Министерство образования и науки

Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Часть 2. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Курс лекций

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка задачи динамического программирования 3
2. Принцип оптимальности и уравнения Бэллмана 4
3. Обратная вычислительная схема ДП 6
4. Задача о распределении средств между предприятиями 7
5. Задача о замене оборудования 18
5.1. Постановка задачи 18
5.2. Построение модели ДП для задачи о замене 19
6. Задачи для самостоятельного решения 27
7. Литература 28

1. Постановка задачи динамического программирования

Будем понимать под *операцией* любое управляемое мероприятие, направленное на достижение определенной цели. Результат операции зависит от способа ее проведения, организации и т.п. Иначе говоря, от выбора некоторых параметров. Всякий определенный выбор параметров называется *решением.*

Динамическое программирование (ДП) – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются многошаговыми.

Приведем общую постановку задачи ДП.

Рассматривается управляемый процесс, который заключается в том, что в результате некоторой операции система (объект управления) S переходит из начального состояния S_0 в состояние $\hat{S}$. Предположим, что управление в операции можно разбить на n шагов, т.е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему из начального состояния в конечное, представляет собой n пошаговых управлений.

Обозначим через X_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ управление на k-том шаге. Переменные X_k удовлетворяют некоторым ограничениям и в этом смысле называются *допустимыми.* Управление может быть числом, вектором, качественным признаком.

Пусть $X=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ - управление, переводящее систему S из начального состояния S_0 в конечное состояние $\hat{S}$. Обозначим через S_k состояние системы после k-того шага управления. Получим последовательность состояний $S_0,S_1,S_2,...,S_n=\hat{S}$:

Обозначим через Z некоторый показатель эффективности операции (доход, затраты и т.п.). Показатель рассматриваемой управляемой операции – целевая функция- зависит от начального состояния и управления:

$$Z=F\left(S_0,X\right). \qquad (1)$$

Сделаем несколько предположений:

1. Состояние S_k системы в конце k-того шага зависит только от предшествующего состояния S_{k-1} и управления X_k на k-том шаге и не зависит непосредственно от остальных

предшествующих состояний и управлений. Это требование называется отсутствием последействия. Его можно записать в виде уравнений:

$$S_k = \varphi_k\left(S_{k-1}, X_k\right), \quad k = 1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

Уравнения (2) – уравнения состояний.

2. Целевая функция (1) является аддитивной от показателя эффективности каждого шага. Обозначим показатель эффективности k-того шага через z_k:

$$z_k = f_k\left(S_{k-1}, X_k\right), \quad k = 1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

Тогда:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} f_k\left(S_{k-1}, X_k\right). \qquad (4)$$

Задача пошаговой оптимизации (задача ДП) формулируется следующим образом: определить такое допустимое управление X, переводящее систему S из начального состояния S_0 в конечное состояние $\hat{S}$, при котором целевая функция (4) принимает наибольшее (наименьшее) значение.

2. Принцип оптимальности и уравнения Бэллмана

В формулировке советских ученых принцип оптимальности Бэллмана звучит следующим образом.

Каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

Иначе говоря, управление, выбранное на любом шаге, является не локально лучшим, а лучшим с точки зрения всего процесса в целом.

Вместо исходной задачи ДП с фиксированным числом шагов n и начальным состоянием S_0 рассмотрим последовательность задач, полагая последовательно $n = 1,2,\ldots$ при различных состояниях. Будем решать их также последовательно, используя принцип оптимальности.

На каждом шаге (в любом состоянии системы S_{k-1}) решение X_k нужно выбирать, имея в виду, что этот выбор опосредованно влияет на все последующие состояния и весь дальнейший процесс управления. Но есть один шаг, последний, который для любого состояния S_{n-1} можно планировать локально-оптимально, исходя из соображений только этого шага. Будем решать для определенности задачу максимизации.

Рассмотрим n-тый шаг: S_{n-1} - состояние системы к началу n-того шага; $S_n = \hat{S}$ - конечное состояние; X_n - управление на n-том шаге; $f_n(S_{n-1}, X_n)$ - целевая функция n-того шага.

Согласно принципу оптимальности X_n нужно выбирать так, чтобы для любого S_{n-1} получить максимум целевой функции на этом шаге. Обозначим $Z_n^*(S_{n-1})$ максимум целевой функции – показателя эффективности n-того шага при условии, что к началу последнего шага система S находилась в произвольном состоянии S_{n-1}, а на последнем шаге управление было оптимальным. Величина $Z_n^*(S_{n-1})$ называется *условным максимумом* целевой функции на n-том шаге. Очевидно, что

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n). \qquad (5)$$

Максимизация ведется по всем возможным управлениям X_n.

Решение X_n, при котором достигается $Z_n^*(S_{n-1})$ также зависит от S_{n-1} и называется *условным оптимальным управлением* на n-том шаге. Оно обозначается $X_n^*(S_{n-1})$.

Решив одномерную задачу локальной оптимизации по уравнению (5), найдем для всех возможных состояний S_{n-1} две функции: $Z_n^*(S_{n-1})$ и $X_n^*(S_{n-1})$.

Рассмотрим теперь двухшаговую задачу: присоединим к последнему n-тому шагу предпоследний - $n-1$-ый. Для любых состояний S_{n-2}, произвольных управлений X_{n-1} и оптимальном управлении на следующем (последнем) шаге значение целевой функции на двух последних шагах равно:

$$f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}). \qquad (6)$$

Согласно принципу оптимальности для любых состояний S_{n-2} решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем шаге приводило бы к максимуму целевой функции на двух последних шагах. Следовательно, нужно найти максимум выражения (6) по всем допустимым управлениям X_{n-1}. Максимум этой суммы зависит от S_{n-2}, обозначается через $Z_{n-1}^*(S_{n-2})$ и называется *условным максимумом* целевой функции при оптимальном управлении на двух последних шагах. Соответствующее управление X_{n-1} на $n-1$-ом шаге обозначается $X_{n-1}^*(S_{n-2})$ и называется *условным оптимальным управлением* на $n-1$-ом шаге:

$$Z_{n-1}^*(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \{ f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}) \}. \qquad (7)$$

В результате максимизации согласно (70 вновь получаются две функции: $Z^*_{n-1}(S_{n-2})$ и $X^*_{n-1}(S_{n-2})$.

Далее решаем трехшаговую задачу: к двум последним шагам добавляем $n-2$-ой и т.д.

Обозначим через $Z^*_k(S_{k-1})$ условный максимум целевой функции, полученный при оптимальном управлении на $n-k+1$ шагах, начиная с k-того до конца при условии, что к началу k-того шага система находилась в состоянии S_{k-1}. В соответствии с (4) эта функция равна:

$$Z^*_k(S_{k-1}) = \max_{\{X_k,\ldots,X_n\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i).$$

Тогда $Z^*_{k+1}(S_k) = \max\limits_{\{X_{л+1},\ldots,X_n\}} \sum\limits_{i=k+1}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i).$

Целевая функция на $n-k+1$ последних шагах при произвольном управлении X_k на k-том шаге и оптимальном управлении на последующих $n-k$ шагах равна:

$$f_k(S_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(S_k).$$

Согласно принципу оптимальности X_k выбирается из условия:

$$Z^*_k(S_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}\{f_k(S_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(S_k)\},\ k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1 \qquad (8)$$

Управление X_k на k-том шаге, при котором достигается максимум в (8), обозначается $X^*_k(S_{k-1})$ и называется *условным оптимальным управлением* на k-том шаге. При этом в правую часть (8) следует подставить (2).

Уравнения (8) называются уравнениями Бэллмана. Процесс решения уравнений (5) – (8) называется *условной оптимизацией*.

В результате условной оптимизации получаются две последовательности функций:

$Z^*_n(S_{n-1}), Z^*_{n-1}(S_{n-2}), \ldots, Z^*_2(S_1), Z^*_1(S_0)$ - условные максимумы целевой функции;

$X^*_n(S_{n-1}), X^*_{n-1}(S_{n-2}), \ldots, X^*_2(S_1), X^*_1(S_0)$ - условные оптимальные управления.

Используя эти две последовательности, можно найти решения задачи ДП при данных n и S_0.

Описанная вычислительная схема носит название *обратной*, так как процесс начинается с последнего шага.

3. Обратная вычислительная схема ДП

1. Выбрать способ деления процесса управления на шаги.

2. Определить параметры состояния S_k и переменные управления X_k на каждом шаге.

3. Записать уравнения состояний.

4. Ввести целевые функции каждого шага и суммарную целевую функцию.

5. Ввести в рассмотрение условные максимумы $Z_k^*(S_{k-1})$ и условные оптимальные управления $X_k^*(S_{k-1})$, $k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$.

6. Записать уравнения Бэллмана.

7. Решить последовательно уравнения Бэллмана и получить две последовательности функций: $Z_n^*(S_{n-1}), Z_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, Z_2^*(S_1), Z_1^*(S_0)$ и $X_n^*(S_{n-1}), X_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, X_2^*(S_1), X_1^*(S_0)$

8. После условной оптимизации получают решение для конкретного начального состояния S_0:

а) $Z_{max} = Z_1^*(S_0)$ и

б) по цепочке $S_0 \to X_1^* \to S_1^* \to X_2^* \to S_2^* \to \ldots \to S_{n-1}^* \to X_n^* \to S_n^*$ оптимальное управление $X^*(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$.

4. Задача о распределении средств между предприятиями

Планируется деятельность N промышленных предприятий на очередной год. Необходимо распределить денежные средства в размере R у.е между предприятиями $P_1, P_2, \ldots, P_N$. Вложение средств в размере x у.е. в предприятие P_k приносит доход $f_k(x), k = \overline{1, N}$.

Предполагается, что

1) прибыль $f_k(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия;

2) прибыль от каждого предприятия выражается в одних условных единицах;

3) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Необходимо так спланировать вложение средств, чтобы суммарный доход был максимальным.

Построим математическую модель. Рассмотрим N-шаговый процесс, в котором k-тый шаг соответствует выделению средств k-тому предприятию.

Состояние перед k-тым шагом S_{k-1} - это количество нераспределенных средств; $S_0 = R$.

Управление на k-том шаге X_k - это количество средств, выделяемых k-тому предприятию.

Уравнение состояния: $S_k = S_{k-1} - X_k$, $k = 1, N$.

Управление на k-том шаге удовлетворяет ограничениям: $0 \le X_k \le S_{k-1}$, $k = 1, N$.

Эти неравенства определяют для каждого шага допустимое управление. При фиксированном допустимом управлении $X_1, X_2, ..., X_N$ суммарный доход составляет:

$$Z = \sum_{k=1}^{N} f_k(X_k).$$

Запишем уравнение Бэллмана:

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{0 \le X_k \le S_{k-1}} \{f_k(X_k) + Z_{k+1}^*(S_k)\}.$$

Положим $k = N$.

$$Z_N^*(S_{N-1}) = \max_{0 \le X_N \le S} f_N(X_N).$$

$X_N^*(S_{N-1}) = S_{N-1}$ - выделяются все оставшиеся к последнему шагу средства. Получим условный максимум доходов $Z_N^*(S_{N-1}) = f_N(S_{N-1})$ и условное оптимальное управление $X_N^*(S_{N-1}) = S_{N-1}$.

Пусть теперь $k = N-1$.

$$Z_{N-1}^*(S_{N-2}) = \max_{0 \le X_{N-1} \le S_{N-2}} \{f_{N-1}(X_{N-1}) + Z_N^*(S_{N-1})\}.$$

В соответствии с уравнениями состояний: $S_{N-1} = S_{N-2} - X_{N-1}$.

Тогда $Z_{N-1}^*(S_{N-2}) = \max_{0 \le X_{N-1} \le S_{N-2}} \{f_{N-1}(X_{N-1}) + Z_N^*(S_{N-2} - X_{N-1})\}.$

В фигурных скобках стоят известные функции, максимизация проходит по одной переменной X_{N-1}. В результате находим условное оптимальное управление $X_{N-1}^*(S_{N-2})$ и условный максимум доходов $Z_{N-1}^*(S_{N-2})$.

Затем полагаем $k = N-2$ и так далее до $k = 1$.

После решения задачи для $k = 1$ имеем две последовательности функций:

условные оптимальные доходы $Z_N^*(S_{N-1}), Z_{N-1}^*(S_{N-2}), ..., Z_2^*(S_1), Z_1^*(S_0)$ и условные оптимальные управления $X_N^*(S_{N-1}), X_{N-1}^*(S_{N-2}), ..., X_2^*(S_1), X_1^*(S_0)$.

Таким образом, завершен первый этап вычислительного процесса – этап условной оптимизации. Переходим ко второму этапу – этапу безусловной оптимизации. На этом этапе сначала, зная $S_0 = R$, вычисляем $Z_1^*(R) = Z_{max}$ - максимальный доход, соответствующий оптимальному распределению вложений. Затем вычисляем:

$X_1^* = X_1^*(R),\ S_1^* = R - X_1^*,$

$X_2^* = X_2^*(S_1^*),\ S_2^* = S_1^* - X_2^*,$

………………………………,

$X_N^* = X_N^*(S_{N-1}^*),\ S_N^* = S_{N-1}^* - X_N^*.$

В результате имеем максимальный доход и соответствующее распределение средств.

Числовой пример.

Требуется распределить денежные средства в размере 40 у.е между четырьмя предприятиями так, чтобы суммарный доход от инвестиций был максимальным. Денежные средства выдаются порциями по 10 у.е., при этом доход каждого предприятия f от вложения соответствующей суммы X определен в таблице (таблица одношаговых доходов).

k ***X***	**1**	**2**	**3**
10	5	3	2
20	6	4	6
30	7	6	7
40	8	7	8

Решение.

В данном случае $R = 40$ у.е., $N = 3$, $k = \overline{1,3}$. Возможные значения для управления совпадают с величиной порций -10, 20, 30, 40 (у.е).

Процесс решения удобно представить в виде следующей таблицы.

			k=3			*k*=2			*k*=1		
S_{k-1}	X_k	S_k	f_k	$Z_{k+1}^*(X_k)$		f_k	$Z_{k+1}^*(X_k)$		f_k	$Z_{k+1}^*(X_k)$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	0	0	0	2	2	0	3	3
	10	0	2	0	2	3	0	3	5	0	5
20	0	20	0	0	0	0	6	6	0	6	6
	10	10	2	0	2	3	2	5	5	3	8
	20	0	6	0	6	4	0	4	6	0	6
30	0	30	0	0	0	0	7	7	0	9	9
	10	20	2	0	2	3	6	9	5	6	11
	20	10	6	0	6	4	2	6	6	2	8
	30	0	7	0	7	6	0	6	7	0	7
40	0	40	0	0	0	0	8	8	0	10	10
	10	30	2	0	2	3	7	10	5	9	14
	20	20	6	0	6	4	6	10	6	6	12
	30	10	7	0	7	6	2	8	7	3	10
	40	0	8	0	8	7	0	7	8	0	8

В таблице фактически приведены все возможные варианты развития событий.

В первом столбце указаны возможное количество средств перед распределением. Во втором указано количество средств, которое может быть выделено. В третьем столбце указано соответствующее количество оставшихся средств.

Затем идут три группы столбцов, каждая группа описывает процесс выделения средств предприятию с номером k. Каждая такая группа состоит из трех столбцов. В первом указан одношаговый доход (из исходной таблицы), во втором – максимальный доход от всех последующих вложений, в третьем – сумма элементов этих двух столбцов.

Рассмотрим процесс формирования таблицы.

Первая строка является нулевой, что соответствует вложению нулевого количества средств в предприятия. Очевидно, что в этом случае доходы будут нулевыми.

			k=3			k=2			k=1		
S_{k-1}	X_k	S_k	f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

Рассмотрим дополнительно к первой две следующие строки – **вторую и третью**.

			k=3			k=2			k=1		
S_{k-1}	X_k	S_k	f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	*0*	*10*	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*2*	*0*	*3*	*3*
	10	*0*	*2*	*0*	*2*	*3*	*0*	*3*	*5*	*0*	*5*

Число 10 в первом столбце означает, что такое количество средств имеется перед распределением. Из этого количества можно выделить 10 или 0 (второй столбец), в результате останется соответственно 0 или 10 (третий столбец). Предположим, что это количество (10 у.е.) имеется перед выделением средств третьему предприятию (k=3). Если третьему предприятию будет выделено 0 у.е., то одношаговый доход составит 0 у.е., если третьему предприятию будет выделено 10 у.е., то это принесет доход 2 у.е (из исходной таблицы одношаговых доходов). Это отражено в четвертом столбце. В пятом столбце в обеих строках стоит число 0: оптимальный доход от всех последующих шагов равен 0, поскольку последующих шагов нет. В шестом столбце стоит сумма элементов четвертого и пятого столбцов. Среди элементов пятого столбца выбираем максимальное значение – максимальный доход от данного и всех следующих шагов. Это число 2 – оно выделено красным.

Переходим к шагу 2 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (10 у.е.) имеется перед распределением средств второму предприятию. По-прежнему работаем со

второй и третьей строками. Если из 10 у.е второму предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (седьмой столбец). Если из 10 у.е. второму предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 3 у. е. Если из 10 у.е. второму предприятию выделяют 0, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 10 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 2 у.е. Это число из шестого столбца переносят в восьмой столбец. Если из 10 у.е. второму выделяют 10, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 0 у.е. Поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 0 в шестом столбце **первой** строки. В девятый столбец записываем сумму элементов седьмого и восьмого столбцов. В соответствии с алгоритмом из элементов девятого столбца выбираем максимум – это значение 3 (помечено красным).

Переходим к шагу 1 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (10 у.е.) имеется перед распределением средств первому предприятию. По-прежнему работаем со **второй и третьей** строками. Если из 10 у.е первому предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (десятый столбец). Если из 10 у.е. первому предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 5 у. е. Если из 10 у.е. первому предприятию выделяют 0, то перед выделением средств второму и третьему предприятиям в наличии имеется 10 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 3 у.е. Это число из девятого столбца переносим в одиннадцатый столбец. Если из 10 у.е. первому предприятию выделяют 10, то перед выделением средств второму, а затем третьему предприятиям в наличии имеется 0 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов находим в девятом столбце **первой** строки – 0 у.е. В двенадцатом столбце получены суммы элементов девятого и десятого столбцов. Среди элементов двенадцатого столбца находим максимальный – это значение 5 (помечено красным).

Рассмотрим дополнительно **четвертую, пятую и шестую** строки.

			k=3			k=2			k=1		
S_{k-1}	X_k	S_k	f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	0	0	0	2	2	0	3	3
	10	0	2	0	2	3	0	3	5	0	5
20	*0*	*20*	*0*	*0*	*0*	*0*	*6*	*6*	*0*	*6*	*6*
	10	*10*	*2*	*0*	*2*	*3*	*2*	*5*	*5*	*3*	*8*
	20	*0*	*6*	*0*	*6*	*4*	*0*	*4*	*6*	*0*	*6*

Число 20 в первом столбце означает, что такое количество средств имеется для распределения. Из этого количества могут быть выделены 0, 10 или 20 у.е. (второй столбец), в результате останется 20, 10 или 0 у.е. (третий столбец). Предположим, что данное количество (20 у.е.) имеется перед выделением средств третьему предприятию (k=3). Если третьему предприятию будет выделено 0 у.е., то одношаговый доход составит 0 у.е., если третьему предприятию будет выделено 10 у.е., то это принесет доход 2 у.е (из исходной таблицы одношаговых доходов), если третьему предприятию будет выделено 20 у.е., то это принесет доход 6 у.е (таблица одношаговых доходов). Это отражено в четвертом столбце. В пятом столбце во всех рассматриваемых строках стоит число 0: оптимальный доход от всех последующих шагов равен 0, поскольку последующих шагов нет. В шестом столбце стоит сумма элементов четвертого и пятого столбцов. Среди элементов пятого столбца выбираем максимальное значение – максимальный доход от данного и всех следующих шагов. Это число 6 – оно выделено красным.

Переходим к шагу 2 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (20 у.е.) имеется перед распределением средств второму предприятию. По-прежнему работаем с **четвертой, пятой и шестой** строками. Если из 20 у.е второму предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (седьмой столбец). Если из 20 у.е. второму предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 3 у. е. Если из 20 у.е. второму предприятию выделяется 20, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 4 у. е. Если из 20 у.е. второму предприятию выделяют 0, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 20 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 6 у.е. Это число из шестого столбца переносят в восьмой столбец. Если из 20 у.е. второму выделяют 10, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 10 у.е. Поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 2 в шестом столбце **третьей** строки. Если из 20 у.е. второму выделяют 20, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии остается 0 у.е. . Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 0 у.е. (шестой столбец в **первой** строке). В девятый столбец записываем сумму элементов седьмого и восьмого столбцов. В соответствии с алгоритмом из элементов девятого столбца выбираем максимум – это значение 6 (помечено красным).

Переходим к шагу 1 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (20 у.е.) имеется перед распределением средств первому предприятию. По-прежнему работаем с **четвертой, пятой и шестой** строками. Если из 20 у.е первому предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (десятый столбец). Если из 20 у.е. первому предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 5 у. е. Если из 20 у.е. первому предприятию выделяют 20, то это приносит доход 6 у.е. (таблица одношаговых доходов). Если из 20 у.е. первому предприятию выделяют 0, то перед выделением средств второму и третьему предприятиям в наличии имеется 20 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 6 у.е. Это число из девятого столбца переносим в одиннадцатый столбец. Если из 20 у.е. первому предприятию выделяют 10, то перед выделением средств второму, а затем третьему предприятиям в наличии имеется 10 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 3 у.е., которое находится в девятом столбце **третьей строки**. Если из 20 у.е. первому предприятию выделяют 20, то к дальнейшему распределению (второму и третьему предприятиям) остается 0. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов равен 0 – девятый столбец **первой** строки.

В двенадцатом столбце получены суммы элементов девятого и десятого столбцов. Среди элементов двенадцатого столбца находим максимальный – это значение 8 (помечено красным).

Рассмотрим дополнительно строки **с седьмой по десятую**.

			k=3			k=2			k=1		
S_{k-1}	X_k	S_k	f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	0	0	0	2	2	0	3	3
	10	0	2	0	2	3	0	3	5	0	5
20	0	20	0	0	0	0	6	6	0	6	6
	10	10	2	0	2	3	2	5	5	3	8
	20	0	6	0	6	4	0	4	6	0	6
30	*0*	*30*	*0*	*0*	*0*	*0*	*7*	*7*	*0*	*9*	*9*
	10	*20*	*2*	*0*	*2*	*3*	*6*	*9*	*5*	*6*	*11*
	20	*10*	*6*	*0*	*6*	*4*	*2*	*6*	*6*	*3*	*9*
	30	*0*	*7*	*0*	*7*	*6*	*0*	*6*	*7*	*0*	*7*

Число 30 в первом столбце означает, что такое количество средств имеется для распределения. Из этого количества могут быть выделены 0, 10, 20 или 30 у.е. (второй столбец), в результате останется 30, 20, 10 или 0 у.е. (третий столбец). Предположим, что данное количество (30 у.е.) имеется перед выделением средств третьему предприятию (k=3). Если третьему предприятию будет выделено 0 у.е., то одношаговый доход составит 0 у.е., если третьему предприятию будет выделено 10 у.е., то это принесет доход 2 у.е (из исходной таблицы одношаговых доходов), если третьему предприятию будет выделено 20 у.е., то это принесет доход 6 у.е (таблица одношаговых доходов), если третьему предприятию будет выделено 30 у.е., то это принесет доход 7 у.е. (таблица одношаговых

доходов). Это отражено в четвертом столбце. В пятом столбце во всех рассматриваемых строках стоит по-прежнему число 0: оптимальный доход от всех последующих шагов равен 0, поскольку последующих шагов нет.

Переходим к шагу 2 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (30 у.е.) имеется перед распределением средств второму предприятию. По-прежнему работаем со строками **с седьмой по десятую**. Если из 30 у.е. второму предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (седьмой столбец). Если из 30 у.е. второму предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 3 у. е. Если из 30 у.е. второму предприятию выделяется 20, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 4 у. е. Если из 30 у.е. второму предприятию выделяют 30, то это приносит доход 6 у.е.

Если из 30 у.е. второму предприятию выделяют 0, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 30 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 7 у.е. Это число из шестого столбца переносят в восьмой столбец. Если из 30 у.е. второму предприятию выделяют 10, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 20 у.е. Поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 6 в шестом столбце **шестой** строки. Если из 30 у.е. второму предприятию выделяют 20, то к распределению третьему предприятию остается 10. Поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 2 в шестом столбце **третьей** строки. Если из 30 у.е. второму предприятию выделяют 30, то для распределения третьему предприятию остается 0 у.е., поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 0 в шестом столбце **первой** строки. В девятый столбец записываем сумму элементов седьмого и восьмого столбцов. В соответствии с алгоритмом из элементов девятого столбца выбираем максимум – это значение 9 (помечено красным).

Переходим к шагу 1 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (30 у.е.) имеется перед распределением средств первому предприятию. По-прежнему работаем со строками **с седьмой по десятую**. Если из 30 у.е. первому предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (десятый столбец). Если из 30 у.е. первому предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 5 у. е. Если из 30 у.е. первому предприятию выделяют 20, то это приносит доход 6 у.е. (таблица одношаговых доходов). Если из 30 у.е. первому предприятию выделяют 30, то это приносит доход 7 у.е. (таблица одношаговых доходов). Если из 30 у.е. первому предприятию выделяют 0, то перед выделением средств второму и третьему предприятиям в наличии имеется 30 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 9 у.е.

Это число из девятого столбца переносим в одиннадцатый столбец. Если из 30 у.е. первому предприятию выделяют 10, то перед выделением средств второму, а затем третьему предприятиям в наличии имеется 20 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 6 у.е., которое находится в девятом столбце **четвертой строки**. Если из 30 у.е. первому предприятию выделяют 20, то к дальнейшему распределению (второму и третьему предприятиям) остается 10. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов равен 3 – девятый столбец **третьей** строки. Если из 30 у.е. первому предприятию выделяют 30, то к распределению второму и третьему остается 0 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов равен 0 – девятый столбец **первой** строки.

В двенадцатом столбце получены суммы элементов девятого и десятого столбцов. Среди элементов двенадцатого столбца находим максимальный – это значение 11 (помечено красным).

Рассмотрим последнюю группу строк – **с одиннадцатой по пятнадцатую**.

			k=3			k=2			k=1		
S_{k-1}	X_k	S_k	f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$		f_k	$Z^*_{k+1}(X_k)$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	0	0	0	2	2	0	3	3
	10	0	2	0	2	3	0	3	5	0	5
20	0	20	0	0	0	0	6	6	0	6	6
	10	10	2	0	2	3	2	5	5	3	8
	20	0	6	0	6	4	0	4	6	0	6
30	0	30	0	0	0	0	7	7	0	9	9
	10	20	2	0	2	3	6	9	5	6	11
	20	10	6	0	6	4	2	6	6	2	8
	30	0	7	0	7	6	0	6	7	0	7
40	*0*	*40*	*0*	*0*	*0*	*0*	*8*	*8*	*0*	*10*	*10*
	10	*30*	*2*	*0*	*2*	*3*	*7*	*10*	*5*	*9*	*14*
	20	*20*	*6*	*0*	*6*	*4*	*6*	*10*	*6*	*6*	*12*
	30	*10*	*7*	*0*	*7*	*6*	*2*	*8*	*7*	*3*	*10*
	40	*0*	*8*	*0*	*8*	*7*	*0*	*7*	*8*	*0*	*8*

Число 40 в первом столбце означает, что такое количество средств имеется для распределения. Из этого количества могут быть выделены 0, 10, 20, 30 или 40 у.е. (второй столбец), в результате останется 40, 30, 20, 10 или 0 у.е. (третий столбец). Предположим, что данное количество (40 у.е.) имеется перед выделением средств третьему предприятию (k=3). Если третьему предприятию будет выделено 0 у.е., то одношаговый доход составит 0 у.е., если третьему предприятию будет выделено 10 у.е., то это принесет доход 2 у.е. (из исходной таблицы одношаговых доходов), если третьему предприятию будет выделено 20 у.е., то это принесет доход 6 у.е. (таблица одношаговых доходов), если третьему

предприятию будет выделено 30 у.е., то это принесет доход 7 у.е. (таблица одношаговых доходов). Если третьему предприятию выделяют 40 у.е., то это принесет доход 8 у.е. (таблица одношаговых доходов). Это отражено в четвертом столбце. В пятом столбце во всех рассматриваемых строках стоит по-прежнему число 0: оптимальный доход от всех последующих шагов равен 0, поскольку последующих шагов нет. Шестой столбец – это сумма элементов четвертого и пятого столбцов.

Переходим к шагу 2 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (40 у.е.) имеется перед распределением средств второму предприятию. По-прежнему работаем со строками **с одиннадцатой по пятнадцатую**. Если из 40 у.е второму предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (седьмой столбец). Если из 40 у.е. второму предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 3 у. е. Если из 40 у.е. второму предприятию выделяется 20, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 4 у. е. Если из 40 у.е. второму предприятию выделяют 30, то это приносит доход 6 у.е. Если второму предприятию выделяют 40 у.е., то это принесет доход 7 у.е. (одношаговый доход).

Если из 40 у.е. второму предприятию выделяют 0, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 40 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 8 у.е. Это число из шестого столбца переносят в восьмой столбец. Если из 40 у.е. второму предприятию выделяют 10, то перед выделением средств третьему предприятию в наличии имеется 30 у.е. Поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 7 в шестом столбце **десятой** строки и заносим его в восьмой столбец. Если из 40 у.е. второму предприятию выделяют 20, то к распределению третьему предприятию остается 20. Поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 6 в шестом столбце **шестой** строки и заносим его в восьмой столбец. Если из 40 у.е. второму предприятию выделяют 30, то для распределения третьему предприятию остается 10, поэтому в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 2 в шестом столбце **третьей** строки. Если из 40 у.е. второму предприятию выделяют 40, то для распределения третьему предприятию остается в качестве максимального дохода от всех следующих шагов выбираем 0 в шестом столбце **первой** строки.

В девятый столбец записываем сумму элементов седьмого и восьмого столбцов. В соответствии с алгоритмом из элементов девятого столбца выбираем максимум – это значение 10 (помечено красным). Заметим, что таких значений оказалось два.

Переходим к шагу 1 – предполагаем, что рассматриваемое количество средств (40 у.е.) имеется перед распределением средств первому предприятию. По-прежнему работаем со строками **с одиннадцатой по пятнадцатую**. Если из 40 у.е. первому предприятию выделяется 0, то это приносит доход 0 (десятый столбец). Если из 40 у.е. первому предприятию выделяется 10, то в соответствии с исходной таблицей одношаговых доходов это приносит доход 5 у. е. Если из 40 у.е. первому предприятию выделяют 20, то это приносит доход 6 у.е. (таблица одношаговых доходов). Если из 40 у.е. первому предприятию выделяют 30, то это приносит доход 7 у.е. (таблица одношаговых доходов). Если первому предприятию выделяют 40 у.е., то это принесет доход 8 у.е. (одношаговый доход). Если из 40 у.е. первому предприятию выделяют 0, то перед выделением средств второму и третьему предприятиям в наличии имеется 40 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 10 у.е. Это число из девятого столбца переносим в одиннадцатый столбец. Если из 40 у.е. первому предприятию выделяют 10, то перед выделением средств второму, а затем третьему предприятиям в наличии имеется 30 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов составляет 9 у.е., которое находится в девятом столбце **восьмой** строки. Если из 40 у.е. первому предприятию выделяют 20, то к дальнейшему распределению (второму и третьему предприятиям) остается 20. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов равен 6 у.е. – девятый столбец **четвертой** строки. Если из 40 у.е. первому предприятию выделяют 30, то к распределению второму и третьему остается 10 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов равен 3 у.е. – девятый столбец **третьей** строки. Если из 40 у.е. первому предприятию выделяют 40, то к распределению второму и третьему остается 0 у.е. Поэтому максимальный доход от всех следующих шагов равен 0 у.е. – девятый столбец **первой** строки.

В двенадцатом столбце получены суммы элементов девятого и десятого столбцов. Среди элементов двенадцатого столбца находим максимальный – это значение 14 у.е. (помечено красным).

Значение 14 у.е. представляет собой **суммарный максимальный** доход. Определив его, мы закончили этап условной оптимизации. Теперь проводим безусловную оптимизацию с целью определения оптимального управления.

Итак, максимальное значение 14 соответствует тому, что мы должны выделить 10 у.е. первому предприятию. Т.е. оптимальное управление $X_1^* = 10$ у.е.

В результате перед распределением второму предприятию в наличии имеется 30 у.е. Поэтому ищем максимальное значение в группе строк с седьмой по десятую в девятом столбце. Это значение 9 у.е. Оно соответствует выделению второму предприятию 10 у.е. Т.е. оптимальное управление $X_2^* = 10$ у.е.

В результате перед распределением третьему предприятию остается 20 у.е. Поэтому ищем максимальное значение в группе строк с четвертой по шестую в шестом столбце. Это значение 6 у.е. Оно соответствует выделению третьему предприятию 20 у.е. Т.е. оптимальное управление $X_3^* = 20$ у.е.

Подводим итог. Максимальный суммарный доход от вложения 40 у.е. в три предприятия составляет $Z^* = 14$ у.е. Он достигается в результате вложения 10 у.е. в первое предприятие, 10 у.е. – во второе предприятие, 20 у.е. – в третье предприятие.

5. Задача о замене оборудования

5.1 Постановка задачи

Одной из важных экономических проблем, с которыми приходится встречаться на практике, является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, производственных зданий, агрегатов и т.д. Другими словами, при замене старого оборудования на новое.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, а вместе с тем снижаются производительность и ликвидная стоимость.

Оптимальная стратегия замены оборудования (ЗО) состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует максимизировать, либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Условимся считать, что решение о ЗО принимаются периодически в начале каждого промежутка, на которые разбит плановый период. Предположим также, что оборудование может быть использовано неограниченно долго, если тратить достаточные суммы на его ремонт и содержание.

Основной характеристикой оборудования является его возраст, от которого зависят эксплуатационные расходы, затраты на производство, производительность и ликвидная стоимость. Если учитывать технический прогресс, то эти показатели изменяются не только при замене старого оборудования новым с новыми технико-экономическими характеристиками, но и новым того же типа, еще не использованным. В последнем случае старение вызвано моральным износом.

Метод ДП обеспечивает единый подход к решению всех видов задач о замене.

Рассмотри процесс ЗО как n-шаговый, разбив весь плановый период на n промежутков. Так как в начале каждого из этих промежутков принимается решение либо о сохранении оборудования, либо о его замене на новое, то управление на k-том шаге $\left(k = \overline{1, n}\right)$ содержит всего две альтернативные переменные. Обозначим через X^C решение, состоящее в сохранении старого оборудования, а через $X^З$ – решение, состоящее в замене старого оборудования новым. Функциональные уравнения, благодаря наличию двух альтернативных управлений на каждом шаге, содержит лишь две величины: одна выражает условную прибыль (условные затраты) при управлении X^C, а другая – тот же показатель при управлении $X^З$. Условная оптимизация на каждом шаге состоит в вычислении двух величин и выборе наибольшей (наименьшей) из них.

5.2 Построение модели ДП для задачи о замене

Рассмотрим две модели ДП для задачи о замене.

Задача 1. Определить оптимальные сроки замены оборудования в течение N лет, при которых прибыль от эксплуатации максимальна, если известны:

- P – начальная стоимость;
- $f(t)$ – стоимость производимой продукции на оборудовании возраста t лет;
- $r(t)$ – ежегодные затраты на эксплуатацию оборудования возраста t лет;
- $\varphi(t)$ – ликвидная стоимость оборудования возраста t лет.

Рассмотрим N-шаговый процесс, считая k-тым шагом номер k-того года от начала эксплуатации $\left(k = \overline{1, N}\right)$. Управление на каждом шаге выбирается из двух возможных решений: X^C – сохранить, $X^З$ – заменить.

Будем считать, что в начале планового периода возраст оборудования составляет t_0 лет.

Состояние S_{k-1} в начале k-того шага характеризуется одним параметром $S_{k-1} = t$ – возрастом оборудования. Для k-того шага параметр t может принимать значения: $0 \le t \le k-1$.

Если в начале k-того шага система находилась в состоянии $S_{k-1} = t$, то под влиянием управления X^C в конце k-того шага она перейдет в состояние $S_{k-1} = t + 1$. Таким образом, возраст оборудования увеличится на один год. Под влиянием управления $X^З$, принятом на k-том шаге, система перейдет в состояние $S_k = 1$: так как замену произвели в начале года, то к концу k-того года возраст нового оборудования составит один год.

Уравнение состояния для данного процесса имеет вид:

$$S_k = \begin{cases} S_{k-1} + 1 \text{ при } & X_k = X^C \\ 1 \text{ при } & X_k = X^З \end{cases} \qquad (9).$$

Определим прибыль на k-том шаге (показатель эффективности k-того шага), соответствующую каждому из альтернативных управлений.

Выбирая на k-том шаге управление $X_k = X^C$ мы сможем произвести продукцию стоимостью $f(t)$ на старом оборудовании, что потребует затрат $r(t)$, поэтому прибыль составит:

$$Z_k^C = f(t) - r(t).$$

При управлении $X_k = X^З$ получим доход $\varphi(t)$ от продажи старого оборудования (ликвидационная стоимость) и доход $f(0)$ от произведенной на новом оборудовании продукции, затратив P на приобретение нового оборудования и $r(0)$ на содержание нового оборудования:

$$Z_k^З = \varphi(t) + f(0) - P - r(0).$$

Построим обратную вычислительную схему решения задачи методом ДП.

Обозначим через $Z_k^*(t)$ условную максимальную прибыль, полученную за $N - k + 1$ шагов использования оборудования с k-того по N-тый шаг, если к k-тому шагу возраст оборудования составлял $S_{k-1} = t$ лет при условии, что был выбран оптимальный режим эксплуатации. Соответствующее условное оптимальное управление на k-том шаге обозначим $X_k^*(t)$.

Условный максимальный доход за последний N-тый промежуток составит:

$$Z_N^*(t) = max \begin{cases} f(t) - r(t) \text{ при } X_N = X^C \\ \varphi(t) + f(0) - P - r(0) \text{ при } X_N = X^З \end{cases} \qquad (10).$$

Сравнивая эти две величины для всех возможных значений $t < N$, получим набор значений $Z_N^*(t)$ и $X_N^*(t)$.

Предположим, что для всех значений $S_k = t$ известна максимальная прибыль, полученная за $N - k$ шагов: с k-того по N-тый. Поэтому основные рекуррентные соотношения можно записать в виде:

$$Z_k^*(t) = max \begin{cases} f(t) - r(t) + Z_{k+1}^*(t+1) \text{ при } X_k = X^C \\ \varphi(t) + f(0) - P - r(0) + Z_{k+1}^*(1) \text{ при } X_k = X^З \end{cases} \qquad (11)\ .$$

В последнем соотношении величина $Z_{k+1}^*(1)$ – условная максимальная прибыль, полученная за $N - k$ шагов, если к началу $k + 1$-ого шага система находилась в состоянии $S_k = 1$.

Процесс условной оптимизации на каждом шаге, начиная с N-того, сводится к сравнению двух величин в (10) и (11) и выбору наибольшей из них. Результатом условной оптимизации являются, как обычно, две последовательности функций: $Z_k^*(t)$ и $X_k^*(t)$.

На этапе безусловной оптимизации для $S_0 = t_0$ (возраст оборудования в начале процесса) получаем $Z_{max} = Z_1^*(t_0)$. Затем по цепочке: $X_1^* = X_1^*(t_0)$; из (9) находим $S_1^* = t_1$; $X_2^* = X_2(t_1)$ и т.д.

Замечание. В задаче 1 не рассматривается вопрос о том, что происходит с оборудованием после N лет его эксплуатации. Можно предположить, что после N лет использования оборудование продают, а ликвидную стоимость присоединяют к общей прибыли. В этом случае уравнения (10) принимают вид:

$$Z_N^*(t) = max\begin{cases} f(t) - r(t) + \varphi(t+1) & \text{при } X_N = X^C \\ \varphi(t) + f(0) - P - r(0) + \varphi(1) & \text{при } X_N = X^З \end{cases}.$$

Задача 2. В задаче 1 предположим, что ежегодные затраты на эксплуатацию, ликвидная и начальная стоимость зависят не только от возраста оборудования t, но и от времени, прошедшего с начала процесса.

Пусть $r_k(t)$ – затраты на эксплуатацию в течение k-того года, если со времени последней замены прошло t лет; $\varphi_k(t)$ – ликвидная стоимость оборудования возраста t лет, если оно продается в начале k-того года.

Требуется определить оптимальные сроки замены старого оборудования новым в течение N лет с тем, чтобы минимизировать суммарные затраты на его содержание.

Показатель эффективности в данном случае – суммарные затраты на эксплуатацию оборудования. Затраты на k-том шаге, как и прежде, зависят от выбранного управления. При управлении $X_k = X^C$ эти затраты равны $Z_k^C = r_k(t)$, а при управлении $X_k = X^З$ составят:

$$Z_k^З = -\varphi_k(t) + P_k + r_k(0)\ .$$

Пусть $Z_k^*(t)$ – условные минимальные затраты за $N - k + 1$ шагов (с k-того по N-тый), если к началу k-того шага возраст оборудования составлял t лет, при условии, что был выбран оптимальный режим эксплуатации. Соотношения для $Z_k^*(t)$ имеет вид:

$$Z_k^*(t) = min\begin{cases} r_k(t) + Z_{k+1}^*(t) & \text{при } X_N = X^C \\ P_k + r_k(0) - \varphi_k(t) + Z_{k+1}^*(1) & \text{при } X_N = X^З \end{cases} \quad (12).$$

Для N-того шага:

$$Z_N^*(t) = min\begin{cases} r_N(t) & \text{при } X_N = X^C \\ P_N + r_N(0) - \varphi_N(t) & \text{при } X_N = X^З \end{cases} \quad (13).$$

Вычислительный процесс строится так же, как в задаче 1.

Числовой пример.

Определить минимальные затраты и оптимальное управление в задаче о замене автомобиля. Стоимость нового автомобиля: $P = 15000$ у.е. Период эксплуатации $N = 8$ лет. В начале восьмилетнего периода имеют новый автомобиль. Стоимость эксплуатации нового автомобиля $r(0) = 150$ у.е. После окончания восьмилетнего периода автомобиль продают. Решение о сохранении или замене принимают в начале каждого года. В течение первого года из восьмилетнего периода эксплуатируют новый автомобиль.

Затраты на эксплуатацию и ликвидная стоимость автомобиля соответствующего возраста приведена в таблице.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
r(t)	400	1150	2400	4150	6400	9150	12400	
ϕ(t)	12000	9600	7680	6144	4915	3932	3145	2516

Решение.

В данном случае $N = 8$, Из условий задачи следует, что возраст автомобиля в течение периода эксплуатации может принимать значения: $t = \overline{1,7}$; год эксплуатации (шаг) может принимать значения $k = \overline{2,8}$. Процесс решения удобно изобразить в виде следующей таблицы.

Год эксплуатации (начало) (k)	**Возраст автомобиля на начало года эксплуатации (t)**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Управление**
8	-9200	-6530	-3744	-765	2468	6005	9884	сохранение
	-8850	-6450	-4530	-2994	-1765	-782	5	замена
7	-6130	-3380	-594	2385	5618	9155		сохранение
	-6050	-3650	-1730	-194	1035	2018		замена
6	-3250	-580	2206	5185	8418			сохранение
	-2980	-580	1340	2876	4105			замена
5	-180	2490	5276	8255				сохранение
	-100	2300	4220	5756				замена
4	2700	5370	8156					сохранение
	2970	5370	7290					замена
3	5770	8440						сохранение
	8520	10920						замена
2	8840							сохранение
	8920							замена

Дадим некоторые комментарии.

В таблице фактически представлены все возможные варианты развития событий. Заполнение таблицы начинают с **восьмого** года эксплуатации ($k = 8$), рассматривая различные ситуации: в начале восьмого года имеем автомобиль возраста один год, два года, три года и т.д.

Год эксплуатации (начало) (k)	**Возраст автомобиля на начало года эксплуатации (t)**							**Управление**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
8	-9200	-6530	-3744	-765	2468	6005	9884	сохранение
	-8850	-6450	-4530	-2994	-1765	-782	5	замена

Заметим, что на начало восьмого года эксплуатации максимальный возраст автомобиля равен 7 годам.

Рассмотрим варианты, когда в начале восьмого года принято решение о **сохранении** автомобиля (**первая строка**).

Если на начало восьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 1 год, то в случае его сохранения расходы на эксплуатацию в течение восьмого года составят:

$$Z_8(1) = r(1) - \varphi(2) = 400 - 9600 = -9200.$$

Когда закончится восьмой год, автомобиль станет на год старше, т.е. будет иметь возраст два года. Таким образом, в конце восьмого года продают двухлетний автомобиль.

Поскольку речь идет о расходах, то ликвидная стоимость учитывается как доход, то есть расход со знаком минус.

Если на начало восьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 2 года, то в случае его сохранения расходы на эксплуатацию в течение восьмого года составят:

$$Z_8(2) = r(2) - \varphi(3) = 1150 - 7680 = -6530.$$

Когда закончится восьмой год, автомобиль станет на год старше, т.е. будет иметь возраст три года. Таким образом, в конце восьмого года продают трехлетний автомобиль.

И так далее.

Последнее значение в этой строке:

$$Z_8(7) = r(7) - \varphi(8) = 12400 - 2516 = 9884.$$

Рассмотрим теперь варианты, когда в начале восьмого года принято решение о **замене** автомобиля на новый (**вторая строка**).

Если на начало восьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 1 год, то в случае его замены а) будет продан однолетний автомобиль; б) будет куплен новый, затраты на эксплуатацию которого составят $r(0)$; в) в конце восьмого года будет продан однолетний автомобиль.

При этом расходы на эксплуатацию в течение восьмого года составят:

$$Z_8(1) = -\varphi(1) + P + r(0) - \varphi(1) = -12000 + 15000 + 150 - 12000 = -8850.$$

Если на начало восьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 2 года, то в случае его замены а) будет продан двухлетний автомобиль; б) будет куплен новый, затраты на эксплуатацию которого составят $r(0)$; в) в конце восьмого года будет продан однолетний автомобиль.

При этом расходы на эксплуатацию в течение восьмого года составят:

$$Z_8(2) = -\varphi(2) + P + r(0) - \varphi(1) = -9600 + 15000 + 150 - 12000 = -6450.$$

И так далее.

Последнее значение в этой строке:

$$Z_8(7) = -\varphi(7) + P + r(0) - \varphi(1) = -3145 + 15000 + 150 - 12000 = 5.$$

Заполнив таким образом ячейки, соответствующие восьмому году эксплуатации, для каждого возраста автомобиля укажем минимальное значение расходов (отмечено красным). Таким образом, найдены для данного значения k условные оптимальные затраты и условные оптимальные управления.

Рассмотрим теперь (в соответствии с обратной вычислительной схемой) **седьмой** год эксплуатации: $k = 7$.

Рассмотрим варианты, когда в начале седьмого года принято решение о **сохранении** автомобиля (**третья строка**).

Год эксплуатации (начало) (k)	**Возраст автомобиля на начало года эксплуатации (t)**							**Управление**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
8	-9200	-6530	-3744	-765	2468	6005	9884	сохранение
	-8850	-6450	-4530	-2994	-1765	-782	5	замена
7	-6130	-3380	-594	2385	5618	9155		сохранение
	-6050	-3650	-1730	-194	1035	2018		замена

Заметим, что на начало седьмого года эксплуатации максимальный возраст автомобиля равен 6 годам.

Если на начало восьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 1 год, то в случае его сохранения расходы на эксплуатацию в течение седьмого года составят:

$$r(1) = 400.$$

Когда закончится седьмой год и наступит начало восьмого года, мы попадаем в ситуацию «двухлетний автомобиль в начале восьмого года». Минимальные расходы в этом случае соответствуют стратегии сохранения и составляют $Z_8^*(2) = -6530$. Таким образом, суммарные оптимальные расходы за седьмой и восьмой годы эксплуатации составят:

$$Z_7(1) = r(1) + Z_8^*(2) = 400 + (-6530) = -6130.$$

Если на начало восьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 2 года, то в случае его сохранения расходы на эксплуатацию в течение седьмого года составят:

$$r(2) = 1150.$$

Когда закончится седьмой год и наступит начало восьмого года, мы попадаем в ситуацию «трехлетний автомобиль в начале восьмого года». Минимальные расходы в этом случае соответствуют стратегии замены и составляют $Z_8^*(3) = -4530$. Таким образом, суммарные оптимальные расходы за седьмой и восьмой годы эксплуатации составят:

$$Z_7(2) = r(2) + Z_8^*(3) = 1150 + (-4530) = -3380.$$

И так далее.

Последнее значение в этой строке:

$$Z_7(6) = r(6) + Z_8^*(7) = 9150 + 5 = 9155.$$

Рассмотрим варианты, когда в начале седьмого года принято решение о **замене** автомобиля (**четвертая строка**).

Если на начало седьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 1 год, то в случае его замены а) будет продан однолетний автомобиль; б) будет куплен новый, затраты на эксплуатацию которого составят $r(0)$; в) на следующем шаге попадаем в ситуацию – **однолетний** автомобиль в начале восьмого года. Учитывая, что оптимальное управление и оптимальные расходы в этом случае уже определены (сохранение, -9200), получим выражение для расходов на эксплуатацию за седьмой и восьмой годы:

$$Z_7(1) = -\varphi(1) + P + r(0) + Z_8^*(1) = -12000 + 15000 + 150 + (-9200) = -6050.$$

Если на начало седьмого года эксплуатации автомобиль имеет возраст 2 года, то в случае его замены а) будет продан двухлетний автомобиль; б) будет куплен новый, затраты на эксплуатацию которого составят $r(0)$; в) на следующем шаге попадаем в ситуацию – **однолетний** автомобиль в начале восьмого года. Учитывая, что оптимальное управление и оптимальные расходы в этом случае уже определены (сохранение, -9200), получим выражение для расходов на эксплуатацию за седьмой и восьмой годы:

$$Z_7(2) = -\varphi(2) + P + r(0) + Z_8^*(1) = -9600 + 15000 + 150 + (-9200) = -3650.$$

И так далее.

Последнее значение в этой строке:

$$Z_7(6) = -\varphi(6) + P + r(0) + Z_8^*(1) = -3932 + 15000 + 150 + (-9200) = 2018.$$

Заполнив таким образом ячейки, соответствующие седьмому году эксплуатации, для каждого возраста автомобиля укажем минимальное значение расходов (отмечено красным). Таким образом, найдены для данного значения k условные оптимальные затраты и условные оптимальные управления.

Предлагаем читателю самостоятельно провести остальные вычисления, сравнивая их с нашими расчетами, приведенными в таблице.

После того как заполнена вся таблица, этап условной оптимизации является законченным. Начинается этап безусловной оптимизации.

Значение расходов для второго года эксплуатации, выделенное красным, соответствует суммарным минимальным расходам на эксплуатацию в течение восьми лет, поскольку в нем уже учтены все предстоящие расходы при условии, что в момент принятия решения выбиралось оптимальное управление.

Итак, на втором году эксплуатации оптимальным управлением является **сохранение**, поскольку ему соответствует минимальное из двух значений. Выбирая сохранение, в начале третьего года попадаем в ситуацию – двухлетний автомобиль в начале третьего года эксплуатации. В этой ситуации оптимальным снова является **сохранение**, поскольку ему соответствует минимальное из двух значений. Выбирая сохранение, в начале четвертого года попадаем в ситуацию – трехлетний автомобиль в начале четвертого года эксплуатации. Минимальное из двух значений в данном случае соответствует **замене.** Выбирая замену, в начале пятого года попадаем в ситуацию – **однолетний** автомобиль в начале пятого года. В этой ситуации минимальное значение соответствует **сохранению**. Через год (в начале шестого года) попадаем в ситуацию – двухлетний автомобиль в начале шестого года. В этой ситуации сохранение и замена эквивалентны. Можно выбрать любое. Для определенности оптимальным управлением будем считать **сохранение**. Выбрав сохранение, попадаем в ситуацию – трехлетний автомобиль в начале седьмого года. В этом случае минимальные расходы соответствуют **замене** (минимальное из двух значений). Выбрав замену, в начале восьмого года попадаем в ситуацию – однолетний автомобиль в начале восьмого года. Поэтому в начале восьмого года принимаем решение о **сохранении** автомобиля с тем, чтобы в конце восьмого года (по условию задачи) его продать.

Таким образом, оптимальное управление представляет собой следующую цепочку действий:

Сохранение-сохранение-замена-сохранение-сохранение-замена-сохранение.

Оптимальные расходы составят:

$$Z^* = Z_2^*(1) + r(0) = 8840+150=8890.$$

8. Задачи для самостоятельного решения

1. Планируется деятельность четырех промышленных предприятий на очередной год. Начальные средства – 5 у.е. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 у.е., при этом доход каждого предприятия $f_k(X)$ от вложения соответствующей суммы X определен в таблице (таблица одношаговых доходов). Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

k / ***X***	**1**	**2**	**3**	
1	8	9	6	3
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Ответ: $Z^* = 28$. Один из <u>четырех</u> вариантов оптимального управления:

$X_1^* = 1$ у.е, $X_2^* = 2$ у.е, $X_3^* = 2$ у.е, $X_4^* = 3$ у.е

2. Определить минимальные затраты и оптимальное управление в задаче о замене автомобиля. Стоимость нового автомобиля: $P = 10000$ у.е. Период эксплуатации $N = 8$ лет. В начале восьмилетнего периода имеют новый автомобиль. Стоимость эксплуатации нового автомобиля $r(0) = 100$ у.е. После окончания восьмилетнего периода автомобиль продают. Решение о сохранении или замене принимают в начале каждого года. В течение первого года из восьмилетнего периода эксплуатируют новый автомобиль.

Затраты на эксплуатацию и ликвидная стоимость автомобиля соответствующего возраста приведена в таблице.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
r(t)	266	766	1600	2766	4266	6100	8266	
ϕ(t)	9090	8264	7513	6830	6209	5644	5131	4665

Ответ: Z^* =-1838. **Замена-сохранение-замена-замена-замена-замена-замена.**

Литература

1. Методы оптимизации: Учебное пособие / Мицель А. А. - 2016. 68 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/6603
2. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов/ Н.Ш.Кремер, Б.А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999. – 407 с.
3. Методы оптимизации: задачи и решения: учебно-практическое пособие/ Г. И. Просветов. - М. : Альфа-Пресс, 2009. - 167 с.
4. Оптимизация и математические методы принятия решений: учебное пособие: в 2 частях/ Л. П. Турунтаев. Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (Томск), Кафедра автоматизации обработки информации. - Томск : ТМЦДО, 2010 - - 210 с.
5. Динамическое программирование в экономических задачах: учебное пособие для вузов/ А. В. Лежнёв. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 174 с.