Министерство образования и науки

Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Часть 3. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Курс лекций

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В процессе управления производством часто возникают задачи, связанные с назначением исполнителей на различные виды работ. Например, подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложений между различными проектами научно-технического развития, распределение экипажей самолетов между авиалиниями и т.д.

Задача о назначениях (ЗН) является специфической задачей транспортного типа дискретного линейного программирования. При рассмотрении ЗН можно использовать теорию, методологию и результаты линейного программирования, а для решения применять и симплекс-метод [1], и метод потенциалов [2], и методы отсечения, и методы ветвей и границ [3]. Однако эти методы в данном случае неэффективны, так как любое допустимое базисное решение задачи о назначениях (в силу специфики задачи) является вырожденным [4].

Оригинальным алгоритмом решения ЗН является *венгерский метод*, который был разработан и опубликован в 1955 году *Харолдом Куном*. Ему же принадлежит и название, данное в честь венгерских математиков *Кенига* и *Эгервари*. На их более ранних работах в значительной степени основан этот алгоритм [5,6]. Интересный факт: в 2006 году было обнаружено, что Карл Густав Якоб Якоби, великий немецкий математик и механик, нашёл решение задачи о назначениях в XIX веке и опубликовал его в 1890 году на латыни [7].

Объективно венгерский метод был предназначен для ручных расчетов при решении задач небольшой размерности, поскольку его оригинальная версия имеет полиномиальную сложность $O(n^4)$. Дальнейшие исследования показали, что порядок можно сократить до $O(n^3)$. Мы будем рассматривать исходный вариант как поучительный пример интересных и необычных математических методов.

1. Постановка задачи

Задачу о назначениях можно сформулировать следующим образом. Необходимо выполнить n различных работ. Для их выполнения привлекаются n рабочих. Каждый рабочий за определенную плату готов выполнить любую работу. Требуется так распределить работы между рабочими, чтобы суммарные затраты на выполнение всех работ были минимальными.

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (1)$$

Можно рассматривать задачу о назначениях в другой постановке. Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{c_{ij}}$ – мера эффективности назначения, т.е. использования $\boldsymbol{i}$–того исполнителя на $\boldsymbol{j}$–той работе; $\boldsymbol{x_{ij}}$ – переменная задачи. $\boldsymbol{x_{ij} = 1}$, если $\boldsymbol{i}$–тый рабочий используется на $\boldsymbol{j}$–той работе, и $\boldsymbol{x_{ij} = 0}$ в противном случае. При этом модель задачи о назначениях имеет следующий вид:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $L(X)$ – целевая функция, имеющая смысл суммарного эффекта (прибыли); ограничения отражают следующие условия: а) каждая работа должна быть выполнена; б) каждый рабочий может быть использован только на одной работе.

В обоих случаях при использовании различных алгоритмов решения задачи о назначениях основной исходной информацией является матрица $C = \left\lfloor c_{ij}, i = 1, n;\ j = 1, n \right\rfloor$

Определение. Выбором квадратной матрицы C называется совокупность ее элементов следующего вида: $\{c_{1j_1}, c_{2j_2}, ..., c_{nj_n}\}$ таких, что $j_1 \neq j_2 \neq ... \neq j_n$.

Сумма $\sum_{k=1}^{n} c_{ij_k}$ называется суммой элементов выбора.

Выбор, сумма элементов которого является максимальной из возможных, называется максимальным.

Выбор, сумма элементов которого является минимальной из возможных, называется минимальным.

Задачу (1) можно сформулировать так: для квадратной матрицы стоимости C определить минимальный выбор. Соответственно, в задаче (2) нужно найти максимальный выбор.

2. . Задачи, приводящиеся к задаче о назначениях.

Кроме классической формулировки задачи о назначениях, к виду (1) и (2) могут быть приведены различные другие задачи, на первый взгляд не имеющие ничего общего с ЗН. Опишем некоторые примеры таких задач. [8]

Задача **детектирования движущихся объектов по снимкам** заключается в следующем: произведено два снимка, по итогам которых получены два набор координат. Требуется соотнести объекты на первом и втором снимке, т.е. определить для каждой точки второго снимка, какой точке первого снимка она соответствовала. При этом требуется минимизировать сумму расстояний между сопоставленными точками. Таким образом, необходимо найти вариант, в котором объекты суммарно прошли наименьший путь.

Для решения строят и решают задачу о назначениях, где в качестве элементов исходной матрицы C выступают евклидовы расстояния между точками.

Задача **детектирования движущихся объектов по локаторам** заключается в следующем: имеются два локатора, которые умеют определять не положение объекта в пространстве, а лишь направление на него. С обоих локаторов (расположенных в различных точках) поступила информация в виде n таких направлений. Требуется определить положение объектов, т.е. определить предполагаемые положения объектов и соответствующие им пары направлений так, чтобы минимизировать сумму расстояний от объектов до лучей-направлений.

Решение заключается в том, что нужно сформулировать задачу о назначениях, где в качестве работ принимаются n направлений с первого локатора, а в качестве рабочих — n

направлений со второго локатора. Элементы матрицы C — расстояния между соответствующими лучами.

3. Венгерский метод решения задачи о назначениях.

Определение. Нулевые элементы $z_1, z_2, \ldots, z_k$ квадратной матрицы называют независимыми, если в каждой строке и в каждом столбце содержится не более одного из этих элементов.

В матрице $n \times n$ не более $\boldsymbol{n}$ независимых нулей.

Опишем алгоритм решения задачи (1) венгерским методом. Процесс решения состоит из подготовительного этапа и не более, чем $\boldsymbol{n-2}$ последовательных итераций.

Подготовительный этап.

А) **Для задачи (1)** строим матрицу C' – находим для каждого столбца **минимальный** элемент и вычитаем его из всех элементов столбца: $c'_{ij} = c_{ij} - \min\limits_{k=\overline{1,n}} c_{kj}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

Для задачи (2) строим матрицу C' – находим для каждого столбца **максимальный** элемент и вычитаем из него все элементы столбца: $c'_{ij} = \max\limits_{k=\overline{1,n}} c_{kj} - c_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

Б) Вычисляем матрицу C^0 – находим в каждой строке минимальный элемент и вычитаем *его* из всех элементов строки: $c^0_{ij} = c'_{ij} - \min\limits_{k=\overline{1,n}} c'_{ik}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$

C^0 – неотрицательная матрица, имеющая в каждой строке и в каждом столбце хотя бы один нуль.

В) Отмечаем произвольный нуль в первом столбце знаком «*»**.** Затем просматриваем второй столбец и если в нем есть нуль, в строке у которого нет 0^*, отмечаем его «*». И т.д. до последнего столбца.

0^* *– независимые нули.*

Отдельная итерация.

Пусть $\boldsymbol{k}$-тая итерация проведена и получена матрица эквивалентная матрица стоимости C_k.

1. Проверяем – если в C_k ровно $\boldsymbol{n}$ 0^*, то задача решена и положение независимых нулей определяет оптимальный выбор. В соответствии с системой n независимых нулей эквивалентной матрицы стоимости $C^* = C_k$ в матрице переменных модели расставляем n единиц, остальные заменяем нулями. Решение завершено.

2. Столбцы матрицы $\boldsymbol{C_k}$, содержащие $\boldsymbol{0^*}$, выделяем знаком «+», их элементы называют выделенными. Остальные элементы матрицы – невыделенные.

3. Если среди невыделенных элементов матрицы $\boldsymbol{C_k}$ есть хотя бы один нуль, переходим к шагу 4, в противном случае – к шагу 8.

4. Если строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также $\boldsymbol{0^*}$, то переходим к шагу 5, в противном случае – к шагу 6.

5. Найденный невыделенный нуль обозначаем через $0'$, содержащую его строку отмечаем знаком «+» и все ее элементы называем выделенными. Снимаем знак выделения со столбца, в котором расположен $\boldsymbol{0^*}$ из выделенной строки, и переходим к шагу 3.

6. Найденный невыделенный нуль обозначаем через $0'$ и, начиная с него, строим так называемую L - цепочку по следующему правилу: исходный $0'$; далее 0^*, расположенный с ним в одном столбце (если такой найдется); затем $0'$, расположенный в одной строке с предшествующим 0^*; далее 0^*, расположенный в одном столбце с предшествующим $0'$ (если такой найдется) и т.д. Переходим к шагу 7.

7. В L - цепочке все 0^* заменяем нулями без знаков, а все $0'$ - символами 0^*. В результате в матрице $\boldsymbol{C_k}$ получим новую систему независимых нулей, число элементов которой на единицу больше числа элементов в предыдущей системе независимых нулей. Вне L - цепочки все $0'$ заменяем нулями без знаков и снимаем все выделения строк и столбцов матрицы $\boldsymbol{C_k}$. Переходим к шагу 1.

8. Среди невыделенных элементов матрицы $\boldsymbol{C_k}$ находим минимальный элемент h($h > 0$ в силу неотрицательности элементов эквивалентной матрицы стоимости $\boldsymbol{C_k}$ и отсутствия невыделенных нулей). Значение h вычитаем из элементов **невыделенных** строк и прибавляем к элементам **выделенных** столбцов. Вновь полученную эквивалентную матрицу стоимости с неотрицательными элементами, в которой хотя бы один из невыделенных элементов является нулем, обозначаем $\boldsymbol{C_k}$, восстанавливаем все имеющиеся знаки выделения и переходим к шагу 3.

4. Обоснование венгерского метода.

Будем решать для определенности задачу (1).

В обосновании нуждаются:

а) утверждение об эквивалентности исходной матрицы стоимости и матриц, получаемых в ходе работы алгоритма;

б) утверждение о существовании, единственности, конечности L-цепочки и нечетности числа ее элементов.

Для доказательства пункта а) рассмотрим две матрицы стоимости – исходную C задачи и рассчитанную C^*, элементы которых связаны соотношением:

$$c_{ij}^* = c_{ij} + d_i + l_j, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}.$$

Пусть $X = \left[x_{ij}, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}\right]$ - допустимое решение (1).

Значения целевой функции:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ ;\ L^*(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^* x_{ij}\ .$$

С учетом ограничений задачи:

$$L^*(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^* x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij} + d_i + l_j\right)x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} l_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = L(X) + \sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{j=1}^{n} l_j$$

Таким образом, значения линейных форм для рассмотренных матриц стоимости отличаются на постоянную, которая не зависит от допустимого решения X. Поэтому две задачи о назначениях с одним и тем же множеством допустимых значений и линейными формами $L(X)$ и $L^*(X)$, определенными выше, имеют одно и то же оптимальное решение X^*.

Доказательство пункта б) проведем поэтапно.

1. Построение L-цепочки осуществляется однозначно.

Действительно, в каждом столбце не может быть более одного 0^* по правилу выбора таких нулей. В каждой строке не может быть более одного $0'$, поскольку после того как в строке один нуль выделен штрихом, эту строку выделяют и никакие другие ее нули не могут быть отмечены.

2. L-цепочка всегда начинается с $0'$ и заканчивается $0'$.

Принципиальную схему построения L-цепочки можно представить следующим образом:

$$0' \xrightarrow{\textit{по}\ \text{столбцу}} 0^* \xrightarrow{\textit{по}\ \text{строке}} 0'\ldots$$

Пусть $C_m = \left[c_{ij}^m, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}\right]$ и существует L-цепочка вида $L = \left\{c_{i_1 j_1}^m, c_{i_2 j_1}^m, c_{i_2 j_2}^m, \ldots, c_{i_k j_k}^m, c_{i_{k+1} j_k}^m\right\}$, которая не может быть продолжена, причем $c_{i_k j_k}^m$ отмечен как $0'$, а $c_{i_{k+1} j_k}^m$ отмечен как 0^*. В этом случае в матрице C_m столбец с номером j_k не выделен знаком «+», так как в этом столбце есть элемент $c^m_{i_k j_k}$, отмеченный как $0'$. В то же время этот столбец содержит 0^* (так отмечен $c^m_{i_{k+1} j_k}$). Следовательно, знак выделения со столбца с номером j_k был снят и строка с номером i_{k+1} содержит $0'$, так как на шаге 6 она была выделена. Таким образом, L-цепочка может быть продолжена.

3. Из вышесказанного следует, что число элементов в L-цепочке является нечетным. При этом L-цепочка может состоять из одного элемента, если в одном столбце с рассматриваемым $0'$ нет 0^*.

5. Пример решения задачи о назначениях.

Рассмотрим задачу, определенную следующей матрицей стоимости:

57	10	36	25	64
5	12	54	75	50
19	6	2	69	0
57	20	2	5	4
37	10	60	19	76

.

Необходимо найти выбор, сумма элементов которого максимальна. Посчитать сумму выбора.

Решение. Выполним подготовительный этап метода.

А) Для каждого столбца определим максимальный элемент и вычтем из него все элементы данного столбца.

Б) Для каждой строки определим минимальный элемент и вычтем его из всех элементов данной строки.

В) В получившейся матрице определим 0^*.

	57	10	36	25	64
	5	12	54	75	50
	19	6	2	69	0
	57	20	2	5	4
	37	10	60	19	76
максимум	**57**	**20**	**60**	**75**	**76**

					минимум
0	10	24	50	12	**0**
52	8	6	0	26	**0**
38	14	58	6	76	**6**
0	0	58	70	72	**0**
20	10	0	56	0	**0**

+	+	+	+	
0*	10	24	50	12
52	8	6	0*	26
32	8	52	0	70
0	0*	58	70	72
20	10	0*	56	0'

1. Всего в матрице получилось четыре 0^*. 4<5, значит, задача не решена. Выполняем действия по алгоритму.

2. Отмечаем столбцы, содержащие 0^*, знаком «+».

3-5. Находим **невыделенный** 0 и отмечаем его как $0'$. В строке с $0'$ (четвертая строка) есть 0^* (третий столбец). Поэтому четвертую строку отмечаем знаком «+», знак выделения с третьего столбца снимаем.

+	+	(+)	+		
0*	10	24	50	12	
52	8	6	0*	26	
32	8	52	0	70	
0	0*	58	70	72	
20	10	0*	56	0'	+

Среди элементов матрицы снова ищем невыделенный 0, имея в виду, что элементы третьего столбца (за исключением 0^*) являются теперь невыделенными. Оказывается, что такого нуля нет, поэтому переходим к шагу 8.

8. Среди невыделенных элементов находим минимальный:
$h = \min\{24,6,52,58,12,26,70,72\} = 6$. Добавляем h ко всем элементам выделенных столбцов:

+	+		+		
6	16	24	56	12	
58	14	6	6	26	
38	14	52	6	70	
6	6	58	76	72	
26	16	0	62	0	+

Вычитаем h из всех элементов невыделенных строк:

+	+		+		
0	10	18	50	6	
52	8	0	0	20	
32	8	46	0	64	
0	0	52	70	66	
26	16	0	62	0	+

Восстанавливаем все знаки выделения:

+	+		+		
0*	10	18	50	6	
52	8	0	0*	20	
32	8	46	0	64	
0	0*	52	70	66	
26	16	0*	62	0′	+

Переходим к шагу 3 – находим невыделенный 0. Это 0, стоящий на пересечении второй строки и третьего столбца. Отмечаем его как $0'$. В строке, содержащей этот $0'$ (третий столбец), есть 0^* (четвертый столбец). Поэтому вторую строку помечаем знаком «+», знак выделения с четвертого столбца снимаем:

+	+		(+)		
0*	10	18	50	6	
52	8	0′	0*	20	+
32	8	46	0	64	
0	0*	52	70	66	
26	16	0*	62	0′	+

Переходим к шагу 3. Ищем нуль среди невыделенных элементов, имея в виду, что четвертый столбец теперь невыделен. Это нуль, стоящий на пересечении третьей строки и четвертого столбца. Помечаем его как $0'$:

+	+				
0*	10	18	50	6	
52	8	0′	0*	20	+
32	8	46	0′	64	
0	0*	52	70	66	
26	16	0*	62	0′	+

В строке у этого $0'$ нет 0^*. Поэтому переходим к шагу 6 – строим L-цепочку. От последнего отмеченного $0'$ по четвертому столбцу к 0^*. От 0^* по второй строке к $0'$. От $0'$ по третьему столбцу к 0^*. От 0^* по пятой строке к $0'$. В столбце (пятом) у этого $0'$ нет 0^*, поэтому построение цепочки закончено.

+	+				
0*	10	18	50	6	
52	8	0′	0*	20	+
32	8	46	0′	64	
0	0*	52	70	66	
26	16	0*	62	0′	+

Все 0^*, вошедшие в цепочку, становятся просто нулями (без индексов). Все $0'$, вошедшие в цепочку, меняем на 0^*. Все 0^*, не вошедшие в цепочку, остаются 0^*. Все остальные знаки выделения снимаем:

0*	10	18	50	6
52	8	0*	0	20
32	8	46	0*	64
0	0*	52	70	66
26	16	0	62	0*

Итерация закончена.

Новую итерацию начинаем с подсчета 0^*. Их оказывается пять. Так как 5=5, то задача решена. Положение 0^* (независимых нулей) определяет максимальный выбор: $\{c_{11}, c_{42}, c_{23}, c_{34}, c_{55}\}$. Оптимальная эффективность:

$$L = c_{11} + c_{42} + c_{23} + c_{34} + c_{55} = 57 + 20 + 54 + 69 + 76 = 276$$

6. Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

57	65	47	37	25
10	32	42	40	40
49	61	37	55	67
64	62	30	74	12
60	72	50	10	12

Вариант 2

35	0	74	55	64
37	18	30	15	0
57	18	42	63	62
55	0	10	65	60
47	60	60	59	54

Вариант 3

50	70	44	76	46
6	48	16	38	30
0	18	0	32	52
26	0	62	36	64
8	72	22	70	10

Вариант 4

64	62	30	74	12
0	22	32	30	30
62	70	52	42	30
60	72	50	10	12
54	66	42	60	72

Вариант 5

57	10	36	25	64
5	12	54	75	50
19	6	2	69	0
57	20	2	5	4
37	10	60	19	76

Вариант 6

50	22	10	4	66
7	57	35	5	9
36	52	20	20	64
59	5	27	75	55
2	14	16	64	0

Вариант 7

36	52	20	20	64
54	0	22	70	50
2	14	16	64	0
2	52	30	0	4
60	32	20	14	76

Вариант 8

31	47	15	15	59
55	27	15	9	4
54	0	22	70	50
12	24	26	74	10
2	52	30	0	71

Вариант 9

59	45	37	19	25
9	31	19	35	57
44	40	30	6	62
60	24	42	30	70
74	60	52	34	40

Вариант 10

44	40	30	6	62
60	24	42	30	70
64	24	42	24	30
66	4	60	72	0
14	36	24	40	62

Ответы

Вар. 1 $(c_{11}, c_{23}, c_{35}, c_{44}, c_{52})$ $L^* = 312$

Вар. 2 $(c_{13}, c_{21}, c_{35}, c_{44}, c_{52})$ $L^* = 298$

Вар. 3 $(c_{11}, c_{22}, c_{35}, c_{43}, c_{54})$ $L^* = 282$

Вар. 4 $(c_{14}, c_{23}, c_{31}, c_{42}, c_{55})$ $L^* = 312$

Вар. 5 $(c_{11}, c_{23}, c_{34}, c_{42}, c_{55})$ $L^* = 276$

Вар. 6 $(c_{15}, c_{23}, c_{32}, c_{41}, c_{54})$ $L^* = 276$

Вар. 7 $(c_{12}, c_{21}, c_{34}, c_{43}, c_{55})$ $L^* = 276$

Вар. 8 $(c_{12}, c_{21}, c_{33}, c_{44}, c_{55})$ $L^* = 269$

$(c_{12}, c_{21}, c_{34}, c_{43}, c_{55})$ $L^* = 269$

Вар. 9 $(c_{11}, c_{24}, c_{35}, c_{43}, c_{52})$ $L^* = 258$

$(c_{12}, c_{24}, c_{35}, c_{43}, c_{51})$ $L^* = 258$

Вар. 10 $(c_{12}, c_{23}, c_{31}, c_{44}, c_{55})$ $L^* = 280$

Литература

1. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов/ Н. Ш. Кремер, Б, А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999. – 407 с.

2. Фролькис В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. – СПб: Питер, 2002. – 320 с.

3. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебн. пособие/ Пантелеев А. В., Летова Т. А. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.

4. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб. для вузов/ Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко.. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 436 с.

5. Harold W. Kuhn, «The Hungarian Method for the assignment problem», *Naval Research Logistics Quarterly*, **2**:83—97, 1955. Kuhn’s original publication.

6. Harold W. Kuhn, «Variants of the Hungarian method for assignment problems», *Naval Research Logistics Quarterly*, **3**: 253—258, 1956.

7. R.E. Burkard, M. Dell’Amico, S. Martello: *Assignment Problems*. SIAM, Philadelphia (PA.) 2009. ISBN 978-0-89871-663-4

8. e-maxx.ru/algo/assignment_hungary