ(C12:F12);
- <H6>=СУММ(C9:C12);
- <H7>=СУММ(D9:D12);
- <H8>=СУММ(E9:E12);
- <H9>=СУММ(F9:F12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			A	B	C	D		Расстояние	0	
2		A		5	20	15		1		
3		B	5		9	14		1		
4		C	20	9		4		1		
5		D	15	14	4			1		
6								1		
7								1		
8			A	B	C	D		1		
9		A	1	0	0	0		1		
10		B	0	1	0	0				
11		C	0	0	1	0				
12		D	0	0	0	1				

Рис. 5.14 – Решение задачи о коммивояжере

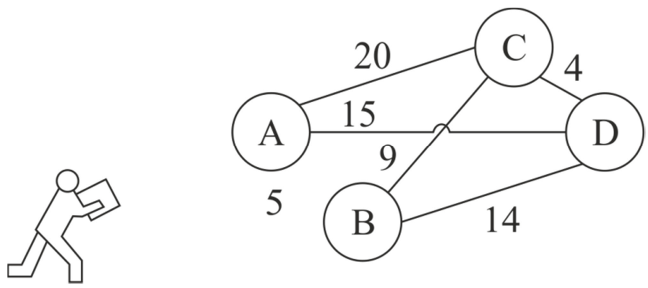


Рис. 5.15 – Граф задачи

Целевая функция:

<I1>=C2*C9+D2*D9+E2*E9+F2*F9+C3*C10+D3*D10+E3*E10+F3*F10+
+C4*C11+D4*D11+E4*E11+F4*F11+C5*C12+D5*D12+E5*E12+F5*F12

При вызове надстройки «Поиск решения» (рис. 5.15) указываются бинарные переменные.

Модель задачи имеет следующий вид. Необходимо определить значения x_{ij} (могут быть 0 или 1), которые минимизируют значение целевой функции:

$$f(X) = 0 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 20 \cdot x_{13} + 15 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 9 \cdot x_{23} + 14 \cdot x_{24} +$$
$$+ 20 \cdot x_{31} + 9 \cdot x_{32} + 0 \cdot x_{33} + 4 \cdot x_{34} + 15 \cdot x_{41} + 14 \cdot x_{42} + 4 \cdot x_{43} + 0 \cdot x_{44} \to \min .$$

При ограничениях:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1;$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1;$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1;$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1;$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1;$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1;$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1.$$

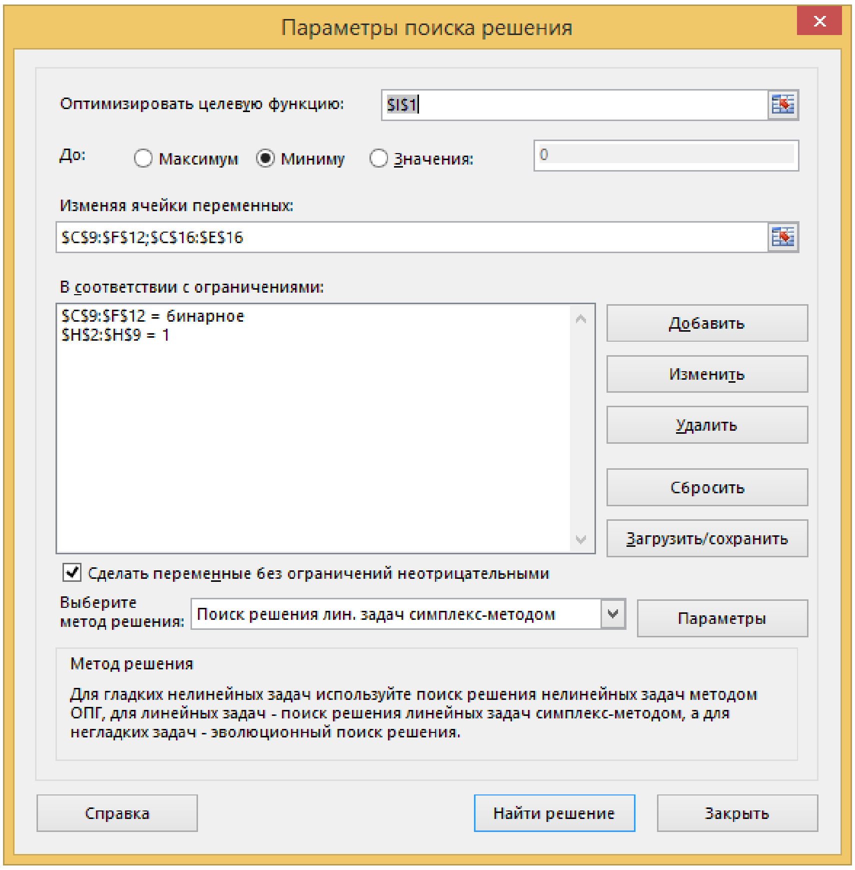


Рис. 5.16 – Форма «Поиск решения»

Из рисунка 5.14 видно, что получены циклы: AA, BB, CC, DD. Для того чтобы избежать подобного результата, в условиях в форме «Поиск решения» установим, что значения x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44} принимаются равными нулю. В итоге мы получим два цикла: ABA, CDC (рис. 5.17).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			A	B	C	D		Расстояние	18
2		A		5	20	15		1	
3		B	5		9	14		1	
4		C	20	9		4		1	
5		D	15	14	4			1	
6								1	
7								1	
8			A	B	C	D		1	
9		A	0	1	0	0		1	
10		B	1	0	0	0			
11		C	0	0	0	1			
12		D	0	0	1	0			

Рис. 5.17 – Решение задачи о коммивояжере
(ограничения на значения x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44})

Из полученного решения можно увидеть, что ограничения (5.9), (5.10) полностью не определяют допустимые маршруты, так как не исключают возможности разрыва пути, т. е. появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов для части городов (ABA, CDC). Поэтому следует ввести дополнительно n переменных $u_i \geq 0$; $u_i \in \mathbb{Z}\left(i = 1,\ldots,n\right)$, принимающих только целые неотрицательные значения, и записать для них специальные ограничения:

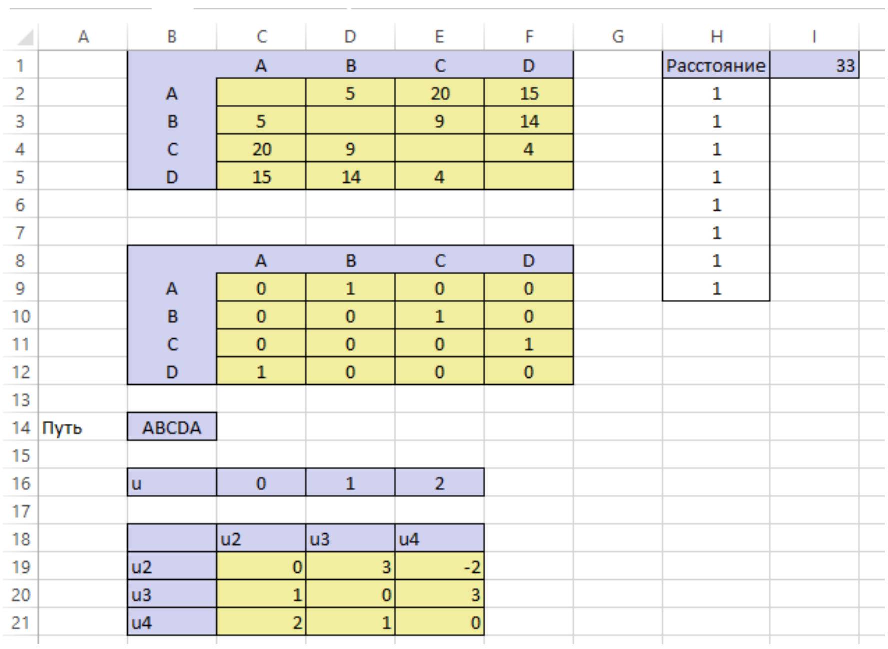
$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1;\; i, j = 2,\ldots,n. \qquad (5.11)$$

Ограничения, не исключая допустимый маршрут, исключают возможность существования подмаршрутов. Таким образом задача заключается в минимизации целевой функции

$$f\left(X,U\right) = \sum\sum c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

при условиях (5.9), (5.10), где переменные x_{ij} принимают только неотрицательные целые значения.

Полученное решение представлено на рисунке 5.18. Путь будет равен: ABCDA.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			A	B	C	D		Расстояние	33
2		A		5	20	15		1	
3		B	5		9	14		1	
4		C	20	9		4		1	
5		D	15	14	4			1	
6								1	
7								1	
8			A	B	C	D		1	
9		A	0	1	0	0		1	
10		B	0	0	1	0			
11		C	0	0	0	1			
12		D	1	0	0	0			
13									
14	Путь	ABCDA							
15									
16		u	0	1	2				
17									
18			u2	u3	u4				
19		u2	0	3	-2				
20		u3	1	0	3				
21		u4	2	1	0				

Рис. 5.18 – Решение задачи о коммивояжере

Excel-формулы вычисления значений для проверки условия (5.11) представлены в таблице 5.2.

А в форме «Поиск решения» нужно указать, что значения из данного диапазона не должны превышать 3 $\left(n - 1\right)$, а также указать значения u в качестве изменяемых (рис. 5.19).

Таблица 5.2 – Формулы расчета ячеек C19:E21

	u2	u3	u4
u2	=C16-C16+4*D10	=C16-D16+4*E10	=C16-E16+4*F10
u3	=D16-C16+4*D11	=D16-D16+4*E11	=D16-E16+4*F11
u4	=E16-C16+4*D12	=E16-D16+4*E12	=E16-E16+4*F12

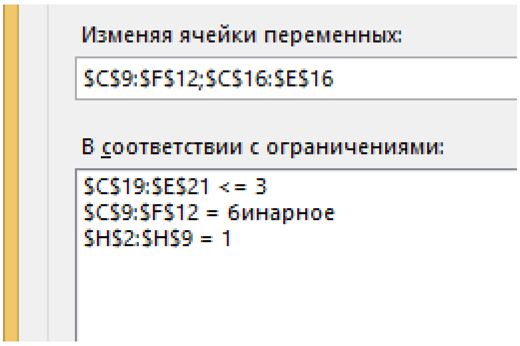


Рис. 5.19 – Заполнение формы «Поиск решения»

К задачам целочисленного программирования приводят также многие оптимальные задачи *теории расписаний*, в которой рассматриваются методы оптимизации оперативно-календарного планирования. В качестве примера таких задач можно привести задачу определения оптимальной очередности обработки изделий на различных станках или других рабочих местах, задачу составления программы «диспетчер» для управления работой ЭВМ в мультипрограммном режиме и др.

5.6 Метод Монте-Карло

В ряде работ для решения целочисленной задачи в связи с трудоемкостью вычислений из-за большого числа переменных используется метод Монте-Карло, заключающий в случайном генерировании значений x. Алгоритм включает следующие шаги:

Шаг 1. Случайным образом моделируется целые числа из заданного интервала.

Шаг 2. Проверяется соответствие полученного набора чисел условиям. Если ограничения выполняются, то выполняется переход на шаг 3, иначе – на шаг 1.

Шаг 3. Выполняется расчет целевой функции f и сравнение с наилучшим минимальным $f_{\min}$ (или максимальным) значением. Если $f < f_{\min}$, то происходит запоминание значений аргументов в качестве текущего решения, $f_{\min} = f$.

Пример 5.8

Рассмотрим пример решения задачи о диете (см. гл. 3) методом Монте-Карло.

В таблице 5.3 представлены сведения о продуктах и о содержании в них минералов: фосфора и калия.

Таблица 5.3 – Информация о продуктах

Минерал	**Содержание в 1 курином яйце, мг**	**Содержание в 1 яблоке, мг**
Фосфор	96	16,5
Калий	70	412,5

Суточная потребность человека в фосфоре составляет 2 000 мг, в калии – 2 500 мг. Стоимость одного куриного яйца составляет 4,5 руб., яблока – 20 руб.

Таким образом, модель имеет вид (x_1 – количество яиц, x_2 – количество яблок). Ограничения:

$$\begin{cases} 96x_1 + 16{,}5x_2 \geq 2\,000, \\ 70x_1 + 412{,}5x_2 \geq 2\,500. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Целевая функция:

$$f\left(x_1, x_2\right) = 4{,}5x_1 + 20x_2 \to \min.$$

На рисунке 5.20 представлено решение данной задачи, полученное в Excel с помощью надстройки «Поиск решения», без учета того, что x могут принимать только целочисленное значение. Для удовлетворения суточной потребности в фосфоре и калии нужно съедать в день 20,386 яблок и 2,6 яиц. Стоимость набора составит 143,76 руб.

Если мы округлим полученные значения в большую сторону, то получим: 21 куриное яйцо и 3 яблока. Стоимость набора составит: $4{,}5 \cdot 21 + 20 \cdot 3 = 154{,}5$. Данное решение не является оптимальным.

x1	x2
20,386266	2,601118
Стоимость	143,7606
Фосфор	2000
Калий	2500

Рис. 5.20 – Результаты расчета

Теперь для получения решения будем использовать метод Монте-Карло. Напишем макрос, который будет генерировать случайные величины количества яиц и яблок, проверять ограничение и находить решение с минимальной стоимостью. Пусть максимальное число яиц равно 36, яблок – 120. Тогда величины x_1, x_2 будут генерироваться из интервалов (0;36) и (0;120) соответственно. Текст макроса:

```
Sub CalcLinear()
fmin = 100000
For i = 0 To 10000000
x1 = Round(Rnd() * 36)
x2 = Round(Rnd() * 120)
If ((96 * x1 + 16.5 * x2) >= 2000) And ((70 * x1 + 412.5 * x2) >= 2500) Then
f = 4.5 * x1 + 20 * x2
If (f < fmin) Then
fmin = f
x1min = x1
x2min = x2
End If
End If
Next
Range("B8") = x1min
Range("C8") = x2min
Range("C10") = 96 * x1min + 16.5 * x2min
Range("C11") = 70 * x1min + 412.5 * x2min
Range("C9") = fmin
End Sub
```

Полученное решение представлено на рисунке 5.21. Таким образом, в день нужно съедать 24 куриных яйца и 2 яблока. При этом потребление фосфора и калия составит 2 337 и 2 505 мг соответственно, что удовлетворяет ограничениям. Стоимость набора составит 148 руб.

x1	x2
24	2
Стоимость	148
Фосфор	2337
Калий	2505

Рис. 5.21 – Решение задачи целочисленного программирования

Контрольные вопросы по главе 5

1. Какие задачи называются задачами целочисленного программирования?
2. Какие существуют методы решения задачи целочисленного программирования?
3. Каким образом задача целочисленного программирования решается графически?
4. В чем суть метода Гомори?
5. Опишите алгоритм метода Гомори.
6. В чем суть метода ветвей и границ?
7. Опишите алгоритм метода ветвей и границ.
8. Сформулируйте задачу о назначениях.
9. В чем суть задачи о коммивояжере?
10. В чем суть метода Монте-Карло?

6 Нелинейное программирование. Задачи с ограничениями в виде равенств

Рассмотрим общую задачу оптимизации с ограничениями – равенствами [1]:

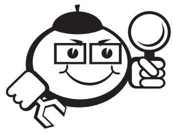
$$f(x) \to \min, \quad x \in R^n; \tag{6.1}$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{6.2}$$

Функции $f(x)$ и $h_i(x)$ предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

6.1 Метод замены переменных

Задача нелинейного программирования может быть решена как задача безусловной оптимизации, путем исключения из целевой функции (6.1) m независимых переменных с помощью заданных равенств (6.2). Наличие ограничений в виде равенств фактически позволяет уменьшить размерность исходной задачи с n до $(n-m)$. Для решения задачи безусловной минимизации можно использовать известные методы, изложенные ранее.



Пример 6.1

Решить задачу:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min;$$

$$x_1 - x_2 = 1.$$

Решение: $x_1 = 1 + x_2$ подставим в $f(x)$

$$f(x) = (1 + x_2)^2 + x_2^2 \to \min;$$

$$f'(x) = 2(1 + x_2) + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Пусть имеется m ограничений равенств, причем $m < n$. Если $m = n$, то задача оптимизации сводится к решению системы уравнений (6.2) и оптимизация здесь не нужна.

Таким образом, экстремальная точка функции $f(x)$ ищется лишь по тем значениям x, которые удовлетворяют независимой системе (6.2) при $m<n$, т. е. в некоторой части S пространства $R^n\left(S\subset R^n\right)$.

Пусть первые m переменных $x_1,\ldots,x_m$, относительно которых мы хотим разрешить систему (6.2), т. е. вектор x можно представить в виде:

$$x=\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix};\ y=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix};\ u=\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Решаем систему (6.2):

$$y=\Psi(u)\quad u\in R^{n-m}$$

и подставляем y в целевую функцию $f(x)=f(y,u)=f\left(\Psi(u),u\right)$. Получим функцию $(n-m)$ переменных $u_1,\ldots,u_{n-m}$, на которую не наложено никаких ограничений, т. е. получим задачу оптимизации без ограничений.

Для идентификации точки экстремума целевой функции можно использовать один из известных методов.

Метод замены переменных (МЗП) применим лишь в случаях, когда уравнения ограничения можно разрешить относительно некоторого конкретного набора независимых переменных. При наличии большого числа ограничений МЗП становится весьма трудоемкой процедурой. Кроме того, возможны ситуации, когда уравнение не удается разрешить относительно переменной, например:

$$h_1(x)=x_1^2x_3+x_2x_3^2+x_2^{-1}x_1.$$

В этом случае целесообразно использовать метод множителей Лагранжа.

6.2 Метод множителей Лагранжа

С помощью метода множителей Лагранжа (ММЛ) устанавливают необходимое условие, позволяющее идентифицировать точки экстремума в задаче оптимизации с ограничениями – равенствами. При этом задача с ограничениями преобразуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации, в которой фигурируют некоторые неизвестные параметры – множители Лагранжа [1].

Рассмотрим задачу оптимизации:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\to\min,$$

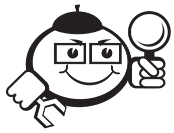
$$h\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0.$$

В соответствии с ММЛ эта задача преобразуется в задачу оптимизации без ограничений.

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda h_1(x) \to \min.$$

Функция $L(x,\lambda)$ – функция Лагранжа. $\lambda = \text{const}$ – множитель Лагранжа, на знак которого никаких требований не накладывается.

Проиллюстрируем ММЛ на конкретном примере.



Пример 6.2

Решить задачу:

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2;$$

$$h(x) = 2x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

Соответствующая задача оптимизации без ограничений записывается в следующем виде:

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 2) \to \min.$$

Решение:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda = 0 \to x_1^* = -\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \to x_2^* = -\frac{\lambda}{2}.$$

Для того чтобы проверить, соответствует ли стационарная точка x^* минимуму, вычислим матрицу Гессе функции $L(x,\lambda)$, рассматриваемой как функция x:

$$H_L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

которая оказывается положительно определенной.

Это означает, что $L(x,\lambda)$ – выпуклая функция x.

Следовательно, координаты $x^* = \left(-\lambda, -\dfrac{\lambda}{2}\right)$ определяют точку глобального минимума. Оптимальное значение λ находится путем подстановки значений x_1^* и x_2^* в уравнение ограничений $2x_1 + x_2 - 2 = 0$, откуда:

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} = -2 \to \lambda^* = -\frac{4}{5}.$$

Таким образом, минимум достигается при $x_1^* = \dfrac{4}{5}$ и $x_2^* = \dfrac{2}{5}$ и $f^* = \min f(x) = \dfrac{4}{5}$.

Точка $\left(x_1^*, x_2^*, \lambda^*\right)$ является седловой точкой функции Лагранжа $L(x,\lambda)$, если функцию Лагранжа рассматривать как функцию трех переменных x_1, x_2 и λ.

. . . .

ММЛ можно распространить на случай, когда задача оптимизации имеет несколько ограничений – равенств. Рассмотрим общую задачу:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \to \min,$$
$$h_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Функция Лагранжа принимает следующий вид:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x),$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ – множители Лагранжа, т. е. неизвестные параметры, значения которых необходимо определить.

Далее находят частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, \quad j = \overline{1,n}; \quad i = \overline{1,m}$$

и рассматривают систему $(n+m)$ уравнений с $(n+m)$ неизвестными x_j, λ_i:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} = 0 \quad j = \overline{1,n} \to \nabla_x L = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = h_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 0 \quad i = \overline{1,m} \to \nabla_\lambda L = 0. \end{cases}$$

Это и есть необходимое условие экстремума функции Лагранжа.

Решение расширенной системы определяет стационарную точку функции L. Затем реализуется процедура проверки на минимум или максимум, которая проводится на основе вычисления элементов матрицы Гессе функции L, рассматриваемой как функция x.

Для некоторых задач расширенная система $(n+m)$ уравнений с $(n+m)$ неизвестными может не иметь решений, и ММЛ окажется неприемлемым. Однако на практике такие задачи встречаются редко.

6.3 Решение обратной задачи с помощью метода множителей Лагранжа

Рассмотрим случай мультипликативной зависимости для функции двух аргументов (рис. 6.1): выручка (r) равна произведению цены (p) и количества товара (c):

$$r = p \cdot c.$$

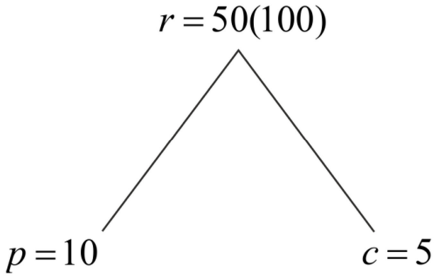


Рис. 6.1 – Зависимость показателей

Исходные данные: $r = 50$, $p = 10$, $c = 5$. Необходимо определить значения цены и количества (наиболее близкие к исходным), которые обеспечат величину выручки, равную 100.

Определение приращений аргументов можно представить в виде задачи нелинейного программирования с квадратичной целевой функцией:

$$f(\Delta x) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \to \min;$$

$$(x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) = y + \Delta y.$$

Для случая определения цены и количества необходимо найти решение задачи:

$$\Delta p^2 + \Delta c^2 \to \min;$$

$$(10 + \Delta p)(5 + \Delta c) = 100.$$

В соответствии с методом множителей Лагранжа задача преобразуется в задачу оптимизации без ограничений:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda h(x) \to \min,$$

где $L(x, \lambda)$ – функция Лагранжа;

$\lambda = \text{const}$ – множитель Лагранжа, на знак которого никаких требований не накладывается.

Запишем задачу в виде задачи оптимизации без ограничений:

$$\Delta p^2 + \Delta c^2 - \lambda\left[(10 + \Delta p)(5 + \Delta c) - 100\right] \to \min.$$

Частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta p} = 2\Delta p - \lambda\left(5 + \Delta c\right);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta c} = 2\Delta c - \lambda\left(10 + \Delta p\right).$$

Для получения окончательного решения необходимо решить систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2\Delta p - \lambda\left(5 + \Delta c\right) = 0; \\ 2\Delta c - \lambda\left(10 + \Delta p\right) = 0; \\ \left(10 + \Delta p\right)\left(5 + \Delta c\right) - 100 = 0. \end{cases}$$

Получим: $\lambda = 0{,}53$, $\Delta p = 2{,}17$, $\Delta c = 3{,}22$.

Пример 6.3

Решим также задачу

$$\Delta p^2 + \Delta c^2 \to \min;$$

$$\left(10 + \Delta p\right)\left(5 + \Delta c\right) = 100,$$

с помощью метода замены переменных

$$\Delta p = \frac{100}{5 + \Delta c} - 10;$$

$$f\left(\Delta c\right) = \left(\frac{100}{5 + \Delta c} - 10\right)^2 + \Delta c^2 \to \min.$$

Задача заключается в нахождении минимума одномерной функции. Используем метод равномерного поиска, считая что Δc принадлежит интервалу от 0 до 5 (шаг равен 0,1). Результаты представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Решение задачи с помощью равномерного поиска

Δc	0	0,1	…	3,1	3,2	3,3	…	4,9	5
$f\left(\Delta c\right)$	100	92,321		15,112	15,059	15,085		24,02	25

Наименьшее значение функции достигается при $\Delta c = 3{,}2$. Отсюда

$$\Delta p = \frac{100}{5 + \Delta c} - 10 = 2{,}195.$$

Контрольные вопросы по главе 6

1. Какой вид имеет задача нелинейного программирования?
2. Какое требование предъявляется к целевой функции?
3. Какие существуют методы решения задачи нелинейного программирования?
4. В чем суть метода замены переменных?
5. В чем суть метода множителей Лагранжа?
6. Как формируется функция Лагранжа?
7. Какие параметры являются неизвестными в функции Лагранжа?
8. Как определяется седловая точка функции Лагранжа?
9. Как определяется минимум функции Лагранжа?
10. Назовите необходимое условие экстремума функции Лагранжа.

Заключение

В данном пособии Вы познакомились с методами исследования операций, с помощью которых можно решать различные экономические задачи. Большая часть пособия посвящена задачам оптимизации, решение которых позволяет экономить ресурсы, определять планы их распределения, находить наилучшие значения характеристик деятельности предприятия и, следовательно, принимать оптимальные управленческие решения.

Для исследования экономических процессов применяют и другие виды моделей: регрессионные, имитационные и т. д. В других курсах («Математическое и имитационное моделирование экономических процессов», «Эконометрика») Вы продолжите изучение математического моделирования.

Литература

1. Мицель А. А. Исследование операций и методы оптимизации в экономике. Ч. 1. Лекционный курс [Электронный ресурс] / А. А. Мицель. – Томск, 2016. – 146 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/6474 (дата обращения: 29.05.2017).
2. Мицель А. А. Методы оптимизации : учеб. пособие / А. А. Мицель, А. А. Шелестов. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2004. – 256 с.
3. Одинцов Б. А. Обратные вычисления в формировании экономических решений / Б. А. Одинцов. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 192 с.
4. Грибанова Е. Б. Методы решения обратных задач экономического анализа / Е. Б. Грибанова // Корпоративные финансы. – 2016. – № 1. – С. 119–130.
5. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М. : Юрайт, 2011. – 430 с.

Список сокращений

ЗЛП – задача линейного программирования
ЗО – задача оптимизации
ЗЦП – задача целочисленного программирования
ЛП – линейное программирование
МВГ – метод ветвей и границ
МГ – метод Гомори
МЗП – метод замены переменных
МЗС – метод золотого сечения
МК – метод Коши
ММЛ – метод множителей Лагранжа
МН – метод Ньютона
ОДР – область допустимых решений
ПСМ – последовательный симплекс-метод
СМ – симплекс-метод
СТ – симплекс-таблица
СФ – стандартная форма
ЦЛП – целочисленное линейное программирование
ЦП – целочисленное программирование
ЦФ – целевая функция

Глоссарий

Базисные (или зависимые) переменные – переменные, входящие с единичными коэффициентами в одно уравнение системы ограничений и с нулевыми – в остальные.

Градиент функции $f(x)$ многих переменных в некоторой точке x – это вектор, координатами которого являются частные производные функции в этой точке.

Градиентные методы (методы 1-го порядка) – *методы, в которых используются значения первых производных.*

Задача линейного программирования – задача определения минимума целевой (линейной) функции при заданных ограничениях (линейных).

Математическая модель – это абстракция реального мира, в которой интересующие исследователя отношения между реальными элементами заменены подходящими отношениями между математическими категориями.

Матрица Гессе функции $f(x)$ многих переменных – это матрица вторых производных.

Метод Монте-Карло – метод решения задач с помощью генерирования случайных величин.

Методы 2-го порядка – *методы, в которых используются вторые производные целевой функции* $f(x)$.

Методы прямого поиска (нулевого порядка) – *методы, основанные на вычислении только значений целевой функции.*

Многомерная оптимизация – поиск минимума или максимума функции многих переменных.

Нелинейное программирование – случай математического программирования, в котором целевой функцией или ограничением является нелинейная функция.

Обратные вычисления – метод решения обратных задач путем нахождения приростов аргументов прямой функции на основании её задаваемого значения, начального значения аргументов и коэффициентов относительной важности.

Одномерная оптимизация – поиск минимума или максимума функции одной переменной.

Оптимизация функции – задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области с учетом заданных ограничений.

Регулярный симплекс – симплекс, в котором расстояния между вершинами равны.

Сбалансированная (закрытая) транспортная модель – модель, в которой объем спроса и объем производства равны.

Седловая точка – стационарная точка, не соответствующая локальному экстремуму.

Симплекс (k-мерный) в k-мерном эвклидовом пространстве – *фигура, образованная $k+1$ точками (вершинами), не принадлежащими одновременно ни одному пространству меньшей размерности.*

Стандартная форма задачи линейного программирования – форма, при которой все ограничения имеют форму равенства.

Стационарная точка функции $f(x)$ – *такая точка x^*, в которой производная функции равна нулю.*

Точка глобального минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ – такое число $x^* \in [a;b]$, что $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in [a;b]$.

Точка локального минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ – такое число $x^* \in [a;b]$, что $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in [a;b]$, достаточно близких к x^*.

Транспортная задача – математическая задача линейного программирования о поиске оптимального распределения однородных объектов от поставщиков к потребителям с минимизацией затрат на перемещение.

Унимодальная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ – функция, которая является непрерывной на $[a;b]$, при этом существуют числа x^1 и x^2, удовлетворяющие условию $a \le x^1 \le x^2 \le b$, такие, что:

1) на отрезке $[a;x^1]$ функция $f(x)$ монотонно убывает;
2) отрезке $[x^2;b]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает;
3) при $x \in [x^1;x^2]$ имеем $f(x^*) = f^* = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Целочисленное программирование – раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна.