Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика
Курс практических занятий
Семестр 1
Учебное пособие

для специальностей
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
09.03.01 « информатика и вычислительная техника»

Томск
ТУСУР
2017

Электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группах 447-1,2 и 437-1,2,3 осенью 2017 года. Даны с подробным разбором задачи, которые решались на каждом практическим занятии. Пособие может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий.

Для удобства в пособии применяется сквозная нумерация задач. Материал за ту или иную дату можно определить по таблице для каждой группы отдельно. Задачи, которые были решены в классе со всеми 5-ю группами, нумеруются в общем списке, а задачи, которые в каких-либо группах успели решить в классе, а в каких-либо даны в качестве домашней работы, нумеруются Д1, Д2, ...

Оглавление по темам

Неделя	437-1	437-2	437-3	Задачи
1	8.09	5.09	5.09	1-15
2	12.09	12.09	14.09	16-28
3	22.09	19.09	19.09	29-38
4	26.09	26.09	28.09	39-50
5	6.10	3.10	3.10	51-60
6	10.10	10.10	12.10	61-69
7	20.10	17.10	17.10	70-84
8	24.10	24.10	26.10	85-95
9	03.11	31.10	31.10	96-108
10	07.11	07.11	09.11	109-126
11	17.11	14.11	14.11	127-140
12	21.11	21.11	23.11	141-154
13	01.12	28.11	28.11	155-167
14	05.12	05.12	07.12	168-179
15	15.12	12.12	12.12	180-191
16	19.12	19.12	21.12	192-200
17	28.12	26.12	26.12	исправление долгов

Нед	447-1	Задачи	447-2	Задачи
1	7.09	1-11, Д1-2	4.09	1-11, Д1-2
2	15.09 15.09	12-23, Д3-5 24-30, Д6-7	15.09 15.09	12-23, Д3-5 24-30, Д6-7
3	21.09	31-38, Д9	18.09	31-37, Д9
4	29.09 29.09	39- 45, Д11 46-51, Д12-15	29.09 29.09	38- 45, Д11 46-51, Д12-15
5	-	-	2.10	52-58, Д16-19
6	13.10 13.10	52-60 61-69	13.10 13.10	59-64,Д20-22 65-69,Д23,24.
7	19.10	70-78, Д26,28,29	16.10	70-78, Д26,28,29
8	27.10 27.10		27.10 27.10	79- 88 89-96, Д34
9	02.11	97-103, Д35,36	30.10	97-103, Д35,36
10	9.11 10.11	104 - 113 114- 128, Д42-45	9.11 10.11	104 - 113 114- 128, Д42-45
11	16.11	129-137, Д46-47	13.11	129-137, Д46-47
12	24.11 24.11	138 - 146, Д48 147 - 154, Д49-52	24.11 24.11	138 - 146, Д48 147 - 154, Д49-52
13	30.11	155-167	27.11	155-167
14	08.12 08.12	168-175, Д54,55 176-182, Д57,58	08.12 08.12	168-175, Д54,55 176-182, Д57,58
15	14.12	183-190	11.12	183-190
16	22.12 22.12	191-195, Д60-62 196-200, Д63-64	22.12 22.12	191-195, Д60-62 196-200, Д63-64
17	28.12	исправление долгов	25.12	исправление долгов

Действия над матрицами, сложение, умножение.

Задача 1. Найти сумму матриц: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение. Складываем поэлементно:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 1+3 \\ -1+3 & 3-1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти произведения матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 0+3\cdot 1 \\ 5\cdot 1+7\cdot 0 & 5\cdot 0+7\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+3 \\ 5+0 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 1 & 1\cdot 1+3\cdot 1 \\ 5\cdot 1+7\cdot 1 & 5\cdot 1+7\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 1+3 \\ 5+7 & 5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 5 & 1\cdot 3+1\cdot 7 \\ 1\cdot 1+1\cdot 5 & 1\cdot 3+1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 3+7 \\ 1+5 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Примечание. Можно увидеть, что при умножении на матрицу, состоящую из всех единиц, исходная не получается, а вот если единицы по диагонали - получается.

Задача 3А. Найти произведение: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3Б. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. В 1-м случае размеры 2×3 и 3×2, согласованы, умножение возможно. Во 2-м случае 2×3 и 3×3, тоже согласованы (хоть столбцов и больше, но всё равно длина строки 1-й матрицы равна высоты столбца 2-й матрицы). Просто в ответе для 3Б получится ещё один лишний столбец справа.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0+2+2 & 0+1+2 \\ 1+4+3 & 2+2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Для 3Б 1-я и 2-я строка умножаются не только на 1-й и 2-й, но ещё и на 3-й столбец. Дополнительно получаем

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4+12 \\ 2+8+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Выделим красным цветом новый столбец:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 16 \\ 8 & 7 & 28 \end{pmatrix}$$

Ответ. 3А: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, **3Б:** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 16 \\ 8 & 7 & 28 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти AB и BA.

Решение. Запишем эти матрицы. Если первую разбить на строки, а вторую на столбцы, то видно, что есть всего 4 варината скалярно умножить друг на друга вектор-строку их первой на вектор-столбец из второй.

$\begin{pmatrix} \boxed{1\quad 1\quad 0} \\ 2\quad 1\quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\4\\7\end{matrix} \end{pmatrix}$	$1\cdot3+1\cdot1+0\cdot2=3+1+0=4$
$\begin{pmatrix} \boxed{1\quad 1\quad 0} \\ 2\quad 1\quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\4\\7\end{matrix}} \end{pmatrix}$	$1\cdot0+1\cdot4+0\cdot7=0+4+0=4$
$\begin{pmatrix} 1\quad 1\quad 0 \\ \boxed{2\quad 1\quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\4\\7\end{matrix} \end{pmatrix}$	$2\cdot3+1\cdot1+1\cdot2=6+1+2=9$
$\begin{pmatrix} 1\quad 1\quad 0 \\ \boxed{2\quad 1\quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\4\\7\end{matrix}} \end{pmatrix}$	$2\cdot0+1\cdot4+1\cdot7=0+4+7=11$

Например, если умножаем строку номер 1 на столбец номер 2, то и число, которое при этом получается, ставим в 1 строку 2 столбец новой матрицы. Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдём BA. В данном случае первую матрицу можно разрезать на 3 строки, а вторую на 3 столбца. Таким образом, получаем 9 чисел.

Покажем, например, как 1-я строка скалярно умножается на 1-й столбец, они обведены. $3\cdot1+0\cdot2=3+0=3$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{3\quad 0} \\ 1\quad 4 \\ 2\quad 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 4 \\ 16 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ. $AB=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 9 & 11\end{pmatrix}$ $\quad BA=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 9 & 5 & 4\\ 16 & 9 & 7\end{pmatrix}$.

Задача 5. Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}, \ C=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Найти $AC+3BC$.

Решение. Так как матрица C находится справа во всех слагаемых, то для удобства можно использовать приведение подобных $AC+3BC$ = $(A+3B)C$ - тогда умножение надо будет проводить всего один раз, а не два.

Сначала запишем $A+3B$.

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -9 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}.$$

Теперь умножим на матрицу C. Точно так же, как и в прошлом примере, мысленно обведём строку из 1-й матрицы на столбец из 2-й. Есть 4 варианта это сделать:

$$\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot4+3\cdot2 & 5\cdot(-1)+3\cdot1\\ (-5)\cdot4+(-7)\cdot2 & (-5)\cdot(-1)+(-7)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}20+6 & -5+3\\ -20-14 & 5-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & -2\\ -34 & -2\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix}26 & -2\\ -34 & -2\end{pmatrix}$.

Задача 6. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ найти A^2.

Решение. Умножим матрицу саму на себя, то есть две её копии напишем рядом и умножим их.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot(-4) & 2\cdot 1+1\cdot(-2) \\ (-4)\cdot 2+(-2)\cdot(-4) & (-4)\cdot 1+(-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 2-2 \\ -8+8 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ **Ответ.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Как видно из этого примера, для матриц, в отличие от чисел, возможно, что получается нулевой объект в ответе, притом что в исходной матрице вообще ни одного нуля не было. Это из-за особенностей её строения: правый столбец в 2 раза меньше, чем левый, а нижняя строка в минус 2 раза больше, чем верхняя. И вообще, если взять пару матриц, где у первой будет пропорциональность строк (в k раз больше) а у второй - столбцов (в минус k раз меньше) получим такой же эффект.

Задача 7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$. Найти AB, BA.

Решение. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-18 & -12+12 \\ 36-36 & -24+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-24 & -27+36 \\ 12-16 & -18+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

№ Д1. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(Ответом здесь тоже будет нулевая матрица)

Задача 8. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -6\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$ Найти AB, BA.

Решение.

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -6\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6-2+4 & 10+6+3\\ -12+6-8 & 20-18-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 19\\ -14 & -4\end{pmatrix}.$$

Теперь поставим их наоборот, но при этом произведением будет уже не матрица 2 порядка, а матрица 3 порядка: теперь у первой 3 строки, но более коротких, а у второй 3 столбца. Вариантов умножить строку на столбец будет 9.

$$\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -6\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+20 & 3+15 & -3-10\\ 4-24 & -2-18 & 2+12\\ 8+12 & -4+9 & 4-6\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}14 & 18 & -13\\ -20 & -20 & 14\\ 20 & 5 & -2\end{pmatrix}.$$

Ответ. $AB=\begin{pmatrix}-4 & 19\\ -14 & -4\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}14 & 18 & -13\\ -20 & -20 & 14\\ 20 & 5 & -2\end{pmatrix}$.

Задача 9. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Найти AB, BA.

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2+4 & 5+6+4\\ 4+0+3 & 10+0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 7 & 13\end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+10 & 4+0 & 8+15 \\ 1+6 & 2+0 & 4+9 \\ 1+2 & 2+0 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 23 \\ 7 & 2 & 13 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 23 \\ 7 & 2 & 13 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти A^3.

Решение. Сначала умножим две, и найдём A^2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & -1-2 \\ 3+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь домножим ещё на одну матрицу А, чтобы найти A^3.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-9 & 2-6 \\ 9+3 & -9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$.

Замечание. Несмотря на то, что в общем случае коммутативности по умножению матриц нет, но если матрица B совпадает с матрицей A^n, тогда $AB = BA$. Например, в этой задаче, $A(AA) = (AA)A$ из-за ассоциативности, т.е. неважно, домножить третий раз слева или справа.

№ Д2. Найти A^4 для этой же матрицы. Замечание. Здесь есть 2 метода решения: либо умножить A^3, полученную в прошлой задаче, ещё раз на A, либо взять A^2, полученную на первом этапе, и её умножить саму на себя. Ответ. $\begin{pmatrix} -23 & 3 \\ -9 & -26 \end{pmatrix}$.

Задача 11. Вычислить матрицу $A - 2E$ для матрицы 3-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 6 \\ 0 & 4-2 & -2 \\ 3 & -5 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Примечание. Операции типа $A - \lambda E$ понадобятся изучении следующих тем: собственные числа линейного оператора.

Определители.

Задача 12. Найти определитель $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 - (-5)\cdot 4 = -2 - (-20) = 18.$

Ответ. 18.

Замечание. Если построить пару векторов в плоскости, то площадь получившегося параллелограмма будет 18.

Задача 13. Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Допишем копии первых двух столбцов, проведём 3 параллельных линии (главная диагональ и ещё две). Перемножим все эти тройки элементов и внесём в общую сумму с их исходным знаком.

А вот для побочной диагонали и линий, ей параллельных, со сменой знака.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right.$$

$1\cdot 4\cdot 1+2\cdot 1\cdot 2+3\cdot 0\cdot 5-2\cdot 4\cdot 3-5\cdot 1\cdot 1-1\cdot 0\cdot 2$ =
$4+4+0-24-5-0=8-29=-21$.
Ответ. -21.

Замечание. Модуль этой величины равен объёму параллелепипеда, построенного на 3 векторах, если в качестве векторов рассматривать строки либо столбцы.

Так, эквивалентная формулировка этой задачи может быть: найти объём параллелепипеда, одна из верших которого (0,0,0), и 3 ребра расположены по радиус-векторам (1,0,2), (2,4,5), (3,1,1). Ответ: 21.

Если надо найти объём тетраэдра, то дополнительно разделить на 6.

Найти объём тетраэдра с вершинами (0,0,0), (1,0,2), (2,4,5), (3,1,1).

Ответ: 21 / 6 = 3,5. Дело в том, что площадь основания тетраэдра в 2 раза меньше, чем для параллелепипеда, а кроме того, в формуле объёма таких фигур, как пирамида, конус, тетраэдр есть коэффициент 1/3, итого в 6 раз меньше, чем для параллелепипеда.

* Вариант этой задачи: Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. Ответ -9.

Задача 14. Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение проводится аналогичным образом,

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

То, что перемножено по зелёным линиям, включим в сумму со знаком плюс, а по красным - со знаком минус.

$1\cdot 0\cdot 0+1\cdot 0\cdot 1+3\cdot 1\cdot 2-3\cdot 0\cdot 1-1\cdot 0\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1 = 6-1=5$.

Ответ. 5.

Задача 15. Найти определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right.$$

$-6-12+0-2-0-(-8)=-20+8=-12$. **Ответ.** -12.

№ Д3. Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. Ответ. -30.

Задача 16. Найти произведение ABC, где

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим $(AB)C$, сначала умножим первые две матрицы:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$. Теперь умножим на третью матрицу.

$$\begin{pmatrix}3 & 11\\3 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\33\end{pmatrix}.$$ **Ответ.** $\begin{pmatrix}31\\33\end{pmatrix}$.

Замечание. Если вычислять $A(BC)$, то получается точно такой же результат, т.к. выполняется закон ассоциативности.

Замечание. При умножении квадратной матрицы на вектор-столбец получается снова вектор-столбец, то есть квадратная матрица фактически выступает в роли функции, отображающей векторы в пространстве (или на плоскости, если n = 2).

Задача 17. Умножение квадратной матрицы порядка 3 на вектор-столбец из 3 координат (параметры произвольные, задаёт группа).

Задача 18. Найти определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 3\\3 & 2 & 2\end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 3\\3 & 2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\0 & 1\\3 & 2\end{matrix}$$

$2+18+0-3-6-0=20-9=11$. **Ответ.** 11.

Задача 19. Найти параметр c, при котором определитель равен 0:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & c & 1\\1 & 4 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Решение. Вычислим определитель и решим получившееся уравнение:
$c+2-3c-4=0$, $-2c-2=0$, $2c=-2$, $c=-1$.
Ответ. $c=-1$.

Задача 20. Найти объём тетраэдра, вершины которого A(1,1,1), B(2,1,3), C(2,2,4), D(1,2,4).

Решение. Объём тетраэдра ровно в 6 раз меньше объёма параллелепипеда с рёбрами AB, AC, AD.
Найдём эти векторы, и сначала вычислим объём параллелепипеда с помощью определителя, затем поделим на 6.
AB = (1,0,2), AC = (0,1,3), AD = (1,1,3).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3+0+0-2-3-0=2, \quad V=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ответ. Объём тетраэдра равен $V=\dfrac{1}{3}$.

Задача 21. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по первой строке.

Решение. Выберем дополняющий минор для каждого элемента 1-й строки, и домножим на

$$1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (12-20)-(8-24) = 8.$$ **Ответ.** 8.

Задача 22. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ методом Гаусса (приведением к треугольной форме).

Решение. Вычитаем из 2-й строки удвоенную 1-ю, и из 3-й 1-ю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ затем вычитаем из 3-й строки 2-ю.

получили $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$. **Ответ.** 2.

Задача 23. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Здесь можно применить старый, давно известный способ, то есть достроить 2 столбца и перемножить по трём параллельным линиям. А можно и преобразования строк. Но для этого удобно, чтобы в левом верхнем углу было число 1. Мы можем поменять местами строки, учтём, что при этом сменится знак.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

В принципе, можно ещё и поменять местами 2 и 3 строки, чтобы знак снова исчез. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. А вот теперь уже вычитать из 2-й строки (удвоеннную 1-ю) и из 3-й (утроенную 1-ю).

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & -13 & -3 \end{vmatrix}$. Дальше можно и не преобразовывать, а просто разложить по 1 стролбцу, там всего лишь одно число, остальные нули. $1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = 24$. **Ответ.** 24.

Задача 24 (а,б). Вычислить определитель 4 порядка двумя способами: а) разложением по 1-й строке. б) с помощью преобразований матрицы, т.е. приведением к треугольной форме.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Решение. Первый способ.
Разложение по 1-й строке:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Очевидно, что последние 2 минора 3-го порядка вычислять не надо, так как они умножаются на 0. Осталось вычислить два минора 3 порядка, то есть мы свели определитель 4 порядка к определителям 3 порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2-3-1)-(2+9-6-6) = -1-(-1) = 0 .$$

Ответ. 0.

Второй способ. Из 2-й строки вычтем удвоенную 1-ю, а из 4-й утроенную 1-ю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Здесь мы добиваемся того, чтобы под левым верхним углом были только нули. В 3-й строке слева и так 0, из неё ничего вычитать не надо.

Теперь к 3-й строке прибавим 2-ю, а из 4-й вычтем удвоенную 2-ю. Этим самым мы обнулим элементы ниже a_{22}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

Теперь надо к 4-й строке прибавить 3-ю, и мы получим 0 под элементом a_{33}, этим как раз и завершится процесс приведения к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Но получилось так, что вся 4 строка состоит из нулей, а тогда определитель равен 0. Итак, получили точно такой же ответ.

Замечание. Вариант этой задачи с параметром.

Найти c, при котором $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & c \end{vmatrix} = 0$. В процессе преобразований

получим $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & c-1 \end{vmatrix} = 0$, тогда $c = 1$.

Задача 25. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Можем разложить по 1-й строке (там всего 2 элемента отличны от 0). Но можно сначала упростить матрицу, а именно, отнять от 4 столбца 1-й столбец. Тогда в 1-й строке будет всего один ненулевой элемент. Также выносим (-1) из последнего столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 1 & -2 \\ 8 & 7 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -2 \\ 7 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$-(4+0+56-7-0-28) = -25$.

Ответ. -25.

Задача 26. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Прибавим 1-ю строку ко 2-й, 3-й и 4-й.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Эта матрица треугольная, определитель равен произведению чисел по диагонали, то есть 24.

Ответ. 24.

Задача Д-4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. **Ответ.** 28.

Задача Д-5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$. **Ответ.** 50.

Задача Д-6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ. 120.

Задача 27. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Чтобы привести к треугольной форме, сначала будет удобно так поменять строки, чтобы в верхнем левом углу было наименьшее число, а потом под ним образовать кратные ему, с помощью домножения строки на константу. Поменяем 1 и 2 строки. При этом поменяется знак, но впрочем, мы можем тут же поменять его обратно, так как вынесем -1 из последней строки.

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

В 3-й строке умножим на 2, а за знаком определителя соответственно на 0,5. Тем самым мы добились, чтобы в 1 столбце все числа были кратны угловому элементу, чтобы в методе Гаусса использовать только целые и не домножать на дроби.

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 14 & 2 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Однако, теперь обнаружилось, что в 4-м столбце есть 6 и -6, и нам не понадобится приведение к треугольному виду, ведь можно упростить 4-й столбец, так, чтобы там было только одно число. Прибавим 1-ю строку к 3-й строке:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 14 & 2 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 16 & 2 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

А теперь можем разложить по 4-му столбцу и сразу перейти к минору 3 порядка.

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 16 & 2 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 16 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Затем 1-ю строку, домноженную на 4, прибавляем ко 2-й.

$$-3\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 21 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (-3)(-4)\begin{vmatrix} -10 & 21 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 12\cdot(-80-21) = 12\cdot(-101) =$$

-1212.

Ответ. -1212.

<u>Обратная матрица.</u>

Формула вычисления элементов обратной матрицы: $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$.

Алгоритм нахождения A^{-1}.

1. Проверить невырожденность с помощью определителя.
2. Составить матрицу из дополняющих миноров M_{ij}.
3. Изменить знаки в шахматном порядке, то есть домножить на $(-1)^{i+j}$, где i,j - номера строки и столбца.
4. Транспонировать полученную матрицу.
5. Поделить на определитель исходной матрицы.

Задача 28. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. 1). Проверяем определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$, так что обратная матрица существует.

2) Составляем матрицу из дополняющих миноров, то есть для каждой клетки вычёркиваем строку и столбец, остаётся подматрица порядка 1, то есть то число, которое напротив, как раз и является дополняющим минором. Получаем $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) В шахматном порядке меняем знак там, где i+j нечётное. Тем самым, мы переходим от M_{ij} к A_{ij}. Получили $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Транспонируем эту матрицу. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Определитель был равен 1. Делить на 1 не обязательно, можно автоматически считать, что уже и так разделили.

Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матричные уравнения. Пусть A - квадратная матрица $n \times n$, X, B - матрицы размера $n \times k$ (чаще всего в таких задачах $k = n$, то есть все рассматриваемые матрицы квадратные), причём X - неизвестная матрица. Тогда определено умножение $AX = B$. Матрицу X таким образом. Домножим всё равенство слева на обратную матрицу A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Тогда $EX = A^{-1}B$, то есть $X = A^{-1}B$.

Задача 29. Решить матричное уравнение $AX = B$, где
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Требуется найти $X = A^{-1}B$, заметим, что матрица А тут в точности такая, для которой мы искали обратную в прошлой задаче.

Так, можно использовать $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. **Проверка.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

Задача Д-7. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 30. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Сначала ищем определитель. Так как матрица треугольная, то достаточно перемножить числа по диагонали. $|A| = 2$.

Строим матрицу, состоящую из дополняющих миноров.
Зачёркиваем ту строку и тот столбец, где находится элемент, и остаётся минор 2 порядка из 4 элементов.
На схеме показано, что именно надо зачеркнуть:

$$\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$(M_{ij})=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4&4\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&4\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&4\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4&4\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&4\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&4\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\8&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Теперь надо сменить знаки в шахматном порядке, т.е. переходим от миноров к алгебраическим дополнениям. Обведено красным, где надо менять знак. Ясно, что 0 остаётся 0, там знак менять нет смысла.

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\8&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Получили: $(A_{ij})=\begin{pmatrix}2&0&0\\-8&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$

Транспонируем эту матрицу, то есть бывшие строки запишем по столбцам.

$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. И осталось разделить на $|A| = 2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Задача 31. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Найдём определитель

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$2-6+2-8+3-1=-8$.

Найдём матрицу из дополняющих миноров к каждой из 9 клеток.

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Меняем знаки в шахматном порядке, то есть там, где i+j нечётное.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем транспонируем эту матрицу.

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -7 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Осталось только разделить на $|A| = -8$.

Ответ. $-\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -7 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 32. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Сначала находим определитель.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$1+0+2-3-2-0=-2$.

Найдём матрицу из дополняющих миноров.

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Меняем знаки в шахматном порядке, там, где i+j нечётное.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем транспонируем эту матрицу.

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Затем делим на $|A| = -2$.

Ответ. $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$

Задача 33. Матричным методом решить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =3 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{array}\right\}$$

Решение. Запишем систему в виде: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Обратите внимание, что основная матрица системы это та самая матрица, для которой мы нашли обратную в прошлой задаче.

Если у нас есть равенство $A\overline{x} = \overline{b}$, то $A^{-1}A\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, тогда $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. x_1=1, x_2=1, x_3=0.

Задача 34. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$

Решение. Сначала вычислим определитель: $-2+6-3=1$.

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Исходный определитель был равен 1, так что делить не нужно.

Ответ. $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача Д8. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Ответ. $-\dfrac{1}{148}\begin{pmatrix} -67 & 62 & -27 \\ 24 & -20 & -8 \\ -15 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Задача Д9. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Практика 5. Ранг матрицы.</u>

Задача 36. Найти ранг матрицы. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Метод 1. Выбираем окаймляющие миноры, начиная от левого верхнего угла. Видно, что минор 2 порядка не равен 0, поэтому ранг больше или равен 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Вычисляя минор 3 порядка (а он здесь единственный, это и есть сам определитель матрицы) видим, что он равен 0.
$12+14+3-18-7-4=29-29=0$. Тогда раен не равен 3.
$r(A) \geq 2$, но при этом $r(A) \neq 3$. Остаётся единственный вариант:
$r(A)=2$.

Метод 2. Преобразуем матрицу к треугольному виду.
Вычитаем из 2-й строки 1-ю, и из 3-й удвоенную 1-ю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Теперь 2-ю строку, умноженную на 0,5, прибавим к 3-й.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь видно, что 3-я строка состоит из нулей, поэтому ранг не может быть равен 3. Минор 2-го порядка тоже сразу виден, это $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Ответ. $r(A)=2$.

Задача 37. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \end{pmatrix} \to$$

Теперь 2-ю строку, домноженную на 10, прибавим к 3-й.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 46 & -18 \end{pmatrix}.$$

Итак, исходная матрица сводится к такой, в которой уже есть треугольная сруктура в первых трёх столбцах.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 46 & -18 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что обведённый минор равен 46, не равен 0. Он 3-го порядка, поэтому ранг равен 3.
Ответ: $r(A) = 3$.

Задача 38. Найти ранг матрицы и базисный минор. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сначала из 2 строки вычитаем 1-ю, домноженную на 2, то есть вычитаем строку (2 4 6) а из 3-й 1-ю, домноженную на 5, т.е. строку (5 10 15). Затем к 3-й прибавляем 2-ю с коэффициентом 7.
Видно, что базисный минор не может быть в левом верхнем углу, потому что во 2-й строке два нуля. Зато можно найти минор 2 порядка, состоящий из частей 10и 3 столбца, либо 2 и 3-го.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минор порядка 3, то есть сам определитель всей этой матрицы, равен 0, так как третий столбец содержит только нули. Поэтому ранг равен 2, а не 3. **Ответ.** $r(A) = 2$.

Задача 39. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу. Ко второй строке прибавим 1-ю, а от 3-й отнимем удвоенную 1-ю. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

теперь к третьей прибавим вторую, получим $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ранг равен 3, так как есть невырожденный минор 3 порядка.
Ответ. $r(A) = 3$.

Задача 39-а (вариант с параметром).
Найти параметр c, при котором ранг матрицы

равен 2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & c & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & c & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & c & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & c+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Третья строка состояла бы из всех нулей, только если $c + 2 = 0$, то есть $c = -2$. То есть, если бы на месте a_{33} изначально было число -2, то ранг был бы меньше, так как в итоге получилась бы третья строка из всех нулей.
Ответ. $c = -2$.

Задача 40. Доказать, что 3 столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

является линейной комбинацией первых двух, и найти коэффициенты этой комбинации.

Решение. Во-первых, если вычислить определитель и обнаружить, что он равен 0, то этим самым уже доказана линейная зависимость столбцов. Однако требуется найти коэффициенты, поэтому запишем систему уравнений:

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} \alpha + 5\beta = 11 \\ -2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta = 11 \end{cases}$$

Прибавим удвоенное 1-е уравнение ко 2-му, и вычтем утроенное 1-е из 3-го.

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta = 11 \\ 11\beta = 22 \\ -11\beta = -22 \end{cases}$$ отсюда видно, что $\beta = 2$, тогда $\alpha = 1$.

Ответ. коэффициенты линейной комбинации равны 1 и 2.

Задача 41. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем методом Гаусса к треугольной форме.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что 4-я строка из нулей, поэтому ранг не равен 4, то есть $r(A) \le 3$. Минор порядка 2 легко находится в верхнем левом углу, но угловой минор порядка 3 равен 0. Однако это ещё не значит, что ранг равен 2, ведь можно отступить к правмому краю матрицы и взять минор с разрывом, из 1,2,4 столбцов, например такой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот минор невырожденный, и он тоже является окаймляющим (ведь он полностью включает в себя квадрат, закрашенный жёлтым). Мы нашли базисный минор порядка 3. Также можно было рассматривать аналогичное в 1,2,5 столбцах, тоже минор порядка 3.

Ответ. $r(A) = 3$.

Задача 42. Найти такие параметры p, q, что ранг матрицы равен 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем методом Гаусса к треугольной форме.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & p-9 \\ 0 & 0 & q-15 \end{pmatrix}.$$

Если $p=9$ и $q=15$, то две последних строки только из нулей, и равен будет равен 1.
Ответ. $p=9$, $q=15$.

Задача 43. Найти ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Для удобства преобразования методом Гаусса, сначала поменяем местами 1 и 3 строки. Ещё можно сразу прибавить 3-ю строку к 4-й.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Дальше стандартным методом, обнулим всё ниже угла.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Для удобства вычислений домножим 2 строку на (-1), ранг при этом не меняется. Затем прибавим к 3 строке удвоенную 2-ю.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Теперь осталось прибавить к 4 строке удвоенную 3-ю.

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Видно, что получилась треугольная матрица, то есть определитель 4 порядка невырожденный. Поэтому $r(A) = 4$.

Ответ. $r(A) = 4$.

Задача Д-10. Найти значение параметра a, при котором ранг матрицы был бы равен 3.

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ **Ответ.** $a = -10$.

Элементы векторной алгебры.

Задача 44. Найти скалярное и векторное произведение векторов: $(1,3,-2)$ и $(3,1,-5)$.

Решение. $(a,b) = 3 + 3 + 10 = 16$.

Для поиска векторого произведения запишем определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} e_3 = -13e_1 - 1e_2 - 8e_3 .$$

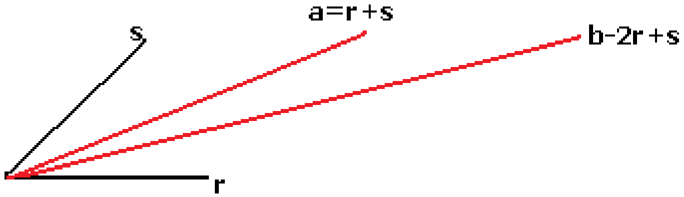
Ответ. Скалярное: 16, векторное: (-13, -1, -8).

Задача 45. Дано: $a = r + s$, $b = 2r + s$, $|r| = 1$, $|s| = 1$, угол между векторами r, s 45 градусов. Найти (a,b) и $|[a,b]|$.

Решение. $(r + s, 2r + s) = 2(r,r) + 2(s,r) + (r,s) + (s,s) =$

$$2|r|^2 + 3(r,s) + |s|^2 = 2|r|^2 + 3|s| \cdot |r| \cos(45) + |s|^2 = 3 + 3\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Примечание. Как видим, можно вычислять скалярное произведение, даже не зная координат векторов. Здесь фактически r,s служат в качестве базисных векторов, и через них выражены a,b, то есть (1,1) и (2,1) координаты a,b относительно базиса r,s. Вся эта система целиком может двигаться или вращаться, но углы между векторами и их длины при этом не поменяются. Поэтому конкретных координат и нет, и они для решения задачи и не нужны.



Пункт Б. $\left|[a,b]\right| = \left|[r+s,2r+s]\right| = \left|2[r,r]+2[s,r]+[r,s]+[s,s]\right| =$

$\left|0+2[s,r]-[s,r]+0\right| = \left|[s,r]\right| = |s|\cdot|r|\sin(45) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $3+3\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задачи 46,47,48. Векторы a,b выражены через p,r: $a = 3p + r$, $b = p - 3r$. $|p| = 5, |r| = \sqrt{2}$, угол между ними 45 град.

Задача 46. Найти (a,b). **Задача 47.** Найти | [a,b] |.

Задача 48. Найти $|a|^2$.

Решение задачи 46.

$(a,b) = (3p+r, p-3r) = 3(p,p)-9(p,r)+(r,p)-3(r,r)$.

Мы раскрыли скобки, используя свойства скалярного произведения. Далее, так как $(p,r)=(r,p)$ то объединим их, и получим

$3(p,p)-8(p,r)-3(r,r)$.

Это можно выразить так:

$3|p|^2 - 8|p||r|\cos 45^0 - 3|r|^2$ и получаем $75-40-6=29$.

Ответ. 29.

Решение задачи 47.

$$\left|[a,b]\right| = \left|[3p+r,\, p-3r]\right| = \left|3[p,p]-9[p,r]+[r,p]-3[r,r]\right|$$

Несмотря на то, что скобки мы раскрыли похожим образом, дальше будет существенное отличие, т.к. свойства векторного произведения совсем другие, чем скалярного. Так, $(p,p)=|p|$, но $[p,p]=0$. Кроме того, чтобы объединить $[p,r],[r,p]$ в одно слагаемое, здесь надо сначала у одной из них сменить знак.

$\left|3[p,p]-9[p,r]+[r,p]-3[r,r]\right| = \left|0-9[p,r]-[p,r]-0\right| =$

$\left|-10[p,r]\right| = 10\left|[p,r]\right|$. Модуль векторного произведения p и r это площадь параллелограмма, где эти векторы являются сторонами, поэтому далее можно продолжить так:

$10\left|[p,r]\right| = 10|p||r|\sin 45^0 = 10\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 50.$ **Ответ.** 50.

Решение задачи 48.

$|a|^2 = (a,a) = (3p+r,3p+r) = 9(p,p)+3(p,r)+3(r,p)+(r,r)=$

$9(p,p)+6(p,r)+(r,r) = 9|p|^2+6|p||r|\cos 45^0+|r|^2 =$

$9\cdot 25+6\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2 = 225+30+2=257.$ **Ответ.** 257.

Задача 49. Найти смешанное произведение трёх векторов: $(3,2,6),(1,4,5),(-2,7,1)$.

Решение. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 12+42-20+48-105-2 = -25.$$ **Ответ.** -25.

Задача Д-11. (8.16 [3]) Найти косинус угла между векторами $a=(3,3,1), b=(3,1,-3)$. **Ответ.** cos = 9/19.

Задача Д-12. (8.19 [3]) Вычислить площадь параллелограмма, образованного векторами a, b, если $a = 3p - 2q, b = 4p + 5q$, $|p| = 4, |q| = 2$, угол между p,q равен $\pi/6$. **Ответ** 92.

Задача Д-13 и Д-14. Векторы a,b выражены через p,q: $a = 2p - 4q$, $b = p - 3q$. $|p| = 5, |q| = 11$, угол между ними 60^0.

Задача Д-13. Найти (a, b). **Ответ.** 1227.

Задача Д-14. Найти | [a,b] |. **Ответ.** $55\sqrt{3}$.

Системы линейных алгебраических уравнений.

Сначала решим задачи с помощью матричного метода и с помощью метода Крамера.

Задача 50. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

Решение.

З-а. Матричным методом.

Запишем систему в виде: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Домножим на обратную матрицу слева обе части равенства, для этого сначала найдём обратную матрицу.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16 \neq 0$$

Выполним действия, необходимые для поиска обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим $A^{-1}b$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4-52 \\ 6+26 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -48 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили $x = 3, y = -2$.

3-б. Методом Крамера.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 13 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-48}{-16} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{32}{-16} = -2.$$

Ответ. $x = 3, y = -2$.

Задача Д-15. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x - 4y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

Решение.

Матричным методом.

Запишем систему в виде: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Найдём обратную матрицу для А.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-8) = 9 \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 + 20 \\ 4 + 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Методом Крамера.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{9} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-9} = 1.$$

Ответ. $x = 2, y = 1$.

Метод Гаусса.

Задача 51. Решить систему уравнений $\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =6 \end{array}\right\}$

Решение. Построим расширенную матрицу и преобразуем её.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

чтобы обнулились коэффициенты ниже левого верхнего угла, то есть чтобы исчезла переменная x из всех уравнений кроме первого, надо:
а) из 2-й строки вычесть 1-ю;
б) из 3-й строки вычест удвоенную 1-ю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1-1 & 2-1 & -3-2 & 1-5 \\ 2-2 & 1-2 & 1-4 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Теперь, чтобы обнулить ниже чем a_{22}, нужно к 3-й строке просто прибавить 2-ю, так как знаки там противоположны. При этом структуру из нулей, которые уже получились слева, мы на последующем шаге всё равно никак не испортим, ведь там к 0 будет прибавляться 0 либо вычитаться 0, то есть ступенчатая структура там уже всё равно будет сохраняться.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -1+1 & -3-5 & -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

Когда в основной матрице уже получена треугольная структура, снова перепишем в виде системы

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5 \\ & x_2 & -5x_3 & =-4 \\ & & -8x_3 & =-8 \end{array}\right\}$$

В первом уравнении 3 неизвестных, а в каждом следующем всё меньше и меньше, а в последнем вообще только одна неизвестная. Именно этой цели мы и хотели добиться, приводя к треугольному виду: из последнего уравнения можно теперь сразу выразить $x_3 = 1$. Затем с этой информацией мы поднимаемся в предпоследнее уравнение, где две неизвестных, впрочем, одна из них уже известна.

$x_2 - 5 = -4 \Rightarrow x_2 = 1$.

А теперь уже две последних неизвестных стали известны, и с этой информацией поднимаемся в 1-е уравнение, подставляя туда $x_3 = 1$ и $x_2 = 1$. Итак, $x_1 + 1 + 2 = 5 \Rightarrow x_1 = 2$.

Ответ. x_1=2, x_2=1, x_3=1.

Можно ответ записать и в виде вектора: $\bar{x} = (2,1,1)$.

Задача Д-16. Решить систему уравнений $\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +3x_3 & =11 \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =6 \\ x_1 & & +x_3 & =3 \end{array}\right\}$

Решение. Во-первых, можно всё 2-е уравнение сократить на 2, так удобнее для решения, числа будут меньше. Затем обнуляем ниже углового элемента: вычитаем из 2-го уравнения удвоенное 1-е, а также 3-го 1-е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 2-2 & 1-0 & 1-6 & 3-22 \\ 1-1 & 0-0 & 1-3 & 3-11 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$ треугольная структура уже получилась.

Перепишем снова в виде системы:

$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +3x_3 & =11 \\ & x_2 & -5x_3 & =-19 \\ & & -2x_3 & =-8 \end{array}\right\}$ из 3-го уравнения $x_3 = 4$, подставляем во 2-е,

там получается $x_2 - 20 = -19 \Rightarrow x_2 = 1$.

А из 1-го $x_1 + 12 = 11 \Rightarrow x_1 = -1$.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$.

Задача 52. Решить систему уравнений $\left.\begin{array}{llll} 4x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-4 \\ 6x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =-1 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-3 \end{array}\right\}$

Решение.

При построении расширенной матрицы, сразу же домножим 2-е и 3-е уравнения на такие коэффициенты, чтобы в начале строки были числа, кратные угловому элементу. А именно, 2-ю строку на 2, а 3-ю строку на 4. Так надо, чтобы потом в методе Гаусса можно было не домножать на дробные коэффициенты при вычитании строк.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 12 & -4 & 6 & -2 \\ 20 & -12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Теперь вычтем из 2-й строки 1-ю, домноженную на 3,
а из 3-й строки 1-ю, домноженную на 5.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 12-12 & -4-(-9) & 6-6 & -2-(-12) \\ 20-20 & -12-(-15) & 8-10 & -12-(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Если теперь поменять местами 2 и 3 строки, получится:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ система: } \left.\begin{array}{llll} 4x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-4 \\ & 3x_2 & -2x_3 & =8 \\ & 5x_2 & & =10 \end{array}\right\}$$

И хотя матрица не выглядит как матрица треугольного вида, тем не менее, основная идея метода Гаусса уже реализована: чем ниже, тем меньше переменных, а в последнем уравнении всего одна, а именно x_2. Здесь тоже можно последовательно выразить все переменные, просто начинаем не с последней, а в другом порядке. К треугольному виду в этом случае можно до конца и не приводить.

Итак, из третьего: $5x_2 = 10$, то есть $x_2 = 2$.

Подставляем во второе уравнение. $6 - 2x_3 = 8$, т.е. $-2x_3 = 2$, $x_3 = -1$.

Из первого: $4x_1 - 6 - 2 = -4$, откуда $4x_1 = 4$, $x_1 = 1$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Задача 53. $a_1 = (1,1), a_2 = (2,1)$ Доказать, что эти векторы образуют базис в плоскости, и найти новые координаты вектора $b = (3,2)$.

Решение.

Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. они образуют базис.

Векторное равенство $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ приводит к системе уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$.

Вычитая из 1-го уравнения 2-е, сразу видим $x_2 = 1$, а тогда и $x_1 = 1$.

Ответ. Координаты в новом базисе равны (1,1).

Задача Д-17. $a_1 = (1,1), a_2 = (1,0)$ Найти новые координаты вектора $b = (5,4)$.

Решение.

Векторное равенство: $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 = 4 \end{cases}$.

Видно из 2-го уравнения, что $x_1 = 4$, тогда $x_2 = 1$.

Ответ. Координаты в новом базисе (4,1).

Задача 54. Даны 3 вектора: $a_1 = (1,2,3), a_2 = (0,1,1), a_3 = (1,1,1)$.
Доказать, что они образуют базис в пространстве, и найти новые координаты вектора $b = (0,3,4)$.

Решение. Вычисляя определитель, получим, что он отличен от 0.
Затем ищем новые координаты вектора.

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{система:} \quad \left. \begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Здесь удобнее получить треугольную структуру ниже не главной, а побочной диагонали. Ведь в третьем столбце все числа 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система: $\left.\begin{matrix} x_1 & & +x_3 & =0 \\ x_1 & +x_2 & & =3 \\ x_1 & & & =1 \end{matrix}\right\}$. Из 3-го уравнения $x_1 = 1$.

Тогда из 2-го $x_2 = 2$, а из 1-го уравнения: $x_3 = -1$.

Мы поочерёдно выразили их, начиная с 1-го а не последнего, так как нули ниже побочной, а не главной диагонали. Такая модификация метода Гаусса также возможна.

Ответ. Координаты в новом базисе $(1,2,-1)$.

Неопределённые системы ($r < n$).

Задача 55. Решить неоднородную систему $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 \end{matrix}\right\}$

Решение. Запишем расширенную матрицу, вычтем из 2-й строки 1-ю. Здесь всего две строки, так что метод Гаусса проводится достаточно коротко.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Видим, что базисный минор можно выбрать в первых двух столбцах. Получается, что 3-я переменная свободная. Перепишем снова в виде системы, а не матрицы.

$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_2 + 2x_3 & = 1 \end{matrix}\right\}$ переносим x_3 вправо: $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 & = 2 - x_3 \\ x_2 & = 1 - 2x_3 \end{matrix}\right\}$

Выражаем x_2, а затем поднимаемся в 1-е уравнение и x_1,через константы и x_3. Впрочем, x_2 фактически и так уже выражено:

$x_2 = 1 - 2x_3$. Подставим это выражение в 1-е уравнение

$x_1 + (1 - 2x_3) = 2 - x_3$, тогда $x_1 = 1 + x_3$

общее решение симстемы: $\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 \\ x_2 &= 1 - 2x_3 \end{aligned}\right\}$

Также записывается в виде вектора: $(1 + x_3, 1 - 2x_3, x_3)$.

Задавая какое-либо значение x_3, всякий раз можем вычислить остальные переменные, и получить тройку чисел. Частные решения: (1,1,0) или (2,-1,1) или (3,-3,2) ... их бесконечно много.

Ответ. Общее решение $(1 + x_3, 1 - 2x_3, x_3)$.

Задача Д-18. Решить неоднородную систему $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$

Решение. Построим расширенную матрицу и преобразуем её.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2-2 & 1-2 & -1-2 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Это равносильно такой системе уравнений $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 - 3x_3 &= -4 \end{aligned}\right\}$

Базисный минор в первых двух столбцах, 3-й столбец соответствует свободной переменной x_3, её надо перенести вправо.

$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 - x_3 \\ -x_2 &= -4 + 3x_3 \end{aligned}\right\}$ теперь надо выразить x_1, x_2 через x_3.

x_2 фактически и так уже почти выражено, во 2-м уравнении.

$x_2 = 4 - 3x_3$. Подставим теперь эту информацию в 1-е уравнение.

$x_1 + (4 - 3x_3) = 3 - x_3$, откуда $x_1 = -1 + 2x_3$.

Вот эти два выражения $x_1 = -1 + 2x_3$, $x_2 = 4 - 3x_3$

как раз и составляют общее решение системы. Задавая любое значение x_3, можно вычислить x_1, x_2, и получится конкретная тройка чисел, то есть частное решение.

Общее решение можно записать также в виде такого вектора: $(-1 + 2x_3, 4 - 3x_3, x_3)$.

Частные решения, например:

$x_3 := 1 \Rightarrow$ частное решение $(1,1,1)$.

$x_3 := 0 \quad \Rightarrow$ частное решение $(-1{,}4{,}0)$.

Ответ. Общее решение $(-1+2x_3, 4-3x_3, x_3)$.

Задача 56. Решить неоднородную систему $\left.\begin{matrix} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \quad = 5 \end{matrix}\right\}$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, впрочем, сразу при этом удобно будет поменять местами 1-ю и 3-ю строки, чтобы угловой элемент содержал именно число 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

обнулим всё ниже углового элемента, для этого:
из 2-й строки вычтем 1-ю, из 3-й удвоенную 1-ю, из 4-й 1-ю, домноженную на 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

теперь можно поменять местами 2 и 3 строки, а также домножить на -1 три последних уравнения (там почти везде были знаки минус)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

затем из 4-й строки вычитаем 2-ю, чтобы продолжить стандартную процедуру метода Гаусса, потом видим что 3-я и 4-я стали одинаковы, тогда из 4-й вычитаем 3-ю. Получается, что 4-е уравнение 0 = 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, осталось 3 уравнения, базисный минор легко заметить в первых трёх столбцах (там треугольная структура матрицы, и этот определитель явно отличен от 0). 4-й столбец не входит в базисный минор, то есть 4-я переменная свободная, т.е. когда будем записывать систему, переносим её через знак равенства во всех уравнениях.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 - x_4 \\ 3x_2 + 3x_3 &= 1 - x_4 \\ 3x_3 &= -2 - 3x_4 \end{aligned}\right\}$$

Из последнего уравнения $x_3 = -\frac{2}{3} - x_4$, подставляя это выражение во 2-е уравнение, выразим x_2. $x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_4 - 3x_3) = \frac{1}{3}(1 - x_4 + 2 + 3x_4)$,

$x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_4$. Далее из 1-го уравнения:

$x_1 = 1 - x_4 - x_2 - 2x_3 = 1 - x_4 - 1 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{4}{3} + 2x_4$,

$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4$. Итак, общее решение:

$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4$, $x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_4$, $x_3 = -\frac{2}{3} - x_4$.

Можно записать в виде вектора: $\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4, 1 + \frac{2}{3}x_4, -\frac{2}{3} - x_4, x_4\right)$.

Если задать, например, $x_4 = 0$ получим частное решение: $\left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}, 0\right)$.

Ответ. Общее решение: $\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4, 1 + \frac{2}{3}x_4, -\frac{2}{3} - x_4, x_4\right)$.

Однородные системы.

Задача 57. Решить однородную систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Решение.Видим, что отличие от предыдущей задачи в том, что справа нулевые константы. Если преобразовывать расширенную матрицу, то получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что справа всё равно как был, так и остаётся столбец из нулей, так что в будущем для однородных систем можно использовать только основную матрицу, ведь расширенная не несёт никакой новой информации, всё равно там справа нулевой столбец, и он не меняется при преобразованиях строк.

Итак, получили систему $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$ базисный минор можно заметить в первых двух столбцах, так что x_3 свободная переменная, переносим её вправо: $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned}\right\}$. Теперь последовательно выражаем через свободную переменную две базисные переменные.

Из 2-го: $x_2 = -2x_3$, а подставляя в 1-е, получим

$x_1 - 2x_3 = -x_3$, т.е. $x_1 = x_3$.

Общее решение системы : $\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned}\right\}$.

Также записывается в виде вектора: $(x_3, -2x_3, x_3)$.

Отличие от прошлой задачи в том, что на всех местах, где там были константы, здесь 0. Все переменные преобразовывались точно так же. Частные решения здесь отличаются тем, что задавая x_3 в k раз больше, мы и все остальные получим тоже в k раз больше:

$(1,-2,1)$, $(2,-4,2)$, $(5,-10,5)$, $(10,-20,10)$ и так далее.

То есть все тройки чисел будут пропорциональны какой-то одной.
Если для неоднородной системы представить эти тройки чисел как точки в пространстве, то там они образовывали прямую,не проходящую через начало координат, а для однородной системы - проходящую через начало координат. Поэтому разумно выбрать для этой прямой всего 1 вектор, который задаёт её. Это как раз и есть ФСР (фундаментальная система решений). ФСР $(1,-2,1)$.

Ответ. Общее решение $(x_3,-2x_3,x_3)$, ФСР $(1,-2,1)$.

Задача Д-19. Решить однородную систему $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}$.

Решение. Можно записать основную матрицу и там вычесть 1-ю строку из 2-й, впрочем, можно для небольшой системы сделать это и сразу в системе, вычесть 1-е уравнение из 2-го. Получится:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ \quad x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

Ранг равен 2, а неизвестных 3, 3-я неизвестная свободная, переносим вправо. Тогда: $\begin{cases} x_1+x_2=-x_3 \\ \quad x_2=2x_3 \end{cases}$

Из 2-го уравнения $x_2=2x_3$, тогда $x_1+2x_3=-x_3$, а значит $x_1=-3x_3$.

Общее решение: $x_1=-3x_3$, $x_2=2x_3$. В виде вектора: $(-3x_3,2x_3,x_3)$.

Присвоим $x_3:=1$, получим остальные неизвестные.

ФСР состоит всего из одного вектора: $(-3,2,1)$. Все остальные решения пропорциональны этому.

Если бы, например, присвоили $x_3:=2$, получили бы $(-6,4,2)$. Это потому, что всего одна свободная переменная.

Ответ. Общее решение: $(-3x_3,2x_3,x_3)$, ФСР $(-3,2,1)$.

Задача 58. Решить однородную систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Решение. Запишем основную матрицу, преобразуем её.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

снова представим в виде системы: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

базисный минор порядка 2, можно обвести в левом углу, поэтому 3-я и 4-я переменная - свободные. Здесь их уже две, так как $r = 2, n = 4$, поэтому $n - r = 2$. Перенесём их через знак равенства.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

здесь x_2 уже выражено: $x_2 = 2x_3 - x_4$, подставим это в первое уравнение, чтобы выразить и x_1.

$x_1 + (2x_3 - x_4) = -x_3 - x_4$, $x_1 = -3x_3$.

Общее решение: $x_1 = -3x_3$, $x_2 = 2x_3 - x_4$.

В виде вектора: $(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4)$.

Если поочерёдно присвоить значение 1 каждой из свободных переменных (а другая в это время 0) то получим гарантированно 2 линейно-независимых вектора, они не пропорциональны, так как число 1 в них на разных местах.

$x_3 := 1, x_4 := 0$, получим $(-3,2,1,0)$

$x_3 := 0, x_4 := 1$, получим $(0,-1,0,1)$.

Эти 2 вектора $\{ (-3,2,1,0), (0,-1,0,1) \}$ и есть ФСР. Это $n - r$ частных решений, из которых можно составить любые другие частные решения. Любые их линейные комбинации будут частными решениями однородной системы.

Ответ. Общее решение: $(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4)$.

ФСР это множество из 2 векторов: $\{ (-3,2,1,0), (0,-1,0,1) \}$.

Задача 59. Решить однородную систему, найти ФСР.

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & =0 \end{array}\right\}$$

Решение. Запишем основную матрицу системы и преобразуем её методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен 2, базисные столбцы 1-й и 2-й. Несмотря на то, что сначала могло показаться, что здесь будет одна свободная переменная (4 переменных и 3 уравнения), на самом деле здесь будет две свободных переменных, ведь 3-е уравнение оказалось линейной комбинацией первых двух. $n-r=4-2=2$.

Снова возвращаемся от матрицы к системе уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

перенесём свободные неизвестные вправо:

$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 - x_4 \\ 3x_2 \ \ = -4x_3 \end{cases}$ из 2 уравнения $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$, подставим это в 1-е,

будет $x_1 + \frac{4}{3}x_3 = x_3 - x_4$, то есть $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4$.

Общее решение: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$.

В виде вектора: $\left(-\frac{1}{3}x_3 - x_4, -\frac{4}{3}x_3, x_3, x_4\right)$

Построим ФСР из 2 векторов.

$x_3 := 3, x_4 := 0$, получим $(-1,-4,3,0)$

$x_3 := 0, x_4 := 1$, получим $(-1,0,0,1)$.

Так как здесь есть дроби, то для того, чтобы векторы в ФСР содержали только целые координаты, можно задавать не только 1, но и другое число, главное только чтобы в 3 и 4 координатах помещался невырожденный минор. Если мы задаём поочерёдно каждой свободной переменной какое-то число (не обязательно 1) а остальным 0, то линейная независимость этой системы векторов всё равно заведомо обеспечена.

Ответ. Общее решение: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$.

ФСР из 2 векторов: $\{(-1,-4,3,0),(-1,0,0,1)\}$.

Задача Д-20. Решить однородную систему, найти ФСР.

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \end{array}\right\}$$

Решение. Преобразуем методом Гаусса основную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Треугольная структура продолжилась до самой последней строки, и не проявилась строка из нулей, то есть ранг равен 3. Здесь всего одна свободная переменная. Развернём обратно эту матрицу, т.е. запишем в виде системы, а затем перенесём свободные переменные вправо.

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =0 \\ & & -4x_3 & +4x_4 & =0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =0 \\ & & -4x_3 & +4x_4 & =0 \end{array}\right\}$$

Из последнего, $x_3 = x_4$, это подставим во 2-е и получим $x_2 = x_4$.

Затем это всё в 1-е уравнение, получим $x_1 = -x_4$.

ФСР: один вектор $(-1,1,1,1)$.

Ответ. Общее решение: $\left(-x_4, x_4, x_4, x_4\right)$. ФСР: $(-1,1,1,1)$

Задача 60. Решить однородную систему, найти ФСР.

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

Решение. Преобразуем методом Гаусса основную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь ранг 2, неизвестных 5, $n-r=5-2=3$.

Переписывая в виде системы, переносим вправо 3 свободных переменных.

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & = & x_3 & -x_4 & -x_5 \\ & -x_2 & = & -3x_3 & +2x_4 & +x_5 \end{array}\right\}$$

Выражаем из 2-го x_2 как линейную функцию от $x_{3,}x_{4,}x_5$, а затем с помощью 1-го уравнения, также и x_1.

$x_2 = 3x_3 - 2x_4 - x_5$, $x_1 = -2x_3 + x_4$.

Общее решение: $(-2x_3 + x_4,\ 3x_3 - 2x_4 - x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$.

ФСР из 3 векторов. Для этого задаём поочерёдно 1 какой-либо из свободных переменных, а 0 остальным.

ФСР: $(-2,3,1,0,0)$, $(1,-2,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,1)$.

Ответ. Общее решение: $(-2x_3 + x_4,\ 3x_3 - 2x_4 - x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$.

ФСР: $(-2,3,1,0,0)$, $(1,-2,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,1)$.

Задача Д-21. Решить однородную систему, найти ФСР:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ. Общее решение $x_1 = -3x_3 - 5x_4$, $x_2 = 5x_3 + 4x_4$.

ФСР (-3,5,1,0) и (-5,4,0,1).

Задача Д-22. Решить однородную систему, найти ФСР

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & -x_2 & -x_3 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =0 \end{array}\right\}$$

Ответ. Общее решение: $x_1 = -\dfrac{1}{3}x_3$, $x_2 = -\dfrac{4}{3}x_3$, ФСР: $\{(-1,-4,3)\}$.

Линейные операторы, собственные векторы.

Задача 61. Построить матрицу линейного оператора в 2-мерном пространстве, если действие оператора задано таким образом: $L:(x_1, x_2) \to (x_1 - 2x_2, 3x_1 + 5x_2)$.

Решение. Находим, в какие векторы отображаются два базисных вектора: $(1,0) \to (1,3)$, $(0,1) \to (-2,5)$.

Эти результаты запишем по столбцам: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. Матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$. То есть действительно, вычисление координат образа вектора по данным формулам даёт точно такой же результат, как и с помощью умножения на матрицу. Так, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ но ведь и по исходным формулам $L:(x_1, x_2) \to (x_1 - 2x_2, 3x_1 + 5x_2)$ получилось бы то же самое: $L:(1,1) \to (-1,8)$.

Задача 62. Построить матрицу линейного оператора в 3-мерном пространстве $L:(x_1, x_2, x_3) \to (3x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2, -2x_1 + 4x_2)$

Решение. Отобразим базис 3-мерного пространства.

$L:(1,0,0) \to (3,0,-2)$ $L:(0,1,0) \to (2,2,4)$ $L:(0,0,1) \to (1,0,0)$

Ответ. Матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Задачи на поиск собственных чисел и векторов.
Задача 63. Найти собственные числа и векторы линейного оператора, заданного матрицей: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала построим харакреристическое уравнение, то есть отнимем λ по главной диагонали, и приравняем этот определитель к нулю. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Вычислим определитель, чтобы свести всё к уравнению. $(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$. Характеристические корни $\lambda = 1, \lambda = 3$. Теперь поочерёдно подставляем каждое конкретное из найденных λ, и формируем однородную систему.

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ система: } \begin{cases} 2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Здесь есть единственная информация: $y = 0$. Переменной x в системе нет, но это значит, что она может принимать любое значение, она не влияет на систему уравнений. Распространённая ошибка в данном случае - думать, что если коэффициенты при x нулевые, то $x = 0$. На самом деле x является свободной неизвестной. Если вспомнить тему «ранг матрицы», то увидим, что базисный минор матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ это минор 1-го порядка, и расположен именно во втором столбце (любая клетка размера 1 на 1), где есть число. Невырожденного минора 2-го порядка здесь нет. Таким образом, 1-я переменная свободная, и пусть даже 2-я через неё здесь не выражена, а просто равна 0, но всё равно свободной переменной мы можем присвоить любое значение, например 1. Итак, ФСР в данном случае (1,0), и именно это и является собственным вектором. Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Замечание. Любой вектор на этой прямой, то есть вида (c,0) тоже является собственным.

$\lambda = 3$

$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ система состоит из одного уравнения: $-2x+2y=0$. Ранг системы равен 1, а вот базисный минор можно выбрать как в 1-м так и во 2-м столбце, поэтому любую переменную можно считать свободной. Неважно, какую выразить через другую, всё равно одна и та же информация: $x=y$ или $y=x$. Задавая одну, получаем вторую. Вектор (1,1).

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Действительно, мы нашли такой вектор, который при умножении на эту матрицу становится больше в 3 раза.

Ответ. $\lambda=1$ вектор (1,0), $\lambda=3$ вектор (1,1).

Задача 64. Найти собственные числа и векторы для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2-9=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0$.

$D=16-4(-5)=36$. Корни $\frac{4\pm 6}{2}$, то есть -1 и 5.

Ищем собственный вектор для каждого из этих чисел.

$\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

система состоит из двух одинаковых уравнений $\begin{cases} 3x+3y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$

Одну переменную выразим через вторую $x=-y$. ФСР $(-1,1)$.

$\lambda=5$

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 3 & 2-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

система состоит из пропорциональных уравнений $\begin{cases} -3x+3y=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases}$

Одну переменную выразим через вторую $x = y$. ФСР $(1,1)$.

Ответ. $\lambda = -1$ вектор $(-1,1)$, $\lambda = 5$ вектор $(1,1)$.

Проверка. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача 65. Найти собственные числа и векторы для матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 = 0$

Здесь хар. корень кратности 2: $\lambda = 5$.

Ищем собственные векторы.

$$\begin{pmatrix} 5-5 & 1 \\ 0 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Однородная система состоит всего лишь из одного уравнения $y = 0$.

При этом формально x свободная переменная, так как базисный минор 1-го порядка во втором столбце, а 1-й столбец тогда не базисный. То есть x можно присваивать любое значение, например 1.

Итак, собственный вектор (1,0). Двух линейно-независимых собственных векторов для этого оператора нет.

Ответ. $\lambda = 5$, собственный вектор (1,0).

Замечание. Вообще, количество собственных векторов меньше или равно кратности корня.

А если бы матрица изначально была $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ то система уравнений получилась бы только из уравнений вида 0 = 0, то есть обе переменные свободные, ФСР было бы (1,0) и (0,1) и тогда собственные векторы - вся плоскость.

Задача 66. Доказать, что линейный оператор $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ не имеет собственных векторов.

Решение. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$.

$D = 4 - 20 = -16 < 0$, действительных корней нет, то есть корни комплексные, они $\notin R$.

Замечание. Если линейный оператор в 3-мерном пространстве, то характеристический многочлен 3 степени, и в том случае есть по крайней мере хотя бы один действительный корень.

Задача Д-23. Доказать, что для оператора поворота $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ в общем случае нет собственных векторов, и найти такие углы α, при которых собственные векторы есть.

Решение. $\begin{vmatrix} (\cos\alpha)-\lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & (\cos\alpha)-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $((\cos\alpha)-\lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$,

$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$, получили многочлен вида $a\lambda^2 + b\lambda + c$, где $a = 1,\ b = -2\cos\alpha,\ c = 1$. $D = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1)$.

$D \le 0$ так как $\cos^2\alpha \le 1$. Лишь для углов 0 и π получается D = 0, и тогда собственные векторы есть. При $\alpha = 0$ матрица линейного оператора примет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда все векторы плоскости являются собственными, и соответствуют числу $\lambda = 1$.

При $\alpha = \pi$ матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, все векторы собственные, соответствуют $\lambda = -1$.

Задача 67. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ сводится к уравнению $(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$, корни которого $\lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 4$.

Найдём собственные векторы.

$\lambda = 2$. Вычтем 2 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}.$$

Из этих уравнений следует, что $z = 0, y = 0$, про x нет информации, это свободная переменная. ФСР: вектор (1,0,0).

$\lambda = 3$. Вычтем 3 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Из этих уравнений следует $z = 0, y = x$, ФСР: вектор (1,1,0).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базисный минор здесь во 2 и 3 столбцах, так что x могло считаться свободной переменной.

$\lambda = 4$. Вычтем 4 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Базисный минор можно найти, например, в левом верхнем углу, тогда z считаем свободной переменной и все остальные выразим именно через неё. Из 2-го $y = z$, а затем из 1-го $-2x + 2z = 0$, то есть $x = z$.
ФСР: вектор (1,1,1).

Ответ.
Собст. число $\lambda = 2$ собст. вектор (1,0,0),
собст. число $\lambda = 3$ собст. вектор (1,1,0),
собст. число $\lambda = 4$ собст. вектор (1,1,1).

Задача Д-24. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ сводится к уравнению

$(1-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda) = 0$, корни которого: $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 7$.

$\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ система } \begin{cases} 6x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

откуда $y = -z, x = 0$, ФСР это вектор $(0,-1,1)$.

$\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ система } \begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

откуда $y=-5x, z=0$, ФСР это вектор $(1,-5,0)$.

$\lambda = 7$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ система } \begin{cases} y+z=0 \\ -5y+z=0 \\ -6z=0 \end{cases}$$

откуда $z=0$, а значит и $y=0$, x свободная переменная.

Тогда ФСР это вектор (1,0,0).

Ответ.

Собст. число $\lambda = 1$ собст. вектор $(0,-1,1)$,

собст. число $\lambda = 2$ собст. вектор $(1,-5,0)$,

собст. число $\lambda = 7$ собст. вектор (1,0,0).

Задача 68. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$ разложим по 2-й строке:

$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((-1-\lambda)(4-\lambda)+6\big) = 0$ что сводится к

$(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = 0$, первый корень и так виден и равен 1, у второго выражения найдём корни, например, через дискриминант, получаем 1 и 2. Итак, $(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$, корни 1,1,2, они же собственные числа. Два характеристических корня совпали (1 это корень кратности 2). Теперь ищем собственные векторы.

$\lambda = 1$.

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, если в такой системе уравнений вычесть из 3-го уравнения утроенное 1-е, то 3-е обнулится, и в итоге ранг системы равен 1. То есть мы видим, что в случае корня кратности 2, ранг понизился сразу на 2 пункта, здесь будет 2 свободных неизвестных.

Итак, система из 1 уравнения с 3 неизвестными: $-2x-2y+z=0$.

Тогда $z=2x+2y$, свободные переменные x, y поочерёдно принимают значение 1, ФСР из двух векторов: (1,0,2) (0,1,2).

$\lambda = 2$.

$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, при этом сразу замечаем, что из 2-го уравнения будет следовать $y=0$, поэтому в остальных уравнениях его сразу не пишем. Однородная система:

$$\begin{cases} y=0 \\ -3x+z=0 \\ -6x+2z=0 \end{cases}$$

Ещё два уравнения в ней пропорциональны, так что в итоге, у нас есть такое общее решение: $y=0, z=3x$. ФСР вектор (1,0,3).

Ответ. Кратный корень $\lambda = 1$ два вектора: (1,0,2) (0,1,2),
Корень $\lambda = 2$ вектор (1,0,3).

Проверка. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Задача 69. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Решение. Найдём собственные числа с помощью характеристического уравнения.

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ сводится к $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0$

Видно, что есть по крайней мере один корень $\lambda = 1$.

Затем разделим многочлен $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12$ на $(\lambda - 1)$, получим крадратичное уравнение и там найдём ещё 2 корня.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 - 7\lambda + 12 \\ \quad -7\lambda^2 + 19\lambda & \\ \quad \underline{-7\lambda^2 + 7\lambda} & \\ \qquad\quad 12\lambda - 12 & \\ \qquad\quad \underline{12\lambda - 12} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Итак, разделилось без остатка. Таким образом,
$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 12)$.

Для многочлена 2 степени: $D = 49 - 4 \cdot 12 = 1$. Корни $\frac{7 \pm 1}{2}$, т.е. 3 и 4.

Итак, собственные числа: $\lambda = 1, \lambda = 3, \lambda = 4$.

Теперь ищем вектор для каждого из этих чисел.

Пусть $\lambda = 1$. Составим однородную систему

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ здесь сразу видим, что 2 и 3 строка одинаковы, то есть 3-е уравнение копия 2-го, так что в системе фактически не 3, а 2 уравнения.

Запишем систему, заодно при этом поделив 1-е уравнение на 2.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

Из 1-го сразу $y = 2x$, подставляя во 2-е, можно также и z выразить через x: $9x - 3z = 0$, т.е. $z = 3x$. При этом x свободная переменная. Общее решение $(x, 2x, 3x)$. ФСР это вектор (1,2,3).

Пусть теперь $\lambda = 3$. Составим однородную систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из 1-го уравнения сразу очевидно $x = y$.

Система: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$ Если учесть $x = y$, то $\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 5y - 5z = 0 \end{cases}$ так что очевидно, что и $z = y$. ФСР (1,1,1).

Пусть теперь $\lambda = 3$. Составим однородную систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Система: $$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

из 1-го уравнения $x = 2y$, подставим эту информацию во 2-е и 3-е.

$\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 6y - 6z = 0 \end{cases}$ значит $z = y$. ФСР (2,1,1).

Ответ. $\lambda = 1$ собственный вектор (1,2,3),

$\lambda = 3$ собственный вектор (1,1,1),

$\lambda = 4$ собственный вектор (2,1,1).

Квадратичные формы.

Задача 70. Построить матрицу квадратичной формы:

$Q = 3x_1^{\;2} + 4x_2^{\;2} + 5x_3^{\;2} + 6x_1x_2 + 16x_1x_3$.

Решение. По диагонали коэффициенты при квадратах, а остальные должны быть разделены поровну, то есть $16x_1x_3 = 8x_1x_3 + 8x_3x_1$. Таким образом мы добиваемся, чтобы матрица была симметрической.

Ответ. Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^{\;2} + 4x_2^{\;2} + 5x_3^{\;2} + 6x_1x_2 + 16x_1x_3 .$$

Задача Д-25. Построить матрицу кв. формы $Q = 3x_1^{\;2} + 10x_1x_2 + 4x_2^{\;2}$.

Решение. Распределим поровну коэффициенты:

$Q = 3x_1^{\;2} + 5x_1x_2 + 5x_2x_1 + 4x_2^{\;2}$. Каждый коэффициент, стоящий при $x_i x_j$, запишем на место a_{ij}.

Ответ: матрица: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 71. Квадратичную форму $Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2$ привести к главным осям.

Алгоритм: 1. Записать матрицу кв. формы.

2. Найти собственные числа и векторы.

3. Нормировать векторы.

4. Записать формулы перехода от старого к новому базису.

5. Подставить в кв. форму, привести подобные.

Решение. Матрица квадратичной формы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдём собственные числа и векторы. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

Собственные числа 5 и 1.

Решаем две однородные системы, для каждого λ по отдельности.

$\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ранг системы = 1, остаётся одно уравнение $x = y$, собственный вектор (1,1).

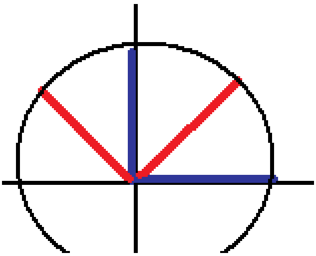
Нормируем этот вектор, то есть делим на его длину, которая составляет $\sqrt{2}$. Получаем $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Аналогично,

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ранг системы = 1, остаётся одно уравнение $x = -y$, собственный вектор $(-1,1)$.

Нормируем его: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Как видим, эти векторы ортогональны. Это потому, что матрица оператора симметрична (что и так следует из теоремы 7, см.лекции). Обратите внимание, что этот новый базис - повёрнутый на 45^0 декартов базис, то есть (1,0) и (0,1). Синим цветом нарисованы векторы (1,0) и (0,1) а красным $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.



При таком преобразовании плоскости не искажаются площади фигур. Если бы мы не нормировали векторы, то при линейном преобразовании искажались бы площади, коэффициенты квадратичной формы в новом базисе не получились бы равны собственным числам λ. Причём если $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ это именно 2-й а не 1-й, то преобразование плоскости получается без зеркального отражения, т.е. просто поворот.

Обозначим новые координаты z, w, тогда взаимосвязь старых и новых координат через матрицу перехода выглядит так:

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - отсюда, умножив матрицу на столбец,

можно записать формулы связи старых и новых координат:

$$x = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}.$$

Если мы подставим эти x, y в исходную квадратичную форму $Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2$, то увидим, что в ней не будет произведений типа zw, wz, а коэффициенты при квадратах - это и будут ранее найденные собственные числа. Покажем это подробнее:

$$Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2 =$$

$$3\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$3\left(\frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2} - 2\frac{zw}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) + 4\left(\frac{z^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) + 3\left(\frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2} + 2\frac{zw}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)z^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)w^2 + 3zw - 3zw = 5z^2 + 1w^2.$$

Собственные числа, как видим, как раз и оказались в роли коэффициентов при квадратах.

Ответ. $Q = 5z^2 + w^2$, новый базис $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача Д-26. Квадратичную форму $Q = 2xy$ привести к главным осям.

Решение. Сначала построим её матрицу: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$, собственные числа $1, -1$. Ищем собственные векторы для каждого из них.

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = y$, собственный вектор (1,1).

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = -y$, собственный вектор $(-1,1)$.

Затем нужно нормировать их, то есть поделить на длину. Итак получили новый ортонормированный базис:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Запишем связь старых и новых координат, новые мы обозначаем z, w.

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ здесь надо вспомнить, что для нахождения новых координат мы решали систему уравнений, где основная матрица - это «матрица перехода», у которой в столбцах векторы нового базиса.

Итак, верны такие формулы: $x = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}$.

В записи квадратичной формы заменим x, y по этим формулам. Мы увидим, что после приведения подобных сократятся все произведения, содержащие разные переменные, вида zw, wz, и останутся только квадраты, причём коэффициентами как раз и окажутся собственные числа.

$$2xy = 2\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{z^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) = z^2 - w^2.$$

Ответ. Кв.форма: $z^2 - w^2$, новый базис $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача Д-27. Привести к главным осям квадратичную форму:
Q(x,y) = $14x^2 + 24xy + 21y^2$.

Решение. Матрица: $\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$. Ищем собственные числа и векторы.

$$\begin{vmatrix} 14-\lambda & 12 \\ 12 & 21-\lambda \end{vmatrix} = (14-\lambda)(21-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0.$$

$D = 1225 - 600 = 625$, $\lambda = \frac{35 \pm 25}{2}$, корни 30 и 5.

Ищем собственные векторы.

Пусть $\lambda = 30$. $\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} -16a + 12b = 0 \\ 12a - 9b = 0 \end{cases}$

уравнения в такой системе пропорциональны, ранг равен не 2, а 1.
Фактически, здесь одно уравнение: $4a = 3b$.
Можно в качестве ФСР принять вектор (3,4).
Однако его ещё надо нормировать. Длина равна $\sqrt{9+16}$ = 5.
Итак, нормированный собственный вектор $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Пусть $\lambda = 5$. $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 9a + 12b = 0 \\ 12a + 16b = 0 \end{cases}$

уравнения пропорциональны, ранг равен 1.
Фактически, здесь одно уравнение: $3a = -4b$.
Можно в качестве ФСР принять вектор $(-4,3)$. Длина равна 5.
Нормированный собственный вектор $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Итак, новый базис состоит из векторов $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Переход к новым координатам:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ т.е.} \quad x = \frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w \ , \quad y = \frac{4}{5}z + \frac{3}{5}w.$$

Если подставить эти выражения в $14x^2 + 24xy + 21y^2$ и привести подобные, получим $30z^2 + 5w^2$.

$$14\left(\frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w\right)^2 + 24\left(\frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w\right)\left(\frac{4}{5}z + \frac{3}{5}w\right) + 21\left(\frac{4}{5}z + \frac{3}{5}w\right)^2 =$$

$$z^2\left(14\cdot\frac{9}{25} + 24\cdot\frac{12}{25} + 21\cdot\frac{16}{25}\right) + w^2\left(14\cdot\frac{16}{25} - 24\cdot\frac{12}{25} + 21\cdot\frac{9}{25}\right) +$$

$$zw\left(-14\cdot\frac{24}{25} + 24\cdot\frac{9-16}{25} + 21\cdot\frac{24}{25}\right) =$$

$$z^2\left(\frac{126 + 288 + 336}{25}\right) + w^2\left(\frac{224 - 288 + 189}{25}\right) + zw\left(\frac{24(-14 - 7 + 21)}{25}\right) =$$

$$\frac{750}{25}z^2 + \frac{125}{25}w^2 + 0zw = 30z^2 + 5w^2.$$

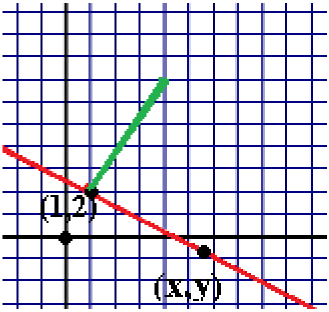
Ответ. $Q = 30z^2 + 5w^2$, новый базис: $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Аналитическая геометрия.

Блок задач на построение уравнений прямых на плоскости.

Задача 72. Построить уравнение прямой на плоскости по точке $M_0(1,2)$ и перпендикуляру $n(3,5)$.

Решение. Возьмём произвольную точку M с координатами (x,y). Если она принадлежит этой прямой, то вектор M_0M, координаты которого равны $(x-1, y-2)$ перпендикулярен вектору n.



Таким образом, скалярное произведение векторов $(x-1, y-2)$ и $(3,5)$ есть 0. Тогда $3(x-1)+5(y-2)=0$, приводя подобные, получаем $3x+5y-13=0$. **Ответ**. $3x+5y-13=0$.

Задача 73. Построить уравнение прямой на плоскости по точке $M_0(1,2)$ и направляющему $\boldsymbol{l}$ (3,5).

Решение. Возьмём произвольную точку M с координатами (x, y). Если она принадлежит этой прямой, то вектор M_0M а именно $(x-1, y-2)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{l}$ (3,5). Таким образом, их координаты пропорциональны: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{5}$. Это уравнение называется каноническим. Приведём к обычному уравнению, для этого домножим на константы. $5(x-1)=3(y-2)$, то есть $5x-5=3y-6$ что сводится к $5x-3y+1=0$.

Ответ. $5x-3y+1=0$.

Замечание. Нормаль к полученной прямой - вектор $(5,-3)$. Мы могли бы сразу перейти от направляющего вектора к нормали (поменять координаты и у одной из них сменить знак), а потом уже строить уравнение по нормали, как в прошлом методе.

Задача Д-28. Построить уравнение прямой на плоскости по точке $M_0(4,2)$ и перпендикуляру $n(6,1)$. **Ответ.** $6x+y-26=0$.

Задача Д-29. Построить уравнение прямой на плоскости по точке $M_0(4,2)$ и направляющему $\boldsymbol{l}$ (6,1). **Ответ.** $x-6y+8=0$.

Задача Д-30. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) перпендикулярно вектору (3,4).

Решение. $M_0M = (x-1, y-2)$, $n = (3,4)$, они перпендикулярны. Тогда $3(x-1)+4(y-2)=0$, то есть $3x+4y-11=0$.

Задача 74. Построить уравнение прямой по 2 точкам A(1,2) и B(6,9).

Решение. Направляющий вектор AB здесь (5,7). Тогда для всякой точки M с произвольными координатами (x, y), принадлежащей этой прямой, векторы AM и AB коллинеарны. Из координаты пропорциональны, то есть $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{7}$, из этого следует $7x-7=5y-10$. В итоге ответ $7x-5y+3=0$.

Ответ. $7x-5y+3=0$.

Замечание. Можно было в качестве основной взять и 2-ю точку а не 1-ю. При этом, после приведения подобных, получилось бы точно такое же уравнение. Действительно, из $\frac{x-6}{5}=\frac{y-9}{7}$ следует $7x-42=5y-45$, что приводит к тому же результату $7x-5y+3=0$.

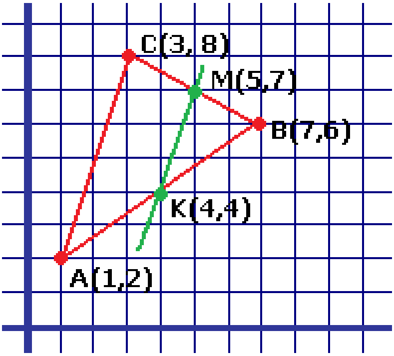
Задача Д-31. Найти уравнение прямой, проходящей через точки (3,4) и (5,7).

Решение. Направляющий вектор здесь (5-3, 7-4) = (2,3).

$\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}$, $3x-9=2y-8$, $3x-2y-1=0$. **Ответ.** $3x-2y-1=0$.

Задача 75. Найти уравнение средней линии треугольника с вершинами $A(1,2)$, $B(7,6)$, $C(3,8)$, проходящей параллельно стороне AC.

Решение. Сначала найдём середины сторон AB, BC. Обозначим их, например, через K и M. Найдём среднее арифметическое абсцисс и ординат. K $(4,4)$, M $(5,7)$.



На прямой, содержащей отрезок КМ, направляющий вектор $(1{,}3)$.

$$(x-4, y-4) \parallel (1{,}3) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x - 12 = y - 4 \quad \Rightarrow$$

$3x - y - 8 = 0 \Rightarrow \; y = 3x - 8$. **Ответ.** $y = 3x - 8$.

Задача Д-32. Найти уравнения средних линий треугольника с вершинами $A(1{,}2)$, $B(7{,}6)$, $C(3{,}8)$, проходящих параллельно АВ, ВС.

Блок задач на поиск пересечений прямых в плоскости.

Задача 76. Найти пересечения прямой $3x - 4y + 12 = 0$ с координатными осями, а также площадь треугольника, который она отсекает от одной из координатных четвертей.

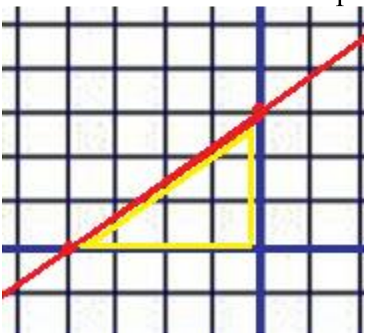
Решение. Сначала присвоим $y = 0$ и найдём x.

$3x + 12 = 0$, $x = -4$. Точка пересечения с осью Оу: $(-4{,}0)$.

Затем присвоим $x = 0$ и найдём y.

$-4y + 12 = 0$, $y = 3$. точка пересечения с осью Ох: $(0{,}3)$.

Очевидно, что треугольник лежит во 2-й четверти (см. чертёж).



Его площадь это ровно половина площади прямоугольника, которая, в свою очередь, равна $3 \cdot 4 = 12$. Тогда S = 6.
Ответ. Точки пересечения $(-4,0)$ и $(0,3)$, S = 6.

Задача 77. Найти точку пересечения двух прямых $x + 4y - 9 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$.
Решение. Запишем оба уравнения в виде системы.
$x + 4y = 9$
$2x + y = 4$
Каждое уравнение системы задаёт прямую, а координаты точки пересечения - это как раз и есть те числа x, y, которые удовлетворяют каждому из уравнений. Система имеет единственное решение, так как определитель основной матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 \neq 0$. В любом другом случае, прямые были бы или параллельны, или совпадали.
Систему решим методом Гаусса, вычтем из 2-го удвоенное 1-е.
Получим $-7y = -14$, т.е. $y = 2$, тогда $x = 1$.
Ответ. Точка пересечения (1,2).

Задача 78. При каком A три прямых:
$x + y - 3 = 0$, $x - 2y = 0$, $Ax - 4y - 2 = 0$
пересекаются в одной точке?
Решение. Составим систему из трёх уравнений.
$x + y - 3 = 0$
$x - 2y = 0$
$Ax - 4y - 2 = 0$
Достаточно решить систему из первых двух, найти точку пересечения, и затем на втором шаге найти такой параметр, при котором эта точка принадлежит третьей прямой. Из 2-го уравнения, $x = 2y$, тогда в 1-м получим $3y - 3 = 0$, т.е. $y = 1$, тогда $x = 2$. Итак, 1-я и 2-я прямые пересекаются в точке $(2,1)$. А теперь подставим эти значения в 3-е уравнение, чтобы узнать параметр A.
$2A - 4 - 2 = 0$, $2A = 6$, $A = 3$. **Ответ**. $A = 3$.

Блок задач на поиск расстояний.

Задача 79. Найти расстояние от точки $M_1(1,4)$ до прямой $6x+2y-15=0$.

Решение. По формуле $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$:

$d=\dfrac{|6+8-15|}{\sqrt{36+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{40}}=\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$. **Ответ.** $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

Обратите внимание, что в знаменателе должна быть сумма квадратов не чисел 1 и 4, а 6 и 2, так как A, B это именно коэффициенты из уравнения прямой, а не координаты точки!

Задача Д-33. Найти расстояние от точки $M_1(1,4)$ до прямой $3x+4y+1=0$.

Решение. Нормаль $n=(3,4)$. Тогда $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$

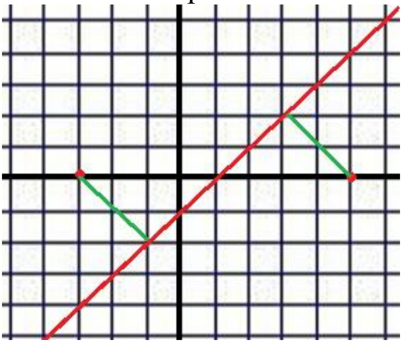
$\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 4+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{20}{5}=4$.

Задача 80. Найти 2 точки на оси Ох, отстоящие от прямой $x-y-1=0$ на расстояние $2\sqrt{2}$.

Решение. Применим формулу $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ но только в ней d уже известно. В нашем примере должно быть $2\sqrt{2}=\dfrac{|x_1-y_1-1|}{\sqrt{2}}$.

Мы ищем точки вида (c,0), ведь сказано, что они должны быть на оси Ох. Поэтому $2\sqrt{2}=\dfrac{|c-0-1|}{\sqrt{2}}$, $|c-1|=4$, $c-1=\pm 4$. Две возможности:

$c=-3$ и $c=5$. На чертеже зелёным показаны кратчайшие пути от этих точек до прямой. Расстояния равны $2\sqrt{2}$.



Ответ. (-3,0) и (5,0).

Задача 81. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x+y+3=0$ и $6x+3y+4=0$.

Решение. Заметим, что прямые действительно параллельны:
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\neq\frac{3}{4}$, то есть пропорция сохраняется для всех коэффициентов, но нарушается для констант. Если бы уравнения были полностью пропорциональны, то это бы означало, что они задают одну и ту же прямую. А так они параллельны. Если бы не было пропорции и для коэффициентов, то прямые бы пересекались в одной точке.

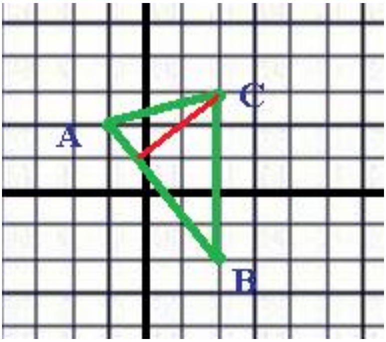
Для поиска расстояния применяется та же формула $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ на одной прямой выбирается какая-либо точка, и ищется расстояние от этой точки до второй прямой.

Для нахождения какой-либо точки можно присвоить одну переменную (проще всего присвоить 0) и вычислить вторую. Например, $x:=0$, тогда в первом уравнении $2\cdot 0+y+3=0$, $y=-3$, и точка $(0,-3)$ принадлежит первой прямой. Ищем расстояние от неё до 2-й прямой. $d=\frac{|6\cdot 0+3\cdot(-3)+4|}{\sqrt{6^2+3^2}}=\frac{|-9+4|}{\sqrt{36+9}}=\frac{5}{\sqrt{45}}=\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Задача 82. Даны точки $A(-1,2)$, $B(2,-2)$, $C(2,3)$.
Вывести уравнение прямой, содержащей AB, и найти расстояние от точки C до этой прямой (то есть высоту треугольника).
Решение. Вектор AB равен $(3,-4)$, и это есть направляющий на прямой. В то же время вектор AM до произвольной точки $M(x,y)$, который равен $(x+1, y-2)$, пропорционален AB. Тогда $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4}$, то есть $-4x-4=3y-6$, и уравнение прямой: $4x+3y-2=0$.

Теперь по формуле $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ найдём расстояние от этой прямой до точки $C_1(2,3)$. $d = \frac{|4x_1+3y_1-2|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|8+9-2|}{5} = \frac{15}{5} = 3$.



Ответ. Прямая $4x+3y-2=0$, расстояние 3.

Уравнение плоскости в пространстве.
Задача 83. Построить уравнение плоскости, проходящей через точку A (1,2,3) перпендикулярно вектору n (1,4,2)
Решение. Для произвольной точки $M(x,y,z)$ в плоскости, вектор AM с координатами $(x-1, y-2, z-3)$ ортогонален $n(1,4,2)$. Их скалярное произведение 0. Тогда $(x-1)+4(y-2)+2(z-3)=0$, т.е.

$x+4y+2z-15=0$.

Ответ. Уравнение плоскости $x+4y+2z-15=0$.

Задача 84. Построить уравнение плоскости по точке (2,2,8) и перпендикуляру (3,3,7).

Решение. Как и в прошлой задаче, берём произвольную точку $M(x,y,z)$ в плоскости, тогда вектор $(x-2,y-2,z-8)$ ортогонален вектору $n(3,3,7)$. Тогда $3(x-2)+3(y-2)+7(z-8)=0$ из чего следует $3x+3y+7z-68=0$.

Ответ. $3x+3y+7z-68=0$.

Задача 85. Построить уравнение плоскости по точке $M_0(-2,3,7)$ и двум направляющим векторам $l_1(4,2,3)$ и $l_2(2,-5,0)$.

Решение. Способ 1. Сначала можно найти нормаль как векторное произведение: $n=[l_1,l_2]$, а затем уравнение плоскости по точке и нормали.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = e_1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 15e_1+6e_2-24e_3.$$

Итак, нормаль $(15,6,-24)$, при этом можно заметить, что есть общий множитель 3, и поделить на 3, ведь от изменения длины, направление нормали не изменится. Итак, рассматриваем $n=(5,2,-8)$.

Теперь возьмём произвольную точку в этой плоскости, и проведём к ней вектор от точки $M_0(-2,3,7)$. Это вектор $(x+2,y-3,z-7)$. Он ортогонален вектору $n=(5,2,-8)$.

Тогда $5(x+2)+2(y-3)-8(z-7)=0$, т.е. $5x+2y-8z+60=0$.

Но это было решение в 2 этапа. А можно проще:

Способ 2. Возьмём вектор $(x+2,y-3,z-7)$ в плоскости, тогда 3 вектора, а именно $M_0M(x+2,y-3,z-7)$, $l_1(4,2,3)$ и $l_2(2,-5,0)$ должны образовывать линейно-зависимую систему. То есть, можем сразу найти такой определитель и приравнять к 0:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-7)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$15(x+2)+6(y-3)-24(z-7)=0$.

Из этого следует $15x+6y-24z+180=0$. Такое уравнение можно сократить на 3, и получается $5x+2y-8z+60=0$.

Ответ. $5x+2y-8z+60=0$.

Задача 86. Построить уравнение плоскости по трём точкам. A(1,2,3), B(3,5,7), C(4,5,6).

Решение. Здесь можно одну из точек, например A, рассматривать в качестве основной, а две другие помогут найти 2 направляющих вектора: AB и AC. AB = (2,3,4), AC = (3,3,3).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Для удобства вычислений, вынесли из определителя коэффициент 3. Можно сразу сократить на него правую и левую часть.

Итак, $(x-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$-(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -x+2y-z=0$.

Сократим ещё на -1, получим $x-2y+z=0$.

Ответ. $x-2y+z=0$.

Задача 87. Построить уравнение плоскости, проходящей через (0,0,0) параллельно 2 направляющим (1,1,2) и (2,1,3).

Решение. Вектор от начала координат до произвольной точки (x,y,z), который сам имеет координаты (x,y,z), лежит в плоскости двух направляющих, т.е. определитель равен 0.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - z = 0.$$

Ответ. $x + y - z = 0$.

Задача 88. Найти расстояние от точки M_1 (3,1,5) до плоскости $x - 2y + z = 0$.

Решение. По формуле $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ получаем, что

$$d = \frac{|x_1 - 2y_1 + z_1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|3 - 2 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Ответ. $d = \sqrt{6}$.

Задача 89. Найти угол между двумя плоскостями: $x - 2y + 2z = 0$ и $x + 2y + 2z + 1 = 0$.

Решение. Нормали к этим плоскостям: $(1,-2,2)$ и $(1,2,2)$.

Нормали не коллинеарны, то есть плоскости не параллельны, значит, они действительно пересекаются по какой-то прямой, и между ними есть какой-то угол.

$$\varphi = \arccos\frac{(n_1, n_2)}{|n_1| \cdot |n_2|} = \arccos\frac{1 - 4 + 4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \arccos\frac{1}{9}.$$

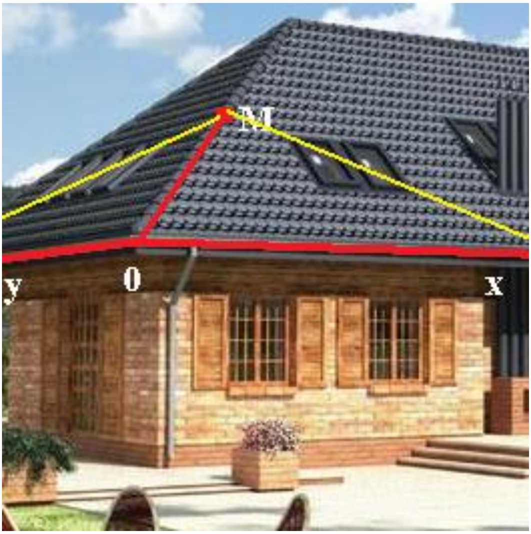
Кстати, константа в уравнении одной из плоскостей никак не влияет на ответ, так как параллельный перенос плоскости не влияет на угол, который она образует с другой плоскостью.

Ответ. $\arccos\left(\frac{1}{9}\right)$, что приблизительно составляет 83,6 градусов.

Задача Д-34. Через точку $M(1,1,1)$ и ось Ох проходит одна плоскость, через эту же точку и ось Оу вторая. Найти тупой угол между этими плоскостями.

Решение. Если плоскость содержит ось и точку, то в ней по крайней мере содержится начало координат, и 2 такие направляющих: один проведён от (0,0,0) к точке $(1,1,1)$, а второй - это просто базисный вектор оси, то есть для Ох вектор (1,0,0), а в случае оси Оу (0,1,0). Таким образом, уравнения каждой плоскости можно построить.

А затем мы найдём угол между их нормалями. Эти плоскости можно представить так: две наклонные части крыши. Плоскость, перпендикулярная линии ОМ, не горизонтальна, так что угол между двумя частями такой крыши вовсе не 90 градусов. Чем более пологая крыша, тем ближе этот угол к 180, а чем более крутая, тем ближе к 90. Плоскость, перпендикулярная стыковочной линии крыши, а именно линии ОМ, показана жёлтым цветом.



Строим уравнение 1-й плоскости. Возьмём 3-й вектор, проведённый к какой-то произвольной точке (x, y, z) от начала координат. Тогда 3 радиус-вектора, проведённых из начала координат, а именно $(1,1,1)$, $(1,0,0)$, (x, y, z) должны образовать линейно-зависимую систему.

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} z = 0x + 1y - 1z = 0 .$$

Нормаль к этой плоскости $(0,1,-1)$.

Строим уравнение 2-й плоскости. Аналогично, только (0,1,0).

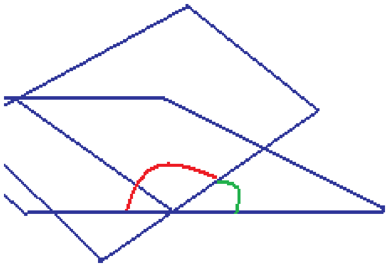
$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}z=-1x-0y+1z=0.$$

Нормаль к этой плоскости $(-1,0,1)$.

Известно, что $(n_1,n_2)=|n_1|\cdot|n_2|\cdot\cos\varphi$.

Тогда $-1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\varphi$, т.е. $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$, угол 120 градусов.

Замечание. Если бы надо было найти косинус наименьшего угла, то есть острого, то должны были бы рассматривать модуль $|(n_1,n_2)|$, чтобы угол получился именно в 1-й четверти, т.е. с положительным cos.



Вообще же, всегда имеется два угла, φ и $180-\varphi$. В зависимости от того, острый или тупой угол надо рассматривать, его косинус вычисляется как $\dfrac{|(n_1,n_2)|}{|n_1|\cdot|n_2|}$ либо $\dfrac{-|(n_1,n_2)|}{|n_1|\cdot|n_2|}$. **Ответ.** $\varphi=120^0$.

Прямая в пространстве

Блок задач на построение уравнений.

Задача 90. Построить уравнения прямой в пространстве (канонические, параметрические) по точке $M_0(2,-3,4)$ и направляющему вектору $l(1,2,3)$.

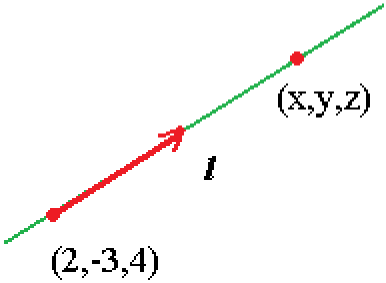
Решение. Если отложить вектор от $M_0(2,-3,4)$ к произвольной точке $M(x,y,z)$, то вектор $M_0M=(x-2,y+3,z-4)$ коллинеарен вектору $l(1,2,3)$, то есть их координаты пропорциональны. Тогда:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3}$$

(это мы сейчас получили канонические уравнения).

Обратите внимание, что в знаменателях здесь оказались именно координаты направляющего вектора!

Чертёж:



Как мы видим, прямая в пространстве задаётся не одним уравнением, а системой уравнений. Здесь как минимум 2 знака равенства. 1-я дробь равна 2-й, а 2-я равна 3-й. На самом деле здесь даже 3 уравнения, ведь ещё и 1-я равна 3-й.

Если теперь каждую такую дробь приравнять к некоторому параметру t, то: $\frac{x-2}{1}=t$, $\frac{y+3}{2}=t$, $\frac{z-4}{3}=t$, следовательно:

$x-2=t$, $y+3=2t$, $z-4=3t$.

Тогда $\{x=2+t, y=-3+2t, z=4+3t\}$ - параметрические уравнения.

Можно их записать ещё и в векторной форме: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}t$.

Они задают движение точки по этой прямой во времени. Здесь при $t=0$ мы как раз оказались бы в исходной точке, а при $t=1$ в конце направляющего вектора.

Ответ. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3}$, $\{x=2+t, y=-3+2t, z=4+3t\}$

Задача 91. Построить уравнения прямой, лежащей в пересечении двух плоскостей $2x-3y+z-6=0$ и $x+5y-z+10=0$.

Решение. Векторное произведение нормалей $l=[n_1,n_2]$ это направляющий вектор, вычислим его. $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}e_1-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}e_2+\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}e_3=-2e_1+3e_2+13e_3$.

Итак, направляющий вектор $l=(-2,3,13)$.

Теперь нужно найти хотя бы одну точку на этой прямой. Чтобы взять произвольную точку из пересечения плоскостей, можно положить $z=0$ и решить систему, вычислив x,y.

Два уравнения, без z, приводят к такой системе: $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+5y=-10 \end{cases}$.

Выразим из 2-го $x=-5y-10$ и подставим в 1-е.

Получим $-10y-20-3y=6$. Тогда $-13y=26$, т.е. $y=-2$.

Но тогда $x=0$. Итак, получили точку $M_0(0,-2,0)$.

Вектор от этой точки к произвольной точке (x,y,z) равен $(x,y+2,z)$ и он попорционален направляющему вектору. Тогда

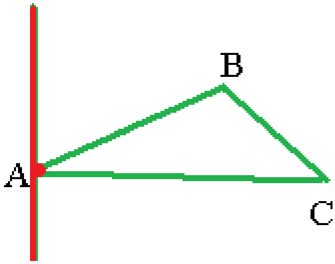
$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{13}$ канонические уравнения этой прямой.

Приравнивая все эти дроби к t, можно вычислить и параметрические уравнения $x=-2t, y=-2+3t, z=13t$.

Ответ. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{13}$, $x=-2t, y=-2+3t, z=13t$.

Задача 92. Найти параметрические и канонические уравнения прямой, перпендикулярной к плоскости треугольника с вершинами $A(0,-2,3)$, $B(3,1,3)$, $C(-3,-1,0)$ и проходящей через вершину А.

Решение. Направляющие АВ и АС это (3,3,0) и $(-3,1,-3)$.



Их векторное произведение:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} e_3 = -9e_1 + 9e_2 + 12e_3 .$$

Итак, вектор $(-9,9,12)$. Но можно в том же направлении выбрать вектор короче в 3 раза (для удобства вычислений) ведь направление от этого не изменится. Итак, пусть направляющий для прямой $(-3,3,4)$, точка $A(0,-2,3)$. Вектор от $A(0,-2,3)$ к произвольной точке имеет вид $(x, y+2, z-3)$. Он коллинеарен $(-3,3,4)$, есть пропорциональность координат. Тогда $\frac{x}{-3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$. Это и есть канонические уравнения. Перейти к параметрическим можно так же, как и в прошлых задачах: приравнять все дроби к t и выразить всё через t.

Ответ. Канонические $\frac{x}{-3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$,

параметрические $x = -3t, y = -2 + 3t, z = 3 + 4t$.

Блок задач на поиск пересечений.

Задача 93. Доказать, что прямая $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ пересекает ось Oz и найти точку пересечения.

Решение. Если прямая пересекает ось Oz, то точка пересечения имеет вид $(0,0,c)$. Если в первые две дроби вместо x, y подставить 0, то получим $\frac{0-3}{3} = \frac{0-2}{2} = \frac{c-4}{3} = -1$. Тогда $c - 4 = -3$, т.е. $c = 1$.

Если бы первые две дроби после такой подстановки оказались не равны, то это бы означало, что нет пересечения с осью Oz.

Ответ. (0,0,1).

Замечание. Если бы прямая и ось Oz были скрещивающимися, то подстановка $(0,0,c)$ в канонические уравнения привела бы к противоречию уже в первых двух дробях, например, для $\frac{x-3}{3}=\frac{y-20}{2}=\frac{z-4}{3}$ получили бы $\frac{0-3}{3}=\frac{0-20}{2}=\frac{c-4}{3}$, но ведь $-1\neq-10$, т.е. противоречие уже в первых дробях, независимо от c.

Задача 94. Доказать, что две прямые в пространстве $\begin{cases} x=2-t \\ y=4-3t \\ z=-2+4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=5-2t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$ пересекаются, и найти точку пересечения.

Решение. Если у них есть общая точка, то можно приравнять x,y,z из первых и вторых равенств. Но неизвестно, при каком параметре достигаются эти значения в каждом случае, поэтому нужно решить систему уравнений, положив в первых равенствах t_1, а во вторых t_2.

$\begin{cases} 2-t_1=5-2t_2 \\ 4-3t_1=3-t_2 \\ -2+4t_1=t_2 \end{cases}$ перенесём все t_1, t_2 в одну сторону, а константы в другую, чтобы система была записана в стандартной форме.

$\begin{cases} -t_1+2t_2=3 \\ -3t_1+t_2=-1 \\ +4t_1-t_2=2 \end{cases}$ расширенная матрица: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Преобразуем методом Гаусса. От 2-й строки отнимем утроенную 1-ю, а к 3-й прибавим 4-кратную 1-ю.

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$ т.е. $\begin{cases} -t_1+2t_2=3 \\ -5t_2=-10 \\ 7t_2=14 \end{cases}$ то есть сразу же $t_2=2$ из 2-го и 3-го уравнений, и они не противоречат друг другу. Система совместна, ранги основной и расширенной матриц совпадают, так как равны 2. Из 1-го затем $-t_1+4=3$, т.е. $t_1=1$.

Впрочем, можно было решить систему ещё быстрее, если сложить 2 и 3 уравнения, тогда сразу бы получилось $t_1=1$.

Затем подставить $t_1=1$ в первые уравнения либо $t_2=2$ во вторые, получим одни и те же значения для x, y, z.

$$\begin{cases} 2-t_1=1=5-2t_2 \\ 4-3t_1=1=3-t_2 \\ -2+4t_1=2=t_2 \end{cases}, \text{ т.к. } \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=4-3=1 \\ z=-2+4=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=5-4=1 \\ y=3-2=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Ответ. Точка пересечения (1,1,2).

Задача 95. Найти точку пересечения плоскости $x+y+2z+3=0$ и прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$.

Решение. Запишем прямую с помощью параметрических уравнений: $x=1+t$, $y=2+3t$, $z=1+2t$.

Подставим эти выражения в уравнение плоскости, чтобы найти, при каком значении t оно выполняется. $(1+t)+(2+3t)+2(1+2t)+3=0$ $\Rightarrow$ $8t+8=0$ $\Rightarrow$ $t=-1$. Тогда $x=0, y=-1, z=-1$.

Ответ. Точка пересечения $(0,-1,-1)$.

Нахождение углов и расстояний.

Задача 96. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$ и плоскостью $x+2y+z=0$.

Решение. Формула, выведенная в лекциях: $\varphi=90-\arccos\frac{(n,l)}{|n|\cdot|l|}$.

Направляющий к прямой $(2,3,1)$, нормаль к плоскости $(1,2,1)$.

Их скалярное произведение равно 9.

Модули векторов равны $\sqrt{14}$ и $\sqrt{6}$. $\varphi=90-\arccos\left(9/\sqrt{84}\right)$.

Приблизительно представим, какой это угол. Если бы было

$\sqrt{81}$ вместо $\sqrt{84}$ то было бы $\varphi = 90 - \arccos(1)$ = 90.
Но в данном случае дробь чуть меньше, а угол составляет около 79 градусов. **Ответ.** $\varphi = 90 - \arccos\left(9 / \sqrt{84} \right)$.

Задача 97. Вычислить расстояние от точки (4,4,-2) до прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$ в пространстве.

Решение. Применим формулу $d = \frac{|[M_0 M_1, l]|}{|l|}$.

Точка M_0 на прямой ищется из таких соображений: все дроби в каноническом уравнении приравняем к 0, тогда $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$. $M_0(1,0,-2)$. $M_0 M_1 = (3,4,0)$. Направляющий вектор состоит из чисел в знаменателях в канонических уравнениях: $l(2,2,1)$.

Его модуль равен $\sqrt{4+4+1} = 3$. Векторное произведение:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} e_3 = 4e_1 - 3e_2 - 2e_3 .$$

Модуль этого вектора равен $\sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$. **Ответ.** $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

Задача 98. Доказать, что две прямые в пространстве:
$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ скрещивающиеся, и найти расстояние между ними.

Решение. Решая систему уравнений, как в прошлой задаче, здесь мы обнаружим, что система несовместна.

$$\begin{cases} 6+t_1 = 1+t_2 \\ 1-t_1 = 2+3t_2 \\ 2+t_1 = 1-4t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 = -5 \\ -t_1 - 3t_2 = 1 \\ t_1 + 4t_2 = -1 \end{cases} \text{ матрица: } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

прибавим ко 2-й строке 1-ю, а от 3-й отнимем 1-ю.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \text{ получили систему } \begin{cases} t_1 - t_2 = -5 \\ -4t_2 = -4 \\ 5t_2 = 4 \end{cases}$$

2-е и 3-е уравнения противоречат друг другу. Система не имеет решений, значит, эти 2 прямые не имеют ни одной общей точки.

Так как направляющие векторы $(1,-1,1)$ и $(1,3,-4)$ не коллинеарны, то прямые также и не параллельны. Таким образом, скрещивающиеся.

Найдём расстояние между ними. Точку на каждой прямой можно найти, присваивая $t = 0$. $M_1(6,1,2)$, $M_2(1,2,1)$. Вектор, соединяющий две прямых, $M_1M_2 = (-5,1,-1)$.

Вычисляем по формуле $d = \frac{V}{S} = \frac{|\left(M_1M_2, l_1, l_2\right)|}{|\left[l_1, l_2\right]|}$.

Смешанное произведение с помощью определителя.

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \text{ (прибавили 2-ю строку к 1-й)}$$

$= (-4)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-4)(4-3) = -4$, а по модулю получается 4.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} e_3 = 1e_1 + 5e_2 + 4e_3 .$$

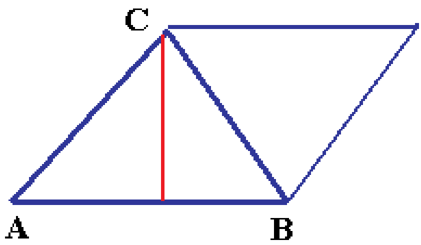
Модуль векторного произведения равен $\sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}$.

$d = \frac{V}{S} = \frac{|\left(M_1M_2, l_1, l_2\right)|}{|\left[l_1, l_2\right]|} = \frac{4}{\sqrt{42}}$. **Ответ.** $\frac{4}{\sqrt{42}}$.

Задача Д-35. Даны три точки A(1,1,1),B(2,2,3),C(2,1,2). Вывести уравнение прямой, содержащей AB, и найти расстояние от точки C до этой прямой (высота треугольника ABC).

Решение. Вектор AB (1,1,2) можем принять в качестве направляющего для этой прямой. Он отложен от точки A(1,1,1).

Тогда канонические уравнения прямой: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$.



Расстояние в данной ситуации, в пространстве, надо искать по формуле $d=\frac{|[M_0M_1,l]|}{|l|}$ в данном случае $d=\frac{|[AC,AB]|}{|AB|}$.

Здесь точки A,C играют ту же роль, что M_0, M_1 в прошлой задаче.

2-я сторона параллелограмма: AC=(1,0,1). $|AB|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$.

Векторное произведение:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 = 1e_1 + 1e_2 - 1e_3.$$

Модуль вектора $(1,1,-1)$ равен $\sqrt{3}$. Тогда результат: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача Д-36. Заданы 2 прямые в пространстве, одна - своими параметрическими уравнениями, а другая как пересечение пары плоскостей:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 7 + t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Доказать, что эти прямые параллельны, и найти уравнение плоскости, содержащей их.

Решение. Сначала найдём направляющие векторы этих прямых и докажем, что они коллинеарны. Для 1-й прямой надо просто выбрать коэффициенты при t, получим $(2,-1,1)$.

Для 2-й прямой надо искать направляющий как векторное произведение нормалей к двум плоскостям.

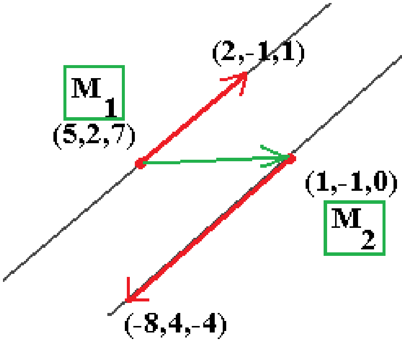
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} e_3 = -8e_1 + 4e_2 - 4e_3.$$

Векторы $(2,-1,1)$ и $(-8,4,-4)$ коллинеарны, это видно, если вынести множитель -4. Значит, прямые действительно параллельны.

Теперь, чтобы построить уравнение плоскости, нужна какая-то точка и два линейно-независимых направляющих вектора в плоскости. При этом два направляющих для этой пары прямых линейно-зависимы, то есть с помощью них построить уравнение не получится. Один из них можем использовать, а 2-й направляющий в плоскости надо ещё найти. Для этой цели можно взять какой-нибудь вектор, соединяющий пару точек на этих прямых.

Точка на 1-й прямой: присвоим $t = 0$ в параметрических уравнениях, и получим $M_1(5,2,7)$. Точку на 2-й прямой можно найти так: в системе из двух уравнений присвоить $z = 0$ и вычислить x, y. Система станет из 2 уравнений с 2 неизвестными, и она решится.

$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1.$$ Чертёж:



Вторым направляющим вектором в плоскости может служить $M_1M_2 = (-4,-3,-7)$ или $M_2M_1 = (4,3,7)$, что кстати удобнее, потому что меньше минусов при вычислении (координаты положительны).

Итак, есть точка $M_1(5,2,7)$ и 2 направляющих $(2,-1,1)$ и $(4,3,7)$ на плоскости. Построим уравнение плоскости. Третий вектор, проведённый к какой-либо произвольной точке в этой плоскости, и 2 направляющих, образуют ЛЗС:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-5)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (z-7)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$-10(x-5) - 10(y-2) + 10(z-7) = 0 \quad \Rightarrow$ сократим на -10

$(x-5)+(y-2)-(z-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+y-z=0$.

Ответ. Плоскость $x+y-z=0$.

Задача Д-37. Заданы 2 прямые в пространстве:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+2t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = 7+4t \end{cases}.$$

Доказать, что эти прямые параллельны, и найти уравнение плоскости, содержащей их.

Решение. Во-первых, направляющие векторы (1,1,2) и (2,2,4), что видно из коэффициентов при t. Они коллинеарны, т.к. координаты пропорциональны.
Полагая $t=0$, можем найти хотя бы по одной точке на каждой прямой, а именно $M_1(1,2,3)$ и $M_2(2,4,7)$. Для построения уравнения плоскости нам нужна 1 точка и 2 неколлинеарных направляющих в плоскости. (1,1,2) и (2,2,4) для этой цели не подходят. В качестве одного направляющего возьмём (1,1,2) а в качестве второго - вектор, соединяющий пару точек на этих прямых, то есть M_1M_2=(1,2,4).
Точка в плоскости, например, M_1. Итак, проведём плоскость через точку $M_1(1,2,3)$ и 2 направляющих: $l_1(1,1,2)$ и $l_1(1,2,4)$. Третий вектор, проведённый к какой-либо произвольной точке в этой плоскости, и 2 направляющих, образуют ЛЗС:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0(x-1)-2(y-2)+1(z-3)=0 \Rightarrow \quad -2y+z+1=0 \Rightarrow z=2y-1.$$

Ответ. $z=2y-1$.

Кривые.

Задача 99. Доказать, что кривая $5x^2+7y^2-30x+14y+17=0$ является эллипсом, найти каноническое уравнение, центр и полуоси.

Решение. Выделим полный квадрат по каждой переменной.

$(5x^2-30x)+(7y^2+14y)+17=0 \quad \Rightarrow$

$5(x^2-6x)+7(y^2+2y)+17=0$ в каждой скобке можно получить такое выражение, чтобы затем использовать формулы сокращённого умножения (ФСУ): $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. Надо прибавить константы в скобках, так чтобы всё сворачивалось, но для компенсации за скобками вычесть эти константы.

$5(x^2-6x)+7(y^2+2y)+17=0 \quad \Rightarrow$

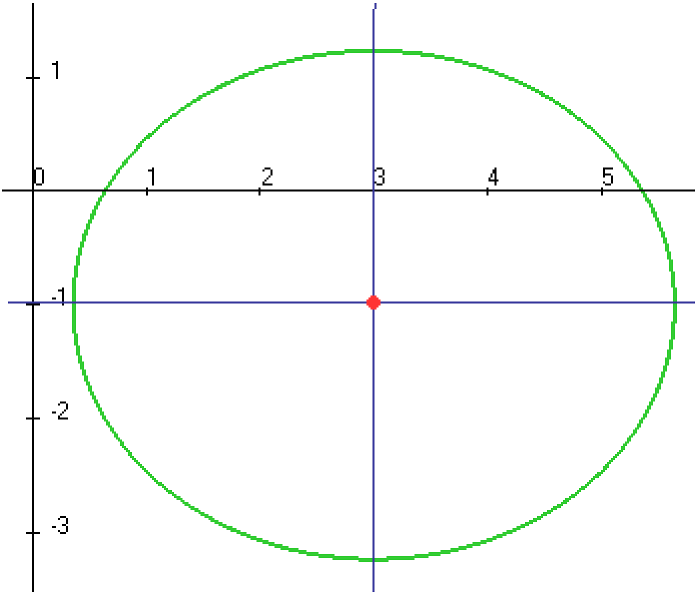
$5(x^2-6x+9)+7(y^2+2y+1)-45-7+17=0 \quad \Rightarrow$

$$5(x-3)^2+7(y+1)^2=35 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{7}+\frac{(y+1)^2}{5}=1 \Rightarrow$$

$\frac{(x-3)^2}{\sqrt{7}^2}+\frac{(y+1)^2}{\sqrt{5}^2}=1$ это каноническое уравнение.

Ответ. Центр $(3,-1)$, полуоси $\sqrt{7}$ и $\sqrt{5}$.

Чертёж:



Задача 100. Доказать, что кривая $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ является эллипсом, найти каноническое уравнение, центр и полуоси, построить чертёж.

Решение. Здесь в уравнении есть произведение xy, то есть надо сначала привести к главным осям квадратичную форму:

$5x^2+8xy+5y^2$. Строим её матрицу: $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Находим собственные числа и векторы. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$$(5-\lambda)^2-16=0 \Rightarrow \lambda^2-10\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-9)=0.$$

Собственные числа 1 и 9. Ищем собственные векторы.

$\lambda = 9$. $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, оба уравнения пропорциональны, т.е. есть только такая информация: $4x = 4y$, т.е. $x = y$. ФСР: вектор (1,1). Нормируем его, то есть делим на длину, которая здесь $\sqrt{2}$. Получаем $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - собственный вектор для $\lambda = 9$.

Это единичный вектор в 1-й четверти, получающийся поворотом (1,0) на 45 градусов.

$\lambda = 1$. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, оба уравнения пропорциональны, фактически оно одно: $4x = -4y$, т.е. $x = -y$. ФСР: вектор $(-1,1)$.

Нормируем его, получаем $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ собственный вектор для $\lambda = 1$.

Это вектор во 2-й четверти, получающийся поворотом (0,1) на 45 градусов.

Запишем формулы перехода от одного базиса к другому:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{\sqrt{2}} - \dfrac{w}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{z}{\sqrt{2}} + \dfrac{w}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Если подставить эти выражения в исходное уравнение, то после приведения подобных исчезнут выражения, содержащие разные переменные z и w:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$-18\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right) - 18\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) + 9 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{z^2}{2}+\frac{w^2}{2}-zw\right)+8\left(\frac{z^2}{2}-\frac{w^2}{2}\right)+5\left(\frac{z^2}{2}+\frac{w^2}{2}+zw\right)-18\frac{2z}{\sqrt{2}}+9=0$$

в линейной форме w полностью сократились, $5zw$ тоже сократятся.

$$\left(\frac{5}{2}+\frac{8}{2}+\frac{5}{2}\right)z^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{8}{2}+\frac{5}{2}\right)w^2-18\sqrt{2}\cdot z+9=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{18}{2}z^2+\frac{2}{2}w^2-18\sqrt{2}\cdot z+9=0 \quad \Rightarrow 9z^2+w^2-18\sqrt{2}\cdot z+9=0.$$

Итак, как мы видим, коэффициентами как раз и оказались 9 и 1, то есть собственные числа матрицы этой квадратичной формы.

Заметим, что 1-й степени w здесь нет, так что выделение полного квадрата надо делать только по z.

$$9(z^2-2\sqrt{2}\cdot z)+w^2+9=0 \;\Rightarrow\; 9(z^2-2\sqrt{2}\cdot z+2)-18+w^2+9=0$$

$$\Rightarrow\; 9(z-\sqrt{2})^2+w^2=9 \;\Rightarrow\; \frac{\left(z-\sqrt{2}\right)^2}{1}+\frac{w^2}{9}=1, \text{ т.е.}$$

$\dfrac{\left(z-\sqrt{2}\right)^2}{1^2}+\dfrac{w^2}{3^2}=1$. Полуоси 1 и 3, то есть размеры эллипса: 2 на 6.

Центр $z=\sqrt{2}, w=0$, но это центр в новых координатах, а для чертежа надо найти центр именно в старых координатах x, y. Их мы найдём по формулам взаимосвязи этих координат:

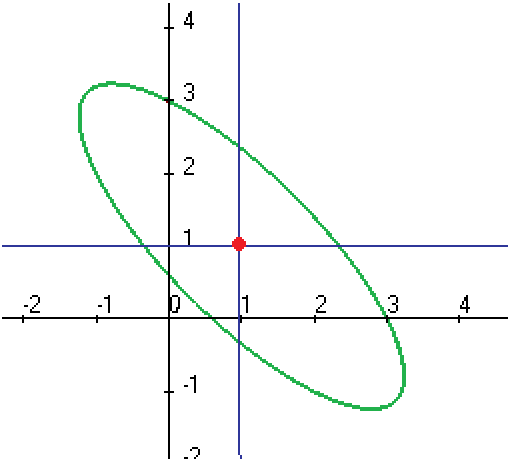
$$x=\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{w}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{w}{\sqrt{2}}.$$

Если $z=\sqrt{2}, w=0$, то $x=1, y=1$.

Итак, центр - точка (1,1). В направлении первого вектора нового базиса, а именно $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, полуось длины 1, а в направлении второго вектора $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ полуось длины 3.

Ответ. Центр $(1,1)$, полуоси 1 и 3.

Чертёж:



Задача 101. Доказать нечётность функции $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Решение. Заменим x на $-x$, при этом $-x$ наоборот, заменится на x.

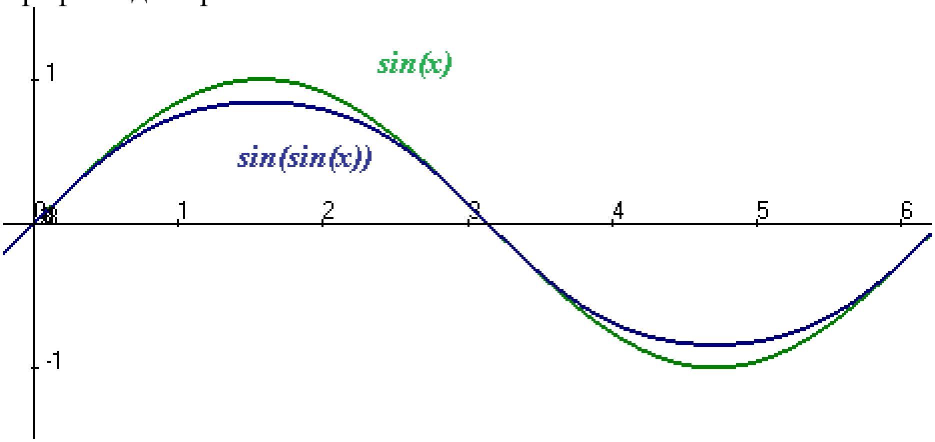
$$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Таким образом, $f(-x)=-f(x)$, то есть функция нечётная.

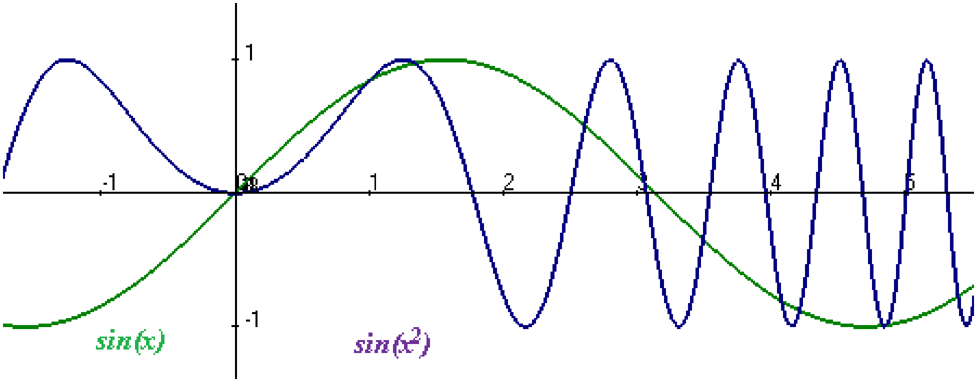
Задача 102. Даны 2 функции: $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$. Найти все их возможные композиции.

Решение. $f(f(x))=\sin(\sin(x))$ так как $\sin x<1$ то повторное вычисление синуса ещё чуть уменьшает значение этой величины, поэтому график суть ниже обычного графика синуса.

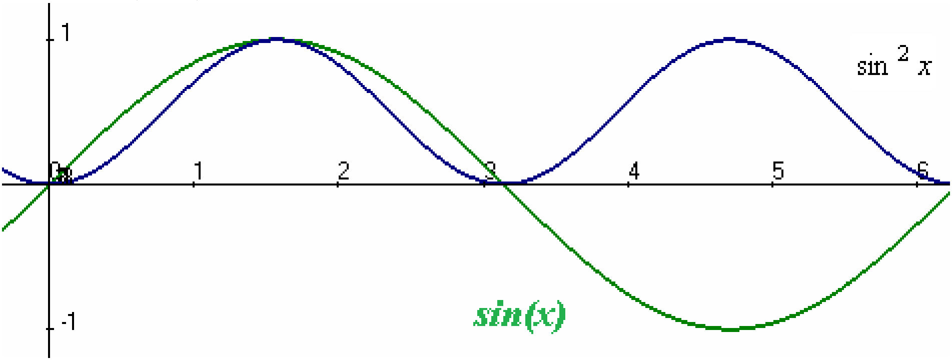
Графики для сравнения:



$f(g(x))=\sin\left(x^2\right)$, здесь скорость возрастания с ростом x всё более увеличивается, то есть колебания синуса учащаются. График:

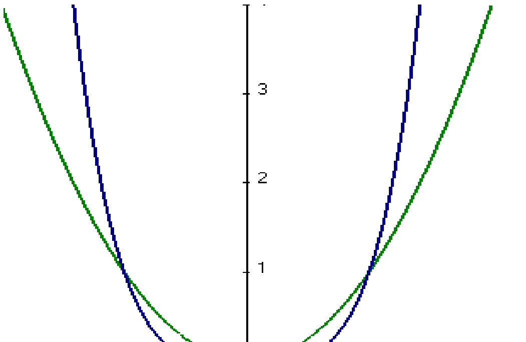


$g(f(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$,график:



$g(g(x)) = (x^2)^2 = x^4$ строение этой функции хорошо известно.

На чертеже зелёным показан график $g(x) = x^2$, синим $g(g(x)) = x^4$.



Задача 103. Найти композицию $f(f(f(x)))$ если $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Решение. Двойная композиция это $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$,

а тройная композиция $f(f(f(x)))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$. Можно сначала привести подобные внутри самой внутренней дроби, для чего 1 представим как $\dfrac{1-x}{1-x}$.

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}\right)}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{-x}{1-x}\right)}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{1-x}\right)}}=\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}$$

И в этой дроби тоже приведём подобные таким же способом.

$$\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}=\frac{1}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1-x}{x}}=\frac{1}{\dfrac{x+1-x}{x}}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}=x.$$

Ответ. $f(f(f(x)))=x$.

Задача 104. Точка движется по окружности единичного радиуса вокруг начала координат в плоскости. Температура распределена по закону:
$f(x,y)=2xy$. Найти для этой точки функцию, как меняется температура в зависимости от времени.
Решение. Движение точки можно задать так: $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$.
Подставим эти выражения в $f(x,y)=2xy$, чтобы получить композицию функций. $f(x(t),y(t))=2\cos t\sin t = \sin(2t)$.
Ответ. Температура в зависимости от времени для этой точки изменяется так: $f(t)=\sin(2t)$.

Задача 105. Найти область определения функции:

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Решение. Выражение под каждым из корней должно быть ≥ 0, а для второго даже строго больше 0, так как он в знаменателе.

Получается система из 2 неравенств: $x^2-1\geq 0$ и $9-x^2>0$.

$x^2\geq 1 \Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, $\quad x^2<9 \Rightarrow x\in(-3,3)$.

Итого, пересечение этих множеств: $x\in(-3,-1]\cup[1,3)$.

Ответ. $x\in(-3,-1]\cup[1,3)$.

Задача 106. Найти область определения функции:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{9-x^2-y^2}.$$

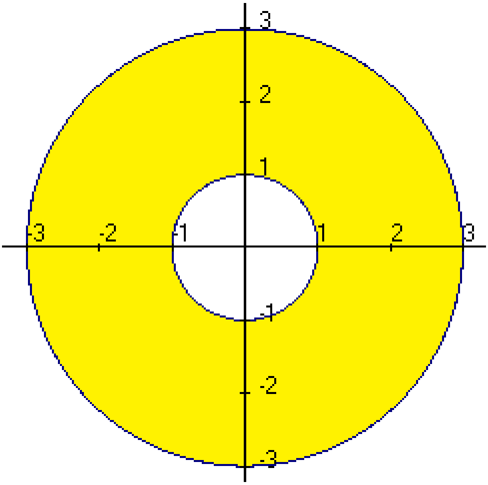
Решение. Оба подкоренных выражения должны быть неотрицательны

$x^2+y^2\geq 1$ это область вне круга радиуса 1.

$x^2+y^2\leq 9=3^2$ это область внутри круга радиуса 3.

В их пересечении лежит кольцо $1\leq x^2+y^2\leq 3$.

Чертёж:



Ответ. Кольцо $1\leq x^2+y^2\leq 3$.

Задача Д-38. Найти область определения функции 3 переменных: $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Решение. Здесь $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Это неравенство задаёт шар радиуса 1. Штриховкой в плоскости, как в прошлой задаче, для функции трёх переменных изобразить уже невозможно.

Ответ. Шар радиуса 1: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

«Предел последовательности»

Задача 107. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 5n + 4}{6n^2 + 7}$.

Решение. Здесь неопределённость типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки n^2 и в числителе, и в знаменателе, с целью сократить на этот множитель.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 5n + 4}{6n^2 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(6 + \frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{6 + \frac{7}{n^2}}$$

Каждая из мелких дробей в числителе и знаменателе стремится к 0, поэтому получается сумма пределов в каждом случае, и тогда

$\dfrac{2+0+0}{6+0} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. **Ответ.** $\dfrac{1}{3}$.

Задача 108. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + n + 1}{2n^3 + 5n + 2}$.

Решение. Здесь неопределённость типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки и сократим самую старшую степень элемента n, в прошлой задаче это была 2-я степень, а здесь 3-я.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{3+0+0}{2+0+0} = \frac{3}{2}.$$ **Ответ.** $\frac{3}{2}$.

Задача 109. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2+1}$ **=** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}$ **=** $\frac{0}{3}=0$.

Замечание. Если наоборот, в знаменателе была бы степень больше, чем в числителе, то ответ не 0 а ∞.

Ответ. 0.

Задача 110. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+8}-n\right)$.

Решение. Здесь неопределённость типа $\infty-\infty$.

Чтобы свести к дроби, и сокращать как в прошлых примерах, надо сначала домножить на «сопряжённое» выражение, то есть такое где вместо разности сумма, это позволит использовать формулу сокращённого умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+6n+8}-n\right)\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n+8}^{\,2}-n^2}{\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+8-n^2}{\sqrt{n^2+6n+8}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+8}{\sqrt{n^2+6n+8}+n}.$$

Теперь можно сократить на первую степень n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+8}}{n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+8}}{\sqrt{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+6n+8}{n^2}}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}}+1} = \frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{6}{\sqrt{1}+1} = 3.$$ **Ответ**. 3.

Задача 111. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+11}-2n}{3n+7}$.

Решение. Сначала домножим на сопряжённое выражение, так как здесь есть разность, содержащая $\infty-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{25n^2+11}-2n\right)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)}{(3n+7)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(25n^2+11-4n^2\right)}{(3n+7)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{21n^2+11}{(3n+7)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)}.$$

Нужно сокращать на n^2. При этом в знаменателе два множителя, можно каждый из них разделить на n, тем самым весь знаменатель разделится на n^2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{21+\frac{11}{n^2}}{\left(3+\frac{7}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{25n^2+11}+2n}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{21+\frac{11}{n^2}}{\left(3+\frac{7}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{25n^2+11}}{\sqrt{n^2}}+2\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{21+\frac{11}{n^2}}{\left(3+\frac{7}{n}\right)\left(\sqrt{25+\frac{11}{n^2}}+2\right)} = \frac{21+0}{(3+0)\left(\sqrt{25+0}+2\right)} = \frac{21}{3\cdot\left(\sqrt{25}+2\right)} =$$

$= \dfrac{21}{3\cdot 7} = 1.$ **Ответ**. 1.

Задача Д-39. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2+1}}{n+3}$.

Решение. Здесь разности нет, так что можем сразу сократить на n.
В числителе при этом можно представить n в виде $\sqrt[3]{n^3}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2+1}}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3}}\right)}{\left(\dfrac{n+3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}}}{1+\dfrac{3}{n}} =$$

$\dfrac{\sqrt[3]{8+0+0}}{1+0} = 2.$ **Ответ**. 2.

Задача 112. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x+6}$.

Решение. Так как переменная неграниченно возрастает, то тоже влияют её старшие степени и коэффициенты перед ними.

Сократим дробь: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(2+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{6}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{5}{x}}{3+\dfrac{6}{x}} = \dfrac{2+0}{3+0} = \dfrac{2}{3}.$

Ответ. $\dfrac{2}{3}$.

Задача Д-40. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{3x^2+1}$.

Решение. Аналогично тому, как в прошлом примере, сократим на старшую степень, здесь это x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 113. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$.

Решение. В этом примере надо домножить и поделить на «сопряжённое» то есть на сумму, чтобы использовать формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+x-9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x} =$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}$ теперь сократим на x: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{9x^2+x}}{x}+3}$

В знаменателе можно представить x в виде $\sqrt{x^2}$, чтобы упростить выражение в знаменателе:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{9x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{9x^2+x}{x^2}}+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3} = \frac{1}{\sqrt{9+0}+3}$$

$= \frac{1}{6}$. **Ответ.** $\frac{1}{6}$.

Задача Д-41. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

здесь числитель равен 1, знаменатель неограниченно возрастает, поэтому получается выражение типа $\frac{1}{\infty}$, предел равен 0.

Ответ. 0.

Замечание. Как мы видим, методы решения примеров для последовательности ($n \to \infty$) и для функции при $x \to +\infty$ во многом очень похожи. В одном случае дискретно увеличивается к бесконечности, а в другом непрерывно, но всё равно и там, и здесь неограниченное возрастание.

Задача 114-А,Б. Найти пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$.

Решение. Сейчас на этом примере мы увидим, как может отличаться решение и ответ в зависимости от $+\infty$ или $-\infty$. И в том, и в другом случае мы стараемся сократить дробь на множитель x.

Если x положительно, то x можно представить в виде $\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{1} = \frac{1+3}{1} = 4.$$

А вот если x отрицательно, то надо учесть, что $\sqrt{x^2}$ это $|x|$, оно положительно, то есть при $x<0$ верно $x=-\sqrt{x^2}$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{1} = \frac{1-3}{1} = -2.$$

Ответы. 4 и -2.

Примеры, в которых $x \to x_0$.

Задача 115. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Решение. В этом случае x стремится к числу, а не бесконечности. Получается неопределённость совсем другого типа: если в прошлых примерах было $\infty-\infty$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то здесь $\dfrac{0}{0}$. Если просто подставить 1 в это выражение, получилось бы $\dfrac{0}{0}$. Поэтому и нельзя просто подставить и вычислить значение, а нужно раскрывать неопределённость. Выделим множитель $(x-1)$ и в числителе, и в знаменателе, чтобы его сократить.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{1} = 2.$$

Когда сократили, тогда уже можно просто подставить $x=1$.

Ответ. 2.

Задача 116. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$.

Решение. Найдём корни многочленов в числителе и знаменателе, и разложим на множители. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)}{(x-5)}=\dfrac{-1}{-4}=\dfrac{1}{4}$. Сократили тот множитель, который отвечает за стремление к нулю, в числителе и знаменателе.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$.

Задача 117. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Разложим на множители, как и в прошлой задаче.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-3)} = \frac{2}{-2}=-1.$$

Нашли корни числителя и знаменателя, разложили на множители. Сократили тот множитель, который отвечает за стремление к нулю, в числителе и знаменателе.
Ответ. -1.

(!) Обратите внимание, что в случае, когда в числителе таких множителей (стремящихся к 0) больше, чем в знаменателе, то происходит неполное сокращение, и в числителе остаётся одна из скобок, стремящихся к 0, то есть предел получается 0. Это будет видно на следующем примере.

Задача 117-Б. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x^2-4x+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-3)} =$

$\dfrac{2\cdot 0}{-2}=0$. В числителе остался один не сокращённый множитель $(x-1)$, остальные стремятся к константам, но уже не важно к каким, всё равно получится 0 из-за нуля в числителе.
Ответ. 0.
Замечание. Наоборот, если бы такой множитель остался в знаменателе, то предел был бы равен ∞. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{(x^2-1)(x-1)} = \infty$.

Задача 118. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+3x^2+2x}$.

Решение. Во-первых, если просто подставить -2, видно неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Это означает, что -2 является корнем, т.е. по крайней мере, хотя бы один множитель вида $(x+2)$ и в числителе, и в знаменателе найдётся. Это облегчает поиск корней, можно обойтись даже без дискриминанта, а просто найти второй дополняющий. Когда мы сократим все $(x+2)$, можно будет просто подставить $x=-2$ в оставшееся выражение.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+3x^2+2x} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x\left(x^2+3x+2\right)} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)(x+1)} =$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x-4)}{x(x+1)} = \frac{-2-4}{(-2)(-2+1)} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Ответ. -3.

Задача Д-42. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$.

Решение. Способ 1. Тот факт, что при подстановке $x=1$ и в числителе, и в знаменателе даёт значение 0, говорит о том, что множитель $(x-1)$ присутствует хотя бы один раз. Поэтому найти корни можно даже без дискриминанта.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-5} = \frac{1-3}{1-5} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Способ 2. (Лопиталя).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)'}{(x^2-6x+5)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-4}{2x-6} = \frac{2-4}{2-6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

Задача Д-43. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-30x+29}{x^2-50x+49}$. **Ответ.** $\dfrac{7}{12}$.

Задача 119. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$.

Решение. Воспользуемся формулой разности кубов:

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\left(x^2+3x+9\right) = 27.$$

Впрочем, можно сделать и методом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^3-27)'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{1} = 27.$$

Ответ. 27.

Задача 120. Найти предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2-5x}{x^2+5x+4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2-5x}{x^2+5x+4} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\left(x^2-4x-5\right)}{x^2+5x+4} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)(x-5)}{(x+1)(x+4)}$

$= \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-5)}{x+4} = \dfrac{(-1)(-6)}{3} = 2.$

Замечание. Этот пример, как и многие из рассматриваемых, можно тоже для проверки решить вторым способом (Лопиталя).

Ответ. 2.

Задача 121. Найти предел $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}$.

Решение.

По методу Лопиталя пришлось бы дифференцировать 2 раза, из-за наличия корня кратности 2.

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x^3+5x^2+3x-9)'}{(x^3-3x^2-45x-81)'} = \lim_{x\to -3}\frac{3x^2+10x+3}{3x^2-6x-45}.$$

Здесь опять получается неопределённость $\dfrac{0}{0}$, поэтому дальше:

$$\lim_{x\to -3}\frac{(3x^2+10x+3)'}{(3x^2-6x-45)'} = \lim_{x\to -3}\frac{6x+10}{6x-6} = \frac{-18+10}{-18-6} = \frac{-8}{-24} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{3}$.

Для сведения, 2-й способ, с разложением на множители, но он здесь длиннее. Мы точно знаем, что присутствует множитель $(x+3)$ ведь неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Это облегчает поиск корней многочленов 3-й степени: мы можем сначала поделить на $(x+3)$ и останутся многочлены 2-й степени, корни которых уже можно найти через дискриминант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\ \underline{x^3+3x^2} & \overline{x^2+2x-3} \\ \quad 2x^2+3x & \\ \quad \underline{2x^2+6x} & \\ \qquad -3x-9 & \\ \qquad \underline{-3x-9} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3-3x^2-45x-81 & x+3 \\ \underline{x^3+3x^2} & \overline{x^2-6x-27} \\ \quad -6x^2-45x & \\ \quad \underline{-6x^2-18x} & \\ \qquad -27x-81 & \\ \qquad \underline{-27x-81} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Итак, $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81} = \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x^2-6x-27)}$

Однако находя корни через дискриминант, обнаруживаем, что ещё раз выделяется множитель $(x+3)$.

В числителе $D=4-4(-3)=16$, корни $\dfrac{-2\pm4}{2}$, т.е. -3 и 1.

В знаменателе $D=36-4(-27)=144$, корни $\dfrac{6\pm12}{2}$, т.е. -3 и 9.

Получается $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+3)(x-9)}$. Значит, просто эту скобку надо сократить 2 раза, но всё равно она ведь полностью сокращается.

Получим $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x-1}{x-9} = \dfrac{-3-1}{-3-9} = \dfrac{-4}{-12} = \dfrac{1}{3}$.

Задача 122А,Б. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}$.

Решение. Сразу вынесем за скобку общий множитель и в числителе, и в знаменателе, там все остальные коэффициенты ему кратны. Затем разложим на множители.

$$\lim_{x\to1}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12} = \lim_{x\to1}\frac{5}{3}\cdot\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4} = \frac{5}{3}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-4)} =$$

$$\frac{5}{3}\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x-4} = \frac{5}{3}\cdot\frac{-2}{-3} = \frac{10}{9}.$$

А при $x \to \infty$ другой тип неопределённости, и применяется совершенно другой метод решения, несмотря на то, что функция та же самая.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12} = \frac{5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1-0+0}{1-0+0} = \frac{5}{3}.$$

Ответы. $\frac{10}{9}$ и $\frac{5}{3}$.

Замечание. Оба этих предела можно было найти по правилу Лопиталя.

$$\lim_{x\to1}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12} = \lim_{x\to1}\frac{10x-20}{6x-15} = \frac{-10}{-9} = \frac{10}{9}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12} = \lim_{x\to\infty}\frac{10x-20}{6x-15} = \lim_{x\to\infty}\frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Задача 123. Найти предел $\lim\limits_{x\to2}\frac{3\sqrt{x+7}-9}{\sqrt{6-x}-2}$.

Решение. Домножим и разделим на сопряжённое к каждой разности.

$$\lim_{x\to2}\frac{\left(3\sqrt{x+7}-9\right)}{\left(\sqrt{6-x}-2\right)}\frac{\left(3\sqrt{x+7}+9\right)}{\left(3\sqrt{x+7}+9\right)}\frac{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}$$

При этом соединим дугой те, которые в итоге сворачиваются в разность квадратов. Прочие множители, которые ни с чем не объединяются, вынесем в отдельную дробь, и даже в отдельный предел. Получается произведение пределов:

$$\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}{\left(3\sqrt{x+7}+9\right)}\cdot\lim_{x\to2}\frac{9(x+7)-81}{(6-x)-4}$$

В одном из них нет неопределённости, а во втором преобразуем так, чтобы сократить скобку $(x-2)$.

$$\frac{\left(\sqrt{4}+2\right)}{\left(3\sqrt{9}+9\right)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{9x-18}{2-x} = \frac{4}{18}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{9(x-2)}{(-1)(x-2)} = \frac{4}{18}\cdot\frac{9}{(-1)} = \frac{36}{-18} = -2.$$

Ответ. -2.

Задача 124. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. В этом случае можно с помощью замены преобразовать так, что будут только целые степени, а для получившихся многочленов уже можно искать корни и проводить разложение на множители.

НОК(2,3) = 6. Если обозначим $t=\sqrt[6]{x}$, то:

$$\sqrt[3]{x}=x^{1/3}=x^{2/6}=\sqrt[6]{x}^{\,2}=t^2, \qquad \sqrt{x}=x^{1/2}=x^{3/6}=\sqrt[6]{x}^{\,3}=t^3.$$

При этом, если $x\to 1$, то и $t=\sqrt[6]{x}\to 1$ тоже стремится к 1.

* Такое совпадение при замене переменной бывает далеко не всегда, а лишь в частных случаях, а обычно надо пересчитать, возможно новая переменная стремится к другому числу. Например, если $t=x^2$ и $x\to 2$, то $t\to 4$.

Итак, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1-t^3}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1}$ (для удобства сделали, чтобы многочлены начинались со старшей степени). Далее,

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

При этом даже нет необходимости делать обратную замену и возвращаться к старой переменной.

Ответ. $\dfrac{3}{2}$.

Задача Д-44. Найти предел $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

Решение. Заметим, что $x<0$, то есть указанная сумма, фактически, есть разность. Домножаем на сопряжённое выражение, которое формально будет разностью, а на самом деле - суммой:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$. Здесь в знаменателе разность, но 2-я величина отрицательна, то есть фактически - сумма бесконечно-больших. Тогда получается, что дробь - величина, обратная к бесконечно-большой, т.е. бесконечно-малая. $\dfrac{1}{\infty}=0$.

Ответ. 0.

Тема «1-й замечательный предел».

Задача 125. Найти предел $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

Решение. С помощью преобразований получим в знаменателе такое же выражение, как под знаком синуса в числителе.

$$\lim_{x\to5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to5}\frac{\sin(x-5)}{(x-1)(x-5)}=\lim_{x\to5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)}\cdot\lim_{x\to5}\frac{1}{x-1}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Второй предел вообще не содержит неопределённости, а первый это в точности $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ если переобозначить $t=x-5$.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$.

Задача 126. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(100x)}{x^2+20x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(100x)}{x^2+20x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(100\,x)}{100\,x}\dfrac{100\,x}{x(x+20)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{100}{(x+20)}=5.$

Ответ. 5.

Задача 127. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{4+x}-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{4+x}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 6x)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}+2\right)\dfrac{\sin 6x}{4+x-4} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}+2\right)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x} =$

$4\cdot\lim\limits_{x\to 0}6\cdot\dfrac{\sin 6x}{6x} = 24.$

Сначала домножили на сопряжённое выражение, потом вынесли в отдельный множитель ту часть, где нет неопределённости. В конце домножили на 6 в знаменателе и числителе, чтобы в знаменателе образовалось ровно такое же выражение, как под знаком синуса, то есть $6x$.

Ответ. 24.

Задача 128. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$.

Решение. Эту задачу можно решить как с применением тригонометрической формулы, так и методом Лопиталя.

Способ 1. Вспомним формулу $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$. Получается

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\sin x}{x} = 2.$

Способ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos(2x)\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(-\sin(2x))\cdot 2}{2x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x} = 2.$

Ответ. 2.

Задача Д-45. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

Решение. Чтобы устранить разность, как всегда, домножим и поделим на сопряжённое.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}\right)}{\sin^2 x}\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}\frac{2-(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x}.$$

это мы применили формулу понижения степени, а ту часть, которая стремится к 0, вычислили сразу, этот коэффициент теперь так и будет оставаться до ответа. Теперь заменим каждую из бесконечно-малых на эквивалентную.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}1\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/4}{x^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$ **Ответ.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Замечания. Начиная с того места, где мы получили $\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ можно было сделать и другими способами.

Способ 2. По правилу Лопиталя. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin^2 x)'} =$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Способ 3. Домножить на сопряжённое.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\sin^2 x}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{(1+\cos x)} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Способ 3-а. Представить квадрат синуса в знаменателе в виде $1-\cos^2 x$ и тогда получается разбиение на 2 сопряжённых:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Тема «2-й замечательный предел».

Задача 129. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^x$.

Решение. Здесь целая часть 1 выделена в явном виде. Остаётся только домножить и найти предел в степени.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{1}\frac{1}{2x+1}x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{1}}\right)^{\frac{x}{2x+1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2+1/x}} = e^{\frac{1}{2+0}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Ответ. $\sqrt{e}$.

Задача 130. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Решение. Здесь неопределённость 1^∞. Основание стремится к 1, так как здесь одинаковые старшие степени многочленов в числителе и знаменателе, и одинаковые коэффициенты при них. Отделим от дроби её целую часть, то есть 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}\right)^{2x-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(x+1)-(x-2)}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}.$$

Слагаемое, которое следует после 1, стремится к 0, что и должно быть для 2 замечательного предела. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\bullet\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)} =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x-3}{x-2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) = e^6.$$

Ответ. e^6.

Задача Д-46. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{x^2}{x^4+1}\right)^{\frac{x^4+1}{x^2}}\right)^{\frac{x^2}{x^4+1}(2x^2+3)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x^2}{x^4+1}(2x^2+3)} =$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(2x^2+3)}{x^4+1}} = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2}{x^4+1}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2+3/x^2}{1+1/x^4}\right) = e^2.$$

Ответ. e^2.

Задача 131. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+3}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}}$.

Решение. Здесь сначала заметим, что основание стремится к 7/7 = 1. А степень к бесконечности. То есть, неопределённость типа 1^∞ и можно использовать 2-й замечательный предел. Сначала выделяем целую часть дроби, то есть 1. Прибавим и отнимем 1, но ту, которую отняли, представим в таком виде, чтобы она объединилась с дробью.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x+3}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x+3}{4x-1}-1\right)^{\frac{14}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x+3}{4x-1}-\frac{4x-1}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x+3)-(4x-1)}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x+3)-(4x-1)}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$$

$= \lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{4-2x}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$ теперь после 1 следует бесокнечно-малая, которая обращается в 0 при $x\to 2$, ведь там числитель $4-2x$. Далее, в степени домножаем обратную к этой дроби, но при этом и её саму тоже, чтобы ничего не изменилось.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2(2-x)}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2(2-x)}\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\left(1+\frac{2(2-x)}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2(2-x)}}\right)^{\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(e)^{\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$$

использовали тот факт, что $\lim\limits_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}} = e$.

Далее, получаем $\exp\left(\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(2-x)}{4x-1}\dfrac{14}{(x+2)(x-2)}\right) =$

$$\exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{-2}{4x-1}\frac{14}{(x+2)}\right) = \exp\left(\frac{-28}{7\cdot 4}\right) = e^{-1}.$$

Ответ. e^{-1}.

Задача 132. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-3}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}}$.

Решение. Заметим, что основание стремится к 1, неопределённость типа 1^{∞}, можно использовать 2-й замечательный предел.

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-3}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}} = \lim_{x\to 4}\left(1+\frac{x-3}{2x-7}-1\right)^{\frac{x+3}{4-x}} = \lim_{x\to 4}\left(1+\frac{x-3}{2x-7}-\frac{2x-7}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}} =$$

$$\lim_{x\to4}\left(1+\frac{(x-3)-(2x-7)}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}} = \lim_{x\to4}\left(1+\frac{4-x}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}} =$$

$$\lim_{x\to4}\left(1+\frac{4-x}{2x-7}\right)^{\frac{2x-7}{4-x}\cdot\frac{4-x}{2x-7}\cdot\frac{x+3}{4-x}} = \lim_{x\to4}\left(\left(1+\frac{4-x}{2x-7}\right)^{\frac{2x-7}{4-x}}\right)^{\frac{4-x}{2x-7}\cdot\frac{x+3}{4-x}} =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to4}\frac{4-x}{2x-7}\cdot\frac{x+3}{4-x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to4}\frac{x+3}{2x-7}\right) = e^7.$$

Ответ. e^7.

Задача 133. Найти предел $\lim_{x\to1}\left(\frac{3x+4}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}}$.

Решение. $\lim_{x\to1}\left(\frac{3x+4}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}} = \lim_{x\to1}\left(1+\frac{3x+4}{5x+2}-1\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}} =$

$$\lim_{x\to1}\left(1+\frac{3x+4}{5x+2}-\frac{5x+2}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}} = \lim_{x\to1}\left(1+\frac{2-2x}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}} =$$

$$\lim_{x\to1}\left(1+\frac{2-2x}{5x+2}\right)^{\frac{5x+2}{2-2x}\cdot\frac{2-2x}{5x+2}\cdot\frac{x+2}{x^2-1}} = \lim_{x\to1}\left(\left(1+\frac{2(1-x)}{5x+2}\right)^{\frac{5x+2}{2(1-x)}}\right)^{\frac{2(1-x)}{5x+2}\cdot\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}} =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to1}\frac{(-2)(x-1)}{5x+2}\cdot\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to1}\frac{(-2)}{5x+2}\cdot\frac{x+2}{x+1}\right) = e^{-\frac{3}{7}}.$$

Ответ. $e^{-\frac{3}{7}}$.

Замечание. Некоторые особенности вычисления с помощью второго замечательного предела.

1. Если основание стремится не к 1, а к числу a<1 а степень к бесконечности, то можно сразу сделать вывод, что предел 0. Если a>1 то наоборот, ∞.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0 \quad , \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=\infty$$

2. Не всегда в степени экспоненты получается конечное число. Так, в примере

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}=\left(\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right)^{\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}$$

$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}\frac{1}{(x-1)^2}}=e^{+\infty}=+\infty$. Это произошло из-за того, что в степени в её знаменателе остался множитель $(x-1)$.

Задачи со следствиями из 1 и 2 зам. пределов.

Задача 134. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 5x}$.

Решение. Методом Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{4x}-1\right)'}{\left(\sin 5x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}}{5\cos 5x}=$

$\dfrac{4e^0}{5\cos 0}=\dfrac{4}{5}$. **Ответ.** $\dfrac{4}{5}$.

Задача 135. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{\sin^2 5x}$.

Решение. Методом Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{4x}-4x-1\right)'}{\left(\sin^2 5x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}-4}{2\sin 5x\cos 5x\cdot 5}$

$=\dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 10x}$. Но опять получилась неопределённость $\dfrac{0}{0}$.

Продифференцируем ещё раз $\dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{4x}-1\right)'}{\left(\sin 10x\right)'}=\dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}}{10\cos 10x}=$

$\frac{4}{5}\frac{4e^0}{10\cos 0} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25} = 0{,}32.$ **Ответ.** $\frac{16}{50}$.

Задача 136. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{2x-6}-1}{\sqrt{4x-11}-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{2x-6}-1}{\sqrt{4x-11}-1} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(e^{2x-6}-1\right)\left(\sqrt{4x-11}+1\right)}{\left(\sqrt{4x-11}-1\right)\left(\sqrt{4x-11}+1\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{4x-11}+1\right)\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{2x-6}-1}{4x-12} = 2\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{2(x-3)}-1}{4(x-3)}$. Введём замену $t = x-3$

Тогда $2\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{4t} = 2\lim\limits_{t\to 0}\frac{(e^{2t}-1)'}{(4t)'} = 2\lim\limits_{t\to 0}\frac{2e^{2t}}{4} = 2\frac{2}{4} = 1$.

Ответ. 1.

Замечание. Почему выражение $(e^{2t}-1)$ мы здесь не домножаем на сопряжённое, а делали методом Лопиталя. Тогда получилось бы $(e^{2t}-1)(e^{2t}+1) = (e^{4t}-1)$, то есть в таких выражениях, в отличие от иррациональностей, формулу сокращённого умножения и структуру a^2-b^2 применять бесполезно, потому что это даёт точно такое же выражение, стремящееся к $e^0-1=0$.

Задача 137. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+4x-4)}{x-1}$.

Решение.

Способ 1. С помощью замены на эквивалентную бесконечно-малую. Можно выделить 1 под знаком логарифма, получить выражение типа $\ln(1+a)$. Затем воспользоваться эквивалентностью $\ln(1+a)\approx a$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x^2+4x-5))}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1}(x+5) = 6.$

Способ 2. По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\dfrac{2x+4}{x^2+4x-4}\right)}{1} = \dfrac{2+4}{1+4-4} = 6.$

Ответ. 6.

Задача Д-47. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin x)}{\sin x}$. **Ответ.** 2.

«Главная часть бесконечно-малой».

Задача 138. Выделить главную часть бесконечно-малой $\alpha(x)=\sin\left(x^2-1\right)$ в точке $x_0=1$.

Решение. Запишем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{C(x-1)^k}=1$.

Заменяем на синус на эквивалентную бесконечно-малую, для этого делим и домножаем, чтобы избавиться от синуса в этом выражении, т.е. чтобы остались только степенные функции.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)}\dfrac{(x^2-1)}{C(x-1)^k}=1$ предел первого множителя = 1, остаётся

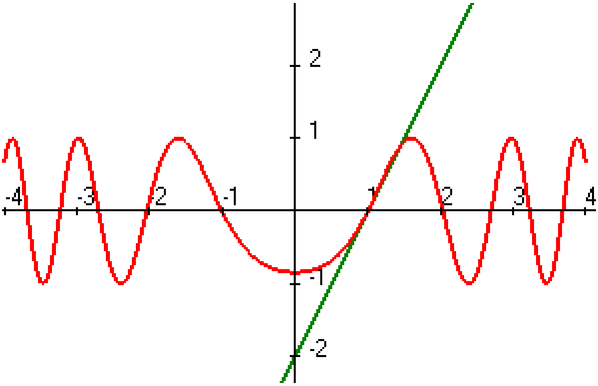
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)}{C(x-1)^k}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{C(x-1)^k}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)^k}\dfrac{(x+1)}{C}=1$.

В отдельную дробь вынесли множители, содержащие $(x-1)$. Тогда видно, что $k=1$, иначе множитель $(x-1)$ остался бы или в числителе, или знаменателе, и предел 0 или ∞, а должен быть равен 1.

При $k=1$ остаётся $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{C}=1 \Rightarrow \dfrac{2}{C}=1 \Rightarrow C=2$.

Ответ. $\gamma(x)=2(x-1)$. Фактически, это получилось уравнение касательной $y=2x-2$.

В дополнение, чертёж к этой задаче. $\alpha(x)=\sin\left(x^2-1\right)$ показано красным цветом, а главная часть $\gamma(x)=2(x-1)$ зелёным.



Задача 139. Найти главную часть для $\alpha(x)=x^2+x-2$ в точке $x_0=1$ т.е. вида $C(x-1)^k$.

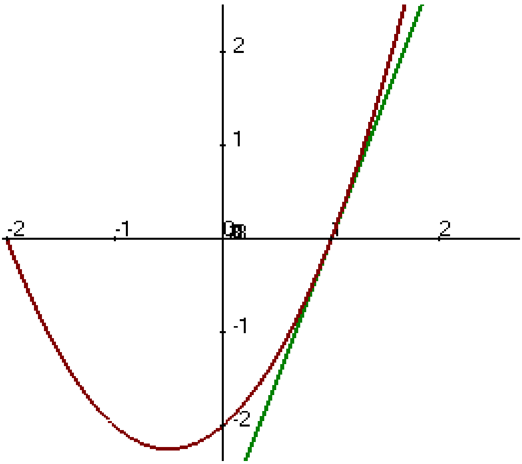
Решение. Во-первых, видно, что это действительно бесконечно-малая в точке 1, ведь $\alpha(1)=0$. Запишем в знаменателе $C(x-1)^k$ и приравняем предел к единице, ведь эти величины должны быть эквивалентны. Затем ведём преобразования и упрощаем выражение под знаком предела, как при обычном вычислении предела. Когда оно упростится настолько, что все $(x-1)$ можно будет собрать в отдельный множитель, а все остальные, не стремящиеся к нулю, отдельно, тогда легко определится k и C. Так как мы ищем эквивалентную, то предел изначально приравняем к 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{C(x-1)^k}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{C(x-1)^k}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)^k}\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{C}=1.$$

Множители (x-1) полностью сократятся лишь в случае, когда k=1, иначе предел получился бы 0 или ∞. Теперь, если уже известно, что k=1, и все множители типа (x-1) сократились, вычислим C.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)}{C}=1$, $\frac{3}{C}=1$, C = 3. Тогда $\gamma(x)=3(x-1)$.

Ответ. $\gamma(x)=3(x-1)$. График $\alpha(x)=x^2+x-2$ и $\gamma(x)=3(x-1)$:



На графике зелёным изображена главная часть $\gamma(x) = 3(x-1)$, а коричневым $\alpha(x) = x^2 + x - 2$. Фактически мы нашли среди степенных функций вида $C(x-1)^k$ наилучшую, соответствующую $\alpha(x)$. Кстати, заметим, если порядок малости в данной точке равен 1, то есть k=1, то график пересекает ось Ох под каким-то углом, причём главная часть это и есть уравнение касательной. Если же касательная горизонтальна, то бесконечно малая имеет не 1 порядок, а более высокий.

Задача 140. Выделить главную часть бесконечно-малой:
$\alpha(x) = \sin\left(\sqrt{1+x^5} - 1\right)$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Так как точка 0, то вместо множителя $C(x-x_0)^k$ здесь просто Cx^k. Поделим и приравняем предел к 1, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\sqrt{1+x^5} - 1\right)}{Cx^k} = 1$.

Преобразуем так, как обычно при вычислении предела, когда внутри не было неизвестных параметров. Заменим на эквивалентную бесонечно-малую.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x^5} - 1\right)}{\left(\sqrt{1+x^5} - 1\right)} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^5} - 1\right)}{Cx^k} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^5} - 1\right)}{Cx^k} = 1.$$

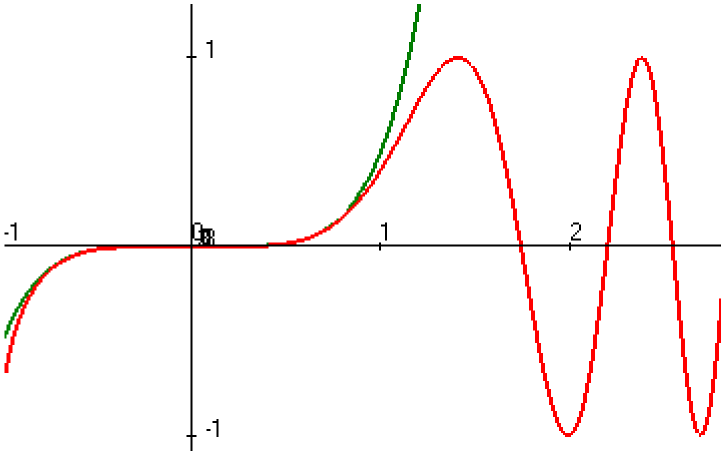
Теперь домножим и поделим на сопряжённое выражение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)}{Cx^k}\frac{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}=1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}\frac{1+x^5-1}{Cx^k}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}=1 \;\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{Cx^k}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}=1 \;\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{Cx^k}\frac{1}{2}=1$$ очевидно, что этот lim может быть равен константе лишь при $k=5$, ведь если x сократится не полностью, то будет 0 или ∞. При $k=5$ остаётся $\frac{1}{2C}=1$, $C=\frac{1}{2}$.

Ответ. $\gamma(x)=\frac{x^5}{2}$.

Чертёж к этой задаче. Красным показана исходная функция, зелёным главная часть.



Таким образом, найдена «наиболее похожая» на $\alpha(x)$ в окрестности нуля функция (в классе степенных функций). Видно, что в окрестности 0 их графики очень близки, вот в чём состоит геометрический смысл **главной части** бесконечно-малой функции.

Непрерывность и точки разрыва.

Задача 141. Найти точки разрыва и определить их тип $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1}$.

Решение. Вычислить значение функции обычным путём здесь нельзя лишь в точках 1,–1 где знаменатель обращается в 0. Эти две точки подозрительные на существование разрыва, мы и будем исследовать.

Во-первых, можно представить так: $f(x)=\frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)}$.

Надо найти оба односторонних предела в каждой из точек.
Рассмотрим $x=1$.
Для предела справа, $x>1$ и модуль раскрывается без лишнего знака:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Для предела слева, $x<1$, и при раскрытии модуля знак минус:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1+0}\frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Получились разные константы. Значит, разрыв 1-го рода.

Рассмотрим $x=-1$.
Здесь $|x-1|$ и $(x-1)$ раскрываются одинаково, и равны 2 и -2. А отличие в том, какого знака бесконечно-малая $(x+1)$ в знаменателе.

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1+0}\frac{2}{(x+1)(-2)} = \frac{2}{(+0)(-2)} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1-0}\frac{2}{(x+1)(-2)} = \frac{2}{(-0)(-2)} = +\infty.$$

Хотя бы с одной стороны предел ∞ или не существует, значит разрыв 2-го рода.
Ответ. $x=-1$ разыв 2 рода, $x=1$ разрыв 1 рода.

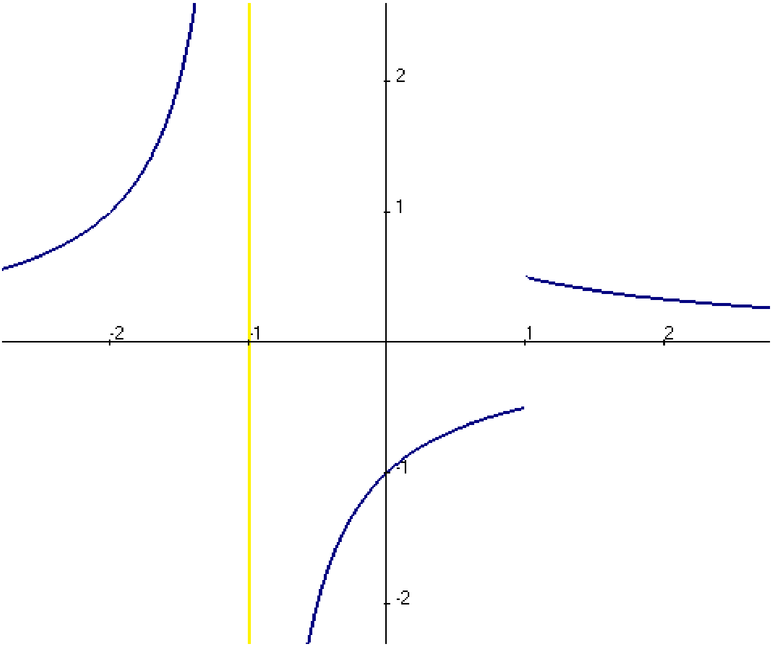


Чертёж к этой задаче. Синим цветом показан график этой функции, жёлтым - вертикальная асимптота, где разрыв 2-го рода.

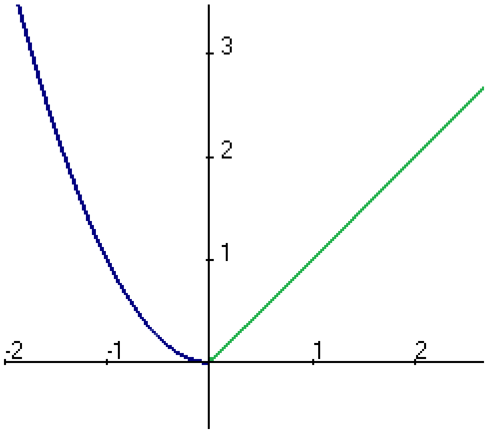
Задача 142. Выяснить тип точки $x_0 = 0$ для $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$.

Решение. Левосторонний предел здесь должен вычисляться с помощью первой ветви функции, а правосторонний с помощью второй. $\lim\limits_{x \to -0} x^2 = 0$. $\lim\limits_{x \to +0} x = 0$. Кроме того, $f(0) = 0^2 = 0$.

Значение функции существует и равно как левостороннему пределу, так и правостороннему. 0 это точка непрерывности.

Ответ. $x_0 = 0$ точка непрерывности.

График этой функции:



Задача 143. Найти точки разрыва и определить их тип для функции:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{x^2-4}, x\le 1\\ \dfrac{x-5}{|x-5|}, x>1\end{cases}.$$

Решение. Сначала ищем точки, подозрительные на разрыв, то есть где возможен разрыв. Во-первых, это точка стыковки двух ветвей графика, то есть $x=1$. Там надо предел слева искать с помощью одной функции, а справа - с помощью другой. Кроме того, $x=-2$ и $x=5$. Точка $x=2$ не должна рассматриваться, т.к. правее 1 уже действует другая ветвь функции.

Рассмотрим $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{3}{-3}=-1$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x-5}{|x-5|}=\dfrac{-4}{4}=-1$. Кроме того, значение в точке 1 тоже существует и равно $f(1)=\dfrac{3}{1^2-4}=-1$.

Тогда $x=1$ точка непрерывности.

Рассмотрим $x=-2$:

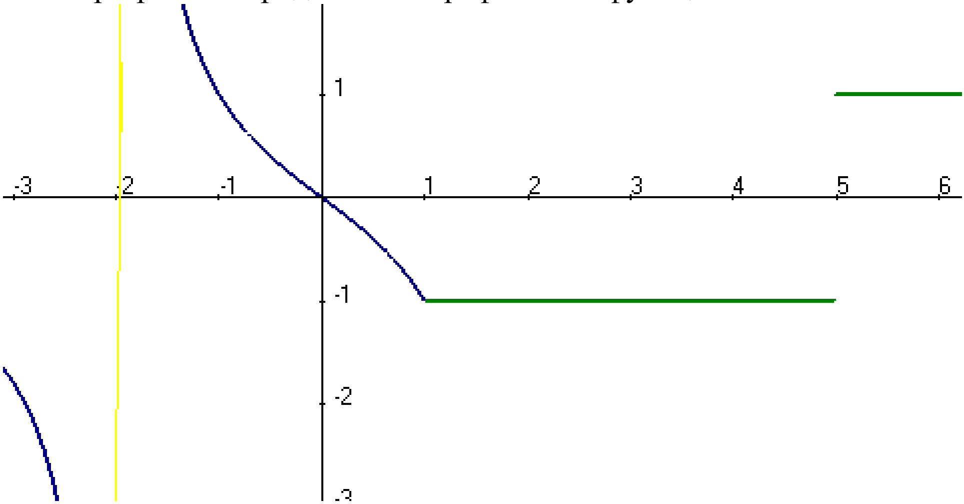
$$\lim_{x\to -2+0}\frac{3x}{(x+2)(x-2)}=\frac{(-6)}{(+0)(-4)}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{3x}{(x+2)(x-2)}=\frac{(-6)}{(-0)(-4)}=-\infty.$$

$x=-2$ разрыв 2-го рода.
Рассмотрим $x=5$.

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{x-5}{|x-5|}=\lim_{x\to 5+0}\frac{x-5}{x-5}=1,\quad \lim_{x\to 5-0}\frac{x-5}{|x-5|}=\lim_{x\to 5-0}\frac{x-5}{-(x-5)}=-1.$$

$x=5$ разрыв 1-го рода. Вот график этой функции:



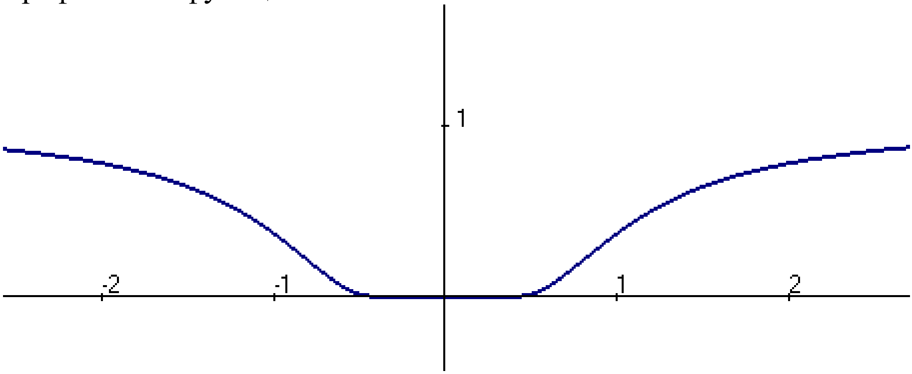
На графике синим цветом показана левая ветвь функции, зелёным - правая, жёлтым - асимптота (она там, где разрыв 2 рода).
Ответ. $x=-2$ разрыв 2 рода, $x=1$ точка непрерывности, $x=5$ разрыв 1 рода.

Задача 144. Исследовать тип точки разрыва $x=0$ для $f(x)=e^{-1/x^2}$.
Решение.
И при $x\to+0$, и при $x\to-0$ здесь $\frac{1}{x^2}\to+\infty$, а тогда $-\frac{1}{x^2}\to-\infty$.
Тогда для обоих односторонних пределов получается одинаково:

$$\lim_{x\to+0}e^{-1/x^2}=\lim_{x\to-0}e^{-1/x^2}=e^{-\infty}=0.$$ Тогда разрыв устранимый.

К тому же функция чётная, и так ясно, что с двух сторон симметричные ветви графика. Так что достаточно было вычислить только с одной стороны.
Ответ. $x=0$ устранимый разрыв.

График этой функции:



Задача 145. Найти точки разрыва и установить их тип для функции $f(x) = arctg\,\dfrac{1}{x^2 - 9}$.

Решение. Знаменталь дроби 0 при $x = 3$ и $x = -3$. Вычислим односторонние пределы в точках -3 и 3. При этом учитываем, что $arctg(y) \to +\dfrac{\pi}{2}$ при $y \to +\infty$ и $arctg(y) \to -\dfrac{\pi}{2}$ при $y \to -\infty$.

$$\lim_{x \to 3+0} arctg\,\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\,\frac{1}{(6)\cdot(+0)} = arctg(+\infty) = +\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x \to 3-0} arctg\,\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\,\frac{1}{(6)\cdot(-0)} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Пределы конечные, но разные. Разрыв 1-го рода.

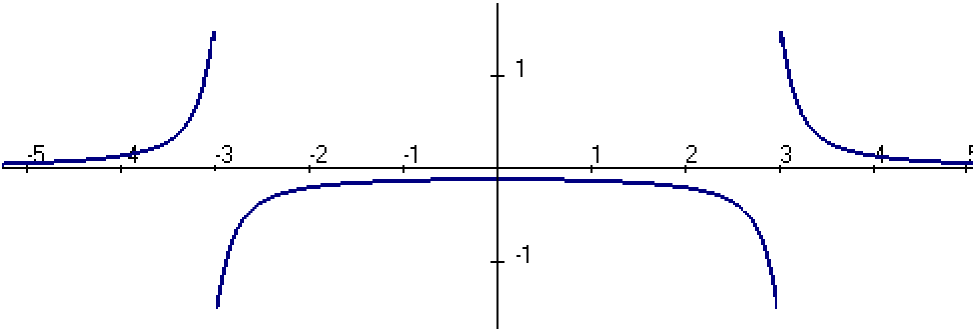
$$\lim_{x \to -3+0} arctg\,\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\,\frac{1}{(+0)\cdot(-6)} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x \to -3-0} arctg\,\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\,\frac{1}{(-0)\cdot(-6)} = arctg(+\infty) = +\frac{\pi}{2}.$$

Пределы конечные, но разные. Разрыв 1-го рода.

Ответ. -3 и 3 разрывы 1 рода.

График этой функции:



Задача 146 (А,Б). Установить тип точки разрыва $x_0 = 0$ для функций: А) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Б) $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

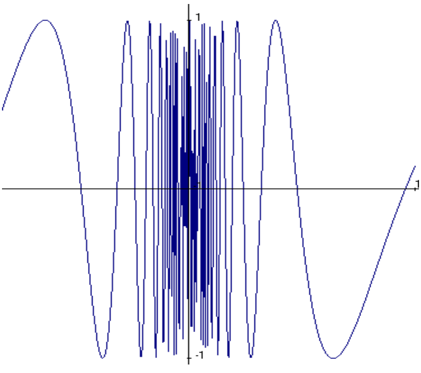
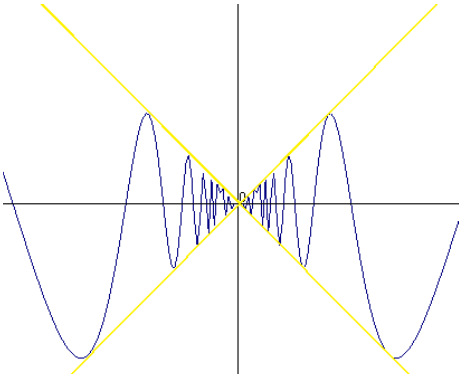
Решение. $\lim\limits_{x\to\pm 0} \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to\pm\infty} \sin y$, такие пределы не существуют (бесконечное количество колебаний, ордината не устанавливается ни на каком уровне). Разрыв 2 рода.

А вот при умножении на x получается, что максимумы также уменьшаются к 0, и тогда пределы существуют.

$\lim\limits_{x\to\pm 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (произведение бесконечно-малой на ограниченную является бесконечно-малой).

Ответ. А) разрыв 2-го рода. Б) устранимый разрыв.

Графики этих функций $\sin\frac{1}{x}$ и $x \cdot \sin\frac{1}{x}$ выглядят так:


и


Задача Д-48. Исследовать тип точки разрыва $x_0 = 0$ для $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$.

Решение. Ищем односторонние пределы вокруг 0, но при этом каждый раз домножаем и делим на x, так чтобы избавиться от синуса в выражении.

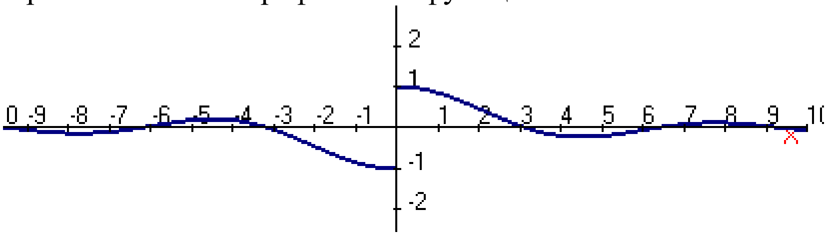
$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+0} 1\cdot\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+0} 1\cdot\frac{x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-0} 1\cdot\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-0} 1\cdot\frac{x}{-x} = -1.$$

Здесь знак модуля раскрывается по-разному в зависимости от того, справа или слева от 0 мы находимся. Это либо x либо $-x$.
Получились различные числа. Разрыв 1-го рода.

Ответ. $x = 0$ разрыв 1 рода.

Примечание. Вот график этой функции:



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задача 147. С помощью определения доказать, что $(\sin x)' = \cos x$.

Решение. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$ =

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$ =

$\sin(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \cos(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$ =

воспользуемся тригонометрической формулой понижения степени $2\sin^2 \dfrac{a}{2} = 1 - \cos a$:

$\sin(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\sin^2\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + \cos(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$ =

$= -2\sin(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)^2}{\Delta x} + \cos(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$ =

$= -2\sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$.

Ответ. $(\sin x)' = \cos x$.

Задача 148. Вычислить производную от композиций:

А) $f(x) = \sin^4 x$. Б) $f(x) = \sin(x^4)$

Решение. А) $\left(\sin^4 x\right)' = 4\sin^3 x \cdot \left(\sin x\right)' = 4\sin^3 x \cdot \cos x$.

Б) $\left(\sin(x^4)\right)' = \cos(x^4) \cdot \left(x^4\right)' = \cos(x^4) \cdot 4x^3$.

Ответы. $4\sin^3 x \cdot \cos x$; $\cos(x^4) \cdot 4x^3$.

Задача 149. Найти производную от $f(x) = \ln\cos(x^2 + 4)$.

Решение. Здесь композиция трёх функций. Сначала действует степенная и переводит x в $x^2 + 4$, затем вычисляется косинус, а от этого выражения зависит логарифм.

$$\left(\ln\cos(x^2+4)\right)' = \frac{1}{\cos(x^2+4)}\left(\cos(x^2+4)\right)' =$$

$\dfrac{1}{\cos(x^2+4)}(-\sin(x^2+4))\left(x^2+4\right)' = \dfrac{-\sin(x^2+4)}{\cos(x^2+4)}2x$, что можно записать в виде $-2x\cdot tg(x^2+4)$.

Ответ. $-2x\cdot tg(x^2+4)$.

Задача 150. Найти производную функции $f(x)=\sqrt{x}^5$.

Решение. Способ 1. Можно рассматривать как композицию, тогда:

$$\left(\sqrt{x}^5\right)' = 5\sqrt{x}^4\left(\sqrt{x}\right)' = 5x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{3/2}.$$

Способ 2. Можно рассматривать сразу как степенную функцию с дробной степенью, тогда решение такое: $\left(x^{5/2}\right)' = \dfrac{5}{2}x^{3/2}$.

Как мы видим, двумя способами получаем одно и то же.

Ответ. $\dfrac{5}{2}x^{3/2}$.

Задача 151. Найти 1 и 2 производную от $f(x)=\dfrac{x+1}{x+4}$.

Решение. $\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)' = \dfrac{(x+1)'(x+4)-(x+4)'(x+1)}{(x+4)^2} =$

$\dfrac{(x+4)-(x+1)}{(x+4)^2} = \dfrac{3}{(x+4)^2}$, что можно записать в виде $3(x+4)^{-2}$.

Вторая производная: $\left(3(x+4)^{-2}\right)' = -6(x+4)^{-3} = \dfrac{-6}{(x+4)^3}$.

Ответ. $f'=\dfrac{(x+4)-(x+1)}{(x+4)^2}$, $f''=\dfrac{-6}{(x+4)^3}$.

Задача 152. Найти производную от $f(x)=x^x$.

Решение. Здесь нельзя применять формулу степенной функции, ведь в показателе тоже есть переменная. Но нельзя и формулу показательной функции, т.к. в основании тоже есть переменная. Единственным выходом здесь является логарифмирование, чтобы x соатлось только в степени. Основание может быть представлено в виде $x = e^{\ln x}$. Тогда $f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\cdot\ln x}$.

$\left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\left(x\cdot\ln x\right)' = e^{x\cdot\ln x}\left(x\cdot(\ln x)' + x'\cdot\ln x\right) =$

$e^{x\cdot\ln x}\left(x\cdot\dfrac{1}{x} + 1\cdot\ln x\right)$ а теперь можем заменить обратно $e^{x\cdot\ln x}$ на x^x.

После приведения подобных, получим $x^x\left(1+\ln x\right)$.

Ответ. $f'(x) = x^x(1+\ln x)$.

Задача 153. Найти производную вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} \sin^3 x \\ x^3 \end{pmatrix}$.

Решение. Производные двух координатных функций ищем независимо друг от друга.

$f'(x) = \begin{pmatrix} (\sin^3 x)' \\ (x^3)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin^2 x\cos x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$. **Ответ.** $\begin{pmatrix} 3\sin^2 x\cos x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$.

Задача 154. Найти 1-ю и 2-ю производную для $f(x) = arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найти $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение. $\left(arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{(x)'\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}'}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1-x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Итак, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Следующая, 2-я производная:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\left(1-x^2\right)' =$$

$$-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\left(-2x\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}.$$

Вычислим «тестовое» значение при конкретном $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}^3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}^3}{1} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Ответ. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}$, $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$=2.

Задача Д-49. Доказать, что $(x^3)' = 3x^2$.

Решение. По определению, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2.$$

Ответ. $(x^3)' = 3x^2$.

Задача Д-50. Найти 1-ю и 2-ю производную для $f = \dfrac{x+3}{x^2+4}$.

Решение. $f' = \left(\dfrac{x+3}{x^2+4}\right)' = \dfrac{(x+3)'(x^2+4) - (x^2+4)'(x+3)}{(x^2+4)^2} =$

$$\frac{(x^2+4) - 2x(x+3)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2 + 4 - 2x^2 - 6x}{(x^2+4)^2} = \frac{4 - 6x - x^2}{(x^2+4)^2}.$$

2-я производная: $f'' = \left(\dfrac{4 - 6x - x^2}{(x^2+4)^2}\right)' =$

$$= \frac{(4-6x-x^2)'(x^2+4)^2 - (4-6x-x^2)\left((x^2+4)^2\right)'}{(x^2+4)^4} =$$

$$= \frac{(-6-2x)(x^2+4)^2 - (4-6x-x^2)2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4},$$

сократим по крайней мере на 1 множитель (x^2+4):

$$\frac{(-6-2x)(x^2+4) - (4-6x-x^2)\cdot 4x}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{-(2x+6)(x^2+4) - (16x - 24x^2 - 4x^3)}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{-(2x^3 + 6x^2 + 8x + 24) - 16x + 24x^2 + 4x^3}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3 + 18x^2 - 24x - 24}{(x^2+4)^3}.$$

Ответ. $f' = \dfrac{4-6x-x^2}{(x^2+4)^2}$ $f'' = \dfrac{2x^3+18x^2-24x-24}{(x^2+4)^3}$

Задача Д-51. Найти производную от $f(x) = \ln(x^3)\cdot tg(x)$.

Решение. Здесь произведение, причём в одном из множителей есть композиция.

$$\left(\ln(x^3)\cdot tg(x)\right)' = tg(x)\left(\ln(x^3)\right)' + \ln(x^3)\left(tg(x)\right)' =$$

$$tg(x)\frac{\left(x^3\right)'}{x^3} + \ln(x^3)\frac{1}{\cos^2 x} = tg(x)\frac{3x^2}{x^3} + \frac{\ln(x^3)}{\cos^2 x} = \frac{3tg(x)}{x} + \frac{\ln(x^3)}{\cos^2 x}.$$

Ответ. $\dfrac{3tg(x)}{x} + \dfrac{\ln(x^3)}{\cos^2 x}$.

Задача Д-52. Найти 2-ю производную для $f(x) = x^{10}\sin^2 x$.

Решение. 1-я производная: $\left(x^{10}\sin^2 x\right)' = \left(x^{10}\right)'\sin^2 x + x^{10}\left(\sin^2 x\right)' =$ $10x^9\sin^2 x + x^{10}2\sin x\cos x = x^9\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right)$.

2-я производная: $9x^8\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right) + x^9\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right)' =$

$= 9x^8\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right) + x^9\left(20\sin x\cos x + (\sin 2x + 2x\cos 2x)\right) =$

$= x^8\left(90\sin^2 x + 9x\sin 2x\right) + x^9\left(10\sin 2x + \sin 2x + 2x\cos 2x\right) =$

$= x^8\left(90\sin^2 x + 9x\sin 2x\right) + x^8\left(11x\sin 2x + 2x^2\cos 2x\right) =$

$= x^8(90\sin^2 x + 20x\sin 2x + 2x^2\cos 2x)$.

Ответ. $f''(x) = x^8(90\sin^2 x + 20x\sin 2x + 2x^2\cos 2x)$.

Задача 155. Вывести формулу $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Решение. Объединим первые 2 слагаемых в один условный множитель, а третье пусть будет вторым множителем. После этого применим известную формулу, доказанную для 2 множителей.
$((uv)w)' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + v'u)w + uvw'$, что и приводит к выражению $u'vw + uv'w + uvw'$.

Задача 156. Найти 1-ю и 2-ю производную $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ и $f''(0)$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x)}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x)}{(x-1)^3} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2 - 2x)}{(x-1)^3} =$$

$$\frac{2(x^2 - 2x + 1) - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}. \qquad f''(0) = \frac{2}{(-1)^3} = -2.$$

Ответ. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$, $f''(0) = -2$.

Задача 157. Дана функция $f(x) = 4ctg^2 x + 8\ln(\sin x)$.

Найти $f''(x)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение. $f'(x) = 8ctgx(ctgx)' + 8\dfrac{(\sin x)'}{\sin x} = 8ctgx\dfrac{-1}{\sin^2 x} + 8\dfrac{\cos x}{\sin x} =$

$$-8\frac{ctgx}{\sin^2 x} + 8ctgx = 8ctgx\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 8ctgx\left(\frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= 8ctgx\left(\frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -8ctg^3 x.$$

Максимально возможно привели подобные, чтобы затем было легче считать 2-ю производную.

$$f''(x) = -8\left(ctg^3 x\right)' = -8\left(3ctg^2 x\right)\left(ctgx\right)' = -24ctg^2 x\frac{-1}{\sin^2 x} =$$

$$= 24\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{\sin^2 x} = 24\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}.$$

Вычислим $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$. $24\frac{\cos^2\left(\pi/4\right)}{\sin^4\left(\pi/4\right)} = 24\frac{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^4} = 24\frac{1/2}{1/4} = 48.$

Ответ. $f''(x) = 24\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$. $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 48$.

Задача 158. $f(x) = e^{\sin x}$ найти $f''(x)$, $f''(0)$, $f''(\pi/2)$.

Решение. $f(x) = e^{\sin x}$, $f'(x) = \left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x}\left(\sin x\right)' = e^{\sin x}\cos x$.

$$f''(x) = \left(e^{\sin x}\cos x\right)' = \left(e^{\sin x}\right)'\cos x + e^{\sin x}\left(\cos x\right)' =$$

$$e^{\sin x}\cos x\cos x - e^{\sin x}\sin x = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x).$$

$f''(0) = e^0(1-0) = 1$. $f''(\pi/2) = e^1(0-1) = -e$.

Ответ. $f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$, $f''(0) = 1$, $f''(\pi/2) = -e$.

«Частные производные, градиент».

Задача 159. Дана функция $u = 3xy + xy^2$. Найти координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,1)$.

Решение. Найдём две частных производных.

$\left(3xy + xy^2\right)_x' = 3y + y^2, \quad \left(3xy + xy^2\right)_y' = 3x + 2xy$.

Градиент в произвольной точке: $\nabla u(x, y) = \left(3y + y^2, 3x + 2xy\right)$.

Градиент в точке $M_0(1,1)$: $\nabla u(1,1) = (4,5)$.

Ответ. $\nabla u(1,1) = (4,5)$.

Задача 160. Дана функция $u = xy + yz$. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,1,1)$.

Решение.

$(xy + yz)_x' = y + 0 = y, \quad (xy + yz)_y' = x + z, \quad (xy + yz)_z' = y$.

Градиент в произвольной точке: $\nabla u(x, y, z) = (y, x + z, y)$.

Градиент в точке $M_0(1,1,1)$: $\nabla u(1,1,1) = (1,2,1)$.

Ответ. $\nabla u(1,1,1) = (1,2,1)$.

Задача 161. Найти градиент функции $f(x, y, z) = x^2 y + yz$ в точке (1,1,1).

Решение. Найдём частные производные. $f_x' = 2xy$, $f_y' = x^2 + z$, $f_z' = y$. Присвоим все значения x,y,z=1. Получаем $\nabla f(1,1,1) = (2,2,1)$.

Ответ. $\nabla f(1,1,1) = (2,2,1)$.

Алгоритм вычисления производной по направлению можно условно разделить на 4 шага:

1) Найти градиент в произвольной точке,
2) Найти гралиент в конкретной точке,
3) Нормировать вектор, задающий направление,

4) Скалярно умножить градиент в точке на этот нормированный вектор.

Задача 162. Дана функция $u(x,y,z) = xy + xz - z^2$. Найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(2,1,-1)$,

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a} = (-1,2,2)$.

Решение. Найдём все 3 частных производных.

$$\left(xy + xz - z^2\right)'_x = y + z - 0.$$

$$\left(xy + xz - z^2\right)'_y = x + 0 - 0.$$

$$\left(xy + xz - z^2\right)'_z = 0 + x - 2z.$$

1) Градиент в произвольной точке: $\left(y+z, x, x-2z\right)$.

2) Градиент в точке $M_0(2,1,-1)$: $\left(0,2,4\right)$.

3) Нормируем вектор $\mathbf{a} = (-1,2,2)$. Его длина $\sqrt{1+4+4} = 3$.

Нормированный вектор $\mathbf{a} = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

4) Скалярно умножим его на градиент в точке, т.е. $\left(0,2,4\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \left(\nabla u, a\right) = 0 + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Ответ. $\nabla u(2,1,-1) = \left(0,2,4\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial a} = 4.$

Замечание. Шаги 3 и 4 перестановочны, то есть поделить на длину вектора можно уже тогда, когда скалярно умножили.

Задача 163. Дана функция $u = x^2 + 3xy$. Найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(2,-2)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a} = (3,1)$.

Решение. Ищем частные производные.

$\left(x^2+3xy\right)_x' = 2x+3y$, $\quad \left(x^2+3xy\right)_y' = 3x$.

Итак, градиент $\left(2x+3y, 3x\right)$. При $x=2, y=-2$ получаем вектор $\left(-2,6\right)$. Нормируем вектор $\mathbf{a}=(3,1)$. Его длина $\sqrt{10}$. Новый вектор $\mathbf{a}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Скалярно умножаем его на $\left(-2,6\right)$:

$$-2\frac{3}{\sqrt{10}}+6\frac{1}{\sqrt{10}}=0.$$

Ответ. $\nabla u(2,-2)=\left(-2,6\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial a}=0.$

Задача 164. Найти градиент функции $f=x^4y$ в точке (1,1) и производную по направлению (1,3).

Решение. $\left(x^4y\right)_x'=4x^3y$, $\left(x^4y\right)_y'=x^4$.

Градиент в произвольной точке: $\nabla f(x,y)=(4x^3y,x^4)$

Градиент в конкретной точке: $\nabla f(1,1)=(4,1)$

Нормируем вектор (1,3). $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Скалярно умножим (4,1) и $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. $\quad \frac{4}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{10}}$.

Ответ. $\nabla f(1,1)=(4,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{7}{\sqrt{10}}$.

Задача 165. Дана функция $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,-2,2)$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a}=(8,-4,1)$.

Решение. Частные производные:

$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Аналогично

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Присвоим конкретные значения x, y, z и получим градиент в точке.

Учитывая, что $\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$,получится:

$$\nabla u(1,-2,2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Нормируем вектор $\mathbf{a} = (8,-4,1)$. Его длина $\sqrt{64+16+1} = \sqrt{81} = 9$.

Итак, надо рассматривать такой вектор: $\mathbf{a} = \left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

Теперь скалярно умножим его на градиент.

$$\frac{8}{9}\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{9}\frac{2}{3} = \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{2}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $\nabla u(1,-2,2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{2}{3}$.

Задача 166. Найти градиент функции $f = x^3yz$ в точке $M(1,1,1)$ и производную по направлению $a = (1,1,0)$.

Решение.

1) Вычисляем частные производные: $\nabla f = \left(3x^2yz, x^3z, x^3y\right)$.

2) $\nabla f(1,1,1) = (3,1,1)$.

3) Скалярно умножаем $\nabla f(1,1,1) = (3,1,1)$ на $a = (1,1,0)$, получим 4.

4) Разделим на $|a| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, получим $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Ответ. $\nabla f(1,1,1) = (3,1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Задача 167. Найти градиент функции $U = x^3y + xy^4$ в точке (2,2) и производную по направлению а = (3,4).

Решение. $\left(x^3y + xy^4\right)'_x = 3x^2y + y^4$, $\left(x^3y + xy^4\right)'_y = x^3 + 4xy^3$.

Градиент в произвольной точке: $\left(3x^2y + y^4, x^3 + 4xy^3\right)$.
Градиент в точке (2,2) равен $\left(40{,}72\right)$.

Нормируя вектор (3,4) получаем $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Скалярно умножаем $\left(40{,}72\right)$ и $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. $\frac{120}{5} + \frac{288}{5} = \frac{408}{5} = 81{,}6$.

Ответ. Градиент $\nabla u(2{,}2) = \left(40{,}72\right)$, $\frac{\partial u}{\partial a} = 81{,}6$.

Задача Д-53. Найти производную для $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \cos x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin x}{x}$.

Задача Д-54. Найти градиент функции $U = x^2yz$ в точке (1,2,3) и производную по направлению a = (1,0,1).
Ответ. $7\sqrt{2}$.

«Уравнение касательной».
168. Найти уравнение касательной к кривой $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Значение в точке: $f(2) = y_0 = 16 + 12 + 2 = 30$.

Производная: $f'(x) = 6x^2 + 6x$.

Производная в точке: $f'(2) = 24 + 12 = 36$.

Уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ принимает вид $y - 30 = 36(x - 2)$, что преобразуется к виду $y = 36x - 42$.

Ответ. $y = 36x - 42$.

Задача 169. Найти касательную к графику $y = x^2$ в точке с абсциссой 2 и расстояние от этой прямой до начала координат.

Решение. $y_0 = 4$, $f'(x) = 2x$, $f'(2) = 4$.

Подставим эту информацию в уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Получается $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 4$.

Надо применить формулу расстояния от точки до прямой в плоскости:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

для этого сначала преобразуем к неявному виду: $4x - y - 4 = 0$.

Тогда видно, что $A = 4, B = -1, C = -4$. $(x_1, y_1) = (0,0)$.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{16+1}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Ответ. Касательная $y = 4x - 4$, расстояние $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Задача 170. Найти касательную к графику $y = 3x^3 + 4x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. $f(1) = 7$, $f'(x) = 9x^2 + 8x$, $f'(1) = 17$.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = 17(x - 1) \Rightarrow y - 7 = 17x - 17 \Rightarrow$
$y = 17x - 10$.

Ответ. Уравнение касательной $y = 17x - 10$.

Задача 171. Найти касательную к графику функции $f(x) = \cos x + \ln(x+1)$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. $y_0 = f(0) = \cos 0 + \ln(1) = 1 + 0 = 1$.

$$f'(x) = -\sin x + \frac{1}{x+1}. \quad f'(0) = -\sin 0 + \frac{1}{0+1} = 1.$$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$.

Ответ. Уравнение касательной $y = x + 1$.

Задача Д-55. Найти касательную к графику функции $f(x) = arctg(x)$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. $y_0 = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Тогда уравнение: $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)$ что сводится к виду

$y = \frac{1}{2}x + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

Ответ. $y = \frac{1}{2}x + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

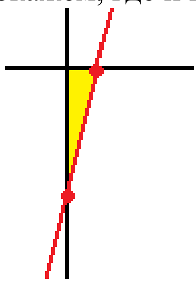
Задача 172. Найти уравнение касательной к графику $y = 2x^3 + 3x^2 + 3$ в точке $x_0 = 1$ и площадь треугольника, который она отсекает от одной из координатных четвертей.

Решение. $f(1) = 8$, $f'(x) = 6x^2 + 6x$, $f'(1) = 12$.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 8 = 12(x-1) \Rightarrow y = 12x - 4$.

Выясним, треугольник и в какой четверти она отсекает. Для этого найдём точки пересечения с координатными осями.

$x = 0 \Rightarrow y = -4$, $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Точки $(0,-4)$ и $\left(\frac{1}{3},0\right)$. Треугольник в 4-й четверти. Схематично покажем, где и как он расположен:



Его площадь это 0,5 от площади достроенного прямоугольника, а она была бы равна $\frac{4}{3}$. Поэтому ответ $\frac{2}{3}$.

Ответ. Касательная $y=12x-4$, площадь треугольника $\frac{2}{3}$.

Задача 173. На графике функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ взята точка A.

Касательная к графику в точке A наклонена к оси Ox под углом, тангенс которого равен -4. Найти точку $A(x_0, y_0)$ и уравнение касательной в этой точке.

Решение. «Касательная наклонена под углом, тангенс которого -4» это значит, что производная в той точке равна -4. Надо узнать, в какой точке производная функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ равна -4.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-1/2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}^3}.$$

Решим уравнение $-\frac{1}{2\sqrt{x}^3}=-4 \Rightarrow 2\sqrt{x}^3=\frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x}^3=\frac{1}{8} \Rightarrow$ $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$. А тогда уже легко вычисляется и значение функции, и находится точка. $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{1/4}}=\frac{1}{1/2}=2.$

Итак, точка $\left(\frac{1}{4},2\right)$. Построим уравнение касательной, где $x_0=\frac{1}{4}$, $y_0=2$.

Получим $y-2=-4\left(x-\frac{1}{4}\right)$, откуда $y-2=-4x+1$, т.е. $y=-4x+3$.

Ответ. Точка $\left(\frac{1}{4},2\right)$, уравнение касательной $y=-4x+3$.

Задача Д-56. На графике функции $f(x) = x^2$ взята точка A. Касательная к графику в точке A наклонена к оси Ox под углом, тангенс которого равен 4. Найти точку $A(x_0, y_0)$ и уравнение касательной в этой точке.

Решение. Аналогично задаче 173 (см. выше).

Ответ. Точка $(2,4)$, касательная $y = 4x - 4$.

Задача 174. Найти точки на графике $y = x^2 + 4$, такие, что касательная, проведённая в них, проходит через начало координат.

Решение. Необходимо, чтобы в уравнении касательной не было константы, тогда касательная будет содержать начало координат. Пусть такая точка имеет абсциссу c. Тогда $y_0 = c^2 + 4$, $f'(c) = 2c$. Уравнение касательной $y - (c^2 + 4) = 2c(x - c)$. Преобразуем его. $y - c^2 - 4 = 2cx - 2c^2 \Rightarrow y = 2cx - c^2 + 4$. Чтобы не было константы, должно быть $c^2 = 4$, т.е. $c = 2$ или $c = -2$. Высота графика при обоих этих значениях одинакова, и равна 8. Тогда точки: $(-2,8)$ и $(2,8)$.

Ответ. $(-2,8)$ и $(2,8)$.

Задача 175. Найти уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 7x$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. $f(2) = 4 + 14 = 18$, $f'(x) = 2x + 7$ $f'(2) = 4 + 7 = 11$.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, тогда $y - 18 = 11(x - 2)$, $y = 11x - 4$.

Ответ. $y = 11x - 4$.

Задача 176. Найти уравнение касательной для $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ в точке $x_0 = 1$ и высоту касательной при $x = 0$.

Решение. $f(1) = 5$, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ $f'(1) = 8$.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, тогда $y - 5 = 8(x - 1)$, $y = 8x - 3$.

Если здесь теперь присвоить $x = 0$ то очевидно, $y(0) = -3$.

Ответ. Уравнение $y = 8x - 3$, $y(0) = -3$.

Задача 177 . Найти касательную к неявно заданной кривой $x^2y^3 + x^4y - 2 = 0$ в точке $M_0(1,1)$.

Решение. Уравнение касательной для этого случая имеет вид: $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) = 0$. Выражать $y(x)$ в явном виде и не требуется.

Во-первых, проверим, что точка на самом деле принадлежит этой кривой. Подставим 1,1 и проверим тождество. Оно выполняется.

Найдём частные производные:

$$\left(x^2y^3 + x^4y - 2\right)'_x = 2xy^3 + 4x^3y$$

$$\left(x^2y^3 + x^4y - 2\right)'_y = 3x^2y^2 + x^4$$

Тогда $F'_x(1,1) = 6,\ \ F'_y(1,1) = 4$.

Уравнение касательной: $6(x-1) + 4(y-1) = 0$, сводится к виду

$$6x + 4y - 10 = 0 \ \Rightarrow\ 3x + 2y - 5 = 0 \ \Rightarrow\ y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x.$$

Ответ. $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$.

Задача Д-56. (Производная функции, заданной неявно).
$F(x, y) = x^2y^2 + x^4 + y^3 - 3 = 0$. Найти производную в точке (1,1) и касательную в этой точке.

Решение. Во-первых, проверим, что эта точка принадлежит кривой. $F(1,1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$, да, принадлежит. Ищем производную:

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{(x^2y^2 + x^4 + y^3 - 3)'_x}{(x^2y^2 + x^4 + y^3 - 3)'_y} = -\frac{2xy^2 + 4x^3}{2x^2y + 3y^2} = -\frac{2+4}{2+3} = -\frac{6}{5}.$$

Перейдём к поиску касательной. Точка (x_0, y_0) это (1,1). $y'(x_0) = -\frac{6}{5}$.

Таким образом, всё известно для построения уравнения касательной.

$$y - 1 = -\frac{6}{5}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{6}{5}x + \frac{11}{5}.$$

Ответ. $-\frac{6}{5}$. Уравнение касательной: $y = -\frac{6}{5}x + \frac{11}{5}$.

Задача 178 . Найти касательную плоскость к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке (1,1,2).
Решение. Уравнение касательной плоскости, которые доказали в лекциях, имеет вид:
$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$.

Запишем уравнение поверхности в неявной форме $x^2 + y^2 - z = 0$, чтобы можно было искать градиент. $\nabla F = (2x, 2y, -1)$.
$\nabla F(1,1,2) = (2,2,-1)$. Тогда уравнение касательной плоскости:
$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$, приведём подобные:
$2x - 2 + 2y - 2 - z + 2 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2x + 2y - 2$.
Ответ. $z = 2x + 2y - 2$.
Задача 178-Б. Найти касательную плоскость к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке (1,2,5). **Ответ.** $z = 2x + 4y - 5$.

Задача Д-58. Найти касательные к графику $y = x^2 + 3x$ в точках с абсциссами 1 и 2, и точку пересечения этих касательных.

Ответ. $y = 5x - 1$, $y = 7x - 4$, точка $A\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

«Экстремумы»
Задача 179. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции
$f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x + 1$.

Решение. Найдём производную. $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18$.

Ищем корни этого многочлена. $3(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, корни 2 и 3.

Для определения интервалов монотонности надо найти знак производной на интервалах $(-\infty, 2)$, $(2,3)$ и $(3, +\infty)$. Знак производной может меняться только в точках 2 и 3, на интервалах он остаётся неизменным. Надо выбрать какую-нибудь наиболее удобную для вычислений точку на интервале, желательно с целой абсциссой.

1) $0 \in (-\infty, 2)$, $f'(0) = 18 > 0$, на этом интервале монотонный рост.

2) $\frac{5}{2} \in (2,3)$ здесь очевидно, целое выбрать не получится.

$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3\frac{25}{4} - 15\frac{5}{2} + 18 = \frac{75}{4} - \frac{75}{2} + 18 = 18 - \frac{75}{4} = \frac{72}{4} - \frac{75}{4} < 0$, на этом интервале монотонное убывание.

3) $4 \in (3, +\infty)$, $f'(4) = 3 \cdot 16 - 15 \cdot 4 + 18 = 48 - 60 + 18 = 6 > 0$, здесь монотонный рост.

В точке 2 возрастание сменяется убыванием, это максимум.

В точке 3 убывание сменяется возрастанием, это минимум.

2-й способ. С помощью 2-й производной.

Выясним знак 2-й производной в этих точках. $f''(x) = 6x - 15$.

$f''(2) = 12 - 15 = -3 < 0 \Rightarrow x = 2$ максимум.

$f''(3) = 18 - 15 = 3 > 0 \Rightarrow x = 3$ минимум.

Ответ. $(-\infty, 2)$ возрастание, $(2,3)$ убывание, $(3, +\infty)$ возрастание. $x = 2$ максимум, $x = 3$ минимум.

Задача 180. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 9x^2$ и разность между ординатами максимума и минимума.

Решение. Производная: $f'(x) = 3x^2 - 18x = 3(x^2 - 6x) = 3x(x - 6)$.

Стационарные точки (где производная = 0) $x = 0$ и $x = 6$.

Чтобы определить, где максимум, а где минимум, выясним знак 2-й производной в этих же точках. $f'(x) = 3x^2 - 18x \Rightarrow f''(x) = 6x - 18$.

$f''(0) = -18 < 0$, точка $x = 0$ максимум.

$f''(6) = 36 - 18 = 18 > 0$ точка $x = 6$ минимум.

$f(0) = 0$, $f(6) = 36 \cdot 6 - 9 \cdot 36 = -3 \cdot 36 = -108$.

Ответ. $x = 0$ максимум, $x = 6$ минимум. Разность ординат 108.

Задача 181. Найти экстремумы для $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2$.

Решение. $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(x^2 - 3x + 2) = 2x(x - 1)(x - 2)$.

Точки, в которых производная обращается в 0, это 0,1 и 2.

Вычислим знак 2-й производной в каждой из этих точек.

$f''(x) = 6x^2 - 12x + 4$.

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ точка минимума.

$f''(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ точка максимума.

$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow$ точка минимума.

Ответ. $x = 0$ и $x = 2$ минимумы, $x = 1$ максимум.

Задача 182. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)'(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1)'(x^2 - x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} =$

$$\frac{(2x - 1)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$\frac{(2x^3 + x^2 + x - 1) - (2x^3 - x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

От знаменателя знак не зависит, знаменатель тут всегда строго больше 0. Поэтому всё зависит только от знака числителя. Выделим множитель, который может менять свой знак:

$f'(x) = \dfrac{2}{(x^2 + x + 1)^2}(x^2 - 1)$. Корни $1, -1$.

На интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$: $\quad f'(x) > 0$, рост.

На интервале $(-1, 1)$: $\quad f'(x) < 0$ убывание.

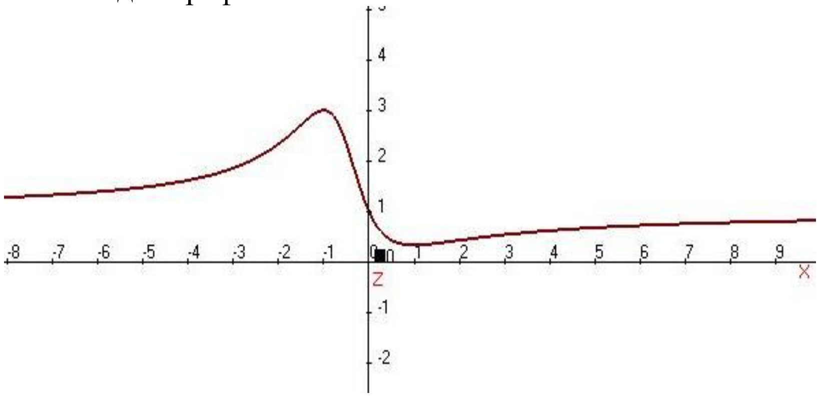
В точке $x = -1$ рост сменяется убыванием, это максимум.

В точке $x = 1$ убывание сменяется ростом, это минимум.

Кстати, в этом примере с помощью интервалов узнать экстремумы проще, чем с помощью 2-й производной, ведь пришлось бы считать поизводную от дроби $\dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Для построения графика можем найти высоту в точках максимума и минимума: $\quad f(-1) = \dfrac{1 - (-1) + 1}{1 - 1 + 1} = 3, \quad f(1) = \dfrac{1 - 1 + 1}{1 + 1 + 1} = \dfrac{1}{3}$.

Вот как выглядит график:



Ответ. $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$ рост, $(-1,1)$ убывание.
$x=-1$ максимум, $x=1$ минимум.

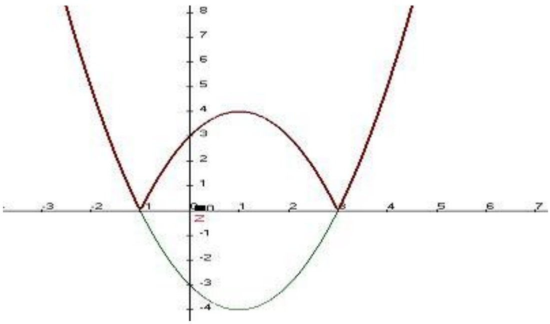
Задача 183. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$.

Решение. Сначала найдём корни выражения под знаком модуля, чтобы понять, какая часть параболы отражается вверх.

$x^2-2x-3=0$, $D=4-4(-3)=16$, $x=\dfrac{2\pm 4}{2}$, корни -1 и 3.

Тогда знак меняется на интервале $(-1,3)$, то есть функцию можно записать в виде: $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & x\notin(-1,3) \\ -x^2+2x+3 & x\in(-1,3) \end{cases}$.

График:



Производная: $f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x\notin(-1,3) \\ -2x+2 & x\in(-1,3) \end{cases}.$

Производная разрывна при $x=-1, x=3$ и обращается в 0 при $x=1$. Выбирая целочисленную точку на каждом интервале, найдём знак производной на этом интервале.

$f'(-2)=-6<0$ убывание на $(-\infty,-1)$.

$f'(0)=2>0$ рост на $(-1,1)$.

$f'(2)=-2<0$ убывание на $(1,3)$.

$f'(4)=6>0$ рост на $(3,\infty)$.

Таким образом, $x=-1, x=3$ точки минимума, $x=1$ максимум.

Ответ. $(-\infty,-1)$ и $(1,3)$ убывание, $(-1,1)$ и $(3,\infty)$ рост, $x=-1, x=3$ минимумы, $x=1$ максимум.

Наибольшее и наименьшее значение на отрезке.

Задача 184. Дана функция $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$. Найти её наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-4,-1]$.

Решение. Сначала найдём производную и точки экстремума.

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-x-\frac{8}{x^2}.$$

$$-x-\frac{8}{x^2}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8}{x^2}=-x \;\Leftrightarrow\; x^3=-8 \;\Leftrightarrow\; x=-2.$$

Точка $-2\in[-4,-1]$. Чтобы узнать, максимум это или минимум, найдём 2-ю производную.

$$f''(x)=(-x-8x^{-2})' = -1-8(-2)x^{-3} = -1+\frac{16}{x^3}.$$

$f''(-2)=-1+\frac{16}{-8}=-3<0$ поэтому в этой точке максимум.

Других экстремумов на данном отрезке нет. Производная и сама функция не существуют при $x=0$, однако эта точка в рассматриваемый отрезок не входит. Теперь остаётся сравнить значения в точке экстремума и на концах отрезка.

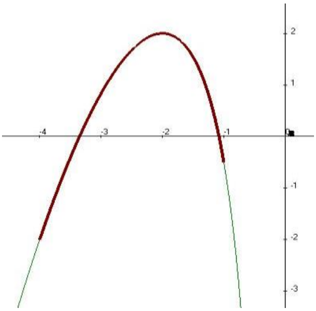
$$f(-4) = -\frac{16}{2} + \frac{8}{-4} + 8 = -8 - 2 + 8 = -2.$$

$$f(-2) = -\frac{4}{2} + \frac{8}{-2} + 8 = -2 - 4 + 8 = 2$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{8}{-1} + 8 = -\frac{1}{2} - 8 + 8 = -\frac{1}{2}.$$

Наибольшее значение $f(-2) = 2$, наименьшее $f(-4) = -2$.

График:



Ответ. Наибольшее $f(-2) = 2$, наименьшее $f(-4) = -2$.

Задача 185. Дана функция $f(x) = \frac{4x}{4 + x^2}$. Найти её наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-4, 3]$.

Решение. $f(x) = \frac{4x}{4 + x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4(4 + x^2) - 2x \cdot 4x}{(4 + x^2)^2} = \frac{16 - 4x^2}{(4 + x^2)^2} =$

$\frac{4}{(4 + x^2)^2}(4 - x^2)$ вынесли множитель, который меняет знак, отдельно. Первый множитель здесь всегда больше нуля.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$, то есть $x = \pm 2$.

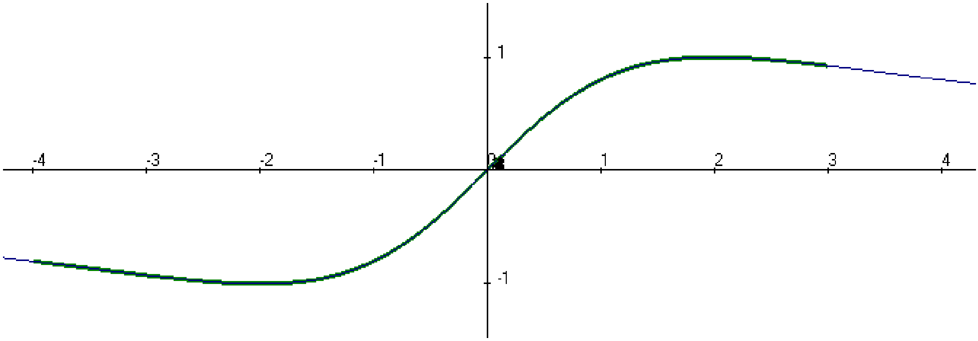
При $x \in (-2, 2)$ производная положительна, там рост функции.

Вне этого интервала $4 - x^2 < 0$, убывание функции.

В точке $x = -2$ убывание сменяется ростом, это минимум.

В точке $x = 2$ рост сменяется убыванием, это максимум.

График:



Осталось сравнить значения в точках экстремума и на концах отрезка.

$f(-4) = \dfrac{-16}{4+16} = -\dfrac{4}{5}$, $\qquad f(-2) = \dfrac{-8}{4+4} = -1$,

$f(2) = \dfrac{8}{4+4} = 1$, $\qquad f(3) = \dfrac{12}{4+9} = \dfrac{12}{13}$.

Ответ. Наименьшее: $f(-2) = -1$, наибольшее: $f(2) = 1$.

Задача Д-59. Дана функция $f(x) = \dfrac{4x}{4+x^2}$. Найти её наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-4,1]$.

Ответ. Наименьшее: $f(-2) = -1$, наибольшее: $f(1) = \dfrac{4}{5}$.

В отличие от прошлой задачи, здесь максимум не входит в данный отрезок, так как отрезок заканчивается раньше, на абсциссе 1, поэтому наибольшее значение меньше, чем в случае, когда было $[-4,3]$.

Задача 186. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ на отрезке [0,5].

Решение. Сначала найдём экстремумы во внутренних точках.

$f'(x) = 2x - 3$, $f' = 0$ только при $x = \dfrac{3}{2}$. При этом $f'' = 2 > 0$, то есть там минимум. Осталось найти все значения функции в точках экстремума и в двух граничных точках и сравнить их:

$f(0) = 2$, $\quad f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, $\quad f(5) = 12$.

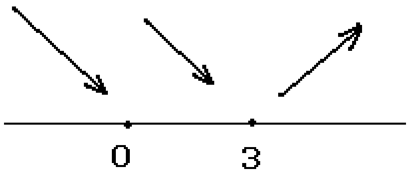
Ответ. Наибольшее $f(5)=12$, наименьшее $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Д-60. Найти экстремумы функции $f(x)=x^4-4x^3$.

Решение. Первая производная: $f'(x)=4x^3-12x^2 = 4x^2(x-3)$.

Она обращается в 0 при $x=0$ и $x=3$. Корень 0 кратности 2.

Рассмотрим знак производной на интервалах. Множитель $4x^2\geq 0$, знак может менять только $(x-3)$. Достаточно рассмотреть знак производной при каком-либо целом значении на каждом из интервалов $(-\infty,0)$, $(0,3)$ и $(3,+\infty)$. К примеру, в точках $x=-1$ и $x=1$ производная отрицательна, в точке $x=4$ положительна. Итак, экстремум всего 1, это точка $x=3$, там убывание сменяется возрастанием. В точке 0 не происходит смена знака производной, поэтому здесь экстремума нет.



Ответ. Единственный экстремум $x=3$, минимум.

Задача 187. Найти экстремум функции 2 переменных:
$f(x,y)=x^2-2x+y^2-6y+10$.

Решение. Найдём точку, в которой обе частные производные
$f'_x=2x-2$, $f'_y=2y-6$ обращаются в 0.

Получим $x=1, y=3$. Составим матрицу из вторых производных.

$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ она соответствует положительно-определённой квадратичной форме $Q=2x^2+2y^2\geq 0$. Проще говоря, в каждом из двух перпендикулярных сечений поверхности такая кривая, что 2-я производная больше нуля, то есть по каждому сечению минимум.

Тогда точка (1,3) минимум для поверхности.

Замечание. Можно было выделить полный квадрат по каждой переменной и сразу получить $f(x,y)=(x-1)^2+(y-3)^2$ тогда было бы видно, что в любой точке значение больше нуля, а в то же время $f(1,3)=0$.

Ответ. Точка (1,3) минимум.

Формула Тейлора.

Задача 188. Вывести формулу Тейлора для $f(x)=\ln(x+1)$ в точке $x_0=0$.

Решение. Найдём производные:

$f(x)=\ln(x+1)$	$f(0)=0$
$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}$	$f'(0)=1$
$f''(x)=(-1)(x+1)^{-2}$	$f''(0)=-1$
$f'''(x)=(-1)(-2)(x+1)^{-3}$	$f'''(0)=(-1)(-2)=(-1)^2 2!$
$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$	$f^{(4)}(x)=(-1)^3 3!$
...	...

Подставим эти коэффициенты в формулу. Получим

$$f(x)=0+x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{(-1)^2 2!}{3!}x^3+\frac{(-1)^3 3!}{4!}x^4+...$$

В числителе тоже факториалы, но с небольшим отставанием, на одно число. Поэтому почти все множители из этих факториалов (кроме последнего) сокращаются, например $\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{4}$. А элемент $(-1)^n$ это просто либо $+1$ либо -1 при чётной и нечётной степени соответственно.

Ответ. $\ln(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...$

Задача 189. Вывести формулу Тейлора для $f(x)=(x+1)^a$ в точке $x_0=0$.

Решение. Запишем производные.

$f(x)=(x+1)^a$ $f'(x)=a(x+1)^{a-1}$ $f''(x)=a(a-1)(x+1)^{a-2}$ $f'''(x)=a(a-1)(a-2)(x+1)^{a-3}$	$f(0)=1$ $f'(0)=a$ $f''(0)=a(a-1)$ $f'''(0)=a(a-1)(a-2)$ ...

Подставим эти коэффициенты в формулу. Получим

$$(x+1)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$$

Ответ. $(x+1)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$

Задача 190. Разложить в степенной ряд $\frac{1}{5-x}$ в окрестности $x_0=1$.

Решение. Здесь разложение в окрестности другой точки, а не 0, в этом случае надо изначально сделать арифметическое преобразование, чтобы отделить слагаемое вида $(x-1)$.

$$\frac{1}{5-x}=\frac{1}{4-(x-1)}$$

Затем вынесем за скобку констенту 4, чтобы в знаменателе выражение начиналось с 1, т.е. чтобы присутствовала структура типа $\frac{1}{1-q}$. Итак, $\frac{1}{5-x}=\frac{1}{4-(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x-1}{4}}$.

А уже после этого, в качестве знаменателя прогрессии получается $q=\frac{x-1}{4}$ и тогда, при условии, что $\frac{|x-1|}{4}<1$, получим $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}$.

Это верно в такой области: $|x-1|<4$, т.е. $x\in(-3,5)$.

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}$.

Условные экстремумы.

Задача 191. Найти отношение высоты к радиусу основания цилиндра, такое, что при фиксированном объёме получалась наименьшая площадь поверхности.

Решение. Это задача на условный экстремум. Формула объёма цилиндра $V(h,R)=\pi R^2 h$. Полная площадь поверхности это сумма площади боковой поверхности и площадей 2 кругов, то есть верхней и нижней грани цилиндра. Она вычисляется по формуле:

$$S(h,R)=(2\pi R)h+2(\pi R^2) = 2\pi R(h+R).$$

Требуется, чтобы эта площадь была наименьшей. Пусть объём фиксирован и составляет 1 единицу, $\pi R^2 h=1$. Тогда $h=\dfrac{1}{\pi R^2}$. Таким образом, мы можем в функции $S(h,R)$ одну из двух переменных выразить через другую, то есть получится функция одной переменной.

$$S(h(R),R)=2\pi Rh+2\pi R^2 = 2\pi R\frac{1}{\pi R^2}+2\pi R^2 = \frac{2}{R}+2\pi R^2.$$

Теперь найдём экстремум этой функции по R.

$\left(\dfrac{2}{R}+2\pi R^2\right)' = -\dfrac{2}{R^2}+4\pi R$. Найдём, когда производная равна 0.

$$-\frac{2}{R^2}+4\pi R=0 \Leftrightarrow 2\pi R=\frac{1}{R^2} \Leftrightarrow 2\pi=\frac{1}{R^3} \Leftrightarrow R=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

При этом $h=\dfrac{1}{\pi R^2} = \dfrac{1}{\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi}$.

Соотношение $\dfrac{h}{R} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi} : \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi}\dfrac{\sqrt[3]{2\pi}}{1} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^3}{\pi} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2.$

Ответ. $h/R=2$.

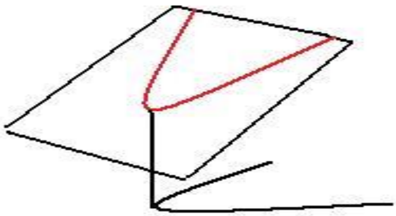
Замечание. Для наименьшей площади поверхности диаметр цилиндра должен быть равен высоте, сбоку такой цилиндр виден именно как квадрат! Если цилиндрическая консервная банка слишком плоская, или наоборот, слишком высокая, это перерасход металла. Так что задача имеет прямое отношение к экономике.

Д-61 Дана функция $f(x,y) = y$. Найти условный экстремум при $y = x^2$.

Решение. Условие имеет вид $F(x,y) = y^2 - x = 0$.

Выразим имеющуюся в функции y через x.

$f(x, y(x)) = f(x, x^2) = x^2$. Обычная производная $(x^2)' = 2x$, минимум в точке 0. Тогда $(0,0)$ условный минимум. Чертёж:



Ответ. (0,0) точка условного минимума.

Задача 192. Дана функция $f(x,y) = x + y$. Найти условные экстремумы этой функции на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Условие имеет вид $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Наклонная плоскость $z = x + y$ наклонена в сторону биссектрисы первой четверти. Функцию двух переменных нужно свести к функции одной переменной с помощью условия, и затем искать экстремум для неё уже обычным образом. Для точки на окружности, можно задать x,y так: $x = \cos(t), y = \sin(t)$.

Тогда вместо $f(x,y)$ можно получить в итоге $f(x(t), y(t)) = f(t)$.

$f(x,y) = x + y = \cos t + \sin t = f(t)$.

$f'(t) = -\sin t + \cos t$. $f'(t) = 0$ при $\sin t = \cos t$, то есть $t = \dfrac{\pi}{4}$ и $t = \dfrac{5\pi}{4}$.

$f''(t) = -\cos t - \sin t$. Тогда $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, там условный максимум.

$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$, там условный минимум.

Переведём t обратно в декартовы координаты x, y.

$t = \frac{\pi}{4}$ соответствует $x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

итак, при $t = \frac{\pi}{4}$ получим $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

При $t = \frac{5\pi}{4}$ получим $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ответ. Точка $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условный максимум, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условный минимум.

Замечание. Не всегда обязательно выражать переменные через t, просто здесь для окружности так было удобнее. В следующей задаче кривая - парабола, там можно y заменить на x^2, и тоже $f(x, y)$ сведётся к одной переменной, а именно $f(x, x^2)$.

Задача 193. Найти условный экстремум функции $f(x, y) = x + y$ при условии, что $y = x^2$.

Решение. Поверхность $z = x + y$ это наклонная плоскость. Ни одна точка на ней не является точкой экстремума, ведь в её окрестности есть другие точки как выше, так и ниже. Однако если сузить область определения, то есть рассматривать не всю плоскость, а только параболу, над параболой есть точка минимальной высоты.

Подставим условие $y = x^2$ в функцию $f(x, y) = x + y$.

$f(x, y(x)) = f(x, x^2) = x + x^2$, свели к функции одной переменной, и для неё уже ищем обычный экстремум.

$(x + x^2)' = 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$.

$(x+x^2)'' = 2 > 0$, т.е. минимум.

Значение функции в этой точке: $f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ. Точка $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ условный минимум.

Задача 194. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y) = x - y^2$ в квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$.

Решение. Сначала найдём экстремумы во внутренних точках, а затем условные экстремумы на границах квадрата, после этого сравним все значения в получившихся точках, а также в 4 углах квадрата.

$\nabla f = (1,-2y^2)$ никогда не обращается в (0,0) из-за первой координаты. Экстремумов во внутренних точках нет. Теперь ищем условные экстремумы на границах квадрата.

$x = -1$. $f(-1,y) = -1 - y^2$, $f'_y = -2y$, экстремум при $y = 0$, то есть в точке $(-1,0)$, это условный максимум, т.к. $f''_{yy} = -2 < 0$.

$x = 1$. $f(1,y) = 1 - y^2$, $f'_y = -2y$, экстремум при $y = 0$, то есть в точке $(1,0)$, это условный максимум, т.к. $f''_{yy} = -2 < 0$.

$y = -1$. $f(x,-1) = x - 1$, $f'_x = 1$, экстремумов нет.

$y = 1$. $f(x,1) = x - 1$, $f'_x = 1$, экстремумов нет.

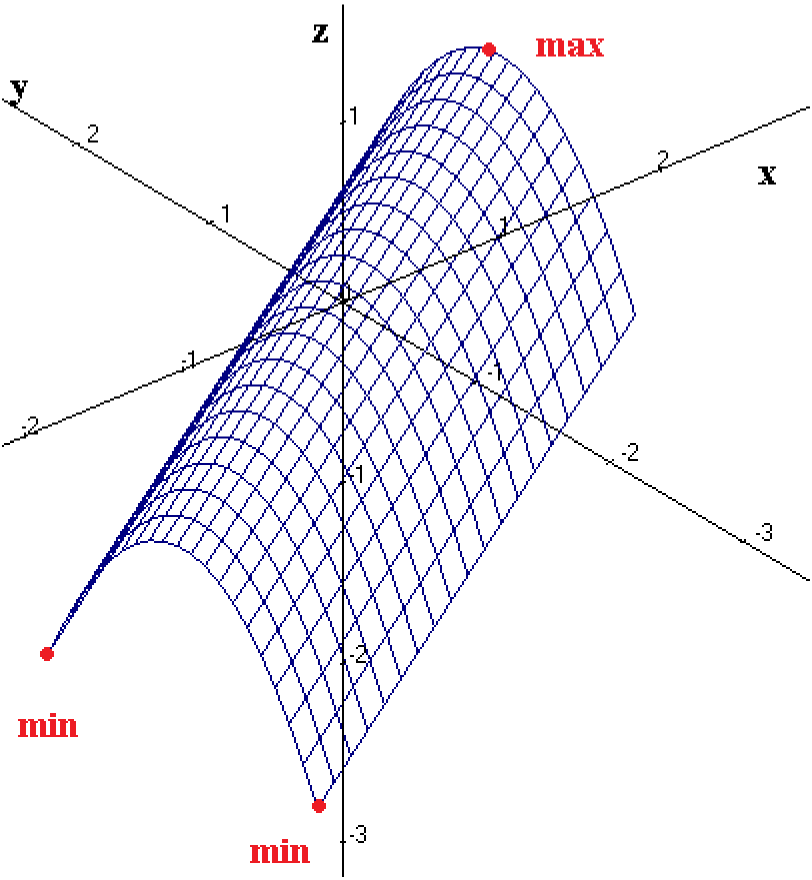
Итак, осталось проверить значение функции в точках условного экстремума на границах $(-1,0)$, $(1,0)$ и в 4 угловых точках квадрата: $(-1,-1),(1,1),(1,-1),(-1,1)$. Итого, рассмотрим значения в 6 точках:

$f(-1,0) = -1$ $\qquad f(1,0) = 1$

$f(-1,-1) = -1-1 = -2$ $\qquad f(1,1) = 1-1 = 0$

$f(1,-1) = 1-1 = 0$ $\qquad f(-1,1) = -1-1 = -2$

Наименьшее значение -2, наибольшее 1. Чертёж:



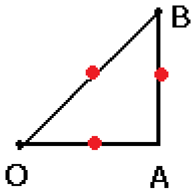
Ответ. Наименьшее $f(-1,1) = f(-1,-1) = -2$ наибольшее $f(1,0) = 1$.

Д-62. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2$ в треугольнике, вершины которого (0,0), (2,0) и (2,2).

Решение. Сначала ищем экстремумы во внутренних точках. Найдём точки, где градиент равен 0-вектору.

$\nabla f = (2x - 2, 2y - 2) = (0,0)$ при $x = 1, y = 1$.

Матрица вторых производных в данном случае $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, по главной диагонали положительные числа. Итак, точка $M(1,1)$ минимум.
Кстати, она принадлежит одной из сторон треугольника, поэтому мы её ещё раз увидим при поиске условных экстремумов на границе фигуры.
Теперь ищем условные экстремумы.
1) На стороне ОА: $y=0$. Тогда $f(x,0)=x^2-2x+2$,
$(x^2-2x+2)'=2x-2$, обращается в 0 при $x=1$, таким образом, точка условного экстремума $(1,0)$ - середина стороны ОА. Это минимум, так как 2-я производная равна +2>0.
2) На стороне АВ: $x=2$. Тогда $f(2,y)=y^2-2y+2$,
$(y^2-2y+2)'=2y-2$, обращается в 0 при $y=1$, таким образом, точка условного экстремума $(2,1)$ - середина стороны АВ. Это тоже минимум, так как 2-я производная равна +2>0.
3) На стороне ОВ: $y=x$. Тогда $f(x,x)=2x^2-4x+2$,
$(2x^2-4x+2)'=4x-4$, обращается в 0 при $x=1$, таким образом, точка условного экстремума $(1,1)$ - середина стороны ОВ. Это минимум, так как 2-я производная равна +2>0. Причём это как раз и есть ранее найденная точка глобального экстремума этой функции.



Итак, нам осталось проверить значения в 6 точках: найденных точках условного экстремума и в вершинах треуголльника.
$f(1,1)=0$, $f(1,0)=1$, $f(2,1)=1$,
$f(0,0)=2$, $f(2,2)=2$, $f(2,0)=2$.
Кстати, если выделить полный квадрат по каждой переменной, то было бы $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$, т.е. поверхность - это

эллиптический параболоид, вершина которого в точке (1,1). Этим и объясняется то, что в вершинах треугольника высота наибольшая, ведь они наиболее удалены от вершины параболоида.

Ответ. Наименьшее значение 0 в точке (1,1), наибольшее значение 2, достигается в трёх точках: (0,0), (2,0) и (2,2).

Выпуклость графика и 2-я производная.

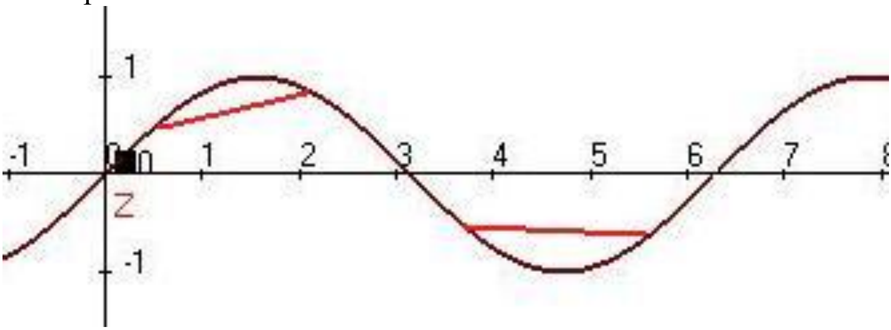
Задача 195. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз графика функции $f(x) = \sin x$.

Решение. $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$.

При $(0 + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$: $f''(x) < 0$, f выпукла вверх.

При $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$: $f''(x) > 0$, f выпукла вверх.

Точки перегиба: $x = k\pi$.



Задача 196. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз графика функции $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

Решение. Сначала, очевидно, надо найти первую производную.

$$\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Первая производная положительна, она может обратиться в 0 лишь при $x = 0$. Так как она нигде не отрицательна (ведь все степени чётные) то интервал роста не сменяется интервалом убывания, а снова продолжается рост. Таким образом, мы установили, что экстремумов нет, функция монотонно возрастает.

Теперь найдём 2-ю производную.

$$f''(x) = \left(\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}$$

Сократим по крайней мере на одну степень выражения (x^2+1).

$$\frac{(4x^3+6x)(x^2+1) - 4x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^5+10x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3} =$$

$= \dfrac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2}{(x^2+1)^3} x(3-x^2)$ выделили множитель, который заведомо больше 0, а также там видим 2 множителя, которые могут менять знак. Когда они одного знака, оба плюс или минус, тогда вторая производная больше 0, а когда разного знака, тогда меньше 0.

1) $x > 0$ на $(0,+\infty)$, $x < 0$ на $(-\infty,0)$.

2) $3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

Теперь сопоставим эти интервалы, вот на схеме жёлтым показано, на каком интервале то или иное выражение положительно, а зелёным - отрицательно:

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

x	–	–	+	+
$3-x^2$	–	+	+	–
$x(3-x^2)$	+	–	+	–

Итак, $f''(x) > 0$, если $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ и $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$.

На этих интервалах график выпуклый вниз.

$f''(x) > 0$, если $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right)$ и $x \in \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

На этих интервалах график выпуклый вверх.

Ответ. $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ и $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$ выпуклый вниз,

$x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right)$ и $x \in \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ выпуклый вверх.

Точки перегиба $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

Асимптоты.

Задача 197. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

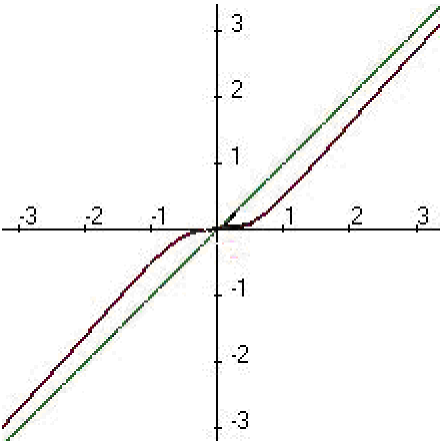
Решение. Во-первых, знаменатель не обращается в 0, поэтому точек разрыва 2-го рода нет, и нет вертикальных асимптот. Горизонтальных асимптот также нет, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}=\infty$, предел не константа С.

Ищем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^2+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^3+x}{x^2+1}\right)=$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=0$. Асимптота $y=x$. Чертёж:



Ответ. Асимптота $y=x$.

Д-63. Найти асимптоты функции $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-3)}$.

Решение. Во-первых, заметим, что

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4x+3} = 1$. То есть, здесь 2-сторонняя горизонтальная асимптота $y=1$.

Кроме того, точки разрыва 2 рода $x=1$ и $x=3$, значит, есть две вертикальные асимптоты $x=1$ и $x=3$.

Чтобы подробнее исследовать строение графика, можно найти все односторонние пределы в 1 и 3.

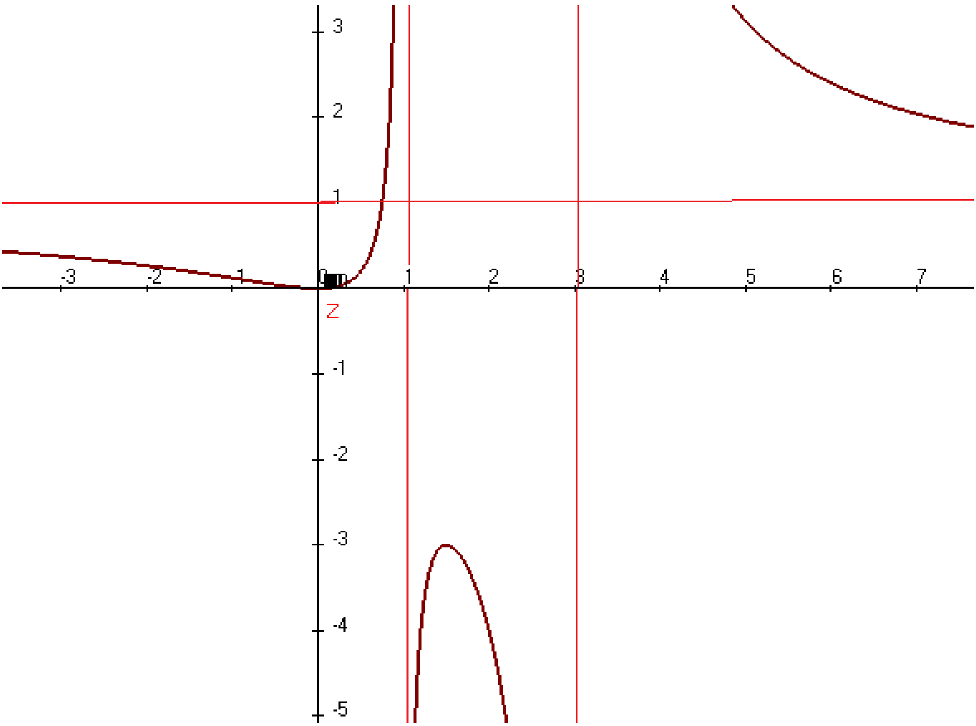
$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3+0}\frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = +\infty.$$

Ответ. Вертикальные асимптоты $x=1$ и $x=3$.

Горизонтальная асимптота $y=1$.

Чертёж:



Задача 198. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$.

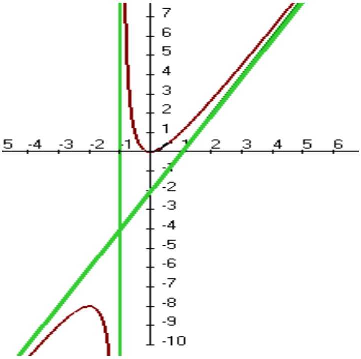
Решение. Во-первых, при $x=-1$ знаменталь обращается в 0, здесь разрыв 2 рода. То есть, вертикальная прямая $x=-1$ это вертикальная асимптота. Теперь ищем наклонные асимптоты.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+x}=2$. Причём этот результат не зависит от того, предел при $+\infty$ или $-\infty$, ведь обе старшие степени чётные. Нашли $k=2$, т.е. есть наклонная асимптота типа $y=2x+b$. теперь найдём b.

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x+1}-\dfrac{2x(x+1)}{x+1}\right)=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x+1}-\dfrac{2x^2+2x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-2x}{x+1}\right)=-2$. Итак, $b=-2$ и опять же, это независимо от $+\infty$ или $-\infty$. Значит, прямая $y=2x-2$ это двусторонняя асимптота.

Ответ. Вертикальная $x=-1$ и наклонная $2x-2$. График:



Задача 199. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Решение. Область определения: $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Здесь нет знаменателя, который мог бы обращаться в 0, поэтому вертикальных асимптот нет. Функция не ограниченная при $x \to \infty$, поэтому и горизонтальных асимптот нет, так что ищем только наклонные. Функция чётная, поэтому можем искать только при $x \to +\infty$ на правой полуплоскости, а на левой график симметричен, так что если $y = kx + b$ будет асимптотой на правой полуплоскости, то $y = -kx + b$ на левой. А вот двусторонняя асимптота здесь никак не могла бы быть, ведь график симметричен относительно вертикальной оси, т.к. функция чётная.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right)\left(\sqrt{x^2 - 1} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 - 1} + x \right)}$$

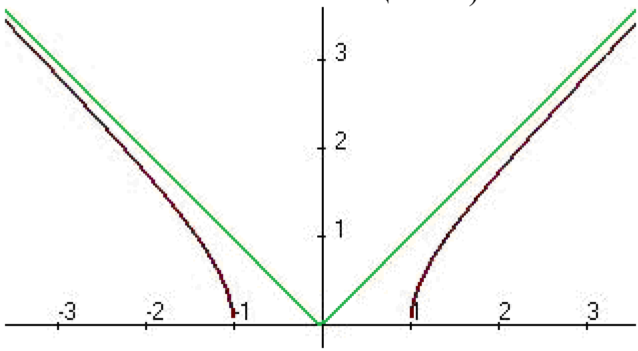
здесь умножили на сопряжённое, как в таких пределах делали раньше.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 1} + x \right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2 - 1} + x \right)} = \frac{-1}{\infty} = 0.$$

Итак, $k = 1$, $b = 0$, на правой полуплоскости асимптота $y = x$. Тогда из-за симметрии графика чётной функции на левой полуплоскости наклонная асимптота $y = -x$.

Ответ. Две односторонние асимптоты $y = x$ и $y = -x$.

График (асимптоты показаны зелёным цветом).



Задача 200. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$.

Решение. Функция не является чётной, поэтому здесь придётся при $+\infty$ и $-\infty$ искать пределы каждый отдельно.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=\sqrt{1+0}+1=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0.$$

Итак, $k=2$, $b=0$, на правой полуплоскости асимптота $y=2x$.

На левой полуплоскости:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=-\sqrt{1+0}+1=0\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-0x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$$

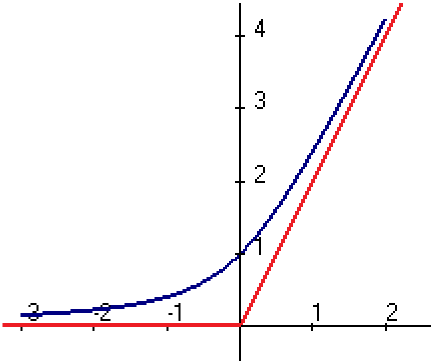
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$ но так как x отрицательно то

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+|x|\right)}=0$. Итак, на левой полуплоскости $k=0$, $b=0$.

Здесь не наклонная, а горизонтальная асимптота, $y=0$.

Ответ. На правой полуплоскости наклонная асимптота $y=2x$,
на левой горизонтальная асимптота $y=0$.

Вот график этой функции:



Задача Д-64. (На повторение формулы полной производной).

Дано: $F(x,y,z) = x^2 + yz$. Точка движется по прямой: $\{x = 1+t, y = 3t, z = 2+4t\}$. Вычислить $\dfrac{dF}{dt}$ с помощью формулы полной производной и без её использования.

Решение.

1 способ. Сведём к функции от t и вычислим для неё обычную производную.

$F(x(t), y(t), z(t)) = x^2 + yz = (1+t)^2 + 3t(2+4t) = t^2 + 2t + 1 + 12t^2 + 6t =$

$13t^2 + 8t + 1$, $\dfrac{dF}{dt} = \left(13t^2 + 8t + 1\right)' = 26t + 8$.

2 способ. По формуле полной производной:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = 2x \cdot x'(t) + z \cdot y'(t) + y \cdot z'(t) =$$

$= 2x \cdot 1 + z \cdot 3 + y \cdot 4$ а теперь уже в этом выражении выразим x, y, z через t: $2x + 3z + 4y = 2(1+t) + 3(2+4t) + 4(3t) =$

$2 + 2t + 6 + 12t + 12t = 26t + 8$.

Ответ. $26t + 8$.

Литература.

1. Л.И.Магазинников, А.Л. Магазинникова.
Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Учебное пособие.
http://edu.tusur.ru/publications/2244

2. Л.И.Магазинников, А.Л.Магазинников.
Дифференциальное исчисление. Учебное пособие.
http://edu.tusur.ru/publications/2246

Все учебные пособия кафедры математики можно найти на сайте кафедры по ссылке: http://math.tusur.ru/book.html