Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика - 1 семестр
Курс лекций
Учебное пособие

для специальностей
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
09.03.01 « информатика и вычислительная техника»

Томск
ТУСУР
2018

Настоящее электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения лекций на ФСУ (профилирующая кафедра АСУ) группах 447-1,2 и 437-1,2,3 осенью 2017 года.

Оглавление по темам

Оглавление по номерам лекций

ЛЕКЦИЯ № 1. 05.09.2017

Вводная часть. Размерность и свойства распространения различных типов волн. Цунами: по поверхности воды, энергия распределяется по окружности, убывает со скоростью $\frac{1}{R}$. Сейсмические волны: энергия распределяется по сфере в 3-мерных породах, соответственно, убывает со скоростью $\frac{1}{R^2}$. Цунами, при меньшей кинетической энергии, разрушительно на более далёких расстояних, так как убывание энергии медленнее из-за размерности.

Векторы в пространствах различной размерности. Объединение информации о нескольких векторах в прямоугольную таблицу, называемую матрицей. Важность роли матриц в геометрии.

Глава 1. МАТРИЦЫ.

§ 1. Действия над матрицами.

Определение матрицы. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из чисел (либо других объектов, например, функций), содержащая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент обозначается a_{ij}, где i это номер строки, в которой он расположен, а j - номер столбца.

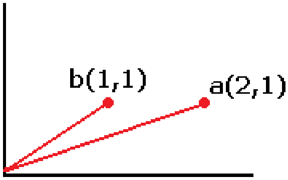
! Обратите внимание: количество строк - это то же самое, что количество элементов в столбце, а количество столбцов равно количеству элементов в строке (заметим, что от каждого элемента 1-й строки начинается столбец, то есть сколько чисел в строке, столько и столбцов).

Если $m = n$, то есть матрица A имеет размер $n \times n$ то она называется **квадратной** матрицей порядка n.

Примеры матриц из жизни:
1. Таблица результатов ЕГЭ по нескольким предметам в группе учеников.
2. Таблица расстояний между каждой парой из n городов.
Кратчайшее расстояние между городами:

	Томск	Новосибирск	Кемерово
Томск	0	205	144
Новосибирск	205	0	204
Кемерово	144	204	0

По главной диагонали 0 , потому что до этого же города расстояние равно 0.
3. Расписание занятий. День недели и номер пары, каждый элемент - номер аудитории в этот день в это время.
4. Шахматная доска, 64 элемента, квадратная матрица порядка 8.
О взаимосвязи матриц с системами векторов.
В плоскости 2 вектора, т.е. каждый имеет по 2 координаты, можно построить матрицу 2 порядка.



Матрица, соответствующая этой векторной системе $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично, если дано 3 вектора в пространстве - можно построить матрицу 3 порядка.

Сложение и вычитание матриц размера $m \times n$.
Эти операции определяются поэлементно, то есть суммируется или вычитается каждая соответствующая пара элементов a_{ij} и b_{ij}.

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

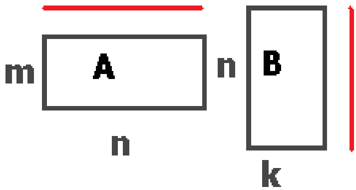
Умножение матрицы на константу определяется следующим образом. В матрице αA все элементы умножены на коэффициент α, то есть равны $\alpha \cdot a_{ij}$.

Транспонирование матрицы. Это довольно простая операция, и она вводится так. Если все пары элементов a_{ij} и a_{ji} поменять местами, то получившаяся матрица называется транспонированной, она обозначается A^T.

Умножение двух матриц.

* Надо вспомнить из школьного курса операцию скалярного произведения двух векторов: $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Если даны две матрицы, одна размера $m \times n$, другая $n \times k$, то их размеры называются согласованными. Такие матрицы можно умножать друг на друга.



Операция умножения матриц определяется следующим образом. Мысленно разобьём первую матрицу на строки, вторую - на столбцы. Для каждой строки 1-й матрицы и каждого столлбца 2-й матрицы определено скалярное произведение. Всего существует $m \times k$ всевозможных скалярных произведений строк (1-й матрицы) на столбцы (2-й матрицы). Именно из них и состоит произведение, это матрица размера $m \times k$

Примеры. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для матриц размеров $m \times n$ и $n \times m$ существуют оба произведения, AB и BA. Но произведение BA в примере выше оказалось бы не матрицей 2 порядка, а 3 порядка, то есть из 9 элементов.

Умножение квадратных матриц.
В этом случае размеры всегда согласованы, и произведение - это тоже матрица $n \times n$.

2 примера: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

обратите внимание, что даже для квадратных матриц далеко не всегда выполняется закон коммутативности, здесь $AB \neq BA$.

Существует такая матрица, которая во множестве матриц обладает свойством, аналогичным 1 во множестве чисел, то есть $AE = EA = A$. Но как мы видели только что, матрица из всех единиц этим свойством не обладает, а вот если единицы только по главной диагонали, а вокруг - нули, то такое свойство будет выполняться.

<u>Единичная матрица</u> E. Строение: $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

2-го порядка: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3 порядка: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(Аналог среди матриц первого порядка: число 1). Итак, $AE = EA = A$.

Свойства действий над матрицами:
Коммутативность: $A + B = B + A$
Свойства, связанные с ассоциативностью:
1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $(AB)C = A(BC)$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Свойства, связанные с дистрибутивностью:
1. $(A + B)C = AC + BC$ 2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ 4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

§ 2. Определители.

Пусть дана матрица 2 порядка. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем квадратной матрицы порядка 2 называется такое число:

$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ (произведение элементов главной диагонали, минус произведение элементов побочной диагонали).

Геометрический смысл: модуль определителя равен площади параллелограмма, сторонами которого являются 2 вектора, координаты которых расположены по строкам (либо столбцам) матрицы.

Если бы мы просто вычисляли площадь параллелограмма, построенного на векторах (2,1) и (1,2), где ни один вектор не расположен вдоль координатной оси, то понадобилось бы найти длину основания, затем высоту. А с помощью определителя, S вычисляется гораздо короче.

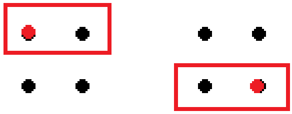
Примеры. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=3$.

поменяем местами строки, изменится знак:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 2=-3$.

Заметим, что при введении определителя, умножаемые элементы всегда расположены так, что 2 из них не находятся в одной строке или в одном столбце. Кстати, кроме главной и побочной диагонали, в матрице порядка 2 таких наборов элементов больше нет.

Если расположить первые n натуральных чисел 1,2,3,..., n в некотором порядке, возможно, не по возрастанию, а перепутать каким-то образом, то они образуют так называемую **перестановку** из n чисел. Каждый набор элементов, которые мы перемножаем в определителе 2 порядка, можно задать с помощью перестановки: главная диагональ (12) побочная диагональ (21). Большой прямоугольник в 1 строке, выбираем из 1 столбца, а когда он спустился во 2 строку, там из 2 столбца. Как на схеме:



таким путём мы как раз и получаем главную диагональ с помощью перестановки (12).

Назовём **инверсией** такую ситуацию, когда большее число в перестановке расположено раньше, чем меньшее. В перестановке (12) инверсий нет, количество инферсий 0, то есть чётно. В перестановке (21) одна инверсия (то есть, их количество нечётно). Число $(-1)^k$, где k - число инверсий, определяет знак соответствующего произведения, участвующего в построении определителя

Лемма. Существует n! перестановок порядка n.

Доказательство. Для n = 2 это очевидно, перестановки только (12) и (21).

Дальше, доказательство по индукции. Пусть теперь для (n-1) этот факт доказан. Рассмотрим для n. На первом месте может стоять любое из n чисел, и при каждой из этих ситуаций, остаётся (n-1) число, которые должны занять (n-1) место, а это возможно (n-1)! способами. Итак, получается $n \cdot (n-1)!$ что как раз равно n!, что и требовалось доказать.

В частности, при n = 3 получается 6 перестановок:

(123) (132) (213) (231) (312) (321)

На первом месте одно из 3 чисел, и при этом оставшиеся 2 числа можно расставить на 2 места двумя способами. Получается 6 способов. Заметим, что 3! = 6.

Определитель 3 порядка. Примеры, методы вычисления.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi\,.$$

В записи определителя 3 порядка $|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$ каждому элементу соответствует перестановка из 3 чисел.
Представьте себе прямоугольник, который сначала в 1-й строке, а затем спускается ко 2-й и 3-й, внутри него вправо и влево может двигаться квадрат, указывающий на какой-то из элементов. Запишем, в каком № столбца взяли элемент, когда находились в 1-й строке, затем так же во 2-й и 3-й. Например, для bfg получится (231):

$$\begin{vmatrix} a & \boxed{b} & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & \boxed{f} \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \boxed{g} & h & i \end{vmatrix}$$

для aei соответствует (123) и т.д. напишем под каждым элементом свою перестановку:
$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$
(123) (231) (312) (321) (132) (213)
Видим, что при этом учтены все возможные перестановки, количество которых 3! = 6. Рассмотрим подробнее, как знак определяется по перестановкам. Обозначим дугой каждую инверсию:

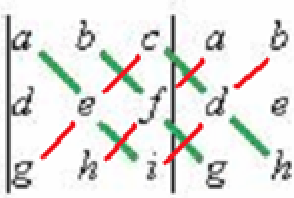
$$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$
$$(123)\ (231)\ (312)\ (321)\ (132)\ (213)$$

Если инверсий нечётное количество (1 или 3), то знак « - », если чётное (0 или 2) то «+». То есть, умножаем на $(-1)^k$, где k - число инверсий. Знак каждого произведения зависит от чётности или нечётности перестановки.

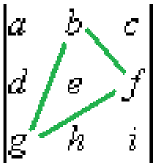
Все рассмотренные наборы элементов, которые перемножаются между собой, обладают тем свойством, что никакие 2 из них не находятся в одной и той же строке либо одном и том же столбце. Таких наборов всего 6, и они все учтены. А для матрицы порядка 2 таких наборов всего 2, поэтому там определитель состоит всего из 2 слагаемых. Почему же они не могут быть в одной строке или столбце? Ответ простой: ведь перестановка состоит из разных чисел, то есть там нет одинаковых на двух местах, поэтому из одного и того же столбца 2 раза мы не выберем. Из одной строки тем более: находясь в некоторой строке, мы выбираем элемент только 1 раз.

Для матрицы 4 порядка потребуется найти все четвёрки элементов, так чтобы никакие два не оказывались в одной строке или одном столбце. Их будет 24 = 1*2*3*4 = 4!

Запомнить метод вычисления определителей 3 порядка легче всего с помощью произведений по 3 параллельным линиям.



Надо дописать копии 1 и 2 столбца справа, и соединить по 3 параллельных линии: главная диагональ и параллельные ей (показаны зелёным цветом), затем побочная диагональ и параллельные ей (показаны красным). Умножить тройки чисел по 3 зелёным линиям, и взять их со знаком «+» а по красным прибавить со знаком «—». (Кстати, вместо столбцов справа можно дописать две строки снизу, и получится то же самое).
Примечание. Можно запомнить и с помощью треугольников, например, bfg соответствует



Это один из двух треугольников, для которого главная диагональ - это средняя линия. Второй такой треугльник это cdh.

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 1*2*4 + 1*3*0 + 2*0*1 — 0*2*2 — 1*3*1 — 4*0*1 = 8 — 3 = 5.

Основные свойства определителей и их геометрический смысл.
Свойство 1)
При транспонировании определитель не меняется: $|A| = |A^T|$.

Свойство 2) Если строка или столбец матрицы состоит из нулей, то $|A| = 0$.

Геометрический смысл: Если в системе векторов есть 0 - вектор, то объём параллелепипеда равен 0.

Свойство 3) Если поменять местами любые две строки (или два столбца), то $|A|$ сменит знак.

Это связано с тем, что при смене мест 2 элементов в перестановке меняется чётность: одна инверсия появится или наоборот, исчезнет.

Свойство 4) Если матрица содержит две одинаковых (или пропорциональных) строки или столбца, то $|A| = 0$.

Доказывается из предыдущего свойства: если в матрице две одинаковые строки, то меняя их местами, мы изменим знак, но они же одинаковы, поэтому $|A|$ не должен измениться. Тогда $|A| = -|A|$, то есть $|A| = 0$. Для пропорциональных то же самое, так как можем сначала вынести коэффициент за знак определителя, и строки станут одинаковыми, а тогда $|A| = 0$.

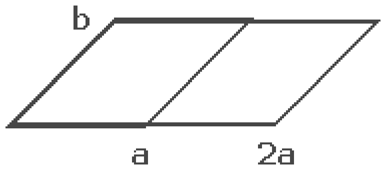
Геометрический смысл. Если два ребра параллелепипеда коллинеарны, то фигура станет плоской, объём = 0.

ЛЕКЦИЯ № 2. 12.09.2017

Свойство 5) Если A, B две квадратные матрицы, то $|AB| = |A||B|$.

Свойство 6) Если любую строку (столбец) матрицы умножить коэффициент c, то $|A|$ увеличится в c раз.

Идея доказательства: если в каждом произведении элементов один из них умножен на c, то вся сумма, состоящая из таких слагаемых, также увеличится в c раз.
Это свойство даёт возможность выносить общий множитель за знак определителя из какой-либо строки. Геометрический смысл: Если умножить на коэффициент даже один из векторов, образующих параллелограмм, то площадь параллелограмма умножится на этот коэффициент.



Если умножить не один, а оба вектора, то площадь увеличится в c^2 раз. Для 3 векторов в пространстве и параллелепипеда, если умножить каждый вектор на c, то объём вырастет в c^3 раз.
Следствие: 6а) $|cA| = c^n|A|$.

Свойство 7) Если все элементы какой-либо строки представлены в виде сумм двух элементов:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & g \end{vmatrix}.$$

то данный определитель равен сумме двух определителей, где в первом из них в этой строке - первые слагаемые, а во втором - вторые (все остальные строки в обоих определителях без изменения).
Доказательство проведём для произвольных матриц 2-го порядка. (для n аналогично).

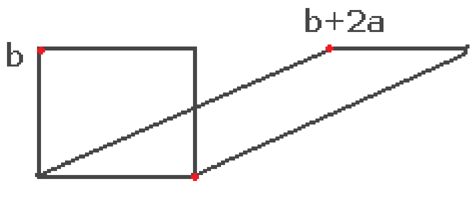
$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & g \end{vmatrix}.$$

действительно: $(a+b)g-(c+d)e = ag+bg-(ce+de) =$
$ag-ce+bg-de$.
Для матриц большего порядка, аналогично, в любом из n! слагаемых по n элементов, какой-то один окажется суммой двух чисел, в итоге каждое слагаемое распадётся на два, и в сумме будет 2 n! слагаемых, где одни n! образуют 1-й определитель, а другое n! - второй.

Свойство 8). Если к любой строке прибавить другую строку, домноженную на число, $|A|$ не изменится.

Доказательство. Если в предыдущем свойстве в роли вторых элементов взяты элементы другой строки этой же самой матрицы, домноженные на коэффициент k, то:

$\begin{vmatrix} a+ke & b+kg \\ e & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ke & kg \\ e & g \end{vmatrix}$ тогда во 2-м определителе строки пропорциональны, он равен 0. То есть мы видим, что если к одной строке прибавить строку, кратную какой-то строке из этой же матрицы, определитель не изменится.
Это важное свойство даёт возможность преобразовывать и упрощать матрицы в процессе вычисления определителей.
Замечание. Очевидно, что можно не только прибавить, но и отнять от строки строку, ведь мы можем домножить на коэффициент -1.
Геометрический смысл. Если к вектору b прибавить вектор a, умноженный на любой коэффициент, то площадь параллелограмма не изменится, основание и высота остались старыми, см. чертёж:



Здесь площадь параллелограмма, образованного векторами a,b такая же, как для образованного векторами a, b+2a.
Из свойства 8 следует, что строки можно складывать и вычитать, на этом основан метод Гаусса приведения к треугольной форме.

Важно! Определитель не меняется (св-во 8), если умножать строку в уме (в буфере обмена) и затем, уже кратную, прибавлять к какой-либо другой. Если же просто умножать строку, которая находится в матрице, то определитель умножится на коэффициент (свойство 6). Это совершенно разные операции, не надо их путать.

Следствие 8 а). Если какая-либо строка матрицы является суммой других строк, то $|A| = 0$.

Идея доказательства: Если третья строка есть сумма первой и второй, то вычитая 1-ю и 2-ю из неё, получим строку из нулей.

Пример. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ приведением к треугольной форме.

Заметим, что ниже углового элемента (1) число 2. Поэтому из 2-й строки вычтем 1-ю, умноженную на 2. Т.е.вычесть надо строку (2 6).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2-2 & 7-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Пример Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ методом Гаусса

(приведением к треугольной форме).

Применим свойство 8. Постараемся обнулить все элементы ниже a_{11}.

Из 2-й строки вычтем 1-ю строку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

Теперь из 3-й вычтем удвоенную 1-ю, будет $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

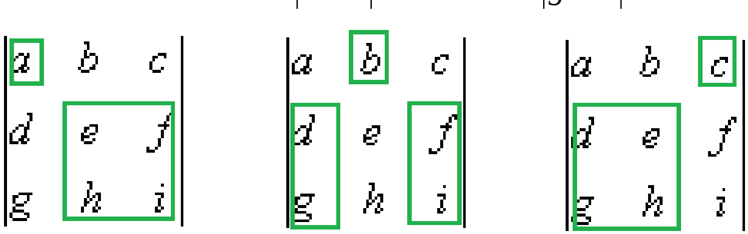
Чтобы завершить приведение к треугольному виду, вычтем из 3-й строки удвоенную 2-ю, получится $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. А теперь просто найдём произведение чисел по диагонали, так как привели к треугольной форме. Определитель равен 2. Ответ: 2.
Этот метод особено будет нужен в теме «системы уравнений», но, как видим, помогает и при вычислении определителей.

Взаимосвязь определителя большего порядка и меньшего порядка. Разложение по строке.
Запишем разложение определителя порядка 3.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi .$$

Вынесем за скобку элементы первой строки (они есть в 2 из 6 слагаемых): $a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg)$.
То, что получилось в скобках, называют алгебраическими дополнениями элементов соответственно a, b, c.
Выражение в 1-й скобке $(ei - fh)$ называется алгебраическим дополнением к элементу a, соответственно $(fg - di)$ - алгебраическим дополнением к b, $(dh - eg)$ - алгебраическим дополнением к c.

Заметим, что $ei - fh = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, $fg - di = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$, $dh - eg = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.



Если для элемента a_{ij} и вычеркнуть всю строку и весь столбец, где он находится, образуется подматрица порядка (n-1). Определитель подматрицы порядка (n-1), которая получилась путём вычёркивания строки номер i и столбца номер j, называется **дополняющим минором** к элементу a_{ij}. Всего таких миноров n^2, например для матрицы 3 порядка их будет 9 штук. Минор, соответствующий элементу a_{ij}, обозначается M_{ij}.

Мы видим, что в одних случаях алгебраическое дополнение равно минору, а где-то противоположно ему по знаку. Взаимосвязь алгебраических дополнений и миноров для произвольных i,j:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, то есть знаки меняются в шахматном порядке, для верхнего левого элемента a_{11} знак «+».

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Итак, определители можно вычислять разложением по строке:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Общая запись в произвольных обозначениях:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Разложение возможно по любой строке или по любому столбцу. Так, например, в той же рассмотренной ранее записи можно собрать пары слагаемых, содержащих d, e, f и точно так же вынести за скобку, получится $aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi =$

$d(ch - bi) + e(ai - cg) + f(bg - ah) =$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$ здесь чередование знака начинается с минуса, что и должно быть в соответствии с шахматным порядком, о чём сказано выше.

Лемма. Если матрица треугольная, то $|A| = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Доказательство.

Пусть дан определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Если разложить его по первому столбцу, где всего один ненулевой элемент и остальные $n-1$ нулей, то сразу переходим к минору меньшего порядка:

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \ldots + 0.$$

для него получается аналогичное действие, тогда на следующем шаге получаем $a_{11}a_{22}$ умножаются на определитель треугольной матрицы, у которой угловой элемент a_{33}. Продолжая этот процесс, получим $|A| = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Замечание. Для диагональных матриц верен такой же факт, ведь диагональная это частный случай треугольной.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Приведение к треугольному виду очень часто используется для вычисления определителей. Метод Гаусса, который будет подробно изучен в теме «системы уравнений», в полной мере может применяться и для вычисления определителей. Если обнулить элементы ниже главной диагонали, то вычисление определителя сильно упростится.

§ 3. **Обратная матрица.**

Определение. Матрица называется вырожденной, если $|A| = 0$, и невырожденной, если $|A| \neq 0$.

Определение. Пусть A, X - квадратные матрицы. Если $AX = XA = E$ то X называется **обратной** матрицей для матрицы A.
Обозначение: Обратная матрица обозначается A^{-1}.

Замечание. Для чисел, которые являются матрицами порядка 1, обратный элемент вычисляется известным образом, например $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $c^{-1} = \frac{1}{c}$.

Итак, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Но оказывается, что не для любой квадратной матрицы существует обратная.
Лемма. Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда А невырожденная.
Доказательство. Для доказательства рассмотрим
$|AX| = |A||X| = |E| = 1$. Если $|A| = 0$ то $|A||X| = 0c = 1$, то есть существовало бы такое число, которое при умножении на 0 даёт результат 1, но это невозможно. Получили противоречие.

Формула вычисления элементов обратной матрицы: $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$.

Алгоритм нахождения A^{-1}, .
1. Проверить невырожденность с помощью определителя.
2. Составить матрицу из дополняющих миноров M_{ij}.

3. Изменить знаки в шахматном порядке, то есть домножить на $(-1)^{i+j}$, где i,j - номера строки и столбца.
Получатся алгебраические дополнения A_{ij}.
4. Транспонировать полученную матрицу.
5. Поделить на определитель исходной матрицы.

Пример. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. Вывод: $|A| \neq 0$, существует обратная матрица.

Матрица из миноров: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица из алг. дополнений: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Транспонируем её: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Делим её на определитель, и записываем ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Можно сделать проверку: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

Решение. 1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$. $|A| \neq 0$, существует A^{-1}.

2) Запишем матрицу, состоящую из всех возможных миноров 2×2, которых существует 9 штук: $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Матрица из алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(т.е. в шахматном порядке изменили знаки, там где сумма номеров строки и столбца нечётна).

Транспонируем её: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Делим на определитель, равный 2,

итог: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Докажем, что не существует различных «обратной слева» и «справа» матриц. Так как коммутативность в общем случае не выполняется, то вовсе не очевидно, что обратная матрица единственна, ведь можно предположить, что левая обратная и правая обратная - различны.

Лемма. Если $XA = E$ и $AY = E$, то $Y = X$.
Доказательство. Пусть $XA = E$ и $AY = E$. По закону ассоциативности, можно записать такое равенство: $X(AY) = (XA)Y$. Но тогда получается $XE = EY$, то есть $Y = X$.

ЛЕКЦИЯ № 3. 19.09.2017

§ 4. **Ранг матрицы.**

Для прямоугольных матриц не существует понятие определителя, однако там можно выбирать квадратные подматрицы, и для них определитель вычислить можно. Если задать какие-нибудь k номеров строк и k номеров столбцов, то на пересечениях, очевидно, получится минор из k^2 элементов. Он может быть вырожденным либо нет. Существует минор максимального порядка, который является невырожденным. Его порядок и называется рангом матрицы.

Определение. Порядок наибольшего невырожденного минора называется рангом матрицы.
Обозначается $r(A)$. Примеры:

Матрица размера 3×4 ранга 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Здесь есть

невырожденный минор порядка 2, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Миноры 3 порядка можно рассматривать не все, достаточно только окаймляющие, то есть содержащие уже найденный минор меньшего порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

поэтому ранг не равен 3, а остаётся равен 2, так как минор 2 порядка уже найден. Миноров 4 порядка в этой матрице нет, так как всего 3 строки. Итак, $r(A) = 2$. Цветом закрашен базисный минор.

Ранг прямоугольной матрицы размера $m \times n$ меньше или равен, чем минимальное из чисел m, n. Причина: минор более высокого порядка в этой матрице просто не существует, ведь размер вписанного квадрата не может превышать ни длину, ни ширину прямоугольника, в который вписан этот квадрат.

Пример. Матрица ранга 1. Здесь все строки пропорциональны 1-й.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица А является матрицей ранга 0 $\Leftrightarrow$ она состоит только из нулей (очевидно, что если в матрице есть хоть один элемент, не равный 0, то он уже является минором 1 порядка, то есть ранг не 0, а уже 1).

Метод элементарных преобразований для нахождения ранга.
Бывает лучше упростить матрицу, чтобы видеть, какие миноры равны 0 или не равны 0. Как и при вычислении определителей, можно прибавлять к строке другую строку, умноженную на число, то же самое со столбцами. Но при нахождении ранга даже больше возможных действий, чем при вычислении определителя: можно менять местами строки (столбцы), умножать строки (столбцы) на коэффициент. Дело в том, что соответствующие миноры в этом случае меняют знак или умножаются на с, но ведь свойство быть равными 0, либо не равными 0, от этого не меняется!
Если число $M \neq 0$, то $-M \neq 0$ и $cM \neq 0$.
Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \text{из 2-й строки вычесть 1-ю, а из 3-й удвоенную 1-ю.}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

теперь из 3-й строки вычтем 2-ю $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ниже главной диагонали получились нули.

$$\left(\begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ \hline \end{array}\right)$$

Теперь лучше видно базисный минор порядка 3. Ранг = 3. Если бы оказалось, что последняя строка состоит из нулей, то тогда был бы ответ ранг матрицы = 2.

Ранее упоминали, что матрицы естественным путём связаны с системами векторов.

Определение. Пусть $\{a_1,..., a_n\}$ - система векторов. $\alpha_1,..., \alpha_n \in R$ - константы. Тогда вектор $b = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$ называется линейной комбинацией векторов $\{a_1,..., a_n\}$.

(А если все коэффициенты = 1, то это просто сумма векторов).

Пример. $a_1 = (1,1,1), a_2 = (1,2,3)$. Пусть коэффициенты 2 и 1. Линейная комбинация это вектор (3,4,5):

2(1,1,1)+1(1,2,3) = (3,4,5).

В пространстве, рассмотрим 3 вектора: (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1). Любой вектор 3-мерного пространства можно представить как линейную комбинацию этих трёх векторов.

* Если все коэффициенты 0, то линейная комбинация есть 0 вектор в любом случае, какими бы ни были векторы.

* Допустим, что взяты векторы (1,0) и (-1,0). Если их сложить, то получим (0,0). Видим, что бывают ситуации, когда линейная комбинация ненулевых векторов - это нулевой вектор, даже если ненулевые коэффициенты! Аналогичная ситуация, если вектор c есть a+b, тогда a+b-c = 0. В связи с этим возникает определение линейно-зависимой и линейно-независимой системы векторов.

Определение. Если из равенства $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0$ следует, что $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_n = 0$, то система векторов называется линейно-независимой системой (ЛНС). Если же существует набор ненулевых коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_n$, такой, что линейная комбинация = 0, то система называется линейно-зависимой системой (ЛЗС).

Примеры. * Если вектор c есть a+b, тогда a+b-c = 0. Коэффициенты 1,1,-1.
* если 2 вектора коллинеарны, то они образуют ЛЗС.
* если нулевой вектор принадлежит системе, то она ЛЗС. Это доказывается так: коэффициент при 0-векторе может быть любым числом, т.к. он всё равно не влияет на сумму векторов, а значит, существует набор коэффициентов, в котором не все нули, и значит, формально по определению такая система векторов ЛЗС.

Теорема. Система линейно зависима $\Leftrightarrow$ хотя бы один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.
Доказательство.
Необходимость. Если система ЛЗС, то $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0$, при этом хотя бы при каком-то векторе ненулевой коэффициент, тогда это слагаемое можно перенести в другую сторону и разделить всё равенство на этот коэффициент. Для определённости, например, пусть это будет n-й коэффициент. Тогда $-\alpha_n a_n = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_{n-1} a_{n-1}$, и $a_n = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_n} a_1 - ... - \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} a_{n-1}$, последний вектор выражен через остальные.

Достаточность. Если какой-то вектор выражен через остальные, его можно перенести в другую сторону равенства, ко всем остальным векторам, то есть в записи $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0$ ему будет соответствовать коэффициент (-1).

Так, если выражен 1-й вектор, то $a_1 = \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$, тогда $-1a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0$. Получается, что ненулевой набор коэффициентов есть, а значит, система ЛЗС.

Определение. Максимальная линейно-независимая подсистема называется **базисом системы** векторов, а число векторов в ней - **рангом системы** векторов.
Пример. Если в плоскости есть 2 неколлинеарных вектора, и добавлены 100 векторов в той же плоскости, r = 2.
* 3 вектора, из которых 2 коллинеарны. Ранг = 2.
* 3 вектора, из которых все 3 коллинеарны. Ранг = 1.

Как видим, было 2 подхода к понятию ранга: ранг системы (число векторов в максимальной независимой подсистеме) и ранг матрицы (порядок наибольшего невырожденного минора). На самом деле, не случайно используется одно и то же слово: если матрицу мысленно разрезать на строки, будет система векторов, и у неё ранг точно такой же, как был у исходной матрицы. Аналогичное верно и для системы столбцов.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен рангу системы её строк (столбцов).

§ 5. Элементы векторной алгебры.

Скалярное, векторное, смешанное произведение.
Скалярное произведение $(a,b) = a_1 b_1 + ...a_n b_n$ хорошо известно из школьного курса. А сейчас мы научимся с помощью матриц и определителей находить общий перпендикуляр для пары векторов.
Векторное произведение.
Определение. Вектор c называется векторным произведением векторов a, b, обозначается $c = [a,b]$, если выполнены 3 условия:
1) $c \perp a$, $c \perp b$.

2) Векторы a,b,c образуют правоориентированную тройку, то есть с конца вектора c кратчайший поворот от a к b виден против часовой стрелки.

3) $|c| = S$ параллелограмма, образованного парой векторов a,b, то есть $|c| = |a||b|\sin\varphi$.

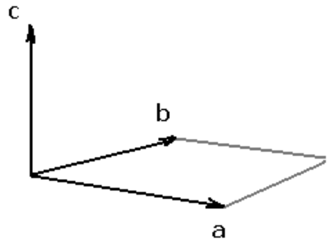


Таблица свойств скалярного и векторного произведений: сходство и различия.

$(a,b)=(b,a)$	$[a,b]=-[b,a]$
$(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$	$[a,b+c]=[a,b]+[a,c]$
$(\alpha a,b)=\alpha(a,b)$	$[\alpha a,b]=\alpha[a,b]$
$(a,a)=\|a\|^2$	$[a,a]=0$
$(a,b)=\|a\|\|b\|\cos\varphi$	$\|[a,b]\|=\|a\|\|b\|\sin\varphi$

Метод нахождения векторного произведения с помощью определителя: Можно записать в 1-ю и 2-ю строку исходные два вектора, в третьей строке добавить произвольные обозначения осей e_1, e_2, e_3, и вычислить этот определитель.

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3$. Миноры порядка 2 вычислятся, эти числа как раз и будут координатами c_1, c_2, c_3 нового вектора, который является векторным произведением.

Пример. Найти векторное произведение векторов (1,1,1) и (1,2,3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 1e_1 - 2e_2 + 1e_3 = (1,-2,1).$$ Ответ (1,-2,1).

Также можно проверить, что он действительно перпендикулярен исходным векторам (скалярно умножить на 1-й или на 2-й вектор, получим 0).

Примечание. Определитель можно вычислять либо разложением по 3-й строке, либо ранее известными методами, в том числе добавить копии двух первых столбцов справа.

Смешанное произведение. Определеятся так: $(a,b,c) = ([a,b],c)$.

Этот объект корректно определён и существует: векторное произведение первой пары есть какой-то вектор, и его можно скалярно умножить на ещё один, третий вектор, в итоге получится константа.

Смешанное произведение вычисляется с помощью определителя так:

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Обоснование: Если рассмотреть разложение этого определителя по третьей строке, то получится

$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$, то есть 1-я координата векторного произведения $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ как раз и умножается на 1-ю координату вектора c, 2-я на 2-ю и т.д. то есть это и есть $([a,b],c)$.

Геометрический смысл: объём параллелепипеда, образованного тремя векторами.

Глава 2. Системы линейных уравнений.
§ 1. Введение, основные методы решения.

Произвольная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

система из m линейных уравнений с m неизвестными.

Примечание. Не обязательно все n переменных есть в каждом уравнении, в некоторых какие-то могут быть пропущены, то есть коэффициенты a_{ij} = 0.

Уравнения здесь называются линейными потому, что все неизвестные именно в первой степени, то есть нигде не возводятся в квадрат, не умножаются между собой, не извлекается корень и т.д.

Если при этом ещё и все $b_i = 0$, то система называется **однородной**.

Решением системы называется такой набор констант $\alpha_1,..., \alpha_n$, что при подстановке их вместо $x_1,..., x_n$ во всех уравнениях получатся тождества. Можно представлять также и в виде вектора $\overline{\alpha}$.

Обычный, матричный и векторный виды записи системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Основная (А) и расширенная матрица (С).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Если существует хотя бы одно решение (то есть набор x_i, обращающий в тождества все уравнения) то система называется **совместной**, а если решения не существует, то **несовместной, или противоречивой.**

Слово «совместная» система означает, что уравнения совместны между собой, не противоречат друг другу. Примеры:

Совместная: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ есть решение (1,1).

Несовместная $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$ если вычесть из 2-го уравнения удвоенное первое, получим противоречие: 0=2. А вот если в правой части 2-го уравнения было бы 4, а не 6, то система была бы совместной.

Определение. Если решение системы линейных уравнений единственно, то она называется **определённой,** если не единственно, то **неопределённой.**

Определённая: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ экв. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ решение (1,1).

Неопределённая: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ Решения: (1,1) или (2,0) или (0,2) или (3,-1) или (4,-2), их бесконечно много. Фактически 2-е уравнение лишнее, а из 1-го следует $x_2 = 2 - x_1$. Что бы мы ни подставляли вместо x_1, найдётся x_2. Единственного точного решения как такового здесь нет, их бесконечно много. Запись $x_2 = 2 - x_1$ здесь называется **общим решением**, а переменная x_1, которую перенесли вправо и можем свободно задавать - **свободной переменной.**

Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы уравнений. Система линейных уравнений совмстна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(C)$ (ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы).

Замечание. Вообще, при добавлении нового столбца ранг может или остаться прежним, или увеличиться на 1.

Идея доказательства. Если вектор b (вспомним векторный вид системы) является линейной комбинацией столбцов матрицы А, то существуют x_i - коэффициенты, и решение существует, а если он не является линейной комбинацией столбцов матрицы А, то x_i не существует, и решения нет.

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ или } x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 = \overline{b}\ .$$

ЛЕКЦИЯ № 4. 26.09.2017

Рассмотрим систему и её расширенную матрицу:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$, $C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Если рассматривать основную матрицу (до черты) там ранг = 1, потому что во 2-й строке только нули. А если всю расширенную матрицу, то там есть невырожденный минор 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Ранги основной и расширенной матриц не совпадают.

Геометрический смысл при n=2.

Рассмотрим систему из 2 уравнений и 2 неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Её геометрический смысл. Каждое из уравнений задаёт некоторую прямую в плоскости. Прямые могут:

1. пересекаться в одной точке (решение единственно), в этом случае система совместная и определённая.
2. совпадать (решений бесконечно много), в этом случае система совместная, но неопределённая.
3. быть параллельны (нет решений) - система несовместна.

Методы решения систем с квадратной основной матрицей.

1) Матричный метод.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, или $A\overline{x} = \overline{b}$. Слева домножим обратную матрицу:

$A^{-1}A\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, то есть $E\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, то есть $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$. Получается, что все x_i можно найти так: умножить обратную матрицу на правую часть.

Пример. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$.

Матричный вид системы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, обратную матрицу для этой матрицы ранее находили, это $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Тогда

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, $x_1 = 1, x_2 = 1$.

2) Метод Крамера.

Пусть А - основная матрица системы линейных уравнений. Если удалить какой-либо i-й столбец основной матрицы и внести на это место правую часть, то получится некая новая квадратная матрица, обозначим её A_i. Тогда верны следующие формулы для x_i. $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ для каждого i от 1 до n.

Доказательство формул Крамера

Запишем матричное равенство $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, учитывая структуру обратной матрицы:

$\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots \\ A_{12} & A_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \end{pmatrix}$ тогда $x_1 = \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + ..b_nA_{n1}}{|A|}$ как видим, алгебраические дополнения здесь именно к элементам 1-го столбца, и умножаются они на b_i , то есть, как если бы вместо 1-го столбца была поставлена правая часть системы. Аналогично и для остальных номеров переменных.

Рассмотрим на примере той же самой системы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Эти два способа используются чаще для матриц 2 и 3 порядка, и они очень трудоёмкие, если матрица порядка 4 и больше. Поэтому изучим метод Гаусса:

3) Метод Гаусса.

Метод состоит в преобразовании основной матрицы к треугольному виду. Можно последовательно обнулить элементы ниже углового a_{11}, вычитая из других уравнений 1-е, домноженное на коэффициент $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ (для каждой строки разные). Теперь x_1 будет только в первом уравнении, в других нет. Затем так же точно можем обнулить всё ниже чем a_{22}, вычитая из каждой строки 2-ю с соответствующим коэффициентом. Кстати, при этом нули, уже расположенные слева, не изменятся. Затем обнулим все элементы ниже a_{33}, ниже a_{44}, и так далее. В итоге для основной матрицы системы получится треугольный вид: нули везде ниже главной диагонали. При преобразованиях можно работать с расширенной матрицей, а не системой, чтобы не переписывать каждый раз n^2 букв «x». Обратите внимание, что правая часть подвергается тем же преобразованиям, что и вся строка, где находится этот b_i.

После преобразований надо восстановить полную запись системы с неизвестными, но в ней уже будет хорошее свойство: чем ниже уравнение, тем меньше переменных, а в последнем вообще одна лишь x_n. Это и позволит нам сначала выразить x_n, затем с этой известной информацией подняться в предпоследнее уравнение, и найти x_{n-1}, и так дажее до 1-го уравнения, где найдём x_1.

Пример. $\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =6 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{array}\right\}$ Преобразования расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала из 2-й строки вычли 1-ю, а из 3-й удвоенную 1-ю.
На втором этапе, к 3-й прибавили 2-ю.
Система после преобразований:

$\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ & x_2 & +2x_3 & =3 \\ & & +x_3 & =1 \end{array}\right\}$, из последнего $x_3 = 1$, подставляем в предпоследнее, будет $x_2 + 2 = 3$, то есть $x_2 = 1$. Далее, уже известные x_2 и x_3 подставми в первое уравнение, и получим $x_1 = 1$.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, или $\bar{x} = (1,1,1)$.

Некоторые особенности решения систем уравнений методом Гаусса.

1) Допустим, 1-й элемент в следующей строке не кратен угловому элементу, например: $\begin{cases} 3x_1 + \ldots \\ 5x_1 + \ldots \end{cases}$

Вообще, можно отнять от 2-й строки 1-ю, домноженную на 5/3.
Однако чтобы избежать вычислений с дробями, можно сначала умножить всю 2-ю строку на 3, получится $\begin{cases} 3x_1 + \ldots \\ 15x_1 + \ldots \end{cases}$ и затем уже можно работать только с целыми коэффициентами.

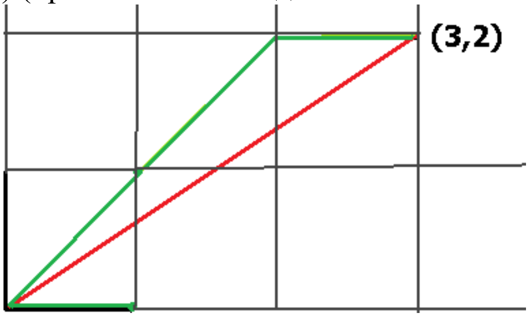
2) Если угловой элемент основной матрицы уже 0, то есть нет x_1 в первом уравнении. Тогда вычитание 1-й строки из других строк не изменит элементы ниже углового a_{11} и не позволит приводить матрицу системы к треугольному виду в итоге. Однако проблема

решается элементарно: сначала нужно поменять местами 1-е уравнение с каким-то из следующих, где есть элемент x_1. Желательно с тем, где оно с коэффициентом, равным 1, чтобы затем вычитать только строки, кратные первой. Таким образом, метод Гаусса очень устойчив, и может выполняться, даже когда в матрице угловой элемент был 0.

Применение систем уравнений: координаты в новом базисе.
Любой вектор можно выразить не только как комбинацию базисных векторов, расположенных на осях, например (1,0) и (0,1), но и как комбинацию какой-то другой линейно-независимой системы.

Так, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, в ведь то же время и $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В декартовом базисе координаты (3,2) (пройти 3 шага вправо и 2 вверх), а в новом базисе, состоящем из векторов (1,1) и (1,0) координаты (2,1) (пройти 2 шага по диагонали и 1 шаг вправо).



Найти новые координаты можно так. Запишем их сначала как неизвестные в векторном равенстве:

$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ а это очевидно, преобразуется к системе:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 2 \end{cases}$. Ответ: координаты (2,1).

Матрица, где векторы нового базиса записаны по столбцам, а именно $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ для этого примера, называется **матрицей перехода** от старого к новому базису, обозначается C. Именно она и есть основная матрица системы, которую надо решить. Правая часть это старые координаты. Верно равенство $C\bar{x} = \bar{b}$, т.е. новые координаты можно найти и так: $\bar{x} = C^{-1}\bar{b}$ умножив обратную матрицу на старые координаты. Впрочем, это то же самое, что решить систему с квадратной матрицей матричным методом.

Неоднородные системы с произвольной матрицей.

В общем случае, основная матрица системы не квадратная, а прямоугольная. При этом базисный минор порядка r, где $r \le n, r \le m$. Возможно, что ранг даже и строго меньше, $r < n, r < m$.

Если ранг основной матрицы меньше, чем число неизвестных, т.е. $r(A) < n$, то система неопределённая, так как есть столбцы, не входящие в базисный минор, эти неизвестные переносятся вправо.

Если $r < m$ (ранг меньше числа неизвестных) то в процессе преобразований методом Гаусса получатся $m - r$ строк, состоящих из нулей. Уравнения, соответствующие им, в системе уравнений не несут никакой информации: $0x_1 + ... + 0x_n = 0$. Такие уравнения просто вычёркиваются.

А если $r < n$ т.е. ранг меньше числа неизвестных (то есть базисный минор не заполняет всю матрицу до правого края), $n - r$ переменных нужно перенести вправо в каждом уравнении (они называются **свободными** переменными), а r базисных переменных оставить слева. Фактически, при этих действиях мы стремимся к тому, чтобы слева получить именно квадратную матрицу (порядка r), причём она уже будет приведена к треугольному виду, и можно будет выражать неизвестные $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$ поочерёдно. Но в отличие от определённых систем, справа в это время не просто константы, а блоки, состоящие из констант и свободных неизвестных. Итак, r переменных будут не конкретными числами, а функциями от последних $n - r$ переменных. Совокупность таких выражений называется ОБЩИМ РЕШЕНИЕМ.

Если присвоить какие-либо значения свободным переменным и вычислить r базисных, то получим тогда уже конкретный набор из n чисел, это называется ЧАСТНЫМ РЕШЕНИЕМ. Частных решений может быть бесконечно много, потому что присваивать свободным неизвестным можно любые действительные значения.

Общее и частное решение.

Пример.

Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$.

Запишем расширенную матрицу и преобразуем её методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из 2-й строки отняли 1-ю, из 3-й удвоенную 1-ю. Замечаем, что 2 и 3 строка одинаковы, вычитаем из 3-й 2-ю, и 3-я строка получилась состоящей из 0. Это уравнение $0 = 0$, очевидно, его можно вычеркнуть. Базисный минор 2 порядка можно найти в левом верхнем углу. Здесь m = 3, n = 4, r = 2.

Обратите внимание. Типичной и характерной ошибкой является то, что вычёркивают обе пропорциональных строки, а не одну. Но если провести алгоритм Гаусса до конца, то видно, что одна из них остаётся и несёт содержательную информацию, а её копия лишняя, она обратилась в 0. Не нужно торопиться и вычёркивать все пропорциональные строки, ведь хотя бы одна из них не лишняя!

Развернём две оставшихся строки снова в систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Здесь перенесём x_3 вправо, 3-я переменная - свободная, базисный минор в левом углу. Замечание. Впрочем, это не единственный вариант: базисный минор можно составить из фрагментов 1 и 3 столбца, тогда x_2 была бы свободная. Итак, перенесём x_3 :

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - x_3 \\ x_2 = 3 - 2x_3 \end{cases}$ Основная матрица системы фактически стала квадратной, 2 порядка, т.е. множество коэффициентов при базисных переменных образует такую квадратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Просто справа при этом не только константы, а составные выражения из констант и каких-то параметров. Видно, что x_2 уже и так выражена, $x_2 = 3 - 2x_3$. Подставим это выражение в 1-е уравнение, чтобы выразить отдельно x_1 через x_3.

$x_1 + (3 - 2x_3) = 3 - x_3$ в итоге $x_1 = x_3$. Итак, $\{x_1 = x_3, x_2 = 3 - 2x_3\}$ - общее решение. В нём есть один свободный параметр x_3.

Его можно записать также и в виде такого вектора: $(x_3, 3 - 2x_3, x_3)$.

Если задавать любое $x_3 \in R$, будет получать тройки чисел, которые служат частными решениями.

Например, при $x_3 = 1$ получим (1,1,1). При $x_3 = 0$ получим (0,3,0).

Частных решений бесконечно много.

* Свободных неизвестных $n - r$. Как правило, это последние, но не факт: всё зависит от строения системы. Если, например, 2-й столбец кратен первому, то базисный минор не удастся выбрать в левом верхнем углу, а только с разрывом через второй столбец, тогда 2-й столбец не будет базисным, тогда x_2 - свободная пременная, а не базисная.

Теорема (о наложении решений).

Если даны 2 системы уравнений с одной и той же основной матрицей, отличающиеся лишь правой частью, $\overline{x}$ - решение системы с правой частью $\overline{b_1}$, а вектор $\overline{y}$ - решение соответствующей системы с правой частью $\overline{b_2}$, тогда $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}$ является решением третьей системы, где правая часть $\alpha\overline{b_1} + \beta\overline{b_2}$.

Доказательство. Дано $A\overline{x} = \overline{b_1}$, $A\overline{y} = \overline{b_2}$, тогда

$A(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y} = \alpha\overline{b_1} + \beta\overline{b_2}$.

Пример. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ - две системы с одной той же основной матрицей. Решение первой (1,1), для второй (1,2).
Если образуем третью новую систему, в которой в правой части поставим сумму,
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ сумма тех двух решений будет для неё решением: (2,3).

§ 2. Системы линейных однородных уравнений.

Если в каждом уравнении правая часть $b_i = 0$, такая система называется однородной.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 & \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Расширенная матрица содержит столбец, состоящий только из 0, то есть ранг расширенной матриц точно не больше, чем ранг основной! По теореме Кронекера-Капелли получается, что однородная система всегда совместна, то есть существует хотя бы одно решение.
Заметим, что при подстановке всех 0 вместо неизвестных, $x_i = 0$, все равенства автоматически выполняются, т.е. нулевое решение для такой системы всегда существует. Оно называется тривиальным решением. Тривиальное решние может быть не единственным, возможно, есть ещё какие-то наборы чисел, которые можно подставить в систему. Основной задачей для однородных систем как раз и является поиск ненулевых решений.
Нетривиальные решения есть, например:
$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ решения (1,1), (2,2), и т.д.
Любое (C,C) для $C \in R$ есть решение.
Здесь ранг равен 1, и 2-я перменная свободная.

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ А здесь ранг основной матрицы равен 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, базисный минор фактически заполняет всю основную матрицу, до правого края, в этом случае нет свободных переменных. Решение только тривиальное.

Если решать методом Гаусса, то получим $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases}$ тогда $x_2 = 0$, и отсюда $x_1 = 0$. После приведения к треугольному виду, последняя неизвестная получится 0, за ней и предпоследняя и т.д. Если матрица невырожденная, то решение единственно, но поскольку обязательно существует тривиальное, то единственное оно и есть тривиальное (все нули), других решений нет. Итак, сформулируем обнаруженный нами факт в виде теоремы:

Теорема 1. Однородная система с квадратной основной матрицей имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда основная матрица вырожденная.

Теорема 2. Линейная комбинация решений однородной системы тоже есть решение.

Доказательство. Дано $A\bar{x} = \bar{0}$, $A\bar{y} = \bar{0}$, тогда $A(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) =$ $\alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y} = \alpha\bar{0} + \beta\bar{0} = \bar{0}$.

* Для неоднородных систем такой факт был не верен! Там есть лишь более сложный аналог - теорема о наложении решений. Но идея доказательства похожая: если в той теореме $\bar{b_1}$ и $\bar{b_2}$ - нулевые векторы, получим эту теорему.

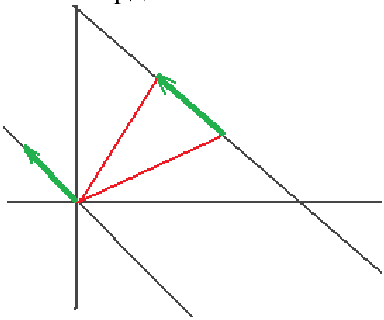
Теорема 3. Сумма решений неоднородной и соответствующей однородной системы есть решение неоднородной системы.

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ решение неоднородной системы, $\bar{y}$ - решение соответствующей однородной системы (с той же основной матрицей, но 0 в правой части).

$A\bar{x} = \bar{b}$, $A\bar{y} = \bar{0}$, тогда $A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b}$.

Следствие. Разность двух различных частных решений неоднородной системы есть решение соответствующей однородной системы.

Геометрический смысл. Если взять разность двух радиус-векторов, проведённых к точке какой-либо прямой, не проходящей через начало координат, получится вектор, лежащий на параллельной прямой, проходящей через начало координат.



Теорема 4. Пусть дана однородная система с n неизвестными, ранг основной матрицы равен r. Тогда существует $n-r$ линейно-независимых решений однородной системы, и всякое другое решение есть их линейная комбинация.

Определение. Данная система, состоящая из $n-r$ линейно-независимых решений, называется фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы уравнений.

Пример. ($n=4$, $r=2$). Решить систему $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2-x_3-2x_4=0 \end{cases}$

Базисный минор порядка 2 можно найти в левом углу, тогда считаем, что 3-я и 4-я переменная - свободные. Перенесём их через знак равенства. $\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-x_4 \\ x_2=x_3+2x_4 \end{cases}$.

x_2 уже фактически выражено: $x_2=x_3+2x_4$, подставим это в первое уравнение, чтобы выразить x_1.

$x_1+(x_3+2x_4)=-x_3-x_4 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2x_3-3x_4$.

Общее решение: $\{ x_1 = -2x_3 - 3x_4,\ x_2 = x_3 + 2x_4 \}$.

Если поочерёдно присвоить значение 1 каждой из свободных переменных (а другая в это время 0) то получим гарантированно 2 линейно-независимых вектора, они не пропорциональны, так как 1 на разных местах.

$x_3 := 1, x_4 := 0$, получим $(-2,1,1,0)$

$x_3 := 0, x_4 := 1$, получим $(-3,2,0,1)$.

Эти 2 вектора $\{ (-2,1,1,0),\ (-3,2,0,1) \}$ и есть ФСР. Это $n-r$ частных решений, из которых можно составить любые другие частные решения: любые их линейные комбинации будут частными решениями однородной системы.

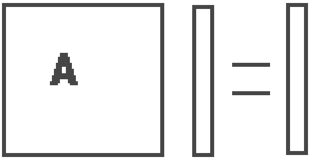
* Для системы с квадратной матрицей справа были только числа, для системы с прямоугольной матрицей к ним добавляются свободные переменные, и там будут выражения типа $(2 - x_3)$. А для однородной системы справа констант нет (они = 0), но туда перенесены свободные переменные. То есть идея решения методом Гаусса во всех этих 3 параграфах одна и та же, но справа разные типы объектов.

ЛЕКЦИЯ № 5. 03. 10. 2017

Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

§ 1. Линейный оператор и его матрица

В этой главе будут изучаться отображения векторных пространств. Вспомним, что при умножении квадратной матрицы на столбец, один вектор преобразуется в другой. Получается, что квадратная матрица задаёт некоторое отображение одних векторов в другие, то есть выступает в роли функции.



Определение. Отображение $L : R^n \to R^n$ называется линейным отображением (синоним: линейный оператор) если выполнены 2 условия:

$$1)\ \ L(x+y) = L(x) + L(y) \qquad 2)\ \ L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Умножение квадратной матрицы на вектор удовлетворяет свойствам линейности, в силу свойств умножения матриц.

Из определения напрямую следует, что всякое линейное отображение зависит только от того, куда отображаются базисные векторы:

$$L(x) = L(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = L(x_1 e_1) + ... + L(x_n e_n) = x_1 L(e_1) + ... + x_n L(e_n).$$

Образ вектора x в итоге зависит от координат вектора x и от образов базисных векторов, то есть линейный оператор однозначно задаётся образами базисных векторов.

Докажем ещё такое свойство: L(0)=0.
Пусть 0 вектор задан в виде $x - x$. Тогда:

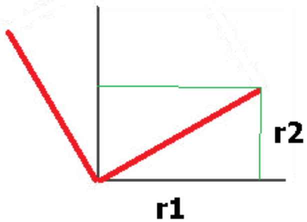
$$L(x-x) = L(x) - L(x) = y - y = 0.$$

Строение матрицы линейного оператора.

Докажем, что образы базисных векторов расположены в столбцах матрицы, что именно при таком строении матрицы умножение её на вектор-столбец будет задано корректно, то есть оно будет действительно отображать базисные векторы в их образы.
Умножим произвольную квадратную матрицу на $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$:
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Базисные векторы при умножении на квадратную матрицу отобажаются именно в такие векторы, координаты которых записаны в 1 и 2 столбце матрицы. Строение матрицы оператора: столбцы есть образы базисных векторов при данном отображении, то есть столбец номер i матрицы оператора содержит вектор $L(e_i)$.

Итак, если задан какой-либо закон, по которому отображаются векторы, то чтобы задать матрицу оператора, надо найти, куда отображаются базисные векторы. Для примера, найдём матрицу оператора поворота на произвольный угол φ.



Расстояния r1 и r2 здесь равны $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Красным показаны образы базисных векторов. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

При $\alpha = 90^0$ получится $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Действие оператора на любой вектор задаётся матрицей так: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ - любой вектор поворачивается на 90 градусов.

При $\alpha = 180^0$ матрица будет иметь вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и действительно, умножение на такую матрицу переводит любой вектор (x, y) в $(-x, -y)$, а при повороте на $\alpha = 180^0$ каждый вектор как раз и должен повернуться и стать противоположным исходному.

Оператор проекции пространства на плоскость.
Базисные векторы (1,0,0) и (0,1,0) остаются на своём месте, а (0,0,1) отображается в (0,0,0).

Матрица оператора проекции: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Каждый вектор (x, y, z) он отображает в $(x, y, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Здесь естественным образом возникает такое понятие как **ядро** линейного оператора. Множество векторов, которые отображаются в 0, называется ядром оператора. $Ker(L) = \{x \mid Lx = 0\}$.
Для примера выше (проекции) ядро - это ось Oz.

Тождественный оператор. Линейный оператор, который отображает каждый вектор в исходный, называется тождественным. I(x)=x. Ему соответствует матрица E.
Композиция операторов. Если последовательно действуют два линейных оператора: $L_2(L_1(x))$ то итоговое отображение называется композицией двух операторов. Соответственно, с помозью матриц это задаётся так: $B(Ax)$, что равно $(BA)x$, так что композиции операторов соответствует произведение матриц.
Обратный оператор.

Определение. Если для линейного оператора L существует линейный оператор L^{-1}, который каждый вектор отображает обратно: $L^{-1}(y) = x$, т.е. в композиции с исходным получится тождественный оператор $L^{-1}(L(x)) = I(x)$ тогда L называется **обратимым**, а L^{-1} **обратным** для L.
Примеры: поворот на угол - обратимый, проекция - необратимый линейный оператор. Обратному оператору соответствует обратная матрица.
Свойство. Линейный оператор является обратимым $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

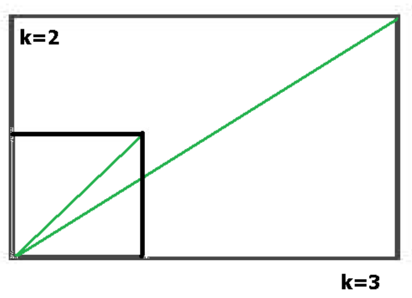
§ 2. Собственные векторы.

Определение. Если для ненулевого вектора выполняется $Lx = \lambda x$, то λ называется собственным числом, а вектор x называется собственным вектором, соответствующим этому собственному числу.

Геометрически это означает, что при действии отображения вектор остаётся на той же самой прямой. Для нулевого вектора рассматривать это понятие нет смысла, ведь $L0 = \lambda 0 = 0$ *для любого числа* λ.

Не для каждого оператора существуют собственные векторы. Так, при повороте плоскости на произвольный угол (кроме 0 и 180^0) ни один вектор не остаётся на той же самой прямой. При вращении шара в пространстве: все векторы на оси вращения - собственные, они соответствуют $\lambda = 1$.

Если растяжение по оси x с коэффициентом 2, а по оси y с коэффициентом 3, то векторы, не лежащие на осях, поворачиваются, и они не являются собственными.



Теорема 1. Линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному и тому же числу λ, тоже является собственным вектором, соответствующим λ.

Доказательство. Дано $Lx = \lambda x$, $Ly = \lambda y$. Тогда

$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda \cdot (\alpha x + \beta y)$.

Итак, для линейной комбинации, действие оператора тоже равносильно умножению на λ, что и требовалось доказать.

Следствия: Если какой-то вектор на прямой является собственным, то и любой другой вектор на этой же прямой является собственным, так как он кратен первом у вектору, то есть является его линейной комбинацией. Если растяжение в плоскости на один и тот же коэффициент по двум осям, то и все векторы плоскости - собственные векторы.

Теорема 2. Любые два собственных вектора, соответствующих различным собственным числам, образуют ЛНС (линейно-независимую систему).

Доказательство. Дано $Lx = \lambda_1 x$, $Ly = \lambda_2 y$. Допустим, что они были бы линейно-зависимы, то есть предположим $y = kx$.

Можно сначала отобразить линейным оператором, а потом представить в виде $y = kx$, а можно наоборот, сначала выразить через kx, а потом применить отображение:

$$L(y) = \lambda_2 y = \lambda_2 kx$$

$$L(y) = L(kx) = kL(x) = k\lambda_1 x$$

тогда $\lambda_1 kx = \lambda_2 kx$, то есть $(\lambda_1 - \lambda_2)kx = 0$. Но вектор x ненулевой, коэффициент k тоже. Тогда $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, то есть $\lambda_1 = \lambda_2$, а это противоречит условию теоремы. Итак, предположение $y = kx$ ложно, векторы не могут быть линейно-зависимы. Что и требовалось доказать.

Вывод: Вся прямая состоит из собственных векторов, соответствующих одному и тому же λ, там не может быть векторов, соответствующих другим числам, а также векторов, не являющихся собственными.

Теорема 3. Если x является собственным вектором линейного оператора L, соответствующим λ, то он также является собственным и для обратного оператора L^{-1}, и соответствует числу $1/\lambda$.

Доказательство. Если $L(x) = \lambda x$, то по определению обратного оператора $L^{-1}(\lambda x) = x$. Но тогда вынесем константу: $\lambda \cdot L^{-1}(x) = x$ а значит, $L^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda} x$.

Введём такие понятия: Характеристическая матрица $A - \lambda E$.
Характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = 0$ (вычислить определитель хар. матрицы и приравнять к 0).

Теорема 4. Число λ является собственным для линейного оператора, заданного матрицей A, тогда и только тогда, когда $|A - \lambda E| = 0$.

Доказательство. Покажем для матрицы 2 порядка. Запишем подробно выражение $Ax = \lambda x$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \left. \begin{array}{ll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{array} \right\}$$

Это кажется похоже не неодородную, но на самом деле это однородная система, так как справа не константы, а выражения с теми же переменными, что и слева, то есть их можно перенести все в одну сторону, и справа останутся 0, вот что получилось:

$$\left. \begin{array}{ll} (a_{11} - \lambda)x_1 & + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 & + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Если основная матрица такой системы невырождена, то решение только тривиальное (так как ранг равен числу переменных, и нет свободных переменных), а если вырождена, то нетривиальные решения есть.

Итак, решение существует $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, это и есть

$|A-\lambda E| = 0$, так как это определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Что и требовалось доказать.

Алгоритм поиска собственных векторов, следующий из этой теоремы.

1. Вычислить определитель $|A-\lambda E|$ и приравнять к нулю - получится характеристическое уравнение.

2. Решить характеристическое уравнение $|A-\lambda E| = 0$, найти все собственные числа. (Их будет не больше, чем n, так как уравнение порядка n, так как по диагонали n элементов).

3. Подставить каждое конкретное λ в характеристическую матрицу, и решить однородную систему $(A-\lambda E)x = 0$. Таких шагов может быть n. Каждый раз надо изменить диагональ и заново решить систему! ФСР системы это и будет собственный вектор для того λ .

Пример. Найти собственные числа и векторы для $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$. Далее, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Тогда уравнение $(1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = 0$.

Рещим это уравнение: $\lambda^2 - 7\lambda = 0$. Получим $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7$.

Теперь подставим каждое λ и решим системы уравнений.

$\lambda = 0$:

$\begin{pmatrix} 1-0 & 3 \\ 2 & 6-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, система: $\begin{matrix} x_1 & +3x_2 = 0 \\ 2x_1 & +6x_2 = 0 \end{matrix}$.

Общее решение: $x_1 = -3x_2$, вектор $(-3,1)$.

$\lambda = 7$:

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 3 \\ 2 & 6-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, система:

$\begin{matrix} -6x_1 & +3x_2 = 0 \\ 2x_1 & -x_2 = 0 \end{matrix}$. Общее решение: $x_2 = 2x_1$, вектор $(1,2)$.

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора относительно нового базиса задаётся формулой $B = C^{-1}AC$, где A, B - матрицы оператора в старом и новом базисах, C - матрица перехода к новому базису.

Идея доказательства: Ac_i это образы c_i, т.е. векторов нового базиса. Чтобы выразить их в том же новом базисе, нужно решить систему уравнений, где основная матрица это матрица перехода C. А решение такой системы равносильно умножению на обратную матрицу.

Теорема 5. Если базис состоит из собственных векторов, то матрица оператора в этом базисе диагональна.

Доказательство.

$Le_1 = \lambda_1 e_1 = \lambda_1 e_1 + 0e_2 + 0e_3 + ...0e_n$, то есть 1-й столбец в матрице оператора это такие числа: $(\lambda_1, 0, 0, ..., 0)$.

Аналогично $Le_2 = \lambda_2 e_2 = 0e_1 + \lambda_2 e_2 + 0e_3 + ...0e_n$, то есть 2-й столбец $(0, \lambda_2, 0, ..., 0)$. И т.д.

Таким образом, получится матрица оператора: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Теорема 6. Матрица A симметрична (то есть $a_{ij} = a_{ji}$) $\Leftrightarrow$ выполняется свойство (Ax,y) = (x,Ay).

Доказательство. Рассмотрим это равенство для базисных векторов: $(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j)$. Если оно выполняется для любой пары базисных векторов, то есть для любых индексов i, j .

Ae_i, как показано раньше, это i-й столбец матрицы линейного оператора. Если скалярно умножить его на e_j, то есть на тот вектор, где все координаты 0 и только на месте j единица, - получим j - й элемент из i - го столбца, это a_{ji} в матрице.

Аналогично, (e_i, Ae_j) это i - й элемент из j - го столбца, то есть a_{ij}.

Таким образом, $(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j)$ эквивалентно тому, что $a_{ij} = a_{ji}$ для всех индексов i, j.

Определение. Если для линейного оператора L, для любой пары векторов x, y верно $(Lx, y) = (x, Ly)$, то L называется симметрическим оператором.

Теорема 7. Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство. Дано: $(Ax, y) = (x, Ay)$, пусть первый вектор собственный и соответствует λ_1, а второй λ_2. То есть верно: $Ax = \lambda_1 x$ и $Ay = \lambda_2 y$. Тогда $(Ax, y) = (x, Ay)$ можно записать в виде $(\lambda_1 x, y) = (x, \lambda_2 y)$, тогда $\lambda_1 (x, y) = \lambda_2 (x, y)$, тогда $(\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) = 0$. Собственные числа разные, поэтому первый множитель не равен 0, тогда $(x, y) = 0$. Скалярное произведение 0, векторы ортогональны.

Следствие. Для линейного оператора, матрица которого симметрична, существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов.

ЛЕКЦИЯ № 6. 10. 10. 2017

§ 3. Квадратичные формы.

Рассмотрим подробнее скалярное произведение типа (x, Ay), где A - матрица некоторого линейного оператора. Произведение квадратной матрицы на столбец y это вектор-столбец, если затем его скалярно умножить на вектор x, получится число. Таким образом, (x, Ay) это некоторая скалярная функция от 2 векторов. Она линейна по каждому аргументу: если на 1 или 2 месте сумма векторов, то результат тоже представляется в виде суммы. Обозначим $B(x, y) = (x, Ay)$ и назовём эту функцию **билинейной формой**.

Подробнее при n=2 :

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 .$$

При произвольном n: $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ здесь n^2 слагаемых.

Фактически, это - обобщённое скалярное произведение. Обычное скалярное произведение - частный случай билинейной формы. Его можно задать таким же способом, с помощью единичной матрицы *E*:

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 .$$

Теперь рассмотрим такой случай. Пусть билинейная форма вычисляется от 2 одинаковых векторов, $y = x$. Обозначим $B(x, y) = Q(x)$ и назовём эту функцию, отображающую один вектор в число, **квадратичной формой**. Квадратичная форма задаётся через скалярное произведение так: $Q(x) = (x, Ax)$.

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}{x_1}^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}{x_2}^2 .$$

Пример. Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ задаёт такую квадратичную форму:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^{\,2} + 3x_1x_2 + x_2x_1 + 5x_2^{\,2} = 2x_1^{\,2} + 4x_1x_2 + 5x_2^{\,2}.$$

Очевидно, $x_1x_2 = x_2x_1$, то есть эта группа из двух слагаемых $a_{12}x_1x_2$ и $a_{21}x_2x_1$ может быть объединена. Коэффициенты a_{12} и a_{21} распределить поровну. Так, $3x_1x_2 + x_2x_1$ это то же самое, что $2x_1x_2 + 2x_2x_1$. Но ведь тогда матрицу квадратичной формы можно сделать симметричной, перераспределить эквивалентные элементы с сохранением их суммы. Эта же самая квадратичная форма может быть задана и такой матрицей: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, квадратичную форму всегда можно задать симметричной матрицей. Вспомним теорему 7 из прошлого §. Если матрица симметрична, то собственные векторы ортогональны.

Если матрица диагональна, то:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^{\,2} + a_{22}x_2^{\,2}$$

т.е. квадратичная форма не содержит попарных произведений, а содержит только квадраты координат.

А теперь вспомним также теорему 5 из прошлого §. Если в качестве нового базиса взять n собственных векторов, то матрица оператора в новом базисе будет диагональной. Из всего сказанного следует, что квадратичную форму всегда можно привести к виду, не содержащему попарные произведения, а содержащему лишь квадраты, называется к «главным осям» (главные оси это направления, соответствующие собственным векторам). Приведение к главным осям основано на поиске собственных чисел и векторов, примеры на эту тему решим подробно на практике.

Пример. Построить матрицу кв. формы $Q(x) = 5x_1^{\,2} + 7x_2^{\,2} + 12x_1x_2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Глава 4. Аналитическая геометрия.

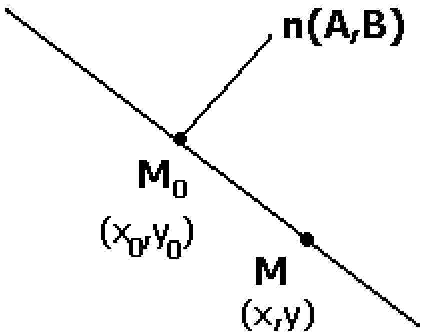
§1. Прямая на плоскости и плоскость в пространстве

Известно из школы такое уравнение прямой: $y = kx + b$. Однако оно не позволяет задавать вертикальные прямые. Существует более универсальный вид уравнения прямой: $Ax + By + C = 0$. Уравнение $y = kx + b$ относится к типу явных уравнений $y = f(x)$, а уравнение $Ax + By + C = 0$ неявное - типа $F(x, y) = 0$.

Аналогично, для плоскости в пространстве. Эта ситуация похожа на прямую в плоскости: до всего пространства не хватает 1 размерности, плоскость это 2-мерное множество в 3-мерном пространстве. Нормаль однозначно определяет плоскость в пространстве. Явное уравнение плоскости: $z = kx + my + c$. Но таким путём невозможно задать никакую вертикальную плоскость, то есть явное уравнение применимо не ко всем ситуациям. Общее, или неявное уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пункт 1. Вывод уравнений по точке и перпендикуляру.
Прямая в $\mathbf{R}^2$.

Допустим, дана точка M_0 с координатами (x_0, y_0) и перпендикуляр (синоним: «нормаль») к прямой, вектор $\bar{n}$. Если произвольную точку M с координатами (x, y) взять вне этой прямой, то M_0M и n не перпендикулярны, а если M принадлежит прямой, то перпендикулярны, тогда их скалярное произведение 0.

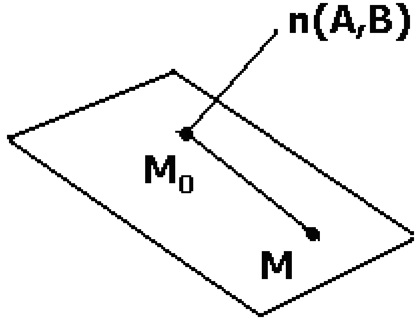


На чертеже $\left(M_0M, n\right) = 0$. Вектор M_0M = $(x - x_0, y - y_0)$ (из координат конца вектора вычли координаты его начала).
Тогда $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, откуда $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$, обозначим $-Ax_0 - By_0$ через С, и получим $Ax + By + C = 0$.
Таким образом, мы заодно ещё и доказали, что координаты нормали являются коэффициентами при x,y в уравнении прямой.

Замечание. От длины нормали уравнение не зависит. Если вектор нормали умножить на k, то все коэффициенты уравнения, включая константу, будут больше в k раз, но тогда можно вынести число k и сократить на него всё уравнение, а справа 0 так и останется 0. То есть, получим уравнение той же самой прямой, и от длины нормали ничего не зависит.

Плоскость в R^3.

Уравнение плоскости по точке и перпендикуляру. Абсолютно аналогичная технология вывода уравнения применяется и для плоскости. Пусть дана точка M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) и перпендикуляр $n(A, B, C)$. Сейчас мы докажем, что именно эти координаты A,B,C окажутся коэффициентами в уравнении плоскости. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$, принадлежащую плоскости. Тогда вектор M_0M перпендикулярен нормали, то есть вектору $n(A, B, C)$.



Тогда скалярное произведение, пары векторов $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и (A,B,C) равно 0. Итак, $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
Раскроем скобки: $Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$.
Обозначим константу $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$. Тогда получается $Ax+By+Cz+D=0$. Обратите внимание, что координаты нормали оказались именно коэффициентами при x,y,z.

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1,1,1) перпендикулярно вектору (1,2,3).
Решение. Вектор $(x-1, y-1, z-1)$ ортогонален вектору (1,2,3).
Тогда $1(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$ следовательно,
$x+2y+3z-6=0$.
Замечание. Длина нормали не влияет на уравнение. Если бы изначально было дано, что нормаль (2,4,6) то получили бы:
$2x+4y+6z-12=0$, но это уравнение задаёт ту же самую плоскость. Достаточно вынести 2 за скобку, и сократить на 2, получили бы $2(x+2y+3z-6)=2\cdot 0=0$.

Пункт 2. Вывод уравнений по точке и направляющим векторам.
Прямая в $\mathbf{R}^2$. Пусть задана точка M_0 с координатами (x_0, y_0) и направляющий вектор $\bar{l}$ с координатами (k,m). Поставим произвольную точку M (x,y) на прямой. В данном пункте M_0M не ортогонален, а коллинеарен вектору (k,m), то есть координаты векторов $(x-x_0, y-y_0)$ и (k,m) пропорциональны.

Запишем пропорцию: $\dfrac{x-x_0}{k}=\dfrac{y-y_0}{m}$ Это называется «**каноническое уравнение прямой**». Можно свести к общему виду, умножив крайние и средние члены пропорции:
$m(x-x_0)=k(y-y_0)$, сводится к $mx-ky+C=0$.

Заметим, что здесь $A=m, B=-k$. То есть, можно было бы и сразу от направляющего перейти к нормали, для этого поменять местами координаты вектора, и у одной координаты сменть знак. А потом действовать как в прошлом пункте.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) параллельно вектору (3,4).

Решение. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}$, $4x-4=3y-6$, $4x-3y+2=0$.

Замечание. Построение уравнения прямой по двум точкам сводится к этому же методу, так как вектор, проведённый между этими точками, как раз и есть направляющий к прямой.

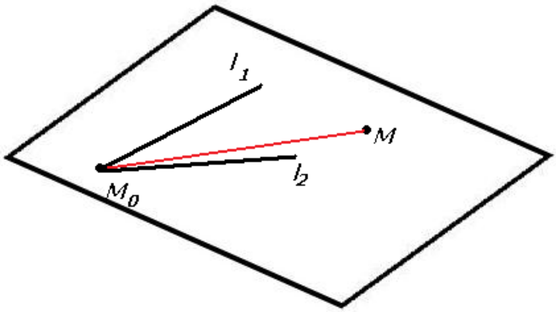
Плоскость в $\mathbf{R^3}$. Для плоскости, необходимо 2 направляющих. Пусть даны точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и 2 направляющих вектора l_1,l_2 ими однозначно порождается некоторый параллелограмм, а следовательно и плоскость. Одного направляющего вектора недостаточно, ведь тогда плоскость может вращаться вокруг него, то есть плоскость не будет однозначно фиксирована. Обозначим координаты направляющих, например, так: $l_1(p_1,q_1,r_1)$ и $l_2(p_2,q_2,r_2)$.

Первый способ. Можно найти нормаль к плоскости как векторное произведение 2 направляющих векторов $n=[l_1,l_2]$ и далее искать уравнение плоскости по точке и нормали, методом, рассмотренным в пункте 1. Но это будет решение в 2 шага.

Однако можно также получить уравнение плоскости сразу, без вычисления векторного произведения:

Второй способ. Возьмём произвольную точку $M(x,y,z)$. Если она принадлежит плоскости, то вектор M_0M (показан красным цветом) будет лежать в плоскости, то есть тройка векторов l_1,l_2,M_0M образует линейно-зависимую систему (ЛЗС), то есть эти векторы не образуют параллелепипед, а лежат в одной плоскости. Тогда смешанное произведение 0, то есть определитель, составленный из них, равен 0:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0$$



Вычисляя этот определитель, мы получим в качестве результата некоторое уравнение, содержащее x,y,z. А если начальная точка (0,0,0), то уравнение будет вычисляться с помощью такого определителя: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$.

Пример. Построить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, параллельно 2 направляющим (1,2,3) и (1,1,1).

Решение. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Можем разложить по первой строке:

$$x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 2y - z = 0.$$

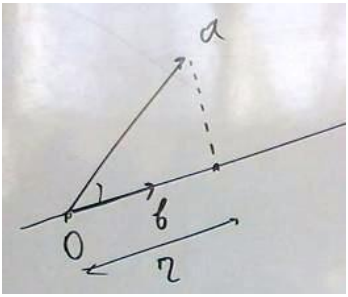
Для удобства, чтобы 1-й коэффициент был положителен, можно домножить на -1. Ответ: $x - 2y + z = 0$.

Замечание. Векторы l_1, l_2 можно поменять местами, и это не влияет на уравнение плоскости. Неважно, какой из них считается первым, а какой вторым. Если все миноры сменят знак, то из уравнения просто можно будет вынести коэффициент -1.

Замечание. Построение уравнения плоскости по трём точкам. Если дано 3 точки, достаточно взять 2 направляющих M_1M_2 и M_1M_3 (пусть это и будут те самые l_1, l_2) и затем действовать так, как сказано ранее.

Пункт 3. Расстояние от точки до прямой (плоскости).

Сначала выведем формулу проекции вектора на ось $\text{Пр}_b a = \dfrac{(a,b)}{|b|}$.



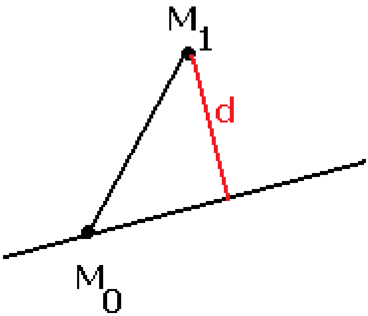
(чертёж с доски)

1) длина проекции r это катет, $|a|$ гипотенуза треугольника, тогда получается, что $\dfrac{r}{|a|} = \cos\varphi$.

2) известно, что $(a,b) = |a||b|\cos\varphi$.

Сопоставим эти 2 факта. $(a,b) = |a||b|\dfrac{r}{|a|}$, тогда $(a,b) = |b| \cdot r$, откуда и следует $r = \dfrac{(a,b)}{|b|}$.

Пусть теперь дана прямая $Ax + By + C = 0$ и точка $M_1(x_1, y_1)$. Кратчайшее расстояние, то есть длину перпендикуляра, проведённого от точки к прямой, обозначим d. Нам не известно, где основание перпендикуляра, более того, его и не нужно искать. Возьмём произвольную точку M_0 на прямой. Это можно сделать так: присвоим x=0 и вычислим y, либо наоборот, y=0 и вычислить x. Короче, найти какую-нибудь точку на прямой можно элементарно. Далее, соединим M_0 и M_1. Вектор M_0M_1 не перпендикулярен прямой, однако его проекция на нормаль это и есть d.



Применим формулу проекции вектора на ось. $Пр_b a = \dfrac{(a,b)}{|b|}$. В нашем случае это $\dfrac{(M_0M_1, n)}{|n|}$. Но расстояние всегда положительно, независимо от того, с какой стороны от прямой эта точка. Поэтому в числителе должен быть ещё и модуль, а не само скалярное произведение.

$d = \dfrac{|(M_0M_1, n)|}{|n|}$, если расписать это подробнее, то $\dfrac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ т.е. $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

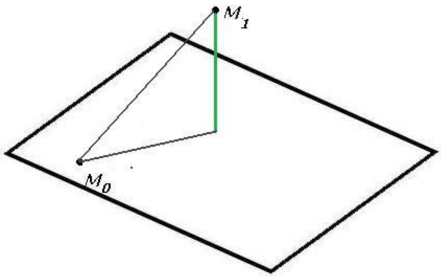
Замечание. Если точка M_1 принадлежит прямой, то в числителе 0, и тогда d = 0, что и должно получиться, ведь точка лежит на прямой.

Пример. Найти расстояние от точки $M_1(2,1)$ до прямой $x + y - 1 = 0$.

Решение. Нормаль $n = (1,1)$. Тогда $d = \dfrac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Расстояние от точки до плоскости в пространстве.

Пусть дано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и произвольная точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Возможно, она лежит в плоскости (тогда расстояние по формуле автоматически получится 0). Но в общем случае она не принадлежит плоскости. Мы не знаем, где основание перпендикуляра, более того, его и не потребуется искать.



Возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в плоскости. Сделать это просто: присвоим какие-нибудь значения 2 переменным из трёх, и вычислим третью. Например, как правило, задать x,y и вычислить z. Итак, выбрали какую-то точку в плоскости. Отрезок между M_1 и M_0 не перпендикулярен плоскости, но его проекция на нормаль - это как раз и есть кратчайшее расстояние до плоскости (d).

$$Пр_n M_0 M_1 = \frac{(M_0 M_1, n)}{|n|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Замечание. Если подставить в уравнение плоскости (в числителе) точку, лежащую в плоскости, то получим 0. В общем же случае, результат подстановки некоторой точки, не лежащей в плоскости, в уравнение плоскости, характеризует удаление от плоскости.

ЛЕКЦИЯ № 7. 17. 10. 2017

Пункт 4. Взаимное расположение прямых и плоскостей.

4.1. Прямые в плоскости. Пусть даны две прямые:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Если решить систему из этих 2 уравнений, то мы и получим точку пересечения. Решение единственно при $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, когда ранг основной матрицы системы, а именно матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, равен 2.

Т.е. если пропорция нарушается в коэффициентах при x,y то есть $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ тогда пересекаются в одной точке.

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, то возможны ещё 2 случая:

1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямые совпадают (система уравнений неопределённая, так как полностью пропорциональны все элементы двух уравнений, а значит, фактически в системе уравнение одно, а не два).

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ прямые параллельны (систему уравнений получается несовместная).

Если прямые пересекаются в 2 точках, то они совпадают. Это тот случай, когда ранг основной матрицы системы равен 1. Там будет одна свободная переменная, и бесконечное множество решений.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны 2 плоскости.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Если рассматривать это как систему уравнений, то видим, что 2 уравнения и 3 переменных, то есть по меньшей мере одна свободная переменная. Это означает, что если решения есть, то их бесконечно много. Это и есть все точки, принадлежащие прямой, являющейся пересечением плоскостей. Чтобы найти пересечение, достаточно решить систему уравнений, где 2 уравнения - это и есть уравнения этих плоскостей.

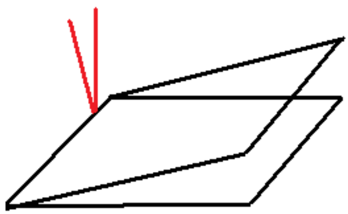
Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ то плоскости совпадают, так как уравнения полностью пропорциональны.

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ то плоскости параллельны. Дело в том, что если из одного уравнения вычесть кратное второму, то получим, что все коэффициенты при x, y, z, равны 0, и будет противоречивое уравнение (некая ненулевая константа = 0).

А если пропорциональность нарушена среди каких-то из первых 3 дробей, то плоскости пересекаются.

Пункт 5. Угол между плоскостями и метод его нахождения.

Угол между плоскостями можно искать как угол между нормалями n_1, n_2 (показаны краснымна чертеже).



Координаты нормалей известны - это (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2). В то же время, $(n_1, n_2) = |n_1| \cdot |n_2| \cdot \cos\varphi$. Тогда $\cos\varphi = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1| \cdot |n_2|}$ =

$$\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}.$$

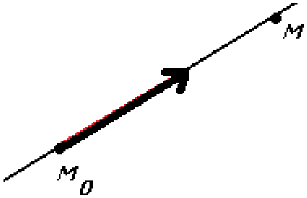
.

§ 2. Прямая в пространстве.

Для прямой на плоскости и для плоскости в пространстве есть однозначно определённое направление нормали (перпендикуляра) т.к. там размерности рассматриваемых многообразий 1 и 2 (2 и 3 соответственно), то есть не хватает одной размерности. А для прямой в пространстве не хватает двух размерностей (1 и 3). Это совершенно новый случай, здесь нельзя однозначно задать перпендикуляр. Есть целая плоскость, перпендикулярная прямой, то есть бесконечное число нормалей. А вот направляющий вектор однозначно определён (с точность до его длины, конечно). Это проявится в том, что мы получим другой тип уравнений.

Пункт 1. Построение уравнения прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Пусть дана точка M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) и направляющий вектор $l(p, q, r)$ (выделен жирно на чертеже).



Представим себе, что какая-то произвольная точка $M\ (x, y, z)$ лежит на этой же прямой. Тогда M_0M и l коллинеарны, то есть их координаты пропорциональны, т.е. $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \parallel (p, q, r)$.

Тогда $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$.

Это - **канонические** уравнения прямой в пространстве.

Фактически здесь не одно, а два уравнения, впрочем, прямая может быть задана как пересечение 2 плоскостей. Кстати, если перемножить 1-ю и 2-ю пропорции независимо друг от друга, и свести к обычным уравнениям, то мы и получили бы уравнения каких-то 2 плоскостей. Если эти 3 дроби равны, то можно приравнять их к некоторому параметру t.

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=t\,.$$

Если теперь выразим x,y,z через t из каждой дроби, получим:

$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}$ - параметрические уравнения. Это физические уравнения движения, в момент времени t=0 находимся в точке (x_0, y_0, z_0), в момент времени t=1 сдвинулись к концу направляющего вектора. Векторный вид записи этих 3 равенств: $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{l}t$. При t=0 радиус-вектор из начала координат к исходной точке, через 1 секунду он будет направлен в конец вектора l.

Пример. Построить уравнения прямой, если начальная точка (1,1,1) направляющий вектор (1,2,3).

$(x-1, y-1, z-1) \,||\, (1,2,3)$, тогда $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ - канонические уравнения. Параметрические: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

Если требуется построить уравнение прямой по 2 точкам, то направляющий это вектор, проведённый от 1-й ко 2-й точке, и далее применяется известный ранее алгоритм.

Пункт 2. Построение уравнения прямой в пространстве по точке и двум перпендикулярам.

Если дана точка и 2 нормали, то можно найти направляющий как векторное произведение этих 2 нормалей:

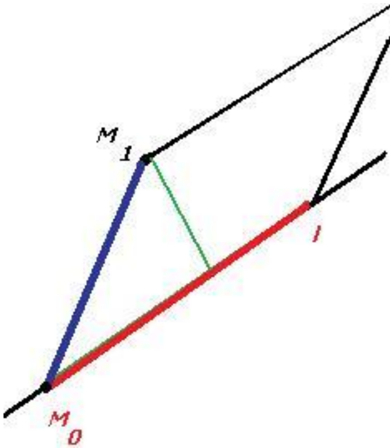
$$l = [n_1, n_2].$$

Далее можно решать тем методом, как в прошлом пункте.

Пункт 3. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Во-первых, закономерен вопрос, а почему требуется выводить новую формулу, если у нас уже была выведена формула расстояния от точки до прямой? Дело в том, что в пространстве уравнение прямой это вовсе не $Ax+By+C=0$, а канонические или параметрические уравнения, то есть формула из прошлой темы не применима. В том случае мы пользовались проекцией на нормаль, а в пространстве нормаль к прямой однозначным образом не определяется.

Пусть дана прямая (с помощью точки M_0 и направляющего l) и точка M_1, не лежащая на прямой.



Соединим M_0 и M_1, это одна из двух сторон параллелограмма, вторая это l. Требуемое расстояние это высота, надо площадь поделить на длину основания. Площадь равна векторному произведению векторов, образующих стороны. Поэтому $d=\frac{|[M_0M_1,l]|}{|l|}$.

Пункт 4. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Кроме совпадения, параллельности и пересечения, в пространстве появляется ещё одна ситуация: скрещивающиеся прямые.

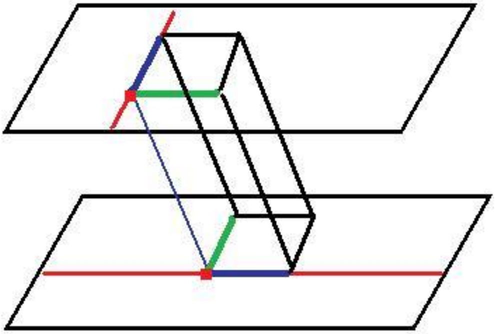
Скрещивающиеся прямые можно определить как две прямые, не лежащие в одной плоскости. Через совпадающие, параллельные, пересекающиеся прямые можно провести общую плоскость.

Скрещивающиеся прямые можно представить себе как пару прямых, лежащих в параллельных плоскостях, но при этом сами прямые не параллельны (если рассмотреть вид сверху, то они пересекались бы).

Если	и при этом:	тогда прямые:
$(M_1M_2, l_1, l_2) = 0$	$l_1 \parallel l_2 \parallel M_1M_2$	Совпадающие
	$l_1 \parallel l_2$	Параллельные
	M_1M_2 l_1 и l_2 компланарны (в одной плоскости)	Пересекающиеся
$(M_1M_2, l_1, l_2) \neq 0$		Скрещивающиеся

Примером отрезков, лежащих на скрещивающихся прямых, могут быть, например, мост и русло реки. Из-за того, что в пространстве возможны скрещивающиеся прямые, как раз и есть возможность строительства мостов и развязок.

п.5. Расстояние между скрещивающимися прямыми



Спроецируем l_1 на ту плоскость, где лежит 2 прямая, и l_2 на плоскость, где 1-я. Получается два параллелограмма. Соединим их вершины, получаем параллелепипед.Обратите внимание, что отрезок M_1M_2 может не являться кратчайшим, так как точки не ровно одна над другой, т.е. углы параллелипепеда могут быть и не 90^0.

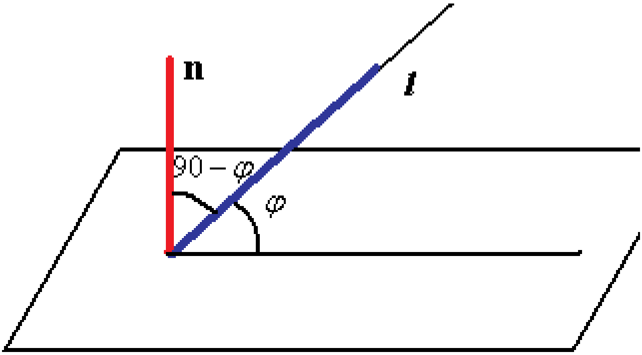
Кратчайшее расстояние = высоте переллелепипеда, то есть d = V / S.

Объём вычислим с помощью смешанного произведения, а площадь основания через векторное от l_1, l_2. Итак, $d = \dfrac{|(M_1M_2, l_1, l_2)|}{|[l_1, l_2]|}$.

Замечание. Если сближать скрещивающиеся прямые, в итоге они окажутся пересекающимися, тогда и смешанное произведение в числителе станет 0, и расстояние между прямыми 0.

Пункт 6. Угол между прямой и плоскостью.

Пусть дана плоскость с помощью уравнения $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая с помощью точки (x_0, y_0, z_0) и направляющего $l(p,q,r)$.



Угол $90-\varphi$ это угол между прямой и нормалью к плоскости.

$(n,l)=|n|\cdot|l|\cos(90-\varphi)$, тогда $\cos(90-\varphi)=\dfrac{(n,l)}{|n|\cdot|l|}$, и в итоге формула:

$$\varphi = 90-\arccos\frac{(n,l)}{|n|\cdot|l|}.$$

§ 3. Кривые и поверхности.

Общее уравнение кривой 2-го порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$$

(здесь все степени не более второй).

Первые три слагаемых - квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, если построить её матрицу и найти собственные числа, то:

если $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (они одного знака) то эллипс

если $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (разного знака) то гипербола,

если $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (одно из них равно 0) то парабола.

Оба собственных числа не могут быть 0, иначе был бы нулевой оператор, т.е. нулевая матрица, то есть в уравнении вообще не было бы квадратичной формы.

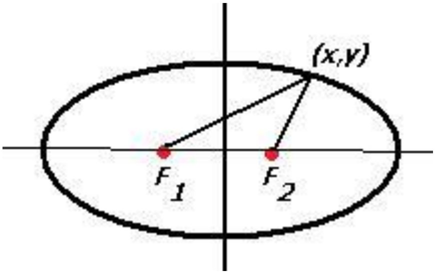
Вырожденные случаи. Обратим внимание, что далеко не всякое уравнение задаёт кривую, есть и вырожденные случаи, когда геометрическим местом точек является прямая или точка, несмотря на наличие второй степени в уравнении.

Это бывает, например, если в уравнении нет линейной формы и константы.

- $x^2 + y^2 = 0$ одна точка, а именно начало координат.
- $x^2 + y^2 = -1$ пустое множество
- $x^2 = 0$ вертикальная прямая, ось Oy.
- $x^2 = k^2$ две параллельные вертикальные прямые $x = \pm k$
- $xy = 0$ две координатные оси.
- $x^2 - y^2 = 0$ - две прямых, т.к. распадается на $(x+y)(x-y) = 0$.

Получаются 2 биссектрисы, лежащие между осями.

Определение эллипса. Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек постоянна.



Замечание. Если два фокуса сблизить и совместить в одной точке, тогда эллипс превратится в окружность, так как $r_1 + r_2 = 2r$ = const то есть удвоенное расстояние до центра постоянно, а значит и просто r = const.

Вершины эллипса $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$.
a, b называются большой и малой **полуосями.**
Две точки, сумма расстояний до которых константа в определении эллипса, называются его **фокусами.**

Доказательство (вывод) уравнения эллипса.
Выведем уравнение кривой, удовлетворяющей этому свойству ($r_1 + r_2$ = const), и докажем, что в уравнении должна быть сумма квадратов.
Пусть фокусы расположены в точках $(c,0)$ и $(-c,0)$. Вычислим по теореме Пифагора расстояние от точки (x,y) до двух фокусов. F_1 расположен дальше длина катета равна $(x+c)$, тогда длина большего из двух отрезков, а именно r_1, равна: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.
Фокус F_2 наоборот, расположен ближе к точке на чертеже то есть катет на оси Ox равен $(x-c)$, тогда $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.
Выясним, какой именно константе равна величина $r_1 + r_2$. Если расположить точку ровно в правой вершине, то получим $(a+c)+(a-c)=2a$, такая же сумма расстояний по определению должна быть и для произвольных точек. Итак, $r_1 + r_2 = 2a$.
Заметим, что если оба корня возвести в квадрат, то они будут отличаться только одним слагаемым, а именно $+2cx$ либо $-2cx$. Тогда можно так оценить разность квадратов:

$r_1{}^2 - r_2{}^2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}^{\,2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}^{\,2} =$
$\left((x+c)^2+y^2\right) - \left((x-c)^2+y^2\right) =$
$\left(x^2+c^2+2cx+y^2\right) - \left(x^2+c^2-2cx+y^2\right) = 4cx$.

Но ведь $r_1{}^2 - r_2{}^2 = (r_1-r_2)(r_1+r_2)$, то есть $4cx = (r_1-r_2)2a$.

Тогда мы знаем и разность: $r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x$.

Итак, получили систему, из которой можно определить каждое r_i:

$r_1 + r_2 = 2a$

$r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x$

Сложив эти 2 равенства, получим $r_1 = a + \frac{c}{a}x$,

а вычитая второе из 1-го, $r_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Сопоставим выражения, изначально полученные по теореме Пифагора, с этими выражениями:

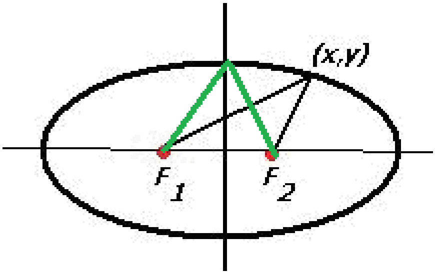
$\sqrt{(x\pm c)^2+y^2} = a \pm \frac{c}{a}x$. Теперь возведём в квадрат:

$(x\pm c)^2 + y^2 = \left(a \pm \frac{c}{a}x\right)^2$. Тогда $x^2+c^2 \pm 2cx + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \pm 2cx$,

далее $x^2+c^2+y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2$, тогда $\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$

$\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$

Рассмотрим вершину $(0,b)$. Сумма расстояний до фокусов равна $2a$, то есть каждый отрезок, показанный зелёной линией на чертеже, имеет длину a:



Но ведь он является гипотенузой треугольника, один катет которого это малая полуось (длина b), а другой - OF_2 (длина равна c). Таким образом, $a^2 = b^2 + c^2$, тогда $b^2 = a^2 - c^2$.
Итак, каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если $a = b$ то кривая - окружность (частный случай эллипса): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $x^2 + y^2 = a^2$, фактически тогда a это радиус, можно обозначить R.

Понятие **эксцентриситет** эллипса. Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Геометрический смысл: во сколько раз ближе к центру расположен фокус, чем дальняя вершина эллипса. Если окружность, то эксцентриситет равен 0. Известны эксцентриситеты орбит планет Солнечной системы. Но они - очень малые числа, так как орбиты очень близки к круговым, например 0,017 для Земли.

ЛЕКЦИЯ № 8. 24. 10. 2017

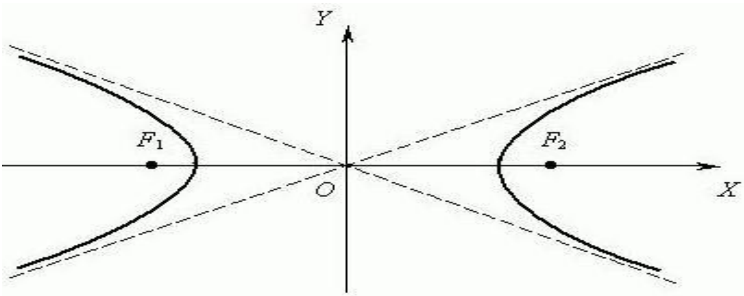
Геометрические и физические свойства эллипса.

Эллипсы в астрономии. Все планеты и другие небесные тела Солнечной системы движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов - Солнце. Этот закон был открыт ещё Кеплером. Ближайшую точку к Солнцу Земля проходит 4 января, таким образом, для северного полушария зима чуть теплее, чем для южного. К тому же, из-за такой формы орбиты, зима для северного полушария чуть короче, то есть период между осенним и весенним равноденствием не ровно 1/2 года, а меньше. Действительно, на южном полюсе температуры бывают ниже, чем на северном полюсе.

Физическое свойство фокусировки. Лучи, испущенные из одного фокуса, после отражения соберутся во втором фокусе. Название «фокус» как раз и связано со словом «фокусировка» лучей.

Если на орбите Земли расположить зеркала, так чтобы они были повёрнуты ровно по касательной к орбите, то все лучи соберутся во 2 фокусе, то есть из той точки будет видно, что вся орбита светится.

Определение гиперболы. Гиперболой называется геометрическое место тоек на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек (называемых фокусами) есть постоянная величина.



Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Доказательство формулы во многом аналогично тому, что только что выводили для эллипса.

Асимптоты гиперболы: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

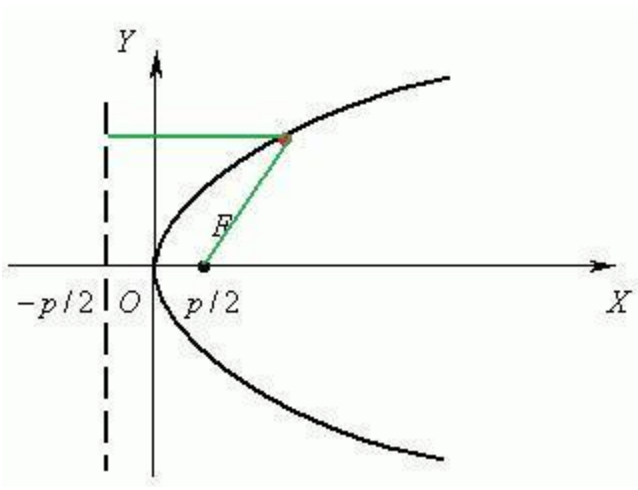
Наверное, вам более известна гипербола $y = \frac{1}{x}$, однако это просто другая форма записи. Если представить эту кривую в виде $xy - 1 = 0$, то видно, что здесь присутствует произведение xy, то есть квадратичная форма. Так вот, если её привести к главным осям, то получится система координат, повёрнутая на 45 градусов, и в ней уже (относительно новых переменных) будет разность квадратов.

Определение параболы. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от некоторой прямой и не лежащей на ней точки.

Эта прямая называется директрисой, точка - фокусом.

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Выведем это уравнение непосредственно из геометрического определения.Расположим прямую левее начала координат, а именно $x = -\frac{p}{2}$ фокус - справа, это точка $\left(\frac{p}{2},0\right)$. Расстояние от произвольной точки (x,y) до директрисы - просто по горизонтали, это $x + \frac{p}{2}$.



Вычислим расстояние от (x, y) до фокуса по теореме Пифагора:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Итак, есть равенство: $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$

тогда $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$,

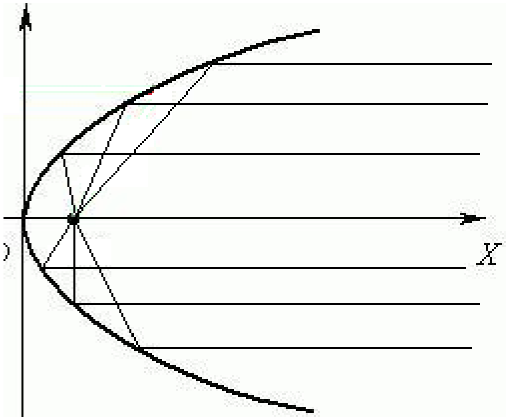
следовательно, $x^2+\frac{p^2}{4}-px+y^2=x^2+\frac{p^2}{4}+px$,

в итоге $y^2=2px$.

Если директрису расположить горизонтально и точку над ней, то ветви параболы будут направлены не вправо, а вверх. В этом случае уравнение вида $x^2=2py$. В частности, для кривой $y=x^2$ получается, что $2p=1$, т.е. параметр $p=\frac{1}{2}$. В этом случае фокус расположен в точке $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, так как от фокуса до вершины параболы расстояние $\frac{p}{2}$ (см. вывод формулы).

Параболу можно представить как предельный случай эллипса: если правый фокус удаляется в бесконечность, то эллипс вытянется вправо, получится парабола.

Свойство фокусировки. Параллельные лучи после отражения от параболы собираются в фокусе. Именно на этом основано применение параболических антенн.



ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Изучим такие типы поверхностей:

1) поверхность вращения 2) цилиндрическая 3) коническая
4) поверхности 2-го порядка.

Пункт 1. Поверхность вращения.

Если кривую в плоскости 0xy вращать вокруг оси 0x, то каждая точка опишет окружность, лежащую в плоскости, параллельной 0yz.

Уравнение будет вида $F\left(x, \sqrt{y^2+z^2}\right)=0$, то есть y,z входят в уравнение только в составе суммы квадратов, а не по отдельности. Конечно, можно записать уравнение и в виде $F\left(x, y^2+z^2\right)=0$ так как $\left(y^2+z^2\right)$ можно представить как $\sqrt{y^2+z^2}^{\,2}$. То есть, в уравнении даже не обязательно должен быть корень из суммы квадратов каких-то двух переменных, а возможно, даже сама сумма квадратов.

Если ось вращения 0y то $F\left(y, \sqrt{x^2+z^2}\right)=0$, а если ось вращения 0z то $F\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$.

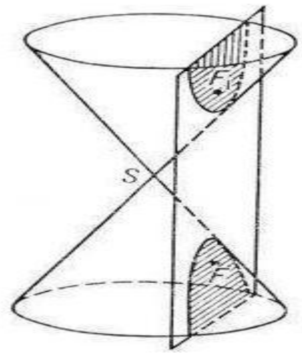
В частности, поверхностью вращения является конус: $x^2+y^2=z^2$. Если фиксировать $z=C$, то получится $x^2+y^2=C^2$, то есть для конуса горизонтальное сечение - окружность, и радиус растёт равномерно с ростом высоты.

Неявное уравнение конуса можно представить так: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ то есть в виде $F(x, y, z) = 0$.

Эллипс, гипербола и парабола как сечения конуса.

Уравнение конуса: $x^2 + y^2 = z^2$. Если фиксировать z то получим окружность. Если фиксировать x или y, то есть рассмотреть вертикальное сечение, то получим гиперболу. Например, пусть $y = C$. Тогда $x^2 + C^2 = z^2$, $C^2 = z^2 - x^2$, $\frac{z^2}{C^2} - \frac{x^2}{C^2} = 1$ - гипербола.

Если наклон плоскости плавно увеличивать, то от окружности перейдём к эллипсу, затем, когда наклон плоскости равен углу наклона образующей конуса, то получим параболу, если угол больше, т.е. плоскость стремится к вертикальному положению, то в сечении гипербола.



Пункт 2. Цилиндрическая поверхность.

Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задаёт окружность в плоскости, но если это рассматривать как уравнение 3-мерной поверхности, где отсутствует z, то получается, что z любое (произвольное) то есть вся вертикальная прямая, идущая от точки на окружности, принадлежит поверхности. Получается прямой круговой цилиндр.

Можно обобщить это понятие: проводить прямолинейные образующие не от точек окружности, а от произвольной кривой, лежащей в плоскости 0xy. Уравнение вида $F(x, y) = 0$ задаёт кривую в плоскости, а в пространстве оно же задаёт цилиндрическую поверхность. Если отсутствует какая-то из переменных, то прямолинейные образующие параллельны именно той координатной оси, какая переменная отсутствует. Если например отсутствует z то можно считать, что z любое, то есть вся вертикальная линия тоже принадлежит поверхности. Таким образом, $F(x,y)=0$, задающее кривую в плоскости, автоматически при этом задаёт некоторую поверхность в пространстве.

Пункт 3. Коническая поверхность.

Если от окружности , лежащей в плоскости z = C провести прямые через начало координат, то получим конус. Но можно в этой плоскости рассматривать не окружность, а произвольную кривую, таким образом строится обобщённая коническая поверхность.

Если в некоторой плоскости взята кривая, через все её точки и некоторую общую точку F проведены прямые линии, то полученная поверхность называется конической. Так, например, пирамида тоже является конической поверхностью, только образующей кривой там является квадрат, а не окружность. Все точки квадрата соединены прямолинейными образующими с некоторой точкой, лежащей вне его плоскости.

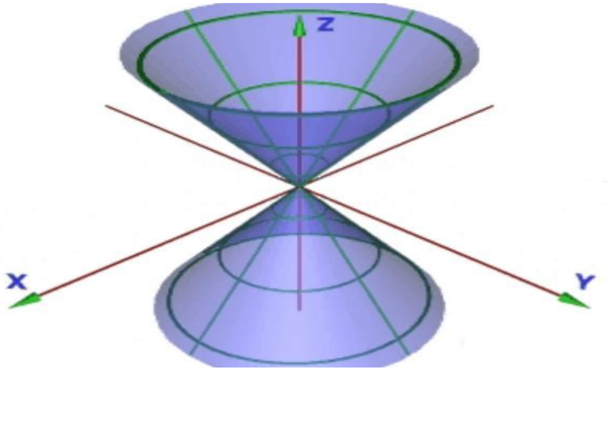
Определение. Функция $F(x,y,z)$ называется однородной, если

$F(cx,cy,cz)=c^n F(x,y,z)$.

Например, x^3+xy^2- однородная функция, здесь у всех слагаемых суммарные степени = 3, и при увеличении всех переменных в с раз, появится общий множитель c^3.

Функция, задающая уравнение конуса, тоже однородная:

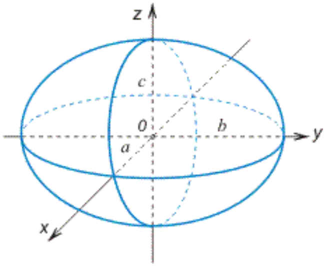
$x^2+y^2-z^2=0$.



Докажем, что уравнение $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ однородная функция, задаёт коническую поверхность.
Пусть точка (x,y,z) принадлежит поверхности. Тогда $F(x,y,z)=0$. Но тогда $F(cx,cy,cz)=c^n F(x,y,z)$, то есть $F(cx,cy,cz)=c^n 0=0$, тогда точка (cx,cy,cz) тоже принадлежит поверхности, и это верно для любого c. Таким образом, вся прямая, соединяющая начало координат и точку (x,y,z), принадлежит поверхности. Следовательно, это коническая поверхность.

Пункт 4. Поверхности 2-го порядка.

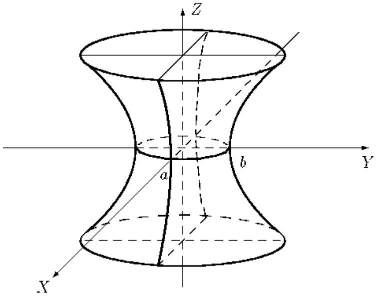
Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



При фиксировании любой переменной получится уравнение эллипса. Любое его сечение - эллипс. Полуоси a,b,c.
Если пара полуосей совпадает, т.е. $a=b$ или $a=c$ или $b=c$, то эллипсоид вращения (сечения вдоль какой-то из плоскостей - круги а не ээипсы). Если же все 3 равны $a=b=c$, то сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ - пустое множество (ни одна точка пространства не удовлетворяет этому уравнению).

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



При z=0 сечение есть эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Если фиксировать $z\neq 0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+C$ эллипс большего размера, но с тем же самым соотношением полуосей.
В вертикальных сечениях будут гиперболы: если фиксировать y, то уравнение сводится к виду, где разность квадратов.

Например, при y = 0: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Докажем, что однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

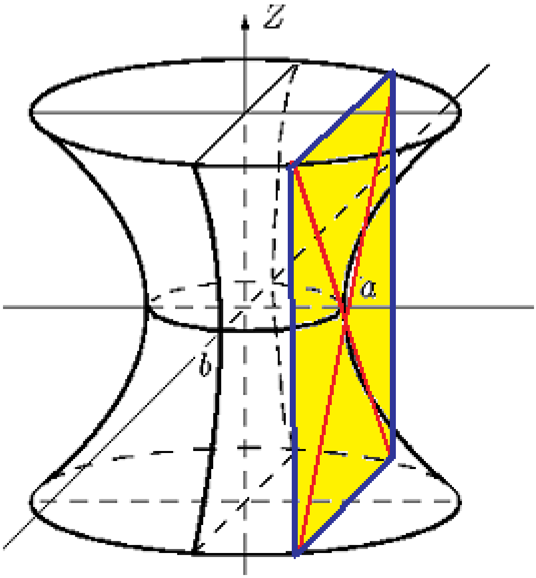
содержит прямолинейные образующие.

В горизонтальном сечении при $z=0$ получается эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

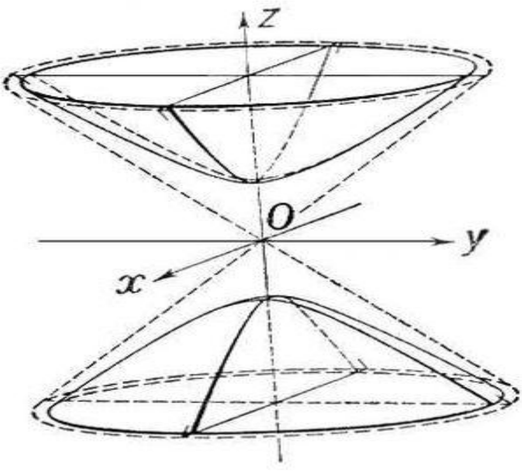
Его вершины: $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$. Рассмотрим вертикальную плоскость, проходящую через его вершину, например, $(a,0)$. Эта плоскость имеет уравнение $x=a$. Тогда в уравнении гиперболоида $1+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, т.е. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Получается $\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0$, т.е. в вертикальной плоскости две прямых:

$\frac{z}{c}=\frac{y}{b}$ и $\frac{z}{c}=-\frac{y}{b}$, или можно записать так: $z=\frac{c}{b}y$ и $z=-\frac{c}{b}y$.
Это пара пересекающихся прямых.

Чертёж. Эта пара прямых показана красным цветом.

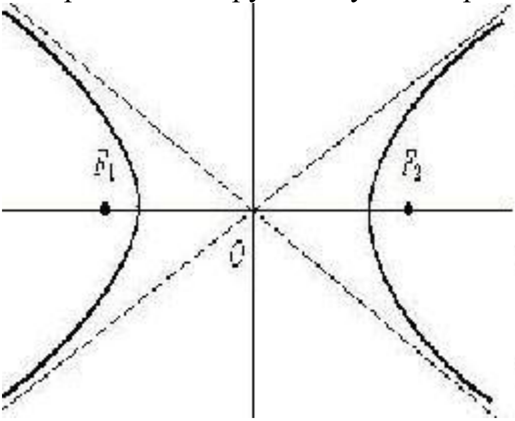


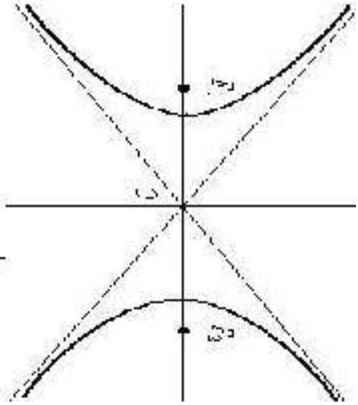
Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.



В отличие от прошлого случая, здесь при малых z, по модулю меньших, чем c, вообще пустое множество в горизонтальных сечениях: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2}$ здесь только при $z \geq c$ справа положительное число и в сечениях эллипсы. Поэтому фигура распадается на 2 части, вблизи начала координат вообще нет точек. Вертикальные сечения - гиперболы.

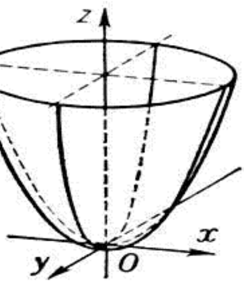
Кстати, если вращать гиперболу, расположенную в одних четвертях, то получится 1-полостный гиперболоид, а если вращать гиперболу, которая была в других двух четвертях - 2-полостный гиперболоид:





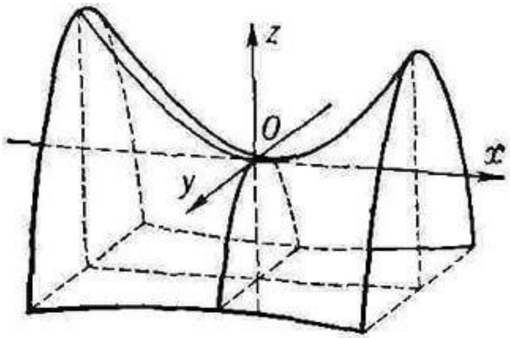
Рассмотрим теперь две поверхности, в уравнениях которых содержится не 3, а 2 квадрата, и первая степень третьей переменной.

Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$



Горизонтальные сечения - эллипсы: если фиксировать z, то получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=C$.Вертикальные сечения - параболы, ветви которых направлены вверх: если фиксировать например y, то получим $\frac{x^2}{a^2}+C=2pz$ уравнение параболы. Параболические антенны построены именно с помощью такой поверхности, но $a=b$ (параболоид вращения).

Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$.



Вертикальные сечения - параболы. Причём если фиксировать x, то сечение в плоскости 0yz - парабола, ветви которой направлены вниз $C-\frac{y^2}{b^2}=2pz$, а если фиксировать y, то ветви вверх: $\frac{x^2}{a^2}-C=2pz$.

В горизонтальных сечениях - гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=C$ в зависимости от знака z, они то в одних, то в других четвертях. Можно представить построение этой поверхности так: парабола, ветвями направленная вниз, повернута перпендикулярно и скользит своей вершиной по параболе, направленной ветвями вверх.

Общий случай.

В уравнении поверхности присутствует квадратичная форма

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz\ .$$

Построить её матрицу (см. прошлую тему), найти собственные числа: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Возможны такие ситуации:

Если они все одного знака $(+++)$, то поверхность - эллипсоид.

Если два из них одного знака, а третье другого знака $(++-)$ гиперболоиды.

Если одно из них 0, а другие одного знака $(++0)$ эллиптический параболоид.

Если одно из них 0, а другие разного знака $(+-0)$ гиперболический параболоид.

ЛЕКЦИЯ 9. 31.10.2017.

Глава 5. Основы математического анализа.

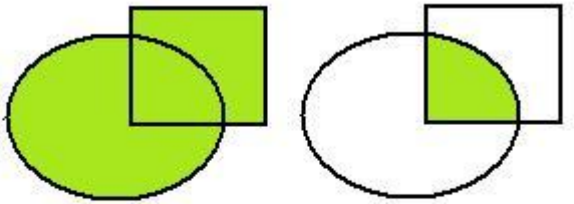
§1. Множества и функции.

Множеством называют совокупность объектов некоторого типа. Например, множество точек на плоскости, множество чисел, множество матриц.

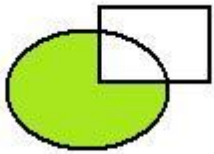
Объединение $A \cup B = \{x \in A \text{ или } x \in B\}$

Пересечение $A \cap B = \{x \in A \text{ и } x \in B\}$

Объединение и пересечение 2 множеств показаны графически:

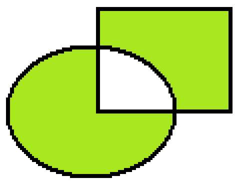


Разность множеств: $A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$. Показано на чертеже:



Аналогично, $B \setminus A = \{x \in B, x \notin A\}$.

Объединение этих двух разностей называется симметрической разностью, и обозначается так: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, на чертеже:



В то же время, это множество можно получить и другим путём: из объединения удалить пересечение. То есть,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Ещё обозначения: $A \subset B$ - множество А является подмножеством множества В.

Числовые множества.

$N = \{1,2,3,\ldots\}$натуральные числа

$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ целые числа

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \quad m,n \in Z \right\}$ рациональные числа

$R = (-\infty, \infty)$ вся действительная ось, действительные числа.

Множество $R \setminus Q$ - иррациональные числа.

Верно следующее: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Существует обобщение: комплексные числа вида $a + bi$. Комплексная плоскость.

Множества на действительной оси.

Интервал $(a,b) = \{x \in R \ a < x < b\}$ - граничные точки не включены.

Отрезок $[a,b] = \{x \in R \ a \le x \le b\}$ - здесь границы включены во множество.

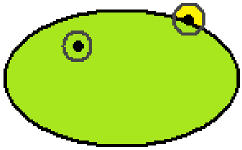
Пример. Объединение и пересечение множеств: $A = (0,2)$, $B = (1,3)$:
$A \cup B = (0,3)$ $A \cap B = (1,2)$.

Множество вида $[a, \infty) = \{x \in R \ a < x\}$. Числа «бесконечность» не существует, поэтому в таком множестве справа всегда должна быть круглая скобка.

Интервал вида $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$в будущем будем называть окрестностью радиуса ε точки a и обозначать $U_\varepsilon(a)$.

Внутренние и граничные точки.

Если для точки $a \in A$ существует окрестность, которая полностью лежит во множестве А, то есть является его подмножеством, $U_\varepsilon(a) \subset A$, то такая точка называется внутренней точкой множества А. Если же для любой окрестности есть лишь частичное пересечение со множеством А, то такая точка называется граничной точкой множества. Показано на чертеже:



Функция, аргумент, образ.

Пусть даны 2 множества X, Y. Если задан некоторый способ каждому элементу $x \in X$ поставить в соответствие какой-то $y \in Y$, то говорится, что задана ФУНКЦИЯ из X в Y. Обозначение:

$f : X \to Y$.

x называется аргументом функции, а y - образом.

Основные элементарные функции и их графики: повторить из школьного курса (!)

Степенные x^a, показательные a^x, логарифмические $\log_a x$, тригонометрические $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$, обратные тригонометрические.

Если $f : R \to R$, то есть $y = f(x)$, график - кривая в плоскости.

Если $f : R^2 \to R$ функция двух переменных, то есть $z = f(x, y)$, её график - это поверхность в трёхмерном пространстве.

Композиция, обратная функция.

Если для всякой пары элементов выполняется $f(x) = y$ и при этом $x = f^{-1}(y)$, то f^{-1} называется обратной функцией относительно f.

Если $f : A \to B$, $g : B \to C$ то существует $g(f(x))$ - композиция двух функций.

Композиции функций из R^n в R^1 и из R^1 в R^n.

Функция $w = f(x, y, z)$ отображает R^3 в R^1.

Функция из R^1 в R^3: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

такая функция задаёт движение точки в пространстве.

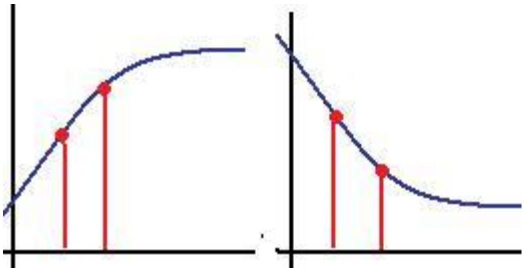
Можно рассматривать композицию: $R^1 \to R^3 \to R^1$.

$w = f(x(t), y(t), z(t))$. Физический смысл: каждой точке пространства задана температура, и заданы параметрические уравнения движения точки в пространстве. По какому закону для этой точки будет изменяться окружающая температура.

Монотонность.

Монотонно возрастающая функция: если $x_1 < x_2$ то $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Монотонно убывающая функция: если $x_1 < x_2$ то $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Периодичность.

Если существует такое число T, что $\forall x \in R$ верно $f(x+T) = f(x)$ то функция называется периодической, T - период.

Примеры. $\sin(x)$, $\cos(x)$ период 2π, $tg(x)$, $ctg(x)$ период π.

О влиянии коэффициента на период. Если $\sin(ax)$ период равен $\frac{2\pi}{a}$. Если $a > 1$, колебания становятся чаще, а период меньше. Почему так происходит? Точка x прошла расстояние 2π, в это время ax - прошло в a раз больше, то есть в a раз больше колебаний произошло на этом отрезке, длина которого 2π. Если $a < 1$ наоборот, период больше, а колебания реже, чем у исходного графика.

Чётность и нечётность.

Чётная функция: $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси 0у, т.е. при зеркальном отражении переходит в точно такой же график, примером может быть парабола, а также cos(x).

Нечётная функция: $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно точки (0,0), то есть после поворота на 180^0

график был бы таким же, примером может быть кубическая парабола или любая другая нечётной степени, или например синус, тангенс.

Существует такое неочевидное свойство разложения на чётные и нечётные компоненты:

Лемма. Любая функция $f(x)$ представима в виде суммы чётной и нечётной, то есть $f(x) = g(x) + h(x)$.

Доказательство. Введём две функции: $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Первая из них чётна, вторая нечётна. Видно, что если заменить x на $-x$, то для $g(x)$ получится выражение, равное исходному, а вот для $h(x)$ разность в числителе будет противоположна: $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$.

Сумма этих функций: $\frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} =$

$\frac{f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$.

итак, $f(x) = g(x) + h(x)$.

Если чётную и нечётную компоненты записать для функции $f(x) = e^x$, то получатся так называемые гиперболический косинус и гиперболический синус: $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Вообще, существует 3 способа задания функций - явный, неявный, параметрический.

Способ задания:	Явно	Неявно	Параметрически
Вид уравнения:	$y = f(x)$	$F(x, y) = 0$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
Пример (окружность)	$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$	$x^2 + y^2 = 1$	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

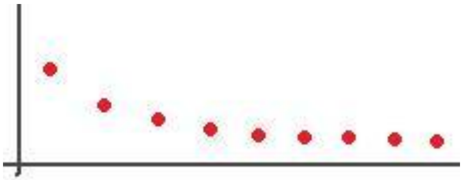
Пример (прямая)	$y = kx + b$	$Ax + By + C = 0$	$\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$
Поверхности	$z = f(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$	$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

Параметрический: $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ (в этом случае обязательно будет два параметра). Например, 2 параметра на сфере: широта и долгота.

§2. Пределы.

Последовательность.

Множество действительных чисел, пронумерованных с помощью натуральных чисел: $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ называется числовой последовательностью. Её можно определить также и как функцию $f : N \to R$. Графиком в этом случае будет не кривая, а дискретный набор точек.



Например, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ - последовательность.

Арифметическая и геометрическая прогрессии тоже частный случай последовательности.

Пример: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right\}$ геометрическая прогрессия

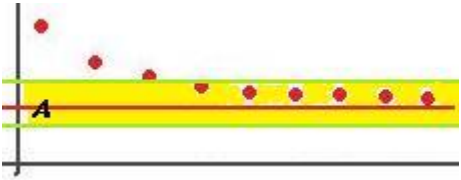
В рассмотренных примерах видно, что при возрастании номера элемент убывает к 0. Однако при этом само число 0 не достигается ни при каком номере. То есть, числа 0 в этой последовательности нет. Однако, все элементы уменьшаются и приближаются к 0. В связи с этим возникает определение предела последовательности:

Определение. Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$, такое, что $\forall n > n_0$ выполняется: $|A - a_n| < \varepsilon$.

(для любого числа эпсилон больше нуля, существует такой номер элемента последовательности, что для всех последующих номеров отклонение элементов от числа А меньше, чем эпсилон). В этом случае говорится, что последовательность **стремится** к числу А.

Обозначение предела: $A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. (lim это от английского слова limit которое хорошо известно и в русском языке - лимиты потребления света, воды и т.д.).

Если рассмотреть полосу от $A - \varepsilon$ до $A + \varepsilon$ по высоте, то начиная с какого-то номера, все последующие точки будут попадать в эту полосу:



Чем меньше число ε (погрешность меньше) тем больший номер требуется .

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. По определению: если например требуемая точность $\varepsilon = 0{,}01$ то $n_0 = 100$, $\forall n < n_0$ выполняется: разность элемента и 0 менее 1/100, то есть 1/101 затем 1/102 и т.д.

* Для того, чтобы лучше понять, что такое предел, представьте следующее. Машина приближается к городу. Для любого заранее заданного расстояния (например ε = 10 км.) существует такой момент времени t_0, что в последующие моменты времени $t > t_0$ расстояние будет меньше, чем ε. Это как раз и означает «стремится к 0», то есть расстояние уменьшается к 0. Если задать ε = 5 км. то это достигается в более поздний момент времени, а если ε = 1 км. то ещё позже.

Предел может и не существовать. Для последовательности $\{1,0,1,0,\ldots.\}$, например, предел не существует. Здесь не происходит стабилизация значений, то есть их колебания по высоте всегда 1. После каждого номера, найдётся последующий элемент, который удаляется на расстояние 1 от предыдущего, то есть эти колебания не могут быть меньше заранее заданного малого числа ε .

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right\}$

Вычислим предел. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n/n}{(n+1)/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Второе

слагаемое в знаменателе стремится к 0. В итоге, $\frac{1}{1+0}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Таким же методом можно сокращать старшие степени и в других случаях, для произвольных степеней.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+n+1}{bn^2+n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{b+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{a}{b} .$$

В общем случае, когда степени разные: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^s+\ldots}{bn^k+\ldots} = \begin{cases} a/b \; при\, s=k \\ 0 \; при\, s<k \\ \infty \; при\, s>k \end{cases}$.

Теорема 1. Пусть дано 3 последовательности, причём для любого номера n: $u_n \le v_n \le w_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty}w_n = A$ то существует $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ и тоже равен A.

Доказательство. Так как для первой и третьей последовательности предел равен A, то числа u_n, w_n (начиная с какого-то номера) отклоняются от A не больше чем на величину ε , то есть принадлежат интервалу $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Но число v_n находится между ними, тогда оно тоже принадлежит $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Тогда по определению, для средней последовательности тоже существует предел.

Теорема 2. Если последовательность монотонно возрастает *(убывает)* и ограничена сверху *(снизу)*, то она имеет конечный предел.

Примеры нарушения одного из этих двух условий.

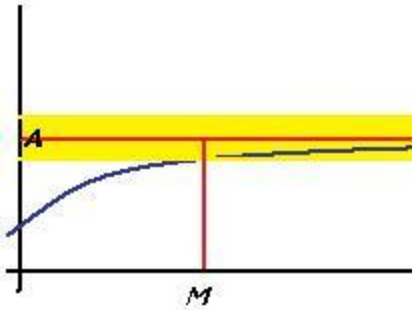
$\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ не ограничена, предел ∞.

$\{1,0,1,0,\ldots.\}$ не монотонна. Пределом не может быть ни одно из чисел 0 или 1. Здесь после любого элемента, среди последующих есть какой-либо, удалённый от данного на расстояние 1, то есть в определении предела было бы не «для любого ε», а только для $\varepsilon > 1$. Колебания по высоте не уменьшаются, все последующие элементы не впишутся в узкую полосу ширины 2ε.

Предел функции при $x \to +\infty$.

Число A называется пределом функции $f(x)$, при $x \to +\infty$ если:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in R$, так, что $\forall x > M$ выполняется: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

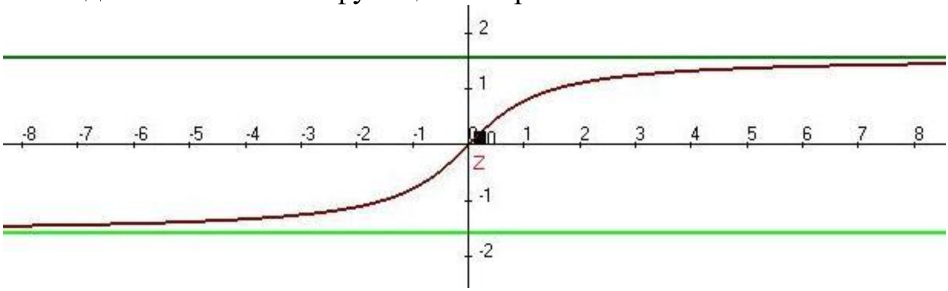


Объяснение: для любой заранее заданной погрешности ε существует такая константа М, что правее неё график отклоняется от ординаты А не более, чем на ε.

Аналогично определяется предел при $x \to -\infty$ для левой полуоси.

Пример. $f(x) = arctg(x)$. Два различных предела при $+\infty$ и $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctg(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Предел на правой полуоси равен $\dfrac{\pi}{2}$, но при этом ни в одной точке $x \in R$ функция не принимает это значение.

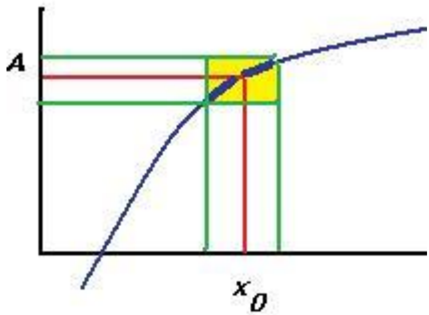


Предел функции в точке (при $x \to x_0$).

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется: $|A - f(x)| < \varepsilon$.

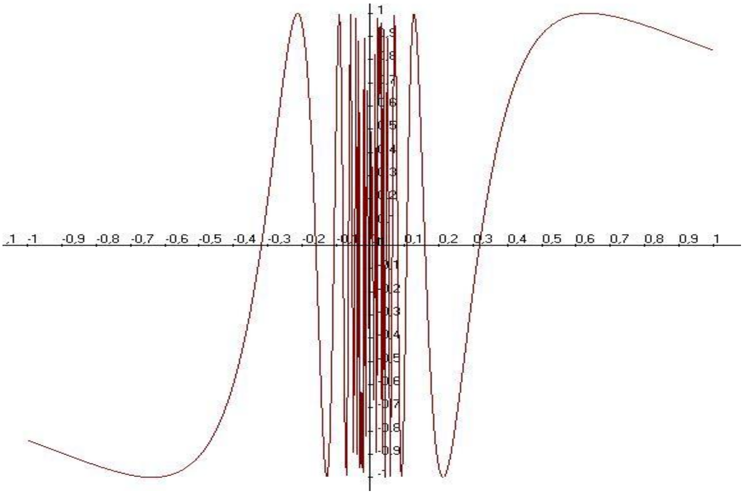
(для любого числа эпсилон больше нуля, существует такое число дельта, так что если модуль разности $x - x_0$ меньше дельта, то модуль разности $f(x) - A$ меньше, чем эпсилон).

Обозначение $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.



В случае существования предела, получается, что задавая погрешность ε можно найти такой интервал в области определения, что отклонение значений от А будет меньше чем ε. Фактически, часть графика впишется в некоторый прямоугольник, при уменьшении одной стороны будет уменьшаться и вторая.

Существует пример функции, не имеющей предела в нуле. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Здесь при приближении к 0 бесконечное число колебаний, то есть, уменьшая область определения, например интервал $(-\varepsilon,\varepsilon)$, никак не удастся получить уменьшение области значений функции над этим интервалом, размах колебаний всё равно останется от -1 до 1. При подходе абсциссы к 0, функция здесь должна пройти бесконечное число колебаний амплитуды 2 (от -1 до 1).



Но даже для «обычных» функций, не испытывающих бесконечное количество колебаний, не всегда существует значение функции в точке. Бывает так, что формально её вычислить нельзя. Например, для функции $\frac{x^2-9}{x-3}$ значение в точке x_0 =3 не существует. При вычислении на калькуляторе поочерёдно числителя и знаменателя, получили бы $\frac{0}{0}$ и калькуляторы, компьютеры выдали бы сообщение об ошибке. Но ведь в соседних точках значение функции есть, график функции подходит к некоторой точке в плоскости. Так вот, её ордината и равна этому пределу.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

В точке 3 значение функции не существует, однако во всех соседних точках существует, и можно узнать, к какой ординате стремится график при $x\to 3$. Разложим на множители:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{1} = 6.$$

Тот множитель, который отвечал за стремление к 0 в числителе и знаменателе, сокращён, поэтому далее удалось просто подставить 3 и получить ответ.

ЛЕКЦИЯ № 10. 07. 11. 2017

Вычислим предел одной и той же функции при $x\to 0$ и при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-x}{x^2-2x} = \lim_{x\to \infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1.$$

Как видим, методы разные: если неопределённость типа $\frac{0}{0}$, то выделяем множители, для того, чтобы сократить те множители, которые стремятся к 0. Если неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, то корни искать не нужно, а нужно сократить на степенную функцию старшей степени.

Метод Лопиталя для неопределённостей $\frac{0}{0}$. Несмотря на то, что тема «производные» подробно будет позже, и доказательство этого метода будет дано в той теме, производные для некоторых элементарных функций известны из школы, и можно этим пользоваться при вычислении пределов.

Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2 - x)'}{(x^2 - 2x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 1}{2x - 2} = \dfrac{1}{2}$.

Этот метод можно применять и в 2 или более шагов, если после 1-го дифференцирования остаётся неопределённость $0/0$.

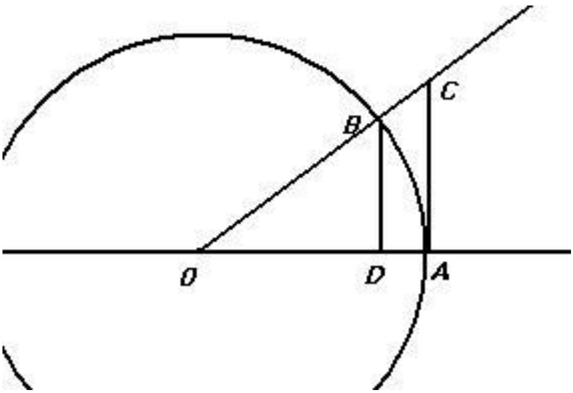
Вычислим этим же способом: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{1+x}\right)}{1} = 1$.

График ln(1+x) это ln(x) сдвинутый влево на 1, касательная проходит ровно под углом 45 градусов, то есть совпадает с функцияей y = x. Если рассмотреть при большом увеличении, они почти неотличимы.

Ещё пример. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$.

1-й замечательный предел. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство 1-го замечательного предела из геометрических соображений.



Рассмотрим единичную окружность, и какой-либо угол. Длина дуги AB равна φ - это по определению радианной меры угла. Так как OA это радиус, а мы взяли единичную окружность, то

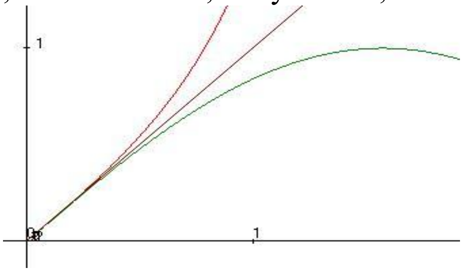
$$\frac{|AC|}{|OA|} = \frac{|AC|}{1} = tg\varphi .$$

Так как OB это тоже радиус, то $\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{|BD|}{1} = \sin\varphi$.

Но длина дуги на чертеже больше, чем отрезок BD, и меньше, чем AC. $|BD| \le \varphi \le |AC|$, то есть $\sin\varphi \le \varphi \le tg\varphi$.

Совпадают они именно при $\varphi = 0$.

Кстати, графики трёх функций именно так и расположены: у них общая касательная, тангенс выше, синус ниже, чем биссектриса.



Неравенства $\sin\varphi \le \varphi \le tg\varphi$ перепишем в виде: $\sin\varphi \le \varphi \le \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Теперь разделим всё на синус. $1 \le \frac{\varphi}{\sin\varphi} \le \frac{1}{\cos\varphi}$. Рассмотрим обратные величины ко всем этим, пользуясь тем, что из $a < b$ следует $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Получится $\cos\varphi \le \frac{\sin\varphi}{\varphi} \le 1$.

Применим свойство, которое доказывали когда-то ранее: если $u < v < w$ и две крайние из 3 величин стремятся к A, то и средняя имеет предел и стремится к A.

Учитывая, что $\lim_{\varphi \to 0} \cos\varphi = 1$, а константа справа и так равна 1, то $\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$. Если обозначение угла сменить, обозначить x, то и получается $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствия из 1-го замечательного предела:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$, $\lim\limits_{a(x)\to 0}\dfrac{\sin a(x)}{a(x)}=1$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{(3x)}\cdot 3=1\cdot 3=3$.

Более подробно: мы могли бы заменить $t=3x$, и учесть, что при $x\to 0$ будет и $t\to 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

Решение. Надо получить в знаменателе такое же выражение, как под знаком sin.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}(x+1) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)}\lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Здесь можно в процессе решения переобозначить $\alpha(x)=x^2-1$, причём $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 1$.

2-й замечательный предел. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Обратите внимание, что этот предел вовсе не 1, как могло бы показаться. Ведь в степень всегда возводится не 1, а число, большее, чем 1. Оно уменьшается, но оно ни при каком n не равно 1. Здесь 2 процесса: одновременно уменьшается основание до единицы, и при этом увеличивается степень. Всё зависит от соотношения скоростей этих процессов.

Если, к примеру, есть 2 процесса: растворение краски и замораживание ёмкости с водой, то существенно отличается результат, если выполнить 1-й или 2-й процесс раньше. Если сначала заморозить воду, то уже ничего не растворится, а если сначала растворить, то будет равномерная смесь. Если замораживать одновременно с растворением, то будет другой результат, краска растворится не равномерно. Короче говоря, мы не имеем права считать, что сначала уменьшили основание в выражении $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ и только потом стали увеличивать степень, здесь оба процесса идут одновременно, поэтому сказать, что такой предел всегда равен 1, будет ошибкой.

Число, даже очень близкое к 1, при возведении в выокую степень существенно возрастает. Так, при инфляции 10% в год, за 20 лет цена будет почти в 7 раз больше: $1{,}1^{20} = 6{,}7275$. А если 15% в год, то за 20 лет в 16 раз больше: $1{,}15^{20} = 16{,}36654$.

Докажем, используя некоторые ранее полученные пределы, чтобы понять, каким образом в этом пределе появляется число e.

Возьмём выражение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, запишем как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(x+1)\right)=1$. По свойству логарифма, $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left((x+1)^{\frac{1}{x}}\right)=1$.

Возведём в степень e:

$\lim\limits_{x\to 0}\exp\left(\ln\left((x+1)^{\frac{1}{x}}\right)\right)=e^1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Если ввести замену $t=\frac{1}{x}$, то получим $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$. Если здесь выбрать значения только для целых абсцисс, то получится

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Следствия из 2-го замечательного предела.

$$\lim_{n\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\ ,\quad \lim_{a(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)}=e,$$

$$\lim_{b(x)\to 0}(1+b(x))^{\frac{1}{\mathrm{b(x)}}}=e.$$

Вообще, с помощью 2 замечательного предела можно раскрывать неопределённости вида 1^∞.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Заметим, что если отдельно рассмотреть основание, видно, что оно стремится к 1 (там получается 3/3). Степень стремится к бесконечности. Таким образом, здесь есть неопределённость вида 1^{∞}, и можно применять 2-й замечательный предел.

Выделим целую часть этой неправильно дроби. Это можно сделать так: вписать перед дробью +1, а после неё (-1). Затем привести к общему знаменателю всё, что после первой единицы, то есть второй и третий элементы.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x+1}{2x-1}-1\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(x+1)-(2x-1)}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

Обратите внимание, что само собой автоматически получилось, что после 1 такая дробь, которая стремится к 0. Это и должно было получиться, ведь всё основание стремится к 1. Теперь нужно в степени искусственно домножить на дробь, обратную к той, что в основании следует после единицы. Но чтобы степень в примере не изменилась, надо компенсировать домножением и на саму эту дробь, а не только на обратную.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2-x}\bullet\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2-x}}\right)^{\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}}$$

В больших скобках получилось выражение типа $(1+b(x))^{\frac{1}{\mathrm{b(x)}}}$, его предел равен e. Таким образом,

осталось найти $\lim\limits_{x\to 2}(e)^{\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = e^{-\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2x-1}} = e^{-1/3}$.

Чтобы степени было видно крупнее, можно записать через exp(A) вместо e^A.

$$\exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}\right) = \exp\left(-\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x-1}\right).$$ Итак,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{-1/3}.$$

* Замечание. Если основание стремится не к 1, а к другому числу, то второй замечательный предел можно и не использовать. Так, если $a<1$ то предел равен 0, если $a>1$ то ∞.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(3)^n = \infty$. Неопределённость возникает только в том случае, когда основание стремится к 1.

§ 3. Бесконечно-малые и бесконечно-большие величины.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно-малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно-большой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\infty$.

Это понятие не применимо к функции «вообще», без указания точки. Не бывает просто «бесконечно-малой функции», бывает только «бесконечно-малая функция в точке». Это свойство поведения функции в конкретной точке. Так, $(x-1)^2$ является бесконечно-малой при $x_0=1$.

Очевидно, что если $\alpha(x)$ беск-малая в точке, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно-большой в той же точке.

Пример. Функция $\frac{x^2-1}{x-2}$ является бесконечно малой в точках -1 и 1 и бесконечно большой в точке 2.

Бесконечно малые называются **сравнимыми**, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K$, причём $K\neq 0$ и $K\neq\infty$, то две функции называются бесконечно-малыми ОДНОГО ПОРЯДКА малости.

Кстати, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{K}$, то есть оба предела равны конечным числам, а не ∞. Если было бы $K=0$ то второй предел был бы ∞.

Если при этом $K=1$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то две бесконечно малые называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ Это частный случай той ситуации, когда они одного порядка.

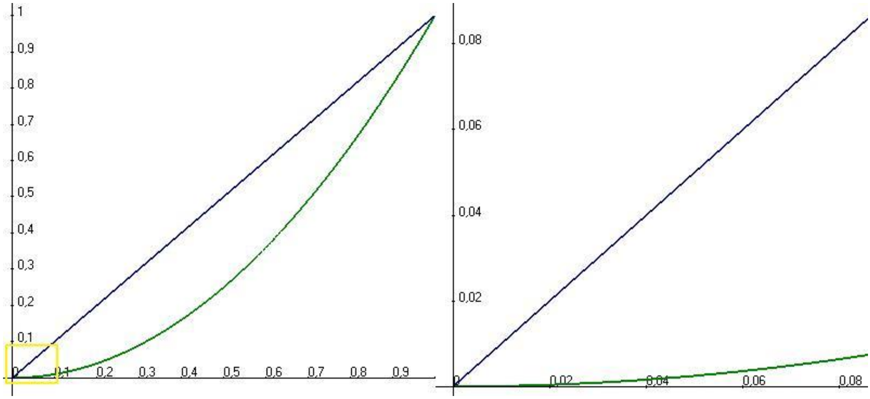
Пример. $\sin(x)\approx x$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ то α называется бесконечно-малой более высокого порядка, чем β.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$. Функции x^2 и $2x^2$ одного порядка в точке 0.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1}=0$, а также $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,

то есть x^2 более высокого порядка, чем x. И хотя они обе стремятся к 0, но скорость этого процесса кардинально отличается. Если рассмотреть их графики при большом увеличении около начала координат, то парабола почти неотличима от оси 0x.



Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1. Если $\alpha \approx \beta$, то $\beta \approx \alpha$.

Доказательство очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$

2. Если $\alpha \approx \beta$ и $\beta \approx \gamma$ то $\alpha \approx \gamma$.

Дано: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = 1$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Порядок разности двух эквивалентных величин больше, чем порядок малости каждой из них.

Доказательство. Дано: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Докажем, что при делении разности на любую из них предел будет 0, это как раз и означает, что в числителе - более высокого порядка.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = 1 - 1 = 0.$$

4. Порядок малости суммы равен наименьшему из порядков слагаемых.
Доказательство. Пронумеруем так, чтобы 1-е слагаемое было наименьшего порядка. Тогда: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+...+\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}$ =

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}+\ldots+\dfrac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}\right)$ = 1+0+...+0 = 1.

То есть, эта сумма эквивалентна слагаемому наименьшего порядка.

Пример: $\alpha(x)=x+x^3$ 1-го а не 3-го порядка малости в точке x = 0.
$\alpha(x)=x^2+x^6+x^8$ - 2-го порядка.
А вот если рассматривать предел при $x\to\infty$, то тогда 8-го порядка. При малых значениях наибольшее влияние на сумму оказывает наименьшая степень, а при бесконечном возрастании - наибольшая степень.
4а. Порядок суммы бесконечно-больших равен наибольшему из порядков слагаемых.

5. Если $\alpha\approx\alpha_1$, $\beta\approx\beta_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=K$ то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=K$

то есть этот предел тоже существует, и равен К.
Доказательство. Дано: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}$ = $1\cdot K\cdot 1=K$.

Это свойство даёт возможность в дробях фактически заменять более сложные бесконено-малые на более простые, как правило, на степенные.

ЛЕКЦИЯ № 11. 14. 11. 2017

Объединим ещё ряд некоторых свойств в одну теорему.

Теорема.

1. Сумма конечного числа бесконечно-малых есть бесконечно-малая.
2. Произведение бесконечно-малой и ограниченной является бесконечно-малой функцией.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ функция $f(x) - A$ бесконечно-малая.

Доказательство.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_i(x) = 0$ для всех i от 1 до n, то

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\alpha_1 + ...\alpha_n\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha_1 + ... + \lim\limits_{x \to x_0} \alpha_n = n \cdot 0 = 0$.

2. Пусть $\alpha(x)$ бесконечно-малая, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Пусть $\beta(x)$ ограниченная, т.е. $|\beta(x)| < C$. Предел равен 0, означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $V(x_0)$, что в ней выполняется $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, то есть $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Но тогда $|\alpha(x)\beta(x)| < \varepsilon \cdot C = \varepsilon_1$. В таком случае можно сказать, что для заранее выбранной константы ε_1 существует окрестность, в которой верно $|\alpha(x)\beta(x) - 0| < \varepsilon_1$, то есть для произведения предел 0.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $V(x_0)$, что в ней выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$. Переобозначим $g(x) = f(x) - A$. Тогда $|g(x)| < \varepsilon$, это равносильно тому, что $|g(x) - 0| < \varepsilon$. Таким образом, для функции $g(x) = f(x) - A$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $V(x_0)$, что в ней $|g(x) - 0| < \varepsilon$, т.е. верно определение предела, причём предел это константа 0. Обратно (достаточность). Если $|g(x) - 0| < \varepsilon$ то $|g(x)| < \varepsilon$ и тогда $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть предел функции $f(x)$ есть константа A.

Замечание. С помощью п.2. этой теоремы можно вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$, несмотря даже на то, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$, где одна бесконечно-малая а вторая ограниченная. Следовательно, этот предел равен 0. Несмотря на то, что используется та же самая функция, это не имеет прямого отношения к «1-му замечательному пределу», здесь нет отношения бесконечно-малых.

Главная часть бесконечно-малой.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{C(x-x_0)^k}=1$ то функция $C(x-x_0)^k$ называется ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ бесконечно-малой $\alpha(x)$.

Фактически, это степенная функция, эквивалентная данной $\alpha(x)$. Если найти коэффициент C и степень k, то мы найдём такую степенную функцию, график которой наилучшим образом (среди всех степенных) похож на график функции $\alpha(x)$ в окрестности точки.

Пример. Найти главную часть бесконечно-малой $\alpha(x)=x\sin\left(x^2\right)$ в точке 0.

Решение. Так как точка 0, то $(x-x_0)=x$, то есть главная часть имеет вид Cx^k. Запишем отношение данной бесконечно-малой и «эталонной» степенной. Нужно потребовать, чтобы этот предел был 1, ведь мы ищем именно эквивалентную бесконечно-малую.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\left(x^2\right)}{Cx^k}=1$. Преобразуем выражение с целью его упростить. Домножим и поделим на x^2, этим мы фактически можем заменить $\sin(x^2)$ на x^2. Параметры C и k пока просто переписываем, не меняя их в процессе преобразований.

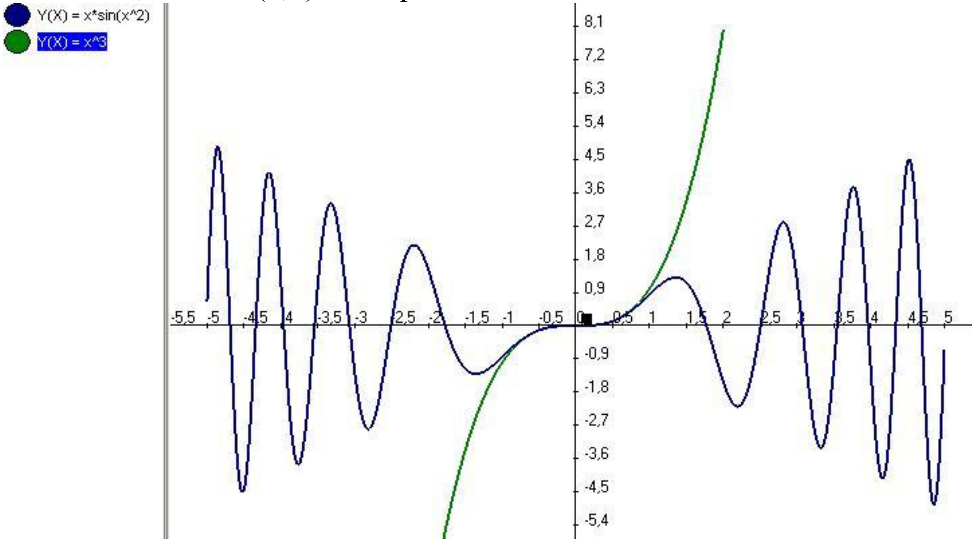
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(x^2\right)}{Cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\frac{x^2x}{Cx^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{Cx^k}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{Cx^k}=1.$$

Полное сокращение всех x будет лишь в случае k=3, а иначе предел 0 или ∞, и не будет равен 1.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C}=1$, тогда C = 1. Итак, $Cx^k = 1x^3$.

Ответ. $\gamma(x)=x^3$.

Ниже изображены графики бесконечно-малой и её главной части: как видно, вблизи (0,0) они практически неотличимы.



Задачи на поиск главной части по методам и сложности похожи на вычисление lim, но фактически это обратная задача: при вычислении предела внутри нет параметров, а предел неизвестен, здесь же наоборот, известно, что предел равен 1, но внутри выражения неизвестные параметры C, k, которые надо найти, так, чтобы предел был равен 1.

§ 4. Непрерывность и точки разыва.

Односторонние пределы.

Бывают такие ситуации, когда функция определена только при $x > a$ или $x < a$. В этом случае тоже можно вычислять предел, но область определения пересекается только с правой или левой полуокрестностью.

Определение. Число A называется правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если: $\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0$, так, что при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполняется: $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

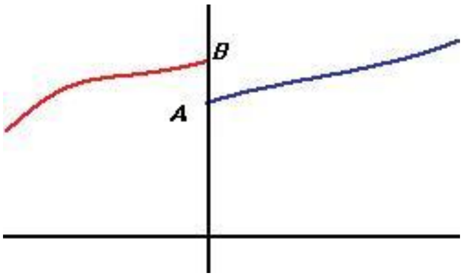
Аналогично,

Определение. Число A называется левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если: $\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0$, так, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется: $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Односторонние пределы очень полезны при изучении функций, так как существуют такие ситуации, когда график функции слева и справа от некоторого $x = a$ стремится к разным ординатам.

Если односторонние пределы равны между собой, то существует предел функции в точке, если они разные, то предел не существует: ведь тогда $|f(x) - A| < \varepsilon$ для одной полуокрестности, но для второй полуокрестности эта разность не может быть меньше чем ε, она будет $|A - B|$.



Представьте себе физический пример: температура 0 градусов. Если она понижается, проходя через 0, то есть до этого была положительна, то вода ещё не замёрзла, снега на улице нет. Если же она повышается и проходит через 0, например в марте, ситуация совсем иная - снег ещё не успел растаять. Как видно, ситуация при 0 градусов сильно зависит от того, какая температура была до этого.

Замечание. Одним из методов при работе с односторонними пределами может быть такая замена: $t = \dfrac{1}{x - x_0}$. В этом случае мы перейдём от пределов типа $\lim\limits_{x \to x_0 + 0}$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0}$ к двум пределам такого типа: $\lim\limits_{t \to +\infty}$ и $\lim\limits_{t \to -\infty}$.

Определение. Функция называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке определено значение $f(x_0)$, и оно совпадает как с правосторонним так и с левосторонним пределами:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Классификация: устранимый разрыв, разрыв 1 и 2 рода.

Устранимый разрыв.
Точка разрыва называется устранимой, если односторонние пределы равны $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ причём равны конечному числу, но не существует $f(x_0)$ или оно не равно пределу.

Пример. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Формально $\dfrac{\sin 0}{0}$ вычислить нельзя, но предел есть, он раен 1. Получается график с одной выколотой точкой.

Пример. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Точка $x = 3$ - точка устранимого разыва.

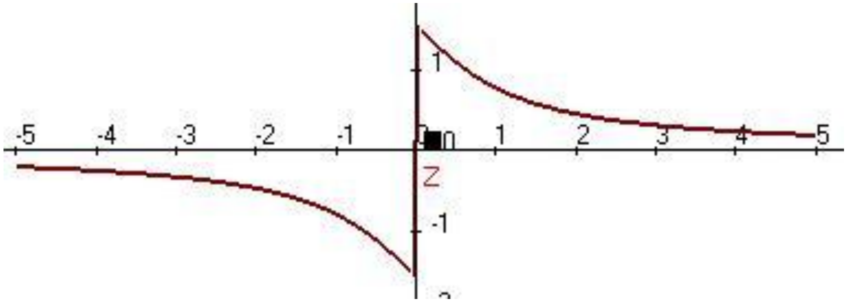
Значение не существует, но предел есть.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6.$$

Можно доопределить значение функции в одной точке, то есть устранить разрыв. Поэтому он и называется устранимым.
Неустранимые разрывы делятся на 2 типа:

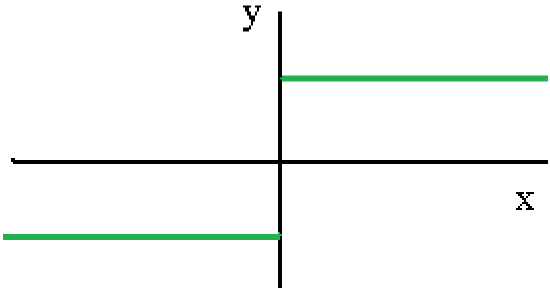
Разрыв 1-го рода (скачок).
Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = B$, $A \neq B$.
Вопрос о значении функции в точке в этом случае не обсуждается, это не имеет смысла, так как всё равно предел не существует, то есть непрерывности быть не может.

Пример. $f(x) = arctg\dfrac{1}{x}$.



Односторонние пределы для этой функции таковы:
$\lim\limits_{x\to+0} arctg\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} arctg(t) = +\dfrac{\pi}{2}$, т.к. если $x \to 0$ и при этом $x > 0$ то $\dfrac{1}{x} \to +\infty$.
$\lim\limits_{x\to-0} arctg\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to-\infty} arctg(t) = -\dfrac{\pi}{2}$, т.к. если $x \to 0$ и при этом $x < 0$ то $\dfrac{1}{x} \to -\infty$.

Пример. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Здесь при любом $x > 0$ верно $f(x) = 1$, а при любом $x < 0$ верно $f(x) = -1$. В точке 0 односторонние пределы различны.



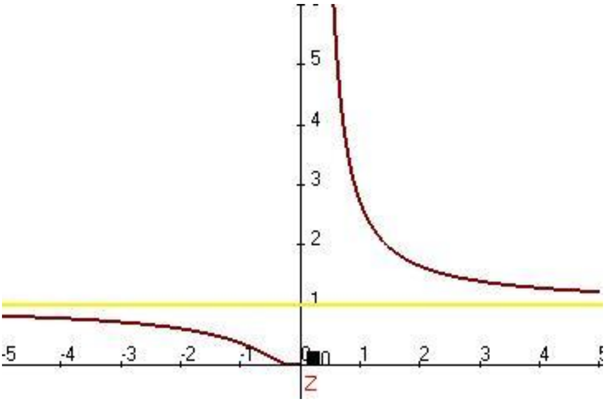
Разрыв 2-го рода.
Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или ∞, точка называется точкой разрыва 2-го рода.

Примеры $f(x)=\dfrac{1}{x}$ точка разрыва $=0$

$f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ точки разрыва 2 и 3.

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Оба односторонних предела равны $+\infty$, разрыв именно 2 рода а не устранимый, несмотря на совпадение, ведь здесь не конечные числа, а бесконечность. Поэтому нет такой точки вида (0,C) на какой-либо конечной высоте, чтобы эта точка устраняла разрыв.

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. Предел слева равен 0, справа $+\infty$. График:

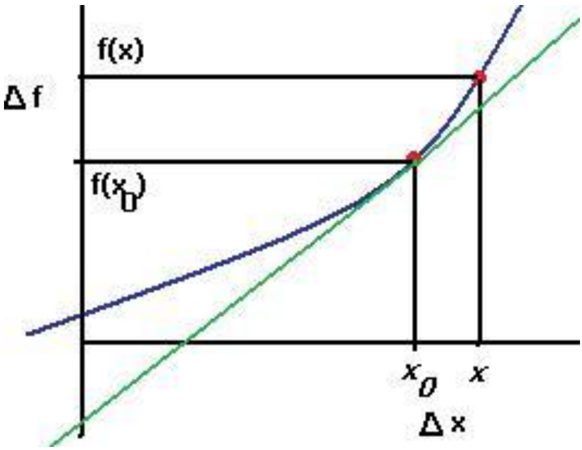


ГЛАВА 6. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

§1. Введение, основные методы.

Возьмём две соседние точки на графике некоторой функции. Разность их абсцисс обозначим Δx, а разность ординат Δf. Если соединить точки, то получим прямоугольный треугольник, его катеты это именно Δx и Δf.

Если сближать точки, то можно заметить, что катеты Δx и Δf уменьшаются, но угол, в общем случае, не уменьшается к нулю, а стабилизируется. То есть, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ равный некоторому числу. На этом и основана вся тема, которую мы сейчас будет изучать.



Определение 1.

Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, т.е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

В других обозначениях это же самое можно записать так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Определение 2.

Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение функции можно представить в виде:

$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$, где α - бесконечно малая более высокого порядка, чем 1-й.

Бывают не дифференцируемые функции, например $|x|$ *не дифф. в нуле. Дело в том, что там нет общей касательной для двух частей графика, правой и левой. Какую бы прямую мы ни провели через (0,0), она не будет касательной к графику функции. Если наклон +45*^{0} *то есть* $y = x$ *то разность между ней и левой половиной графика не будет бесконечно-малой: эта прямая является касательной к одной части графика, то она перпендикулярна другой ветви этого же графика.*

Взаимосвязь понятий «дифференцируемость» и «производная»:
Теорема. Если $f(x)$ функция одной переменной, т.е. $f: R \to R$, то существует конечная производная в точке $x_0 \Leftrightarrow$ функция дифференцируема в точке x_0.

Доказательство. **Необходимость.**

Пусть существует производная в точке, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Докажем, что функция дифференцируема. Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ равен числу $f'(x_0)$, то сама эта функция, которая под знаком предела, представима в виде: это число + какая-то бесконечно малая. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \beta(\Delta x)$.

Если домножить на Δx то $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$. Здесь обозначим $\beta(\Delta x) \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x)$, причём эта α
более высокого порядка, ведь на уже существующую бесконечно-малую домножается ещё одна, а именно Δx, т.е. порядок возрастает на 1. Получили $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$. Определение дифференцируемости выполняется.

Достаточность. Пусть f дифференцируема. Выполняется равенство $\Delta f = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)$. Разделим его на Δx: получим $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$.

Перейдём к пределу. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$.

Но ведь $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая более высокого порядка, то есть там содержится Δx не в первой, а какой-то более высокой степени.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Осталось $A = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Заодно доказали, что константа А в этом равенстве - это и есть производная в точке, то есть $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Определение. Главная линейная часть приращения функции, а именно $f'(x_0)\cdot\Delta x$, называется ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ функции $f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл. Так как соотношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ это тангенс угла наклона секущей, но секущая в пределе стремится к касательной, то производная равна тангенсу угла наклона касательной в графику в точке.

Для векторной функции физический смысл - скорость. Если дано $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то вектор $v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ это скорость.

Этот вектор направлен по касательной к траектории.

Скорость - векторная величина, а скалярная «скорость» измеряемая в км/ч, показываемая в спидометрах на транспорте, это на самом деле - МОДУЛЬ скорости.

Примеры производных для некоторых известных функций.

$(x^n)' = nx^{n-1}$ в частности $(x^2)' = 2x$.

Докажем, например, что производная для 2-й степени вычисляется именно по этой формуле.

По определению, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ для этой функции надо записать так: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

преобразуем: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)=2x$.

Итак, $(x^2)'=2x$.

Степенные функции. $(x^a)'=ax^{a-1}$.

В частности, отсюда можно вывести:

1) $\sqrt{x}'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. 2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

Действительно,

Пусть $a=1/2$. Тогда $\left(x^{1/2}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-1/2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пусть $a=-1$. Тогда $\left(x^{-1}\right)'=(-1)x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

Докажем, что $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. $(\ln x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$ Так как следующие бесконечно малые эквивалентны: $\ln(1+a)\approx a$ то получим, заменяя на эквивалентную: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$.

ЛЕКЦИЯ № 12. 21. 11. 2017

Основные правила дифференцирования.

Сумма и разность: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Произведение: $(uv)' = u'v + v'u$. Частное: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Композиция: $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Запомнить можно так: для произведения между $u'v$ и $v'u$ знак плюс, а для частного минус. Но в формуле частного есть ещё лишнее v^2 в знаменателе. Почему же производная произведения это не просто $u'v'$? И откуда появляется ещё и v^2 в знаменателе для частного? Эти формулы вовсе не являются очевидными. Сейчас докажем формулы для произведения и частного.

Доказательство формулы $(uv)' = u'v + v'u$.

Запишем производную по определению.

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

Но тут есть сдвиг на Δx и по u, и по v. Добавим и вычтем такое слагаемое, в котором сдвиг по одной функции есть, а по второй нет:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

теперь слагаемых стало 4, но зато их можно сгруппировать по два, и даже разбить на две дроби, так, что дельта прибавляется только на одном из мест.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

Теперь можно вынести тот множитель, который одинаков в каждой разности:

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Видно, то, что осталось в дробях, это и есть производные для u или v соответственно, т.е. в итоге:

$v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$. Итак, $(uv)' = u'v + v'u$.

Докажем формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$**.**

Запишем по определению: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$.

В том выражении, которое есть в числителе, приведём к общему знаменателю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}.$$

Аналогично как в прошлом случае, добавим и вычтем слагаемое, чтобы получилось 4 слагаемых а не два, и чтобы в каждой паре был сдвиг только по одной из функций. Можно для этой цели прибавить и отнять, например, $u(x)v(x)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

Если во втором пределе переставить два слагаемых и при этом, конечно, добавить знак минус, то часть, содержащая дельта-икс, получится раньше, что и приведёт к записи точь в точь, как в определении производной для v.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$= \quad u'(x)\frac{v(x)}{v(x)v(x)} - v'(x)\frac{u(x)}{v(x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Докажем закон дифференцирования композиции:
$u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.
Есть функция $f(x)$, равная $u(v(x))$. Если она дифференцируема, то $\Delta f = u'(v(x) - v(x_0)) \cdot \Delta v + \alpha$, где α бесконечно-малая более высокого порядка, чем 1. Распишем ещё и Δv, ведь она тоже дифференцируемая функция.
$\Delta f = u'(v(x_0)) \cdot \Delta v + \alpha = u'(v(x_0)) \cdot \left(v'(x_0) \cdot \Delta x + \beta\right) + \alpha =$
$u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)\Delta x + \left(\beta \cdot u'(v(x_0)) + \alpha\right)$. В последней скобке бесконечно-малые более высокого порядка, а коэффициент перед Δx это $u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$.

Пример. Найти производную тангенса (мы фактически докажем одну из формул таблицы интегралов).

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Производные высших порядков.
Если мы вычислили 1-ю производную, то получили новую функцию. Но ведь для неё тоже существует производная. $f''(x) = (f'(x))'$.
Вторая производная - это производная от первой производной.
2-я производная в точке определяется так:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$$

Пример. Найти вторую производную $(tgx)''$.

Решение. Сначала найдём 1-ю производную. $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

А теперь есть 2 способа. Во-первых,можно рассматривать как дробь, и вычислять по правилу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{0\cdot\cos^2 x - 1\cdot(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{-2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

А во-вторых, можно эту функцию рассматривать в виде $\cos^{-2} x$, то есть композицию $(\cos x)^{-2}$ и тогда:

$$\left((\cos x)^{-2}\right)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = -2(\cos x)^{-3}(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Как мы видим, двумя способами получаем одно и то же.

Пример. Производная 4 порядка для синуса или косинуса - это исходная функция. $\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x$.

Производная порядка n обозначается $f^{(n)}(x)$. Здесь n в скобках это не степень! Такое обозначение ввели, чтобы не писать много штрихов, ведь их будет трудно различить. Если производная выше 3 порядка, то лучше использовать такое обозначение.

Для n-й производной произведения функций справедлива **формула Лейбница:** $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ число сочетаний из n по k.

Производная функции $f: R^1 \to R^n$.

Пусть дана векторная функция, отображающая одну переменную в n переменных . $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$.

Координатные функции дифференцируются независимо друг от друга:

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x)=\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}.$$

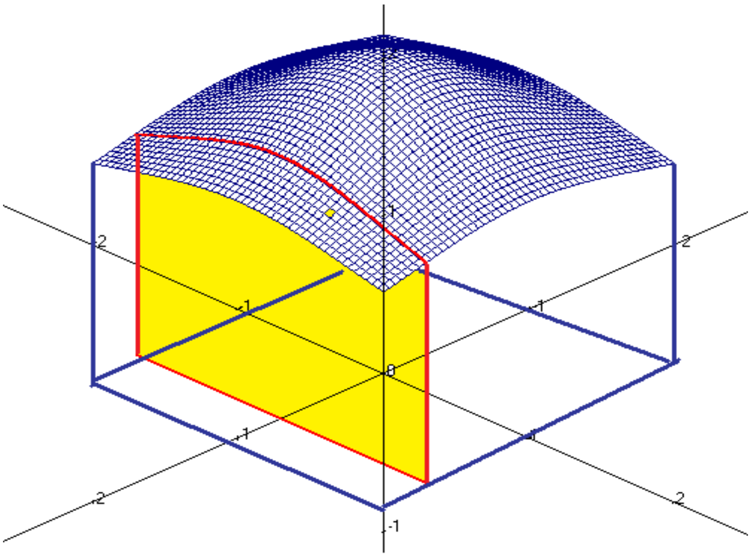
Как правило, это применяется в физических задачах на движение.

Там 3 координаты это функции от времени, то есть $r(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ координаты в момент времени, а производная это вектор скорости: $v(t)=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

Пример. $f(x)=\begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ тогда $f(x)=\begin{pmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$.

§2. Частные производные и градиент.

Мы рассмотрели случай $f: R^1 \to R^n$. Как видим, там метод дифференцирования практически ничем не отличается от случая скалярных функций, просто есть n компонент. А теперь рассмотрим производные для функций нескольких переменных $f: R^n \to R^1$. Пусть например, дана функция $f(x, y)$, или $f(x, y, z)$. Приращение аргумента в этом случае задаётся не однозначным образом: ведь можно задать приращение каждому из аргументов, которых несколько. Так, например, для $f(x, y)$ можно фиксировать y и рассмотреть функцию $f(x, y_0)$. Это уже будет функция одной переменной. График функции $f: R^2 \to R^1$ это поверхность, тогда при фиксировании $y = y_0$ получается сечение поверхности вертикальной плоскостью, то есть кривая.



Можно задать приращение только для x, и тогда получим такое понятие, как частная производная.

Определение. Производной функции f по переменной x называется предел:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} .$$

Кроме f'_x ещё применяют такое обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по y, ведь можно взять вторую точку, отступив в направлении другой оси.

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} .$$

Геометрический смысл: тангенс угла наклона касательной к кривой, получающейся в одном из сечений.

Физический смысл. Если функция - это температура воздуха, то например, при движении самолёта строго на юг температура за бортом будет возрастать, а при движении на запад или восток почти неизменна. Как видим, частные производные в двух перпендикулярных направлениях могут сильно отличаться.

Метод вычисления частных производных.

Если бы вам нужно было вычислить производную функции, содержащей параметр С, например $(Cx^2)'$, то понятно, что $(Cx^2)'$ = $2Cx$. Так вот, аналогично, если функция нескольких переменных, то при дифференцировании по одной из них, остальные в роли параметров, то есть вы можете мысленно «заморозить» их или даже переобозначить через А или С, а после вычисления производной, разморозить или переобозначить обратно.

Если $f(x, y) = x^2 y^3$ то $f'_x = (x^2 y^3)'_x = 2xy^3$, $f'_y = (x^2 y^3)'_y = 3x^2 y^2$.

Если объединить частные производные в один вектор, то получим

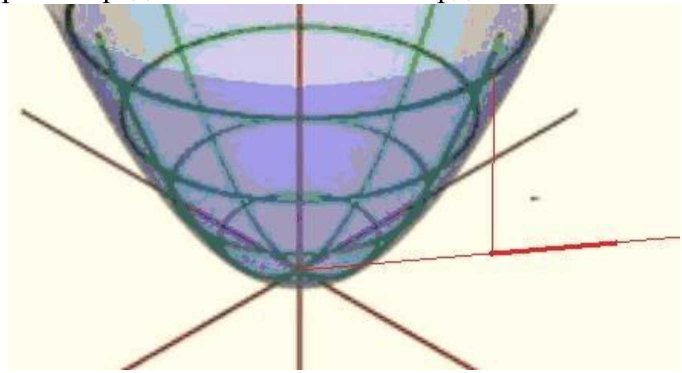
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

этот вектор называется **градиентом** функции.

Кроме ∇f , применяется обозначение $grad(f)$.

Если после вычисления частных производных фиксировать переменные, то есть взять конкретную точку, то получится градиент в точке. Это вектор, состоящий из чисел, а не функций.

Пример. Пусть $f(x,y)=x^2+y^2$. Соответствующая поверхность - эллиптический параболоид. Градиент поверхности это вектор $(2x, 2y)$. Теперь, если фиксировать точку (1,0) то получим, что градиент равен (2,0) а если точку (1,1) то (2,2) и т.д. Градиент для этой функции всегда направлен радиально от начала координат.

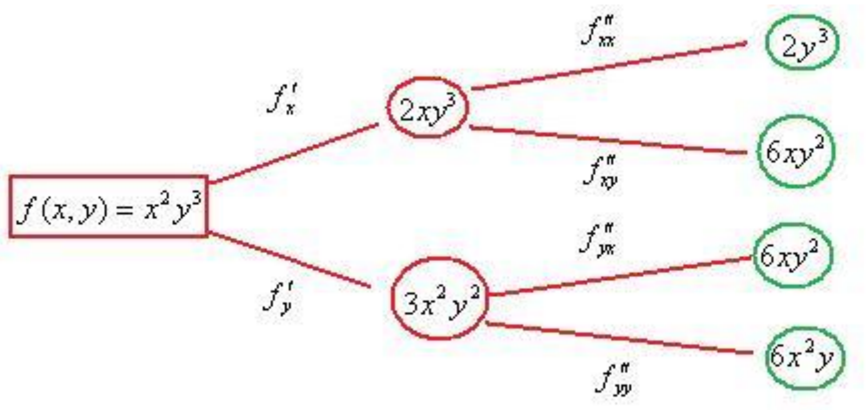


И действительно, если точка находится под этой поверхностью, то она должна двигаться в направлении от центра, чтобы рост высоты поверхности над ней происходил быстрее всего. А для неявно заданной окружности, этот вектор как раз и является перпендикуляром. Заметим, что градиент ортогонален окружности, то есть горизонтальному сечению.

Старшие производные.

После дифференцрования по той или иной переменной, мы получаем снова функцию от тех же нескольких переменных. Но ведь её снова можно продифференцровать по одной или другой переменной. Таким образом, получается n^2 возможностей определить какие-либо вторые производные, например, если две переменных, то вторых производных будет четыре: f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.

Покажем их нахождение в виже схемы:



Кстати, смешанные вторые производные f''_{xy}, f''_{yx} всегда совпадают.

Также применяются и такие обозначения:

$$f''_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad f''_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Из 2-х производных можно образовать матрицу:

$$f''=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}.$$

Здесь также можно найти 8 третьих производных, 16 четвёртых и т.д.

Кстати, часть из них может быть и 0, так, $f'''_{xxx}=(2y^3)'_x=0$.

Это был пример с $f: R^2 \to R^1$. А если $f: R^3 \to R^1$, то градиент из 3 координат, тогда есть 9 вторых смешанных частных производных.

Производная функции $f: R^n \to R^n$.

Пусть дано n функций, каждая из них от n переменных:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$$

тогда возникает n^2 возможностей вычислить различные частные производные. Их можно записать в виде матрицы. В случае векторной функции векторного аргумента уже даже первые производные образуют матрицу.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица и называется производной матрицей функции f.
В каждой из её строк расположен градиент какой-либо из координатных функций f_i.

Пример. Найти производную матрицу для функции $\begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (xy)'_x & (xy)'_y \\ (x+y)'_x & (x+y)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Композиция $F(x(t), y(t))$ и формула полной производной

Пусть задана композиция типа $R^1 \to R^2 \to R^1$, а именно $F(x(t), y(t))$.

Фактически, эта функция является функцией от t (если выразить переменные x,y через t). Следовательно, можно вычислить производную по t. Посмотрим, как эта производная взаимосвязана с частными производными. По правилу дифференцирования композиции,

$$\frac{dF}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

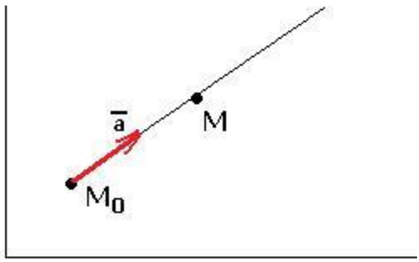
что в других обозначениях можно записать так: $\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t)$.

Аналоличная формула верна и в случае 3 координат.

Производная по направлению.
В определении частных производных, мы рассматривали приращение аргумента в виде Δx или Δy. Но ведь от исходной точки можно отступить не только в направлении координатных осей, но и в произвольном направлении. Если рассмотреть разность значений функции в какой-то паре точек, расположенных произвольно, а не вдоль оси, то есть $M_0 M \parallel \bar{a}$ и затем приближать 2-ю точку к первой, и при этом делить Δf на расстояние между точками, получим предел

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0 M|}$$

называется «производная по направлению». Будем считать, что вектор нормирован, то есть $|a| = 1$. Только в этом случае мы получим правильный результат, ведь нужно измерять скорость изменения функции именно в расчёте на единицу длины при движении по этой прямой.



Если это направление соответствует какой-либо из координатных осей, то как раз и получаются частные производные, которые изучили раньше.

Формула взаимосвязи производной по направлению и градиента

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\nabla f, a).$$

Доказательство. Обозначим координаты вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$.
Точка М произвольная, её координаты (x, y, z), а точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
Так как $M_0M \parallel \bar{a}$ то их координаты пропорциональны, то есть
$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$, что также записывается в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t \\ z &= z_0 + a_3 t \end{aligned}$$

Это функция $R^1 \to R^3$.

Рассмотрим производную композиции функций $R^1 \to R^3 \to R^1$, а именно $t \to (x, y, z) \to f$. Одно число (время t) сначала отображается в тройку чисел (координаты точки в момент времени) а затем функция f отображает эти 3 числа снова в одно число.
Производная внешней функции (которая действует последняя) это вектор-строка градиент функции f.
Производная внутренней функции (которая действует первая) это вектор-столбец.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

Но ведь $x' = (x_0 + a_1 t)' = a_1$, аналогично $y' = a_2$ и $z' = a_3$. Тогда

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot a_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot a_3$$

Но это и есть скалярное произведение градиента и вектора a.

Отсюда виден **геометрический смысл** градиента: это вектор, при движении в направлении которого рост функции наиболее быстрый. Если движение в перпендикулярном направлении, то рост функции будет нулевым. Если под большим увеличением рассмотреть какой-то небольшой кусочек поверхности, то он выглядит почти как наклонная плоскость, а для наклонной плоскости при движении в ту сторону, куда она наклонена, наибольшая скорость роста высоты, в перпендикулярном направлении - высота не изменяется, а при движении в противоположном - уменьшается.

Замечание. Если направление a - по координатной оси, то производная по направлению как раз и совпадает с какой-либо из частных производных. Если вектор вдоль оси Ox, то $a = (1,0,0)$, скалярное произведение этого вектора и градиента $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ это

$$1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

ЛЕКЦИЯ № 13. 28. 11. 2017

Теорема. 1) Пусть кривая неявно задана уравнением $F(x, y) = 0$, точка $M_0 \in$кривой. Тогда градиент $\nabla F(M_0)$ ортогонален этой кривой.

2) Пусть поверхность неявно задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, точка $M_0 \in$поверхности. Тогда градиент $\nabla F(M_0)$ ортогонален этой поверхности.

Доказательство. 1) Кривая может быть задана также и параметрически. Тогда получается функция $F(x(t), y(t)) = 0$, то есть F в итоге есть функция от t, она тождественно равна 0. Тогда и её производная по t тоже 0.

$\frac{dF}{dt} = 0$. Запишем по формуле полной производной:

$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) = 0$. Но ведь это и есть скалярное произведение векторов $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ и $v = \left(x'(t), y'(t)\right)$.

2) Для поверхности. Рассмотрим произвольную кривую, которая целиком лежит на поверхности. Её можно задать параметрическими уравнениями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Вектор, лежащий на касательной к этой кривой в точке M_0, это $v = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$ - вектор, который в физике называется вектором скорости. Заметим, что все такие касательные векторы для кривых, лежащих на данной поверхности и проходящих через M_0, принадлежат касательной плоскости.

Так как $F(x, y, z) = 0$, а $x(t), y(t), z(t)$ такие, что точка принадлежит поверхности при любом t, то

$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, то есть F, как функция от t, получается тождественно равной 0.

Тогда и её производная по t тоже тождественный 0.

$\frac{dF}{dt} = 0$. Запишем по формуле полной производной:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = 0$$

но ведь это и есть скалярное произведение векторов $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ и $v = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$.

Получается, что $\left(\nabla F, v\right) = 0$, то есть градиент ортогонален к касательной для любой кривой, проходящей через точку M_0. В итоге, доказали, что градиент ортогонален касательной плоскости, что и означает, что он ортогонален поверхности в данной точке.

Производная функции, заданной неявно.

Бывают случаи, когда известно неявное уравнение кривой, а явное получить чрезвычайно сложно или невозможно. Однако и в этом случае есть возможность найти тангенс угла наклона касательной в любой точке, принадлежащей этой кривой, причём можно вообще обойтись без явного выражения.

Докажем формулу: $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Доказательство. Пусть $F(x,y)=0$ - неявное уравнение кривой. Переменная y явно не выражена, однако теоретически, какая-то функция $y(x)$ существует, просто нам она неизвестна. Тогда, тем не менее, можем записать: $F(x,y(x))=0$. Вычислим производную по формуле полной производной, здесь просто одна переменная, а именно x, совпадает с параметром t.

$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$, то есть $\frac{\partial F}{\partial x}1+\frac{\partial F}{\partial y}y'_x=0$, то есть $F'_x+F'_y y'_x=0$,

тогда $F'_y y'_x=-F'_x$, и как следствие, $y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

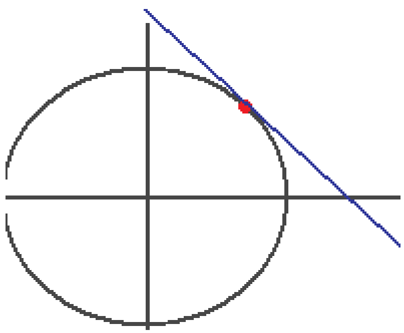
Пример. Найти тангенс угла наклона касательной к окружности $x^2+y^2=2$ в точке $(1,1)$.

Неявное уравнение $F(x,y)=x^2+y^2-2=0$.

$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{(x^2+y^2-2)'_x}{(x^2+y^2-2)'_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$, что в данной точке равно

$-\frac{1}{1}=-1$.

Эта точка и касательная отмечены на чертеже: конечно, и так видно, что касательная наклонена под углом -45 градусов, то есть производная -1.

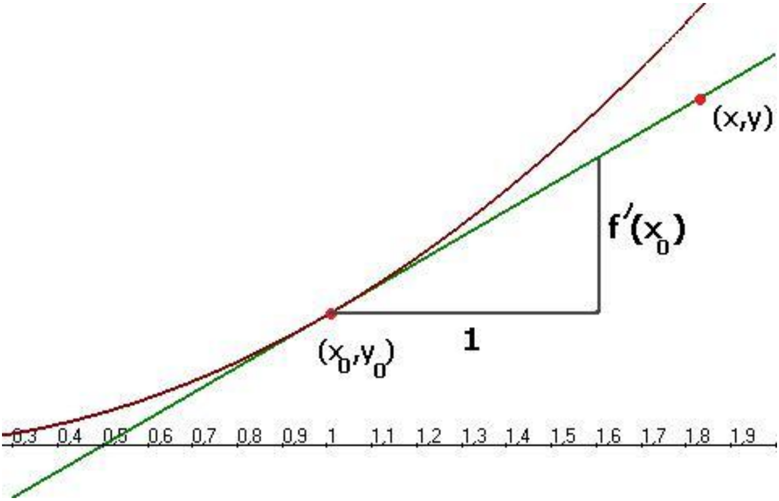


Для сравнения, если бы не было этой формулы, можно было сначала выразить явно: $y=\sqrt{2-x^2}$, затем найти производную $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$ и подставить $x = 1$, тогда $\frac{-1}{\sqrt{2-1}} = -1$.

§ 3. Уравнение касательной, формула Тейлора.

Уравнение касательной. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство.



Рассмотрим треугольник, его катеты равны Δx и $f'(x_0)\cdot\Delta x$, так как тангенс угла наклона касательной это $f'(x_0)$. Направляющий вектор для прямой направлен в точности по гипотенузе. При этом, мы можем пропорционально увеличить этот треугольник, тогда катеты будут такие: 1 и $f'(x_0)$.Соответственно, направляющим вектором можем считать такой вектор: $(1, f'(x_0))$.

Возьмём теперь точку (x, y) где-нибудь на касательной. Она принадлежит касательной в точности тогда, когда вектор M_0M коллинеарен направляющему вектору этой прямой, т.е. $(x - x_0, y - y_0) \parallel (1, f'(x_0))$.

Запишем пропорцию координат так, как это всегда делали в теме «аналоитическая геометрия». Получается каноническое уравнения прямой: $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{f'(x_0)}$. А теперь просто умножим на $f'(x_0)$.

Получается $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Замечание. Уравнение касательной можно запомнить в виде $\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)$ причём, так запомнить легче.

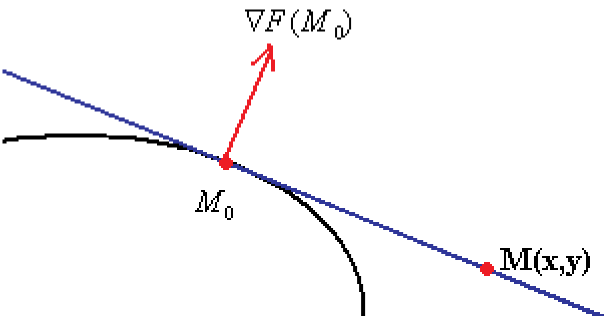
Пример. Найти касательную к графику $y=x^2$ в точке $x_0=1$

$f(1)=y_0=1$, $f'(x)=2x$, $f'(1)=2$. Уравнение $y-1=2(x-1)$, то есть $y=2x-1$.

Если кривая задана неявно, то уравнение касательной в точке M_0 может быть тоже записано в виде:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0$$

Доказательство. Рассмотрим кривую и точку M_0 на ней. Градиент в этой точке ортогонален поверхности.



Тогда строим уравнение прямой так, как это делали в аналитической геометрии: вектор $(x-x_0, y-y_0)$ ортогонален $\nabla F(M_0)$, то есть их скалярное произведение 0. Тогда получается именно такое уравнение:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0.$$

Взаимосвязь 2 форм записи уравнения касательной.

Полученное выше уравнение действительно является другой формой того уравнения касательной, которое мы выводили раньше, а именно $(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Покажем это подробнее.

Пусть $y=f(x)$ явное уравнение кривой. Можно легко свести его к неявному: $y-f(x)=0$. Функция $F(x,y)$ это как раз и есть $y-f(x)$. Тогда $F'_x(M_0)=-f'(x_0)$, $F'_y(M_0)=1$, значит, уравнение

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0$$

примет вид: $-f'(x_0)(x-x_0)+(y-y_0)=0$, то есть $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Также можно и наоборот, в уравнении $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ записать производную по формуле $y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$. Тогда $y-y_0=-\dfrac{F'_x}{F'_y}(x-x_0)$

из чего следует $F'_y(y-y_0)=-F'_x(x-x_0)$, что и приводит к уравнению $F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)=0$.

Выведем уравнение касательной плоскости к поверхности.

Теперь, когда нам известен вектор нормали к поверхности, а именно, что $n\,||\,\nabla F$ (градиент расположен именно по нормали), можно воспользоваться тем методом, который применяли в геометрии для вывода уравнения плоскости по точке и нормали. Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, нормаль $\nabla F(M_0)=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0)\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)\quad \dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0)\right)$.

Это можно записать, используя более короткие обозначения: $\nabla F(M_0)=\left(F'_x(M_0)\quad F'_y(M_0)\quad F'_z(M_0)\right)$.

Если взять произвольную точку $M(x,y,z)$ в касательной плоскости, то вектор M_0M ортогонален ∇F.

Тогда скалярное произведение векторов $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ и $\left(F'_x(M_0)\quad F'_y(M_0)\quad F'_z(M_0)\right)$ равно 0.

Итак, уравнение касательной плоскости:

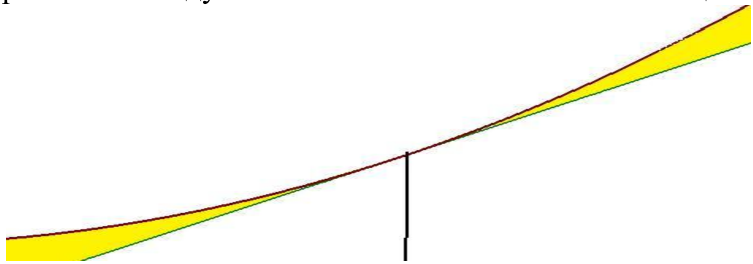
$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

Формула Тейлора.

Согласно уравнению касательной, ординату точки на касательной можно записать так: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, то есть $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Как можно сразу заметить, в точке x_0 она совпадает со значением функции, то есть $f(x_0)$. Чем дальше удаляемся от точки x_0, тем разнность между ординатой точки на касательной и точки на графике становится больше. Обозначим эту разность через α:

$\alpha(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)$. Так как она стремится к 0 при $x \to x_0$, то можно сказать, что $\alpha(x)$ является бесконечно малой в x_0.

Вот эта разность между f и касательной показана жёлтым цветом:



Если изобразить график $\alpha(x)$ то он похож на параболу. Как сейчас увидим, это не случайно, там действительно появится 2-я степень. Если выделить главную часть этой бесконейно малой $\alpha(x)$, то она будет, по крайней мере, не 1-го порядка, а более высокого, потому что первая степень полностью учтена в том слагаемом, которое из уравнения касательной. Если далее выделять главную часть каждой следующей оставшейся бесконечно-малой до n-го шага, то f будет задана приближённо с помощью многочлена n-й степени.

Формула Тейлора:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Если проджолить этот процесс до бесконечности, получили бы

ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

При этом уравнение касательной - это самая короткая из формул Тейлора, это самое грубое приближение, где учтена только 1-я степень. Если начальная точка, в окрестности которой ищется разложение на степенные функции, это $x_0 = 0$, то

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

(называется формулой Маклорена).

Выведем формулу Тейлора, то есть докажем, что коэффициенты имеют именно такой вид: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Допустим, что функция представлена в виде некоторого степенного ряда с неизвестными коэффициентами:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \ldots$$

Если присвоить $x = x_0$, то все слагаемые равны 0, кроме первого, то есть получаем $f(x_0) = a_0$. Теперь 1 раз продифференцируем всё равенство.

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots$ и снова присвоим $x = x_0$, получим $f'(x_0) = a_1$.

Далее, $f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + \ldots$, откуда

$f''(x_0) = 2a_2$, т.е. $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2} = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$.

Далее, $f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) + ...$, откуда

$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3$, т.е. $a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}$.

Аналогично, $f^{(4)}(x_0) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4$, т.е. $a_4 = \dfrac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$ и так далее.

Примеры рядов Тейлора некоторых известных функций.

Пример. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + ...$

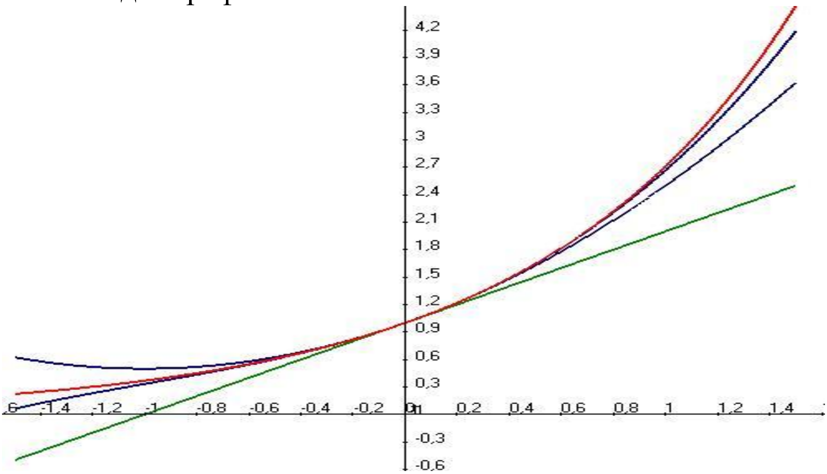
Выведем эту формулу. Рассмотрим несколько производных и затем их значения в точке 0:

$f(x)=e^x$ $f'(x)=e^x$ $f''(x)=e^x$ ...	$f(0)=1$ $f'(0)=1$ $f''(0)=1$ ...

тогда мы и получаем, что: $e^x = 1+1x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$ т.е

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Вот как выглядят графики многочленов и экспоненты:



Красным показан график экспоненты, зелёным - касательная, затем $1+x+\frac{x^2}{2}$ и $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

Как видно, уже даже для 3 степени погрешность очень мала.

Пример. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\ldots$

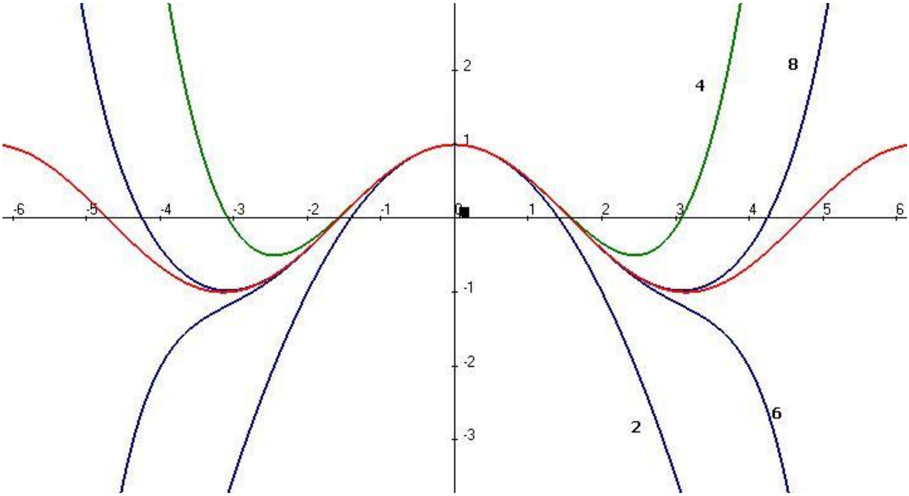
Выведем эту формулу. Рассмотрим несколько производных и затем их значения в точке 0:

$f(x)=\cos(x)$ $f'(x)=-\sin(x)$ $f''(x)=-\cos(x)$ $f'''(x)=\sin(x)$ ...	$f(0)=1$ $f'(0)=0$ $f''(x)=-1$ $f'''(x)=0$ ...

Далее 4 производная совпадает с $f(x)$ и повторение через каждые 4 шага. Подставим эти константы в формулу:

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+...+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$ и получим

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}...$ А вот как это всё выглядит на графике:



Красным цветом показан график $\cos(x)$.

Цифрой 2 помечен график функции $1-\dfrac{x^2}{2!}$ (в которой включены до второй степени включительно), цифрой 4 - график $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$, далее, кривая, помеченная «6» соответствует $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}$, а «8» это $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$. Как видим, чем больше степень, тем на большем промежутке наблюдается почти полное совпадение многочлена с косинусом. Если взять степени до 8-й, то совпадение происходит почти весь период от $-\pi$ до π.

Формула Тейлора для синуса выводится аналогичным образом.

Вывести формулу Тейлора для функции $f(x)=\sin x$ в точке $x_0=0$.

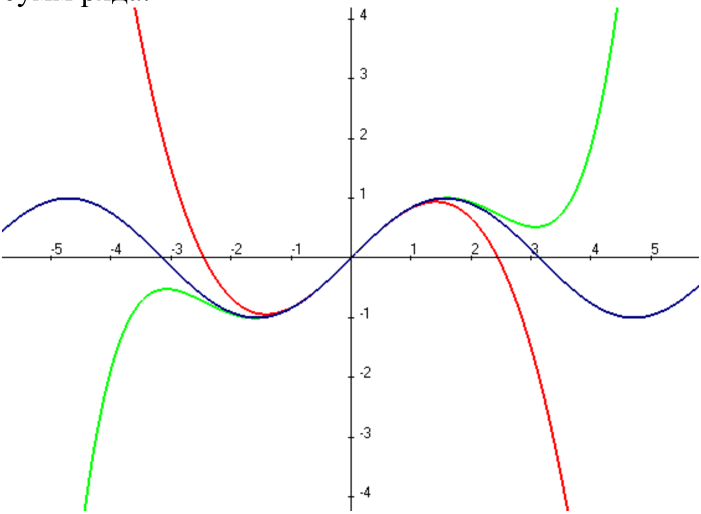
Решение. Найдём производные и их значения в нуле, до тех пор, пока они не начнут повторяться:

$f(x)=\sin(x)$ $f'(x)=\cos(x)$ $f''(x)=-\sin(x)$ $f'''(x)=-\cos(x)$ ...	$f(0)=0$ $f'(0)=1$ $f''(0)=0$ $f'''(0)=-1$ ...

Как и для косинуса, здесь 4 производная совпадает с $f(x)$ и повторение через каждые 4 шага. Подставим эти константы в формулу

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$$

Получаем $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\dots$ График синуса и частичных сумм ряда:



Синим цветом показан $\sin x$, красным кубическая парабола $x - \frac{x^3}{6}$,

а зелёным ещё более точное приближение $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Ряд Тейлора, метод его получения с помощью прогрессий.
Существует формула суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии $\frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots$.

Но мы ведь можем вынести первый член прогрессии за скобку, а также и из числителя дроби, то есть привести к виду, чтобы прогрессия начиналась с единицы. Поэтому проще запомнить формулу в таком виде: $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Пример. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$ функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Решение. Можем рассматривать в интервале $(-1{,}1)$ то есть $|x| < 1$.

Тогда $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Не проблема также, если в знаменателе не разность, а сумма.
Представим $x = -(-x)$, и тогда знаменатель прогрессии $q = -x$

Пример. Разложить в степенной ряд $\frac{1}{1+x}$ в окрестности $x_0 = 0$. Представим $x = -(-x)$, и тогда знаменатель прогрессии будет $q = -x$. Эта функция представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии, записанную в свёрнутом виде, т.е. мы по формуле должны развернуть её обратно в сумму.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n .$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \ .$$

Если константа не равна 1, то можно вынести константу за скобки, тогда $q=\frac{x}{5}$.

Пример. Разложить в степенной ряд $\frac{1}{5-x}$ в окрестности $x_0=0$.

Решение. Здесь константа не равна 1, тогда можно вынести константу за скобки, и тогда получится $q=\frac{x}{5}$. Мы можем пользоваться этой формулой при условии, что $\frac{|x|}{5}<1$, то есть $x\in(-5,5)$.

Итак, $\frac{1}{5-x}=\frac{1}{5\left(1-\frac{x}{5}\right)}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=\frac{1}{5}+\frac{x}{5^2}+\frac{x^2}{5^3}+...$

Ответ. $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=\frac{1}{5}+\frac{x}{5^2}+\frac{x^2}{5^3}+...$

Приложения формулы Тейлора

1. Приближённое вычисление значений функции. Во всех калькуляторах и компьютерах для вычисления функций используются разложения по формуле Тейлора, то есть там всегда запрограммирована последовательность коэффициентов Тейлора для известных функций, и происходит вычисление с помощью возведения в степени.

2. Нахождение производных высокого порядка. Допустим, нужно вычислить производную 10 порядка в точке 0 для функции, содержащей произведение, например $x^3\sin x$. Если просто считать производные до 10 порядка, и лишь затем фиксировать число, то на каждом шаге по формуле $(uv)'=u'v+v'u$ происходит удвоение

количества слагаемых. Таким образом, их будет до 1024. Некоторые из них обнуляются в процессе, так как понижается степень, так что в реальности меньше, но всё равно, это очень трудоёмкая работа, вычислить 10 производную для такого типа функции. Вместо этого, мы можем выбрать коэффициент при 10 степени из разложения в ряд Тейлора.

Пример.

$$x^3 \sin x = x^3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\dots\right) = x^4 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \frac{x^{12}}{9!}\dots$$

Итак, коэффициент при 10-й степени равен $-\frac{1}{7!}$. Теоретически же

этот коэффициент должен быть $\frac{f^{(10)}(0)}{10!}$. Приравняем эти значения.

$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = -\frac{1}{7!}$, тогда $f^{(10)}(0) = -\frac{10!}{7!} = -8\cdot 9\cdot 10 = -720$.

ЛЕКЦИЯ № 14. 05. 12. 2017

§4. Экстремумы и строение графика.

Монотонность и знак производной.

Вспомним определение монотонного роста и убывания: если при $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция монотонно возрастает, а если $f(x_1) \ge f(x_2)$ то монотонно убывает. Рассмотрим, как монотонность взаимосвязана со знаком 1-й производной.

Теорема 1.

1) $f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ монотонно возрастает в окрестности $U(x_0)$.

2) $f'(x_0) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ монотонно убывает в окрестности $U(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (это и есть та самая функция, которая была в определении предела).

Предел $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$ это и есть $f'(x_0)$.

По определению предела, если число A это предел функции $g(x)$ в точке x_0, то: для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ радиуса δ, такая, что при $x \in U(x_0)$ выполняется $|A - g(x)| < \varepsilon$. В данном случае A = $f'(x_0) > 0$. Это значит, что при $x \in U(x_0)$ функция $g(x) > 0$ во всех точках окрестности, так как $A > 0$, и при малом ε окрестность $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ состоит только из положительных чисел. Итак, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. В таком случае, если $x > x_0$, то и $f(x) > f(x_0)$, ведь если знаменатель положителен, то и числитель должен быть положителен (дробь положительна). А если $x < x_0$ то $f(x) < f(x_0)$. Получается, что для более правой точки на оси абсцисс значение функции больше, а это означает монотонное возрастание.

Обратно, если функция $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ положительна, то и её предел больше нуля, тогда $f'(x_0) \geq 0$.

Аналогично, если функция $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ отрицательна, то её предел меньше нуля, тогда $f'(x_0) \leq 0$.

Теорема 2 (следствие из Т.1).

1). Если $f'(x_0) > 0$ то:

$f(x) < f(x_0)$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x \in U^+(x_0)$.

2). Если $f'(x_0) < 0$ то:

$f(x) > f(x_0)$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U^+(x_0)$.

Определение 1 (точки наибольшего, наименьшего значения в D).
Пусть функция f - функция одной переменной, т.е. отображает некоторое множество $D \subset R$ в R. Точка x_0 называется точкой наибольшего (соответственно, наименьшего) значения в D, если $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in D$. (соответственно, $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in D$).

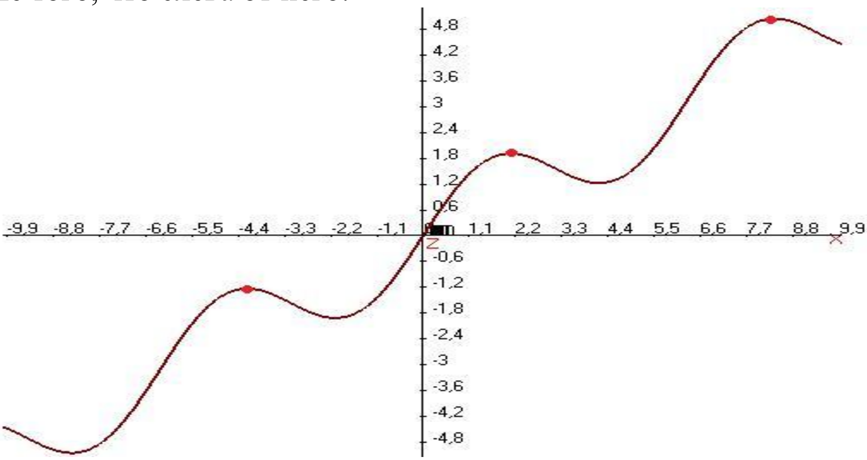
Примечание. Здесь D это область определения, может совпадать со всей числовой прямой, но не обязательно.

Определение 2. (максимум и минимум)

Пусть функция $f : D \to R$. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума), если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, такая, что $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$. (для минимума $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$).

Для максимума и минимума есть общее название - **«экстремум».**

Локальных максимумов в смысле определения 2 может быть несколько или даже бесконечное количество. Например, график $y = \frac{x}{2} + \sin x$, здесь через каждые 2π есть новый максимум, который выше того, что слева от него:



Понятие «максимум» отличается от понятия «наибольшее значение» тем, что для максимума требуется, чтобы функция была наибольшей в некоторой **окрестности**, а для наибольшего значения - **во всей области**.

Взаимосвязь между равенством нулю первой производной и экстремумом не однозначна. Так, функция $y = |x|$ имеет минимум в точке 0, но там не существует производная, то есть нельзя сказать, что $f' = 0$. А для функции $y = x^3$, $f'(0) = 0$, но при этом нет экстремума.

Рассмотрим подробно структуру функции в случае, когда производная не равна 0.

Теорема 3. (Ферма) (необходимый признак экстремума).
Если функция дифференцируема в точке x_0, и x_0 - точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство следует из теоремы 2. Если допустить, что точка экстремума, но производная там не 0, то тогда производная в точке равна какому-то числу, положительному или отрицательному. А тогда по прошлой теореме, справа и слева от этой точки ситуация такая: в одной полуокрестности график выше, а в другой ниже, чем ордината $f(x_0)$. Тогда $f(x_0)$ не может быть экстремальным значением для всей окрестности.

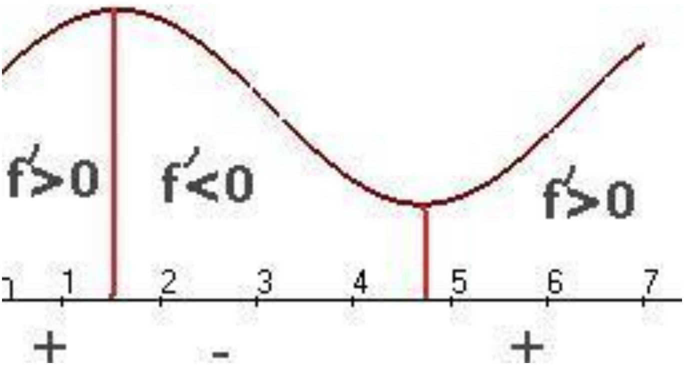
Замечание. Если функция дифференцируема, а следовательно и непрерывна, то f' должна при возрастании из отрицательных значений в положительные пройти через 0. Если же разрывна, то можете перескочить через 0, так чтобы 0 не был знаением ни в одной точке. Поэтому эта теорема и не применима для функции $y = |x|$. Для неё производная равна -1 до начала координат, а потом сразу 1, проходит через разрыв 1 рода, то есть скачок, и производная в точке минимума не равна 0, а сразу перескочила в положительное значение.

Теорема 4. (достаточный признак экстремума на основе 1-й производной)
1). Если $f'(x) > 0$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U^+(x_0)$ то x_0 - точка максимума,
2). Если $f'(x) < 0$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U^+(x_0)$ то x_0 - точка минимума.
Доказательство.

Если до точки x_0 производная больше нуля, то это значит, что функция возрастает в левой полуокрестности. При возрастании, чем правее точка, тем больше в ней значение. Но ведь x_0 это правая граница множества $U^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0]$. Таким образом, $f(x_0)$ наибольшее значение во множестве $U^-(x_0)$.

При убывании, чем правее точка, тем меньше в ней значение. Но ведь x_0 это левая граница множества $U^+(x_0) = [x_0, x_0 + \varepsilon)$. Таким образом, $f(x_0)$ наибольшее значение также и во множестве $U^+(x_0)$. Получается, что $f(x_0)$ - наибольшее значение во всём множестве $U(x_0)$, а это и есть максимум.

Доказали подробно 1-й пункт, 2-й аналогичными рассуждениями с заменой неравенств на противоположные.



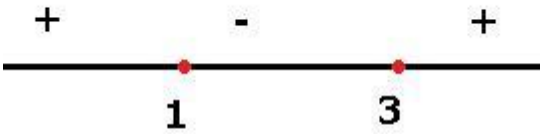
Итак, на стыке интервалов монотонного роста и убывания - точки экстремума. Таким способом и можно находить экстремумы. Кстати, для теоремы 3 всё равно, гладкая функция или точка излома (производная разрывна) в точке экстремума. Она применима и для функции $y = |x|$.

Теперь становится ясно, почему у кубической параболы нет экстремума в точке (0,0): интервал роста сменяется снова на интервал роста, поэтому, хоть даже и производная равна 0, но экстремума там нет.

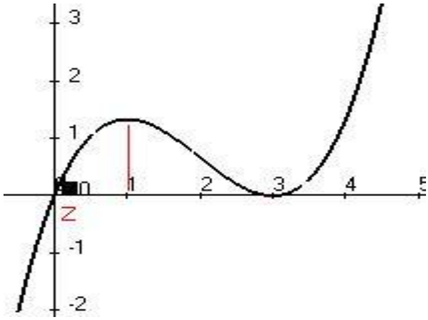
Пример. Найти экстремумы $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

Решение. Найдём $f' = x^2 - 4x + 3$. Корни 1 и 3. Выясним знак производной на каждом из интервалов $(-\infty, 1)$, $(1,3)$ и $(3, +\infty)$. Для

этого надо вычислить знак f' в какой-нибудь точке на каждом из этих интервалов. Желательно для удобства вычислений взять целое число как представителя интервала.
Например, $0 \in (-\infty, 1)$, $2 \in (1,3)$ и $4 \in (3, +\infty)$.
$f'(0) = 3 > 0$. $f'(2) = 4 - 8 + 3 = -1 < 0$. $f'(4) = 16 - 16 + 3 = 3 > 0$.



Таким образом, в точке $x = 1$ рост сменяется убыванием, $x = 1$ точка максимума. В точке $x = 3$ убыванием сменяется ростом, $x = 3$ точка минимума.



Теорема 5.
(достаточный признак экстремума на основе 2-й производной)
Если функция дважды дифференцируема, и $f'(x_0) = 0$, то:

при $f''(x_0) > 0$ - то в точке x_0 минимум,

при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 максимум.

Доказательство.
Запишем формулу Тейлора, причём перенесём $f(x_0)$ влево.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \alpha$$

Но ведь здесь 1-е слагаемое равно 0 по условию. Если $f'(x_0) = 0$, то

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \alpha$$

где α - бесконечно малая более высокого порядка, чем 2, то есть в некоторой окрестности она по модулю меньше чем $\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$ и её знак уже не влияет на знак всего выражения. Тогда фактически, тогда знак разности $f(x)-f(x_0)$ в окрестности точки x_0 зависит от знака выражения $\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$. Множитель $(x-x_0)^2$ всегда неотрицателен, 2! = 2 > 0.

Значит, при $f''(x_0)>0$ получится всё выражение $\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \geq 0$, тогда $f(x)-f(x_0)\geq 0$ в окрестности точки x_0, то есть $f(x_0)\leq f(x)$ $\forall x \in U(x_0)$. Это значит, что в точке x_0 минимум.

А если $f''(x_0)<0$, то $\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \leq 0$, и тогда $f(x)-f(x_0)\leq 0$ а значит, $f(x_0)\geq f(x)$ $\forall x \in U(x_0)$. Это значит, что в точке x_0 максимум.

Замечание. Этот факт легко запомнить: для параболы $y=x^2$ вторая производная равна +2, а там минимум, так как ветви этой параболы направлены вверх. Для $y=-x^2$ будет $f''(0)=-2$, для неё - максимум.

Решим тот же самый **пример** теперь с помощью 2 производной. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$, $f' = x^2-4x+3$. Точки с нулевой производной 1 и 3. А теперь не будем искать знак производной на каждом интервале, а просто вычислим $f''(x)=2x-4$.

$f''(1)=-2<0$ в точке $x=1$ максимум.

$f''(3)=2>0$ в точке $x=3$ минимум.

Но что делать, если окажется $f''(x_0)=0$? Такие ситуации тоже бывают, например, для $y=x^3$ и $y=x^4$. Для x^3, $f''=6x$, $f''(0)=0$ и там нет экстремума. Для 4-й степени, $f''=12x^2$, тоже $f''(0)=0$, но для x^4 есть минимум в нуле. Как действовать в случае $f''(x_0)=0$ даёт ответ следующая теорема.

Теорема 6.
(достаточный признак экстремума на основе n-й производной).
Если функция n раз дифференцируема, при этом $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0)=0$, и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда:
если n нечётно то экстремума нет,
если n чётно, то: при $f^{(n)}(x_0)>0$ - то в точке x_0 минимум,
при $f^{(n)}(x_0)<0$ в точке x_0 максимум.
(т.е. если чётно, то аналогично 2-й производной).
Доказательство.
Запишем формулу Тейлора, причём перенесём $f(x_0)$ влево.

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\alpha$$

Но ведь здесь первые слагаемые обнуляются по условию теоремы. $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0)=0$, тогда начинается именно с n-го слагаемого. $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\alpha$, где α - бесконечно малая более высокого порядка, чем n, то есть в некоторой окрестности она по модулю меньше чем $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ и её знак уже не влияет на знак всего выражения. Тогда фактически, тогда знак разности $f(x)-f(x_0)$ в окрестности точки x_0 зависит от знака выражения $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

При чётном n множитель $(x-x_0)^n$ всегда неотрицателен

$(x-x_0)^n\geq 0$

n! по построению положительное число $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

Значит, при $f^{(n)}(x_0) > 0$ получится всё выражение

$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \geq 0$, тогда $f(x) - f(x_0) \geq 0$ в окрестности точки x_0, то есть $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$. Это значит, что в точке x_0 минимум.

А если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \leq 0$, и тогда $f(x) - f(x_0) \leq 0$ а значит, $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$. Это значит, что в точке x_0 максимум.

Если **n нечётно**, то $(x - x_0)^n$ разного знака в правой и в левой полуокрестности, то есть какого бы знака ни было число $f^{(n)}(x_0)$, выражение $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе из правой в левую полуокрестность. Тогда $f(x_0) \geq f(x)$ и $f(x_0) \leq f(x)$ в той или иной полуокрестности, и экстремума нет.

Набольшее и наименьшее значение на отрезке.

Если требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции на каком-то множестве, нужно учесть не только экстремумы внутри множества, но и значения в правой и левой граничных точках.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение $f(x) = x^2$ на отрезке $[-1,2]$.

Решение. Сначала найдём экстремумы во внутренних точках. $f'(x) = 2x$, $f' = 0$ только при $x = 0$. При этом $f'' = 2 > 0$, то есть, там минимум.

Осталось найти все значения функции в точках экстремума и в двух граничных точках и сравнить их:

$$f(0) = 0$$

$$f(-1) = 1$$

$$f(2) = 4$$

Наибольшее значение в точке 2, наименьшее в точке 0. Не учитывать граничные точки нельзя, потому что наибольшее значение может оказаться именно там, а не в точках экстремума внутри интервала.

Экстремум функции нескольких переменных.

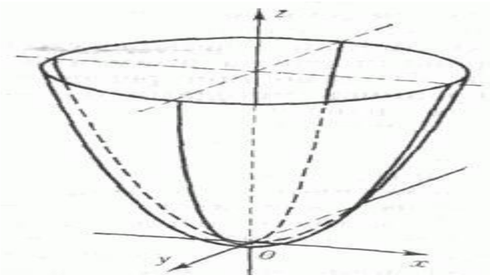
Определение (запишем для R^2, но аналогично и для n-мерного).

Пусть $f: R^2 \to R^1$, то есть $f(x,y)$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума), если $f(x_0, y_0) \ge f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U(x_0, y_0)$ (для минимума соответственно, $f(x_0, y_0) \le f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U(x_0, y_0)$).

Идея здесь та же самая, что и для функций одной переменной: максимум, если значение функции больше, чем в любой точки из окрестности, а минимум, если меньше. просто окрестность в плоскости это не интервал, а круг. А в пространстве - шар.

Физический смысл экстремума функции n переменных. Если задано распределение температур в пространстве, то есть точка максмальной и минимальной температуры. Так, существует точка минимальной температуры в земной атмосфере.

Пример. $f(x,y) = x^2 + y^2$.



$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$. Вертикальные сечения параболоида - это параболы, ветвями направленные вверх, для них как для кривых просто обычный минимум. В точке (0,0) частные производные нулевые, т.е. $\nabla f = 0$ в точке (0,0).

Аналог необходимого признака, т.е. теоремы Ферма, здесь имеет место: Если $M_0(x_0, y_0)$ точка экстремума, то $\nabla f(M_0) = 0$.

ЛЕКЦИЯ № 15. 12. 12. 2017

Аналог достаточного признака на основе 2-й производной для функции двух переменных тоже имеет место. Если вычислить все возможные вторые производные, то они образуют матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

в данном случае она равна $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, соответствует положительно-определённой квадратичной форме $Q = 2x^2 + 2y^2 \geq 0$. В каждом из двух перпендикулярных сечений поверхности такая кривая, что 2-я производная больше нуля, то есть по каждому сечению минимум. При этом все угловые миноры больше нуля. Для данной матрицы это очевидно, однако если бы она была не диагональная, то именно проверка знаков угловых миноров позволяла бы точно сказать, есть ли в точке экстремум.

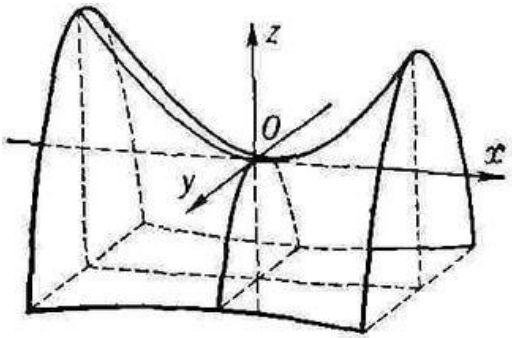
Для сравнения, рассмотрим функцию $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Для неё точка (0,0) является точкой максимума. $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$.

Посмотрим, как при этом устроена матрица вторых производных.

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для каждого отдельно взятого сечения вдоль оси 0x или оси 0y, как для обычной кривой, есть максимум, вторая производная равна 0. Если же исследовать знаки угловых миноров, то они чередуются, начиная с отрицательного. Это достаточное условие максимума для функции n переменных. Если матрица диагональная, то это означает, что на диагонали все элементы отрицательны.

Если градиент равен 0-вектору, это вовсе не является достаточным условием экстремума. Так, есть функции, для которых градиент 0, а экстремума нет, так как в одном сечении минимум, а в другом сечении максимум. Гиперболический параболоид:



$f(x,y)=x^2-y^2$, $\nabla f(x,y)=(2x,-2y)$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

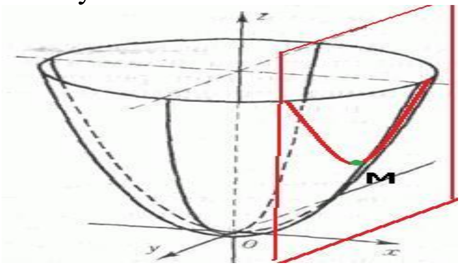
Однако матрица вторых производных такая:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Не выполняется ни одно из свойств: угловые миноры не положительны, но и их знаки не чередуются, начиная с минуса. Видно, что для параболы в сечении в плоскости Oxz минимум, а в перпендикулярном сечении в плоскости Oyz максимум.

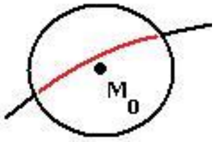
Условный экстремум.

Рассмотрим эллиптический параболоид, сделаем сечение вертикальной плоскостью, которая параллельна координатной плоскости. Для самой поверхности точка M ничем не характерна, рядом с ней есть и точки меньшей, и точки большей высоты. Но вот для сечения это - минимум.



То есть, если сузить область определения с плоской фигуры до одномерной линии, то от поверхности останется сечение, и для сечение, уже как просто для кривой, могут быть экстремумы, которых не было на самой поверхности. такие экстремумы называются «условными», потому что для сужения области определения применяется какое-то условие. Неявно задать кривую можно с помощью какого-то условия типа $F(x,y)=0$. Например, показанное на чертеже сечение получается, если фиксировать x, т.е. здесь условие вида $x=a$, то есть $x-a=0$. Итак, определение.

Определение. Пусть задана функция $f(x,y)$ и некоторое неявное уравнение кривой L в плоскости $F(x,y)=0$. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой условного максимума, если $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ для любой точки (x,y) принадлежащей $U(M_0)\cap L$.

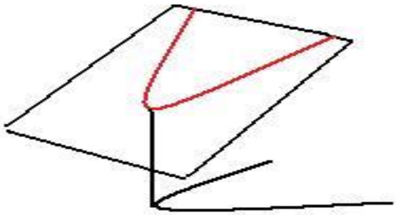


Отличие от обычного максимума: для максимума в центре окрестности должно быть значение больше, чем в любой точке окрестности, а для условного максимума больше, чем во всех точках пересечения этой окрестности и кривой L. (В других точках из окрестности, которые не принадлежат кривой, может быть не больше, а меньше).

Определение условного минимума вводится аналогично, лишь в неравенстве изменён знак: $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$.

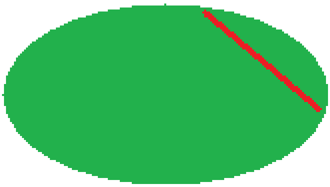
Эти понятия нужны для того, чтобы искать наибольшие и наименьшие значения в плоских областях. Ведь граница плоской области это линия, а не две точки a,b как было при поиске наибольшего значения на отрезке.

На наклонной плоскости, то есть для поверхностей типа $z=kx+my$, вообще нет точек экстремума, т.к. рядом с любой точкой есть другие точки, как выше, так и ниже. Градиент этой функции равен (k,m) и он, очевидно, не равен (0,0). Но если сузить область определения, провести параболу под этой наклонной плоскостью, то на плоскости будет кривая, у которой уже есть точка минимальной высоты!



Пример. Найти отношение сторон прямоугольника, такое, что при фиксированном периметре получилась бы максимальная площадь.
Решение. Периметр $P(x, y) = 2x + 2y$. Площадь выражается функцией $S(x, y) = xy$. Если периметр фиксирован, например приравняем к константе 2C, то $P(x, y) = 2x + 2y = 2C$, это условие позволит нам одну переменную выразить через другую. $x + y = C$, т.е. $y = C - x$. Подставим в функцию $S(x, y) = xy$, получим $S(x, y(x)) = x(C - x) = S(x)$. Функция стала зависеть только от одной переменной, и для неё уже можно искать экстремумы обычным способом. $S(x) = Cx - x^2$, тогда $S'(x) = C - 2x$.
$C - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{C}{2}$. Это именно максимум т.к. $S''(x) = -2 < 0$.
$x = \dfrac{C}{2} \Rightarrow y = C - \dfrac{C}{2} = \dfrac{C}{2}$. Тогда отношение $y / x = 1$.
Ответ. $y / x = 1$. То есть, среди прямоугольников равного периметра, наибольшей площадью обладает квадрат.

Выпуклость вверх (вниз) графика функции и 2 производная.
Выпуклое множество.
Определение. Множество D называется выпуклым, если для любой пары точек этого множества отрезок, соединяющий их, состоит из точек, принадлежащих этому множеству.
В первом примере множество выпуклое, во втором нет: есть пары точек, такие, что кратчайшая линия, соединяющая их, выходит за пределы этого множества.

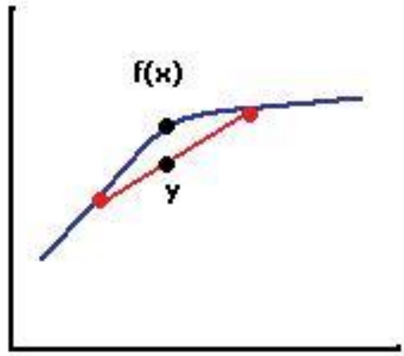


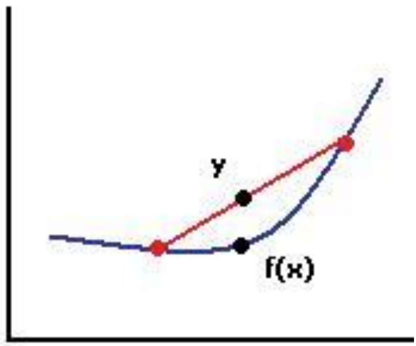
Ещё пример не выпуклого множества на карте. Если лететь с Каматки, то кратчайшая линия проходит над морем, а если из Владивостока - над чужой территорией. Есть соединяющая линия, проходящая по своей территории и именно над сушей, но она - не кратчайшая.

Для графиков функций эти понятия обобщаются так.

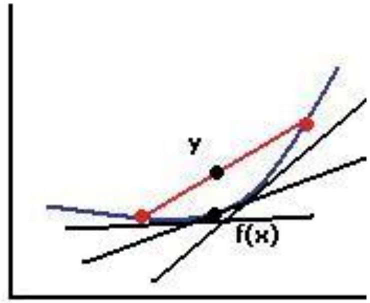
Функция называется выпуклой вверх (соотв., вниз) на отрезке [a,b], если график проходит выше (соотв., ниже) любой хорды, соединяющей пару точек на графике.

На чертеже: для выпуклой вверх функции $f(x) > y$, для выпуклой вниз $f(x) < y$.





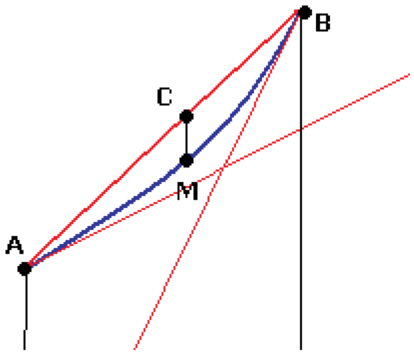
В случае, когда f выпукла вверх, множество точек, расположенных под графиком является выпуклым множеством, а если выпуклая вниз - то выпуклое множество точек, лежащих над графиком.
Если f выпукла вверх, то угол наклона касательной уменьшается при движении точки вправо, то есть f' убывает, а это происходит тогда и только тогда, когда $f'' < 0$.
Если f выпукла вниз, то соответственно f' возрастает, а $f'' > 0$.



Теорема. График является выпуклым выпуклым вниз на некотором отрезке $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f''(x) > 0$ на этом отрезке. Аналогично, является выпуклым вверх $\Leftrightarrow$ $f'' < 0$.
Доказательство. Рассмотрим функцию, такую, что график выпуклый вниз. Возьмём некоторые 2 точки $x_1, x_2 \in [a,b]$. График проходит ниже, чем хорда, соединяющая 2 точки на графике. Здесь точки A, B имеют координаты соответственно $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Обозначим угол наклона прямой, проходящей через A, B, через k. Пусть также M - точка графика с некоторой промежуточной

абсциссой, а точка C точка на хорде, с той же абсциссой. Проведём две касательных: в точках A, B. Угловой коэффициент касательной, проходящей через $A(x_1, f(x_1))$, меньше k. Касательная проходит ниже точки M, а даже если бы линия проходила через точку M, её угловой коэффициент был бы меньше k. То есть, производная в точке x_1 заведомо меньше, чем k. Аналоично, угловой коэффициент касательной, проходящей через $B(x_2, f(x_2))$, больше k. Даже если бы она проходила через точку M, её угловой коэффициент был бы больше k, но она проходит ещё ниже. То есть, производная в точке x_2 больше k. Итак, на отрезке $[x_1, x_2]$ производная $f'(x)$ изменяется от некоторого числа, меньшего k, до числа, большего k, то есть возрастает, тогда следующая производная, т.е. $f''(x)$, положительна.

Итак, $f''(x) > 0$.



Аналогично доказывается, что если график является выпуклым вверх, то $f'' < 0$.

Достаточность. Если $f''(x) > 0$, но при этом допустить, что график выпуклый вверх, то тут же получаем противоречие: доказали, что если он выпуклый вверх, то $f'' < 0$.

Определение. Если $f''(x_0) = 0$, при этом в правой и левой полуокрестности f'' разного знака, то точка x_0 называется **точкой перегиба.**

Точки перегиба хорошо видны и в реальной жизни: если дорога поворачивает сначала в одну сторону, например влево (при этом линия дороги выпукла вправо) а потом дорога закругляется вправо (линия при этом выпукла влево), то между ними точка перегиба.


Если проезжаем кольцо, то траектория движения сначала выпукла влево (заезжаем на кольцо), потом вправо (движемся по кольцу), потом снова влево (когда съезжаем с кольца на следующую часть дороги). Действующая центробежная сила несколько раз изменяет своё направление - то влево, то вправо.

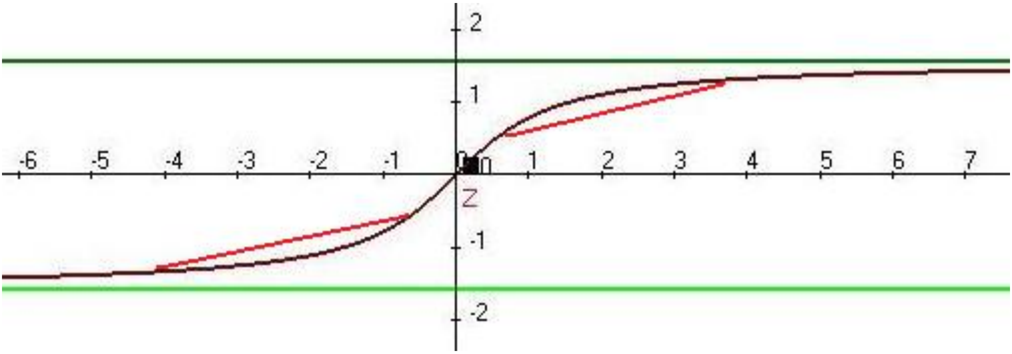
Пример. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для $f(x) = arctgx$.

$$f(x) = arctgx,\ f'(x) = \frac{1}{x^2+1},\ f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

При $x < 0$: $f''(x) > 0$, f выпукла вниз.

При $x > 0$: $f''(x) < 0$, f выпукла вверх.

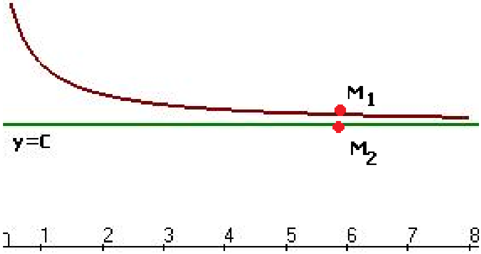
Касательная сначала поворачивается вверх, 1-я производная растёт (в начале координат угол наклона доходит до 45 градусов), а потом снова опускается при удалении точки в $+\infty$.



Асимптоты.

Если при удалении точки графика в бесконечность, она сближается с некоторой прямой, то эта прямая называется асимптотой. Так как удаление от начала координат в бесконечность может происходить как вправо/влево, так и вверх/вниз либо вообще по диагонали, то можно эту ситуацию описать одним общим условием: Если $\sqrt{x^2 + f^2(x)} \to \infty$ то $|M_1 M_2| \to 0$.

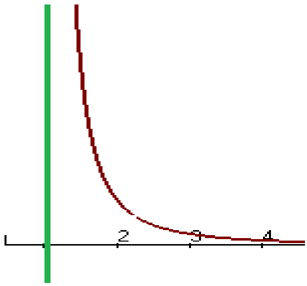
Горизонтальные асимптоты:



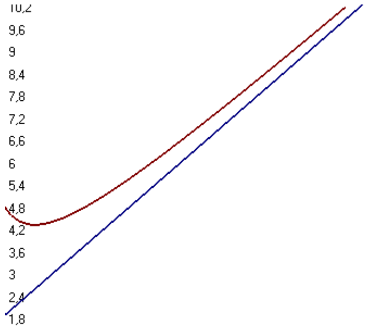
Если $f(x) \to C$, $x \to \infty$, то асимптота горизонтальная, эта ситуация имеет место, когда $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = C$.

Вертикальные асимптоты:

Если $f(x) \to \infty$, $x \to a$, то асимптота вертикальная (это соответствует разрыву 2 рода, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$).



Наклонные асимптоты:



Если $f(x) \to \infty$ и $x \to \infty$, и при этом график стремится к некоторой прямой, то асимптота наклонная.
Как видно, что во всех этих случаях точка неограниченно удаляется в бесконечность, но $\sqrt{x^2 + f^2(x)} \to \infty$ за счёт либо 1-го слагаемого, либо 2-го, либо двух сразу.
Наклонные асимптоты.
Вывод формул $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

Так как точка на графике и на асимптоте сближаются то:

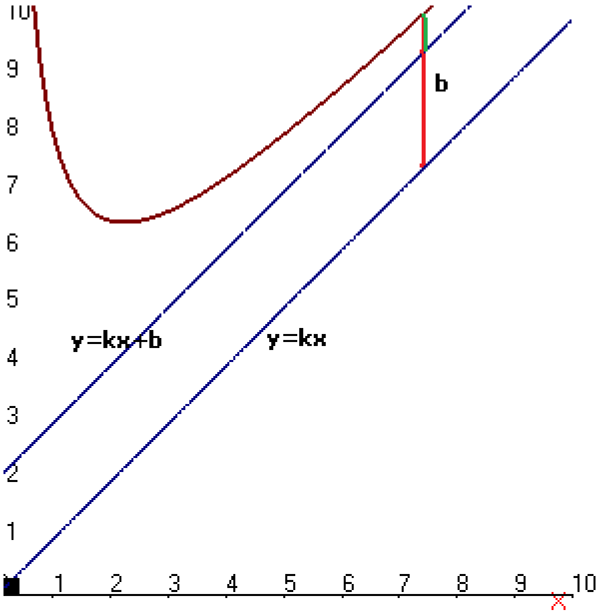
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, то есть

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Рассмотрим прямую $y = kx$, параллельную асимптоте $y = kx + b$.

Если разность ординат для точки на графике и соответствующей точки на прямой $y = kx + b$ стремится к 0, то разность ординат для точки на графике и точки на прямой $y = kx$ стремится к b. Отрезок, соответствующий этому расстоянию, отмечен красным на чертеже.



Если две величины, $f(x)$ и $kx+b$, неограниченно возрастают, и при этом разность между ними стремится к 0, то их отношение стремится к 1, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{kx+b} = 1$. Но ведь также очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{kx+b}{kx} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{k+\frac{b}{x}}{k} = 1$. Тогда рассмотрим $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{kx+b} \cdot \frac{kx+b}{kx}$, этот предел равен 1. Однако если сократить в нём $kx+b$ то $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{kx} = 1$, а тогда

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.

Итак, мы получили формулы для нахождения k, b. На практике сначала надо найти k, а уже затем b.

Пример. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Решение. Во-первых, сразу видно точку разрыва 2-го рода $x = 2$. Есть вертикальная асимптота $x = 2$.
Найдём наклонную асимптоту.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x-2)}$ (мы просто добавили лишний x в знаменателе, тем самым поделили на x).

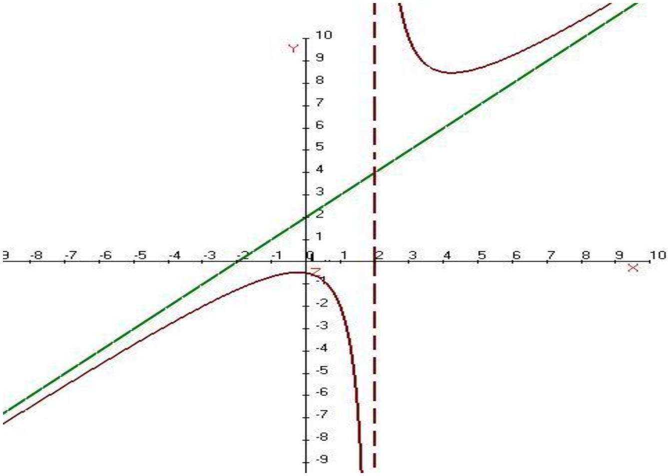
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x}} = 1$. Итак, $k = 1$.

Обратите внимание: здесь предел одинаково вычисляется при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, но бывают примеры, в которых по-разному, то есть на правой и левой полуплоскости могут быть разные асимптоты.

Найдём $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2} - \dfrac{x(x-2)}{x-2}\right) =$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(x^2-2x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{1-\dfrac{2}{x}}\right) = 2.$$

Ответ. Вертикальная x = 2, наклонная y = x + 2.
График выглядит так:



Замечание. При значении $k=0$ ситуация не однозначна: не всегда существует горизонтальная асимптота, например, для ln(x) горизонтальной асимптоты нет, несмотря на то, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Коэффициент k лишь выявляет, к чему стремится угловой коэффициент касательной. Но для ln(x) касательная стремится к горизонтальному положению, тем не менее, функция не ограничена сверху. Вот наоборот следствие верно: если есть горизонтальная асимптота, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

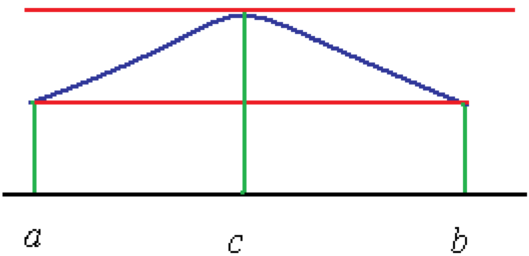
Замечание. Если на данной полуплоскости, правой или левой, есть наклонная асимптота, то нет горизонтальной, и наоборот, если есть горизонтальная, то нет наклонной. Действительно, ситуации $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C$ (что требуется для горизонтальной асимптоты) и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (при существовании наклонной, f возрастает к ∞) взаимоисключающие.

Замечание. Если получается $k = \infty$, тогда нет наклонной асимтоты. Например, при $f = x^3$, деление на x ни к чему не приведёт, всё равно останется ∞. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

ЛЕКЦИЯ № 16. 19. 12. 2017

§ 5. Основные теоремы дифф. исчисления

Теорема 1 (Ролля). Если функция f непрерывна и дифференцируема на [a,b], и $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a,b)$, такая что $f'(c) = 0$.



Доказательство. Если в точке b такое же значение, как было в точке a, то:

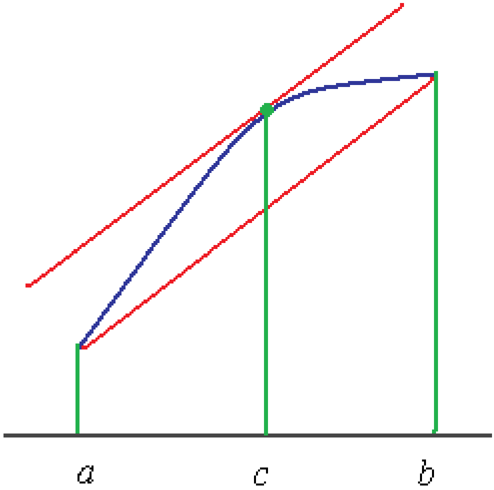
1) либо функция тождественно равна константе (но тогда вообще в любой точке нулевая производная)

2) либо не константа, но тогда она должна достигать какого-то максимального отклонения от ординаты $f(a)$ и снова возвращаться на эту же высоту, в этом случае есть точка экстремума, одна или несколько. Из теоремы Ферма об эстремуме следует, что в такой точке производная равна 0.

Теорема 2 (Лагранжа). Если функция f непрерывна и дифференцируема на [a,b], то существует точка $c \in (a,b)$, такая что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Пояснение. Теорема Лагранжа фактически утверждает, что на графике есть такая точка, что касательная в ней наклонена под таким же углом, как хорда, соединяющая 2 конца графика в точках $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Чертёж:



Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Вычислим, чему она равна в точках a, b.

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b)-(f(b)-f(a)) = f(a).$$

Итак, на концах интервала значение одно и то же. Тогда по теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$, где $\varphi'(c) = 0$. Рассмотрим подробнее производную $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Дробь здесь фактически просто коэффициент k, он не содержит переменную, дифференцируется только $(x-a)$. Ясно, что производная от $k(x-a)$ равна просто числу k. Теперь рассмотрим её в точке c:

$\varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$, тогда $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Что и требовалось доказать.

Теорема 3 (Коши). Если функции f,g непрерывны и дифференцируемы на [a,b], то существует точка $c \in (a,b)$, такая что $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Доказательство. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$.

Проверим её значения на концах интервала, они одинаковы:

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = f(a).$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Тогда по теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$, где $\varphi'(c) = 0$.

$\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, тогда

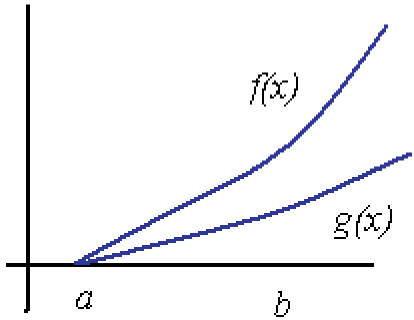
$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$, в итоге $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Теорема 4 (Лопиталя). Функции f,g непрерывны и дифференцируемы на [a,b], и $f(a) = 0$, $g(a) = 0$. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Доказательство. Применим теорему Коши к отрезку [a,x].



В некоторой точке c верно: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f(x) - 0}{g(x) - 0}$.

Но при $x \to a$, точка с, лежащая между а,х тоже стремится к а.

Тогда в итоге получится $\lim\limits_{c \to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Дополнение: пределы функций n переменных.
Повторные и двойные пределы.

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Возьмём точку $M_0 = (x_0, y_0)$ на плоскости. Можно определить понятие предела функции в данной точке, аналогично тому, как это вводили для обычных функций одной переменной. Число А называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке M_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки M_0, так что если $(x, y) \in U$, то $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Обозначается $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ - двойной предел. Но ведь в плоскости можно приблизиться к этой точке с многих направлений. Ситуаций не две, как на числовой оси (там можно приближаться только слева или справа) а бесконечно много.

Если сначала вычислить предел по x (при этом y пока будет служить в роли параметра) а затем по y, то получим: $\lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \right)$. А если наоборот, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$ Это так называемые «повторные» пределы.

Повторные пределы, как правило, совпадают между собой и равны двойному.

. $x^2+y^2\to 2$ в точке (1,1).

Однако, есть примеры, где это не так.

Пример. Докажем, что для $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ двойной предел не существует.

Если сначала устремить $x\to 0$ то $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{y^2}\right)=0$. А если приближаться к точке (0,0) по произвольной прямой $y=kx$, то можно сначала всё свести к одной переменной, и затем устремить $x\to 0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$. Получается, что результат зависит от того, с какой стороны приближаться к точке (0,0). Это значит, что, двигаясь к началу координат с разных направлений, точка на поверхности стремится к разным высотам, тогда ни в какой малой окрестности не может быть выполнено $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, т.е. предел не существует. Таким свойством обладает винтовая поверхность, состоящая из прямолинейных образующих, у которых направление зависит от высоты. Чтобы понять, представьте себе винтовую лестницу в узкой башне: разные ступеньки отходят от общей вертикальной прямой, но с ростом высоты меняется угол поворота.

Кратко: Подготовка ко 2 семестру. Основы главы «интегралы».

Приложение. Теоретические вопросы на доказательства, которые будут служить для формирования билетов.
Структура билета: 2 теор. вопроса и 2 задачи из практики.

1. (Л1) Докажите лемму о том, что количество перестановок равно n!.
2. (Л2) Докажите свойство: Если все элементы какой-либо строки представлены в виде сумм двух элементов, то данный определитель равен сумме двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & g \end{vmatrix}.$$

3. (Л2) Докажите свойство: Если к любой строке прибавить другую строку, домноженную на число, $|A|$ не изменится.
4. (Л2) Докажите, что обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда А невырожденная.
5. (Л2) Докажите, что если матрица треугольная, то $|A| = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$.
6. (Л2) Докажите, что если $XA = E$ и $AY = E$, то $Y = X$.

Знать определения из лекции 3: что такое ранг матрицы; линейная комбинация; линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов, базис и ранг системы векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведение, метод вычисления векторного и смешанного произведений с помощью определителя. Основная и расширенная матрица системы линейных уравнений. Однородная и неоднородная системы, совместная и несовместная, определённая и неопределённая.

Формулировка теоремы Кронекера-Капелли (система совместна $\Leftrightarrow$ ранг основной матрицы равен рангу расширенной).

7. (Л3) Докажите теорему: Система линейно зависима $\Leftrightarrow$ хотя бы один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.
8. (Л4) Доказательство формул Крамера .
9. (Л4) Доказательство теоремы о наложении решений.
10. (Л4) Доказать теорему: Линейная комбинация решений однородной системы тоже есть решение.

11. (Л4) Доказать теорему: Сумма решений неоднородной и соответствующей однородной системы есть решение неоднородной системы.
12. (Л5) Доказать теорему: Линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному и тому же числу λ, тоже является собственным вектором, соответствующим λ.
13. (Л5) Доказать теорему: Любые два собственных вектора, соответствующих различным собственным числам, образуют ЛНС (линейно-независимую систему).
14. (Л5) Доказать теорему: Если x является собственным вектором линейного оператора L, соответствующим λ, то он также является собственным и для обратного оператора L^{-1}, и соответствует числу $1/\lambda$.
15. (Л5) Доказать теорему: Число λ является собственным для линейного оператора, заданного матрицей A, тогда и только тогда, когда $|A-\lambda E|=0$.
16. (Л5) Доказать теорему: Если базис состоит из собственных векторов, то матрица оператора в этом базисе диагональна.
17. (Л5) Доказать теорему: Матрица А симметрична (то есть $a_{ij} = a_{ji}$) $\Leftrightarrow$ выполняется свойство (Ax,y) = (x,Ay).
18. (Л5) Доказать теорему: Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Что такое билинейная форма, квадратичная форма, привести какой-либо пример квадратичной формы и её матрицы.

19. (Л6) Вывести уравнение прямой (либо уравнение плоскости - на ваш выбор) по точке и нормали. Доказать при этом, что координаты нормали будут коэффициентами в этом уравнении.
20. (Л6) Вывести уравнение прямой по точке и направляющему вектору (либо уравнение плоскости по точке и 2 направляющим).
21. (Л6) Вывести формулу проекции вектора на ось.
22. (Л6) Вывести формулу расстояния от точки до прямой в плоскости (либо от точки до плоскости в пространстве - на ваш выбор).
23. (Л7) Вывести формулу угла между плоскостями.

24. (Л7) Вывести канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве по точке и направляющему; объяснить, как выводятся уравнения по точке и двум нормалям.
25. (Л7) Вывести формулу расстояния от точки до прямой в пространстве.
26. (Л7) Вывести формулу расстояния между скрещивающимися прямыми.
27. (Л7) Вывести формулу угла между прямой и плоскостью в пространстве.
28. (Л7) Вывести каноническое уравнение эллипса.
29. (Л8). Вывести каноническое уравнение параболы.
30. (Л8). Доказать, что уравнение $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ однородная функция, задаёт коническую поверхность.
31. (Л8). Доказать, что однополостный гиперболоид содержит прямолинейные образующие.
32. (Л9). Доказать, что любая функция $f(x)$ представима в виде суммы чётной и нечётной компонент: $f(x) = g(x) + h(x)$.
33. (Л9). Доказать, что если для 3 последовательностей верно: $u_n \le v_n \le w_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = A$ то существует $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ и тоже равен A.

34. (Л10). Доказать 1-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

35. (Л10). Доказать 2-й замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

36. (Л10). Доказать свойства эквивалентности бесконечно-малых (хотя бы какие-нибудь 3 из 5).

37. (Л11).Доказать теорему:
1. Сумма конечного числа бесконечно-малых есть бесконечно-малая.
2. Произведение бесконечно-малой и ограниченной является бесконечно-малой функцией.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ функция $f(x) - A$ бесконечно-малая.

38.(Л11) Доказать теорему: Если $f: R \to R$, то: существует конечная производная в точке $x_0 \Leftrightarrow$ функция дифференцируема в точке x_0.

39. (Л11).Доказать, что $(x^2)' = 2x$ и $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

40. (Л12). Доказать, что $(uv)' = u'v + v'u$.

41. (Л12). Доказать, что $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

42. (Л12). Доказать, что $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

43. (Л12). Доказать, что $\frac{\partial f}{\partial a} = (\nabla f, a)$.

44. (Л13). Доказать , что если поверхность неявно задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, точка $M_0 \in$поверхности, то $\nabla F(M_0)$ ортогонален этой поверхности.

45. (Л13).Вывести формулу производной для неявно заданной функции: $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

46. (Л13). Вывести уравнение касательной. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

47. (Л13).Вывести уравнение касательной плоскости:
$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$.

48. (Л13). Вывести формулу Тейлора:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

49. (Л14). Вывести формулы Тейлора для функций $e^x, \sin x, \cos x$.

50. (Л14). Докажите, что $f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ монотонно возрастает в окрестности $U(x_0)$.

51. (Л14). Докажите теорему Ферма (необходимый признак экстремума). Если функция дифференцируема в точке x_0, и x_0 - точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

52. (Л14). Докажите достаточный признак экстремума на основе 1-й производной.
53. (Л14). Докажите достаточный признак экстремума на основе 2-й производной.
54. (Л14). Докажите достаточный признак экстремума на основе n-й производной.
55. (Л15). Докажите теорему о том, что график является выпуклым выпуклым вниз $\Leftrightarrow$ $f'' > 0$ и является выпуклым вверх $\Leftrightarrow$ $f'' < 0$.
56. (Л15). Выведите формулы для вычисления k, b наклонной асимптоты.
57. (Л16). Докажите теорему Ролля.
58. (Л16). Докажите теорему Лагранжа.
59. (Л16). Докажите теорему Коши.
60. (Л16). Докажите теорему Лопиталя.

Литература.

1. Л.И.Магазинников, А.Л. Магазинникова.
Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Учебное пособие
http://edu.tusur.ru/publications/2244

2. Л.И.Магазинников, А.Л.Магазинников.
Дифференциальное исчисление. Учебное пособие
http://edu.tusur.ru/publications/2246

3. Магазинников Л.И. Высшая математика I. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: Учебное пособие Томск: ТУСУР, 2007. - 162 с.

Все учебные пособия кафедры математики можно найти на сайте кафедры по ссылке: http://math.tusur.ru/book.html