

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

**Кафедра экономики**

## **Финансовая математика**

Методические указания к лабораторным работам  
и самостоятельной работе  
для студентов технических направлений

Томск 2018

Общие положения .....	3
Лабораторная работа № 1. Простые ссудные ставки .....	5
Лабораторная работа 2. Простые учетные ставки .....	10
Лабораторная работа 3. Сложные ссудные ставки .....	13
Лабораторная работа 4. Сравнение схемы простых и сложных ссудных процентов .....	17
Лабораторная работа 5. Сложные учетные ставки .....	18
Лабораторная работа 6. Эквивалентные и эффективные ставки .....	22
Лабораторная работа 7. Налоги и начисление процентов .....	26
Лабораторная работа 8. Финансовые ренты.....	29
Лабораторная работа 9. Определение параметров ренты .....	34
Лабораторная работа 10. Конверсия и замена рент .....	38
Решения задач для подготовки к лабораторным работам.....	43

## Общие положения

В условиях перехода к рыночной экономике финансовая устойчивость и конкурентоспособность любого предприятия могут быть достигнуты только при эффективном управлении его финансовыми ресурсами. Чтобы правильно решать эти вопросы, нужно овладеть современными методами проведения финансовых операций. Студенты технических специальностей и направлений должны уметь использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности; обосновывать принимаемые проектные решения с целью рационального использования финансовых ресурсов.

**Цели** изучения дисциплины: формирование теоретических знаний и практических навыков по использованию методов финансовых вычислений при расчете эффективности и доходности финансовых операций, анализ потоков платежей предприятия с учетом временных факторов.

**Задачи:** изучения дисциплины:

- научить студентов методике и практике использования финансовых расчетов при решении конкретных задач; обобщать характеристики потоков платежей; проводить количественный анализ и оценивать эффективность финансовых и кредитных операций;
- научить методам формирования умений и навыков применения теоретических знаний для решения практических и прикладных задач управления.

Цель выполнения самостоятельной работы - научить студентов проводить самостоятельные исследования по выбранной теме и формулировать выводы.

Лабораторные работы выполняются в компьютерном классе с использованием пакета MS EXCEL. Лабораторные работы содержат примеры решения типовых задач и предусматривают выполнение заданий, включающих практические ситуации. Отчет по лабораторной работе содержит: решение типовых задач; исходные данные и описание хода выполнения лабораторной работы; обоснование выбора формулы для решения задачи; определение параметров формулы; программирование формулы в среде MS EXCEL; формулировка вывода. Выводы и заключения должны подтверждаться приведением цифровых данных из расчетной части работы. Защита отчета проводится в часы аудиторных занятий и предусматривает ответы на контрольные вопросы, которые приведены в заданиях.

Организация и выполнение самостоятельной работы предполагает ориентирование студентов на поиск и работу с учебной литературой, подбор необходимого материала для выполнения заданий. Самостоятельная работа включает:

- 1) изучение конспекта лекций и учебной литературы;
- 2) изучение решения типовых задач;
- 3) решение задач для подготовки к лабораторным работам и самоконтроль;
- 4) подготовка к промежуточному и итоговому тестированию.

## 5) Написание отчета по лабораторной работе.

Отчет по самостоятельной работе составляется индивидуально каждым студентом в письменном виде и сдается преподавателю в установленный срок в конце лабораторной работы. В отчет включаются выводы по итогам решения задач.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

### **знать:**

- основы теории финансовых вычислений, необходимых для принятия решений в управлении операционной деятельностью организаций.

### **уметь:**

- производить наращение и дисконтирование денежных потоков по простым и сложным процентам;
- оценивать последствия замены одного финансового обязательства другим и делать аргументированные выводы;
- планировать и оценивать эффективность финансово-кредитных операций;
- планировать погашение долгосрочной задолженности;
- использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности

### **владеть**

- навыками проведения финансовых расчетов с использованием компьютерных технологий;
- навыками принятия и обоснования решений в управлении организаций.

## Лабораторная работа № 1. Простые ссудные ставки

Значительная часть операций хозяйствующего субъекта сопровождаются выплатами и поступлением денежных средств, например, получение и погашение банковского кредита, приобретение и продажа материальных активов, покупка и продажа ценных бумаг и т.д. Все поступления и оттоки денежных средств распределены во времени. В связи с этим возникает необходимость их сопоставления. Для этого и предназначена концепция временной стоимости денег. В соответствии с данной концепцией денежная единица, имеющаяся сегодня, и денежная единица, ожидаемая к получению через какое-то время, не равноценны. Подобная неравноценность определяется тремя причинами: инфляцией, риском неполучения ожидаемой суммы, оборачиваемостью.

Следовательно, при управлении финансами необходимо руководствоваться несколькими правилами:

- учитывать фактор времени при управлении денежными потоками,
- невозможность суммирования денежных средств, относящихся к различным периодам времени.

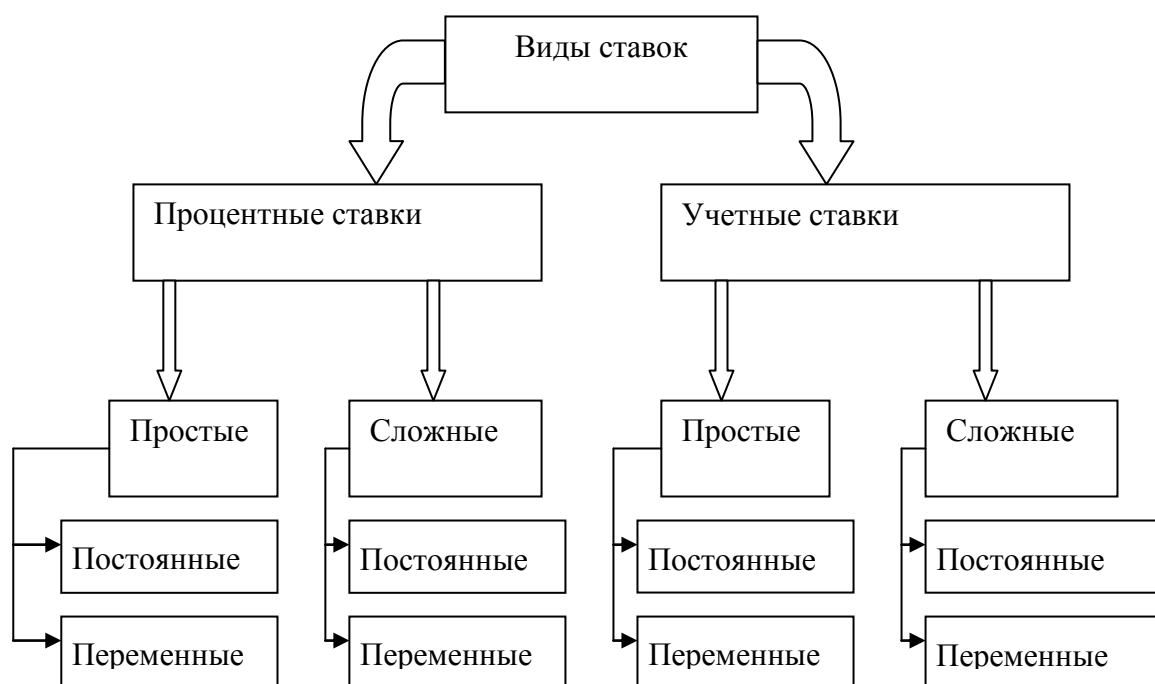
Для реализации перечисленных правил требуется использование ставки процента. Ставка процента является именно тем инструментом, который позволяет учесть фактор времени.

Наращение – это процесс увеличения суммы первоначального капитала за счет присоединения начисленных процентов. Иначе его можно определить как процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, называется наращением, искомая величина – наращенной суммой, а ставка – ставкой наращивания. В рамках данного процесса определяется будущая стоимость – стоимость в некоторый момент времени, рассматриваемая с позиции будущего, при условии ее наращивания по некоторой ставке.

Дисконтирование – процесс, обратный наращению, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращению) сумма и ставка. В рамках данного процесса определяется современная стоимость – стоимость, найденная в процессе дисконтирования. Она характеризует величину, ожидаемую к получению в будущем, с позиции момента, к которому осуществляется дисконтирование.

Процент (процентные деньги) – величина дохода от предоставления в долг некоторой денежной суммы.

Ставка – это отношение процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени, к некоторому базовому капиталу, выраженное в десятичных дробях или в процентах.



Простая ссудная ставка рассчитывается отношением наращения  $(F-P)$  к исходной (базовой) величине  $P$ .

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

В финансовых вычислениях базовым периодом является год, поэтому обычно говорят о годовой ставке. Вместе с тем достаточно широко распространены краткосрочные операции продолжительностью до года. В этом случае за основу берется дневная ставка, причем в зависимости от алгоритмов расчета дневной ставки и продолжительности финансовой операции результаты наращения будут различными. Используются три варианта расчета: а) точный процент и точное число дней финансовой операции – обозначение 365/365 ; б) обыкновенный процент и точное число дней финансовой операции - обозначение 365/360; в) обыкновенный процент и приблизительное число дней финансовой операции- обозначение 360/360.

Математическое дисконтирование является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При математическом дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (так называемой «приведенной стоимости»), которая через заданное время при наращении по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через заданное время.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени ссудной ставки.

Любая финансовая операция предусматривает участие, как минимум, двух сторон: кредитора (инвестора) и заемщика (получателя финансовых ресурсов); это обстоятельство является существенным для вынесения суждения об эффективности некоторой операции. Так, экономическая интерпретация ставки вообще и ее значения в частности зависит от того, с чьих позиций - кредитора или заемщика она дается. Для кредитора ставка характеризует его от-

носительный доход; для заемщика - его относительные расходы. Поэтому кредитор всегда заинтересован в высокой ставке или в повышении ставки; интересы заемщика - прямо противоположны.

**Цель выполнения лабораторной работы** - научиться проводить расчеты по схеме простых ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

### Основные формулы

$$F = P(1 + n \cdot r) \quad (1.1)$$

$$P = F / (1 + n \cdot r) \quad (1.2)$$

$$F = P \cdot (1 + r \cdot t / T) \quad (1.3)$$

$$F = P(1 + \sum_{i=1}^k n_i \cdot r_i) \quad (1.4)$$

$$r = \frac{F - P}{P \cdot n}, r = \frac{F - P}{P \cdot t} \cdot T \quad (1.5)$$

$$n = \frac{F - P}{P \cdot r} \quad (1.6)$$

где

$P$  - вложенная сумма;

$F$  – наращенная сумма;

$n$  - количество периодов продолжительности финансовой операции;

$r$ - простая ссудная ставка;

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Вы поместили в банк вклад 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 6% годовых. Какая сумма будет на счете через 3 года? Какова величина начисленных процентов?

#### Решение

По формуле (1.1.) при  $P=100$  тыс. руб.,  $n=3$ ,  $r=0,06$  получаем :

$$F=100 \cdot (1+3 \cdot 0,06)=118 \text{ тыс. руб.}$$

Через три года на счете накопится 118 тыс. рублей.

Величина начисленных за три года процентов составит:

$$118 - 100 = 18 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.** На какой срок необходимо поместить денежную сумму под простую процентную ставку 8% годовых, чтобы она увеличилась в 2 раза?

#### Решение

Искомый срок определяем из равенства множителя наращения величине 2 :

$$1+n \cdot 0,08=2, \text{ поэтому}$$

$$n=1/0,08=12,5 \text{ лет.}$$

Сумма, размещенная в банке под 8% годовых, в два раза увеличится через 12,5 лет.

**Задача 3.** Ссуда в сумме 3000 долл. предоставлена 16 января с погашением через 9 месяцев под 25 % годовых (год не високосный). Рассчитайте сумму к погашению при различных способах начисления процентов : а) обыкновенный процент с точным числом дней; б) обыкновенный процент с приближенным числом дней; в) точный процент с точным числом дней .

Решение

а) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ( $t=289-16=273$  дня), получим:

$$F=3000 \cdot (1+0,25 \cdot 273/360)=3568,75 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3568,75 долл.

б) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с приближенным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ( $t=9 \cdot 30=270$  дня), получим:

$$F=3000 \cdot (1+0,25 \cdot 270/360)=3562,5 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3562,5 долл.

в) По формуле (1.3), используя точный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ( $t=289-16=273$  дня), получим:

$$F=3000 \cdot (1+0,25 \cdot 273/365)=3560,96 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3560,96 долл.

### **Задачи для подготовки к лабораторной работе**

**Задача 1 .** В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 8,9 тыс. руб. через 120 дней при взятом кредите в размере 8 тыс. руб. Определить доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки при использовании банком простых обыкновенных процентов.

**Задача 2.** Господин X поместил 160 тыс. руб. в банк на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 8% годовых, каждый следующий квартал ставка повышается на 1%. Какая сумма будет на счете через полтора года, если проценты начисляются на первоначальную сумму вклада? Какую постоянную ставку должен использовать банк, чтобы сумма по вкладу не изменилась?

**Задача 3.** Кредит выдается под простую ссудную ставку 24 % годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, полученную заемщиком, и сумму процентных денег, если необходимо вернуть 3500 тыс. руб.

### **Задание на лабораторную работу 1. Простые ссудные ставки.**

#### **Контрольные вопросы**

1. Что показывает множитель наращенной суммы в формуле наращенной суммы простыми процентами?
2. Как связаны между собой наращенная сумма простыми процентами и арифметическая прогрессия?
3. В чем заключается различие между точным и приближенным процентом?
4. Что показывает множитель дисконтирования в формуле наращенной суммы простыми процентами?



5. Если простую процентную ставку увеличить в два раза, как наращенная сумма?

**Задача 1** На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 200 тыс.руб. под простые проценты с условием, чтобы величина возврата долга не превышала 220 тыс. руб., если процентная ставка равна 14% годовых, в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней и год високосный?

**Задача 2** Клиент поместил в банк вклад 60 тыс. руб. под простую процентную ставку 8 % годовых. Какая сумма будет на счете клиента через: а) 7 месяцев; б) 3 года; в) 3 года 9 месяцев? Рассчитать величину начисленных процентов.

**Задача 3** Банк выдал ссуду на 45 дней в размере 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 12% годовых. Рассчитайте доход банка, если при начислении простых процентов считается, что в году: а) 360 дней; б) 365 дней.

**Задача 4**

На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую процентную ставку 10% годовых, чтобы начисленные проценты были в 1,5 раза больше первоначальной суммы?

**Задача 5.** Вам 27 декабря будет нужна сумма 150 тыс. руб. Какую сумму 10 июня этого же года Вы должны положить в банк под простую процентную ставку 12 % годовых, если в расчете применяется обыкновенный процент с точным числом дней?

**Задача 6.** В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 240 тыс. руб. через 150 дней при взятом кредите в 200 тыс. руб. Определите доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки. При начислении банк использует простые обыкновенные проценты.

## Лабораторная работа 2. Простые учетные ставки

Под учётной ставкой понимается процентная ставка, по которой Центральный банк страны предоставляет кредиты коммерческим банкам. В российской практике наряду с термином учётная ставка для данной ситуации применяется термин **ставка рефинансирования**. Чем выше учётная ставка Центрального банка, тем более высокий процент взимают затем коммерческие банки за предоставляемый ими клиентам кредит и наоборот.

Учетная ставка рассчитывается отношением наращения ( $F-P$ ) к ожидаемой в будущем к получению, или наращенной, величине  $F$ .

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

Банковское (коммерческое) дисконтирование применяется в ситуации предварительного начисления простого процента, например, при операции по учету векселя, заключающейся в покупке банком векселя у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю на дату его погашения. Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учете векселя, называется дисконтированной величиной векселя.

Банковское дисконтирование нельзя осуществить во всех ситуациях, например, по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени учетной ставки.

При применении наращения по простой учетной ставке величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается. Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

**Цель выполнения лабораторной работы** - научиться проводить расчеты по схеме простых учетных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

### Основные формулы

$$P = F \cdot (1 - n \cdot d) \quad (2.1)$$

$$F = P / (1 - n \cdot d) \quad (2.2)$$

$$P = F \cdot (1 - d \cdot t / T) \quad (2.3)$$

$$F = P / (1 - d \cdot t / T) \quad (2.4)$$

$$D = F - P = F \cdot n \cdot d \quad (2.5)$$

$$d = \frac{F - P}{F \cdot n}, d = \frac{F - P}{F \cdot t} \cdot T \quad (2.6)$$

$$n = \frac{F - P}{F \cdot d} \quad (2.7)$$

$$F = P / (1 - \sum_{i=1}^n n_i \cdot d_i) \quad (2.8)$$

где

$P$ - вложенная сумма (сумма, которую получает владелец векселя при его учете)

$F$  – наращенная сумма (номинальная стоимость векселя);

$n$ - количество периодов продолжительности финансовой операции;

$d$ -простая учетная ставка;

$t$  -продолжительность финансовой операции в днях;

$T$ - количество дней в году;

$D$ - дисконт.

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** В банк 6 мая предъявлен для учета вексель, на сумму 140 тыс. руб. со сроком погашения 10 июля того же года. Банк учитывает вексель по учетной ставке 40% годовых, считая, что в году 365 дней. Определить сумму, получаемую векселедержателем от банка, и комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу. За какое время до срока платежа операция учета векселя имеет смысл?

#### Решение

По формуле (2.1) при  $F = 140$ ;  $n = 65/365$ ,  $d = 0,4$  получим:

$$P = 140 \cdot (1 - 0,4 \cdot 65/365) = 129,89$$

Векселедержатель получит от банка 129,89 тыс. руб.

Комиссионные банка (или дисконт) определяются по формуле  $D = F - P$

$$D = F - P = 140 - 129,89 = 10,11 \text{ тыс. руб.}$$

Комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу, равны 10,11 тыс. руб.

Учет векселя по учетной ставке имеет смысл при  $n < 1/d$ , для этой задачи при  $n < 2,5$  года. При  $n > 2,5$  года сумма  $P$ , которую должен получить владелец векселя при его учете, становится отрицательной.

**Задача 2.** Кредит в размере 400 тыс. руб. выдан по простой учетной ставке 25% годовых. Определить срок кредита, если заемщик планирует получить на руки 350 тыс. руб.

#### Решение

По формуле (2.7.) при  $F = 400$ ;  $P = 350$ ;  $d = 0,25$  получаем:

$$n = (400 - 350) / (400 \cdot 0,25) = 0,5$$

Срок кредита равен 0,5 года.

### Задачи для подготовки к лабораторной работе

**Задача 1.** Вексель на сумму 900 тыс. руб. учитывается по простой учетной ставке за 120 дней до погашения с дисконтом 60 тыс. руб. в пользу банка. Определить величину годовой учетной ставки при временной базе 360 дней в году.

**Задача 2.** В банк предъявлен вексель на сумму 500 тыс. руб. за полтора года до его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода – 30% годовых,

следующие полгода- 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

## **Задание на лабораторную работу 2. Простые учетные ставки.**

### **Контрольные вопросы**

1. В каких случаях применяется операция банковского дисконтирования?
2. Верно ли, что по простой учетной ставке вексель можно учесть за любое время до срока погашения?
3. В чем различие между антисипативным и декурсивным способом начисления процентов?

**Задача 1.** Банк учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых за полгода до срока погашения. Какова доходность этой операции для банка, выраженная в виде простой ставки ссудного процента.

**Задача 2.** Предприниматель получил 12 марта ссуду в банке по простой учетной ставке 22% годовых и должен вернуть 15 августа того же года 300 тыс. руб. Определить всеми возможными способами сумму, полученную предпринимателем и величину дисконта, если проценты удерживаются банком при выдаче ссуды.

**Задача 3.** Векселедержатель 20 февраля предъявил для учета вексель со сроком погашения 28 марта того же года. Банк учел вексель по учетной ставке 35% годовых и выплатил клиенту 19,3 тыс. руб. Какой величины комиссионные удержаны банком в свою пользу, если год невисокосный?

**Задача 4.** Банк за 20 дней до срока погашения учел вексель на сумму 40 тыс. руб. Доход банка составил 800 руб. Какую простую учетную ставку использовал банк, если считать в году 360 дней?

**Задача 5.** Банк 7 июня учел 3 векселя со сроками погашения в этом же году соответственно 8 августа, 30 августа и 21 сентября. Применяя учетную ставку 25% годовых, банк удержал комиссионные в размере 3750 руб. Определите номинальную стоимость первых двух векселей, если номинальная стоимость второго векселя в два раза больше первого и третий вексель предъявлен на сумму 20 тыс. руб.

### Лабораторная работа 3. Сложные ссудные ставки

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т.е. база, с которой происходит начисление, постоянно возрастает на величину начисленных ранее процентов. Более частое начисление сложных процентов обеспечивает более быстрый рост наращиваемой суммы.

Математическим дисконтированием (дисконтированием по сложной процентной ставке) называется задача нахождения такой величины первоначального капитала, которая через заданное количество времени при наращении по сложной процентной ставке обеспечит получение планируемой суммы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т.к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают  $\delta$  и называют *силой роста*.

**Цель выполнения лабораторной работы** - научиться проводить расчеты по схеме сложных ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL; провести сравнение финансовых операций при использовании простых и сложных ставок.

#### Основные формулы

$$F = P \cdot (1 + r)^n \quad (3.1)$$

$$P = F / (1 + r)^n \quad (3.2)$$

$$F = P (1 + r/m)^{nm} \quad (3.3)$$

$$F = P (1 + r)^{w+f} \quad (3.4)$$

$$F = P(1+r)^w \cdot (1+f \cdot r) \quad (3.5)$$

$$F_n = P \cdot \prod_{i=1}^k (1 + r_i)^{n_i} \quad (3.6)$$

$$r = m \cdot \left[ \left( \frac{F}{P} \right)^{\frac{1}{nm}} - 1 \right] \quad (3.7)$$

$$n = \frac{\ln \frac{F}{P}}{m \ln \left( 1 + \frac{r}{m} \right)} \quad (3.8)$$

$$F = P \cdot e^{\delta n} \quad (3.9)$$

$$P = Fe^{-\delta n} \quad (3.10)$$

где

$F$  – наращенная сумма;

$P$  – вложенная сумма;

$n$  – количество лет;

$r$  – сложная процентная ставка;

$m$  – количество начислений процентов в году;

$w$  – целая часть периода финансовой операции;

$f$  – дробная часть периода финансовой операции.

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** На вашем счёте в банке 15 млн. руб. Банковская ставка по депозитам равна 12% годовых. Вам предлагают войти всем капиталом в организацию совместного предприятия, обещая удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?

#### Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.1.).

Если мы вложим деньги в банк, то через 5 лет получим следующую сумму:

$$F = 15 \cdot (1 + 0,12)^5 = 26,43 \text{ млн.руб.}$$

Если мы войдем всем капиталом в организацию совместного предприятия, то наш капитал удвоится:

$$F = 15 \cdot 2 = 30 \text{ млн. руб.}$$

Следует принять данное предложение и не вкладывать деньги в банк.

**Задача 2.** Через 2 года ваш сын будет поступать в университет на коммерческой основе. Плата за весь срок обучения составит 5600 долл., если внести её в момент поступления в университет. Вы располагаете в данный момент суммой в 4000 долл. Под какую минимальную ссудную ставку нужно положить деньги, а банк, чтобы накопить требуемую сумму?

#### Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.7) при  $m=1$ :

$$r = (5600 / 4000)^{1/2} - 1 = 0,1832 = 18,32\%$$

Для того чтобы накопить нужную сумму, минимальная ссудная сложная ставка должна составлять 18,32 % годовых.

**Задача 3.** За выполненную работу предприниматель должен получить 600 тыс. руб. Заказчик не имеет возможности рассчитаться в данный момент и предлагает отложить срок уплаты на 2 года, по истечении которых он обязуется выплатить 730 тыс. руб. Выгодно ли это предпринимателю, если приемлемая норма прибыли составляет 10%? Какова минимальная ставка, которая делает подобные условия невыгодными для предпринимателя?

#### Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.1.).

Будущая стоимость 600 тыс.руб. через 2 года при норме прибыли 10% составит:

$$F = 600 \text{ тыс.руб.} (1 + 0,1)^2 = 720,6 \text{ тыс.руб.}$$

Это меньше, чем 730 тыс. руб., поэтому предпринимателю выгодно ждать расчета 2 года.

Для расчета минимальной ставки, которая делает условия невыгодными, воспользуемся формулой (2.6) при  $m=1$ :

$$r = (730/600)^{1/2} - 1 = 0,1030 = 10,3 \%$$

Минимальная ставка, которая делает условия невыгодными для предпринимателя, равна 10,3 % годовых.

### **Задачи для подготовки к лабораторной работе**

**Задача 1.** Банк предоставил ссуду в размере 5000 долл. на 39 месяцев под 10% годовых на условиях полугодового начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов: 1) схема сложных процентов; 2) смешанная схема.

**Задача 2.** 1 августа 2010 г. должник обязан уплатить кредитору 400 тыс. руб. Какую сумму необходимо иметь должнику, если он вернет деньги : 1) января 2010 г.; 2) 1 января 2011 г.; 3) 1 августа 2010 г.? Деньги взяты в долг под сложную ссудную ставку 34% годовых.

### **Задание на лабораторную работу 3. Сложные ссудные ставки.**

#### **Контрольные вопросы**

- 1) Чему равен множитель наращивания при начислении процентов по сложной ссудной ставке?
- 2) Верно ли, что начисление сложных процентов по ставке 12% годовых эквивалентно начислению сложных процентов по ставке 1% в месяц?
- 3) Как пользоваться финансовыми таблицами при вычислении наращенной и приведенной стоимости?

**Задача 1.** Вы положили в банк на депозит 1000 долл.. Банк начисляет сложные проценты по схеме – за первый год 4% годовых, а затем ставка увеличивается на 1 % каждый год. Определить сумму, которая будет на Вашем счете через 4 года.

**Задача 2.** Банк предоставил ссуду в размере 10 000 долл. на 16 месяцев под 12 % годовых на условиях ежеквартального начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов: 1) схема сложных процентов; 2) смешанная схема.

**Задача 3.** Сравните суммы процентов, начисленных за использование кредита в 500 тыс. руб., выданного на 1 год, если известно, что в одном банке проценты начисляются ежемесячно, а в другом банке – ежеквартально. Номинальная ставка процентов по кредиту в обоих банках одинакова и составляет 16% годовых. Сравнить проценты по кредиту при начислении простых процентов.

**Задача 4.** Что выгоднее для инвестора - положить имеющиеся у него 1000 долл. в банк на депозит при сложной ссудной ставке 4 % годовых, или купить за 1000 долл. вексель со сроком погашения через 2 года и номинальной стоимостью 1090 долл.?

**Задача 5 .** Определить сложную процентную ставку по кредиту размером 12 млн. руб., выданному на 2 года, если при возвращении кредита заемщик выплатил банку в качестве процентов по кредиту 1 млн. 800 тыс. руб. Результат сравнить с простой ставкой.

**Задача 6.** Определить срок кредита, выданного 1) под сложную ставку 30% годовых; 2) под простую ставку 30% годовых, если возвращаемая сумма на 75 % больше долга.



## Лабораторная работа 4. Сравнение схемы простых и сложных ссудных процентов

Для кредитора более выгодна схема простых процентов, если срок ссуды менее одного года (проценты начисляются однократно в конце периода). Для кредитора более выгодна схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год (проценты начисляются ежегодно). Обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

При начислении процентов за дробное число лет может использоваться схема сложных процентов, либо смешанная схема, предусматривающая начисление сложных процентов за целое число лет и простых процентов за дробную часть года.

**Задание на лабораторную работу 4. Сравнение схемы простых и сложных ссудных процентов.**

### Контрольные вопросы

- 1) Как соотносятся между собой наращенные суммы при начислении простых и сложных ссудных процентов?
- 2) Верно ли, что начисление сложных процентов по ставке 12% годовых эквивалентно начислению сложных процентов по ставке 1% в месяц?

**Задача 1.** За какой срок первоначальный капитал в 500 тыс. руб. увеличится до 3 млн. руб., если на него будут начисляться сложные ссудные проценты по ставке 10 % годовых: 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3) непрерывно. Сравнить срок финансовой операции при начислении простых процентов .

**Задача 2.** Через 2 года ваш сын будет поступать в университет на коммерческой основе. Плата за весь срок обучения составит 5600 долл., если внести её в момент поступления в университет. Вы располагаете в данный момент суммой в 4000 долл. Вычислить минимальную ссудную ставку при 1) ежегодном; 2) ежеквартальном начислении сложных процентов; 3) при начислении простых процентов.

**Задача 3.** Из какого капитала можно получить 450 тыс. руб. через 6 лет наращением сложными процентами по процентной ставке 16% годовых, если наращение осуществлять 1) ежегодно; 2) ежеквартально. Сравнить результаты с наращением простыми процентами

**Задача 4.** Сравнить наращение простыми и сложными процентами: дискретными и непрерывными при ставке 20%. Построить графики в диапазоне от 0 до 30 лет

**Задача 5.** Определите время, за которое происходит утроение первоначальной суммы при начислении простых и сложных процентов при ставке 5%, 10%, 15%, 25%, 50%, 100%.

## Лабораторная работа 5. Сложные учетные ставки

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент (например, за кредит) начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину (как при дисконтировании по простой учетной ставке), а каждый раз на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде.

Для лица, осуществляющего предварительное начисление процентов более выгодна сложная учетная ставка, если срок учета менее одного года; более выгодна простая учетная ставка, если срок учета превышает один год.

Если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, то при определении стоимости учетного капитала используют либо сложную учетную ставку, либо смешанную схему (сложная учетная ставка для целого числа лет и простая учетная ставка для дробной части года). Стоимость учетного капитала больше при использовании смешанной схемы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т.к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают  $\delta$  и называют *силой роста*.

**Цель выполнения лабораторной работы** - научиться проводить расчеты по схеме сложных ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL; провести сравнение финансовых операций при использовании простых и сложных ставок.

### Основные формулы

$$P = F(1 - d)^n \quad (5.1)$$

$$F = P/(1 - d)^n \quad (5.2)$$

$$P = F \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n} \quad (5.3)$$

$$P = F \cdot (1 - d)^{w+f} \quad (5.4)$$

$$P = F \cdot (1 - d)^w (1 - f \cdot d) \quad (5.5)$$

$$P = F \cdot \prod_{i=1}^k (1 - d_i)^{n_i} \quad (5.6)$$

$$d = m \left[ 1 - \left( \frac{P}{F} \right)^{\frac{1}{m \cdot n}} \right] \quad (5.7)$$

$$n = \frac{\ln \frac{P}{F}}{m \ln \left( 1 - \frac{d}{m} \right)} \quad (5.8)$$

$$F = P \cdot e^{\delta n} \quad (5.9)$$

$$P = F e^{-\delta n} \quad (5.10)$$

где

$F$  – наращенная сумма;

$P$  – вложенная сумма;

$n$  – количество лет;

$d$  – сложная учетная ставка;

$\delta$  – непрерывная ставка

$m$  – количество начислений процентов в году;

$w$  – целая часть периода финансовой операции;

$f$  – дробная часть периода финансовой операции.

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Вексель на сумму 70 тыс. руб. со сроком погашения через 4 года учтен за 32 месяца по сложной учетной ставке 24% годовых. Определить суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета.

#### Решение

1) При применении схемы сложных процентов воспользуемся формулой (5.4) при  $n = 32/12 = 8/3$ ,  $F = 70$  тыс. руб.,  $d = 0,24$ , поэтому

$$P = 70(1 - 0,24)^{\frac{8}{3}} = 33,672$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

2) При применении смешанной схемы воспользуемся формулой (5.4) при  $w = 2$ ,  $f = 2/3$ :

$$P = 70(1 - 0,24)^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot 0,24 \right) = 33,963$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

**Задача 2.** Долговое обязательство на выплату 46 тыс. руб. учтено за 4 года до срока погашения. Определите сумму, полученную при учете этого обязательст-

ва, если производилось 1) полугодовое; 2) поквартальное; 1) ежемесячное дисконтирование по сложной учетной ставке 24% годовых.

### Решение

1) Используем формулу (5.3) при  $F = 46$ ;  $d = 0,24$ ;  $n = 4$ ;  $m = 2$

$$P = 46 \left(1 - \frac{0,24}{2}\right)^{2 \cdot 4} = 16,543$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 16 543 руб.

2) Используем формулу (5.3) при  $F = 46$ ;  $d = 0,24$ ;  $n = 4$ ;  $m = 4$ :

$$P = 46 \left(1 - \frac{0,24}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 17,092$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17092 руб.

3) Используем формулу (5.3) при  $F = 46$ ;  $d = 0,24$ ;  $n = 4$ ;  $m = 12$ :

$$P = 46 \left(1 - \frac{0,24}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 17,443$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17443 руб.

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что с ростом числа осуществлений операций дисконтирования в году сумма, полученная при учете обязательства, возрастает.

**Задача 3.** Вексель был учтен за 2,5 года до срока его погашения, при этом владелец векселя получил четверть от написанной на векселе суммы. По какой годовой учетной ставке был учтен этот вексель, если производилось 1) поквартальное дисконтирование; 2) ежемесячное дисконтирование.

### Решение

1) по формуле (5.7) при  $P=0,25F$ ;  $n=2,5$ ;  $m=4$ , получим :

$$d = 4 \cdot \left[1 - 0,25^{\frac{1}{4 \cdot 2,5}}\right] = 0,5178$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 51,78% годовых.

2) по формуле (5.7) при  $P=0,25F$ ;  $n=2,5$ ;  $m=12$ , получим :

$$d = 4 \left[1 - 0,25^{\frac{1}{12 \cdot 2,5}}\right] = 0,5419$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 54,19 % годовых.

### Задачи для подготовки к лабораторной работе

**Задача 1.** Клиент имеет вексель на 100 тыс. руб., который он хочет учесть 01.03.2010 в банке по сложной учетной ставке равной 7% годовых. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.08.2010 г.?

**Задача 2.** Вклад в размере 20 тыс. руб. помещен в банк на 5 лет, причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке : в первые 2 года –16%, в следующие 2 года - 19%, в

оставшийся год- 23%. Определить наращенную сумму. При использовании какой постоянной сложной учетной ставки можно получить такую же сумму?

### **Задание на лабораторную работу 5. Сложные учетные ставки.**

#### **Контрольные вопросы**

1. Чему равен множитель дисконтирования при дисконтировании по сложной учетной ставке?
2. Может ли учет по сложной учетной ставке привести к отрицательным значениям?
3. Что происходит с величиной учтенного капитала, если растет число осуществлений операций дисконтирования по сложной учетной ставке?

**Задача 1.** За долговое обязательство в 80 тыс. руб. банком было выплачено 62 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 28% годовых ?

**Задача 2.** Найдите величину дисконта, если долговое обязательство на выплату 4 млн. руб. учтено за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 1) 20% годовых; 2) 25% годовых.

**Задача 3.** Долговое обязательство было учтено по номинальной учетной ставке 32% годовых при полугодовом дисконтировании. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если его дисконтированная сумма составила треть от суммы, которую нужно выплатить по этому обязательству?

**Задача 4.** Согласно финансовому соглашению банк начисляет по полугодиям проценты на вклады по сложной учетной ставке 28% годовых. Определить в виде простой учетной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении 1) на 3 месяца; 2) на год.

**Задача 5.** Вексель на сумму 800 тыс. руб. учитывается за 2 года до срока погашения. Какую сумму получит предъявитель векселя при учете по сложной учетной ставке 20% годовых?

**Задача 6.** Определите дисконтированную сумму при учете 100 тыс. руб. по простой и сложной учетной ставкам, если годовая ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 180 дней, 1 год, 3 года, 5 лет. Полагать год равным 360 дней.

## Лабораторная работа 6. Эквивалентные и эффективные ставки

Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки.

Две ставки называются эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются.

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления и неодинаковыми процентными ставками. Именно эта ставка характеризует реальную эффективность операции, однако во многих финансовых контрактах речь чаще всего идет о номинальной ставке, которая в большинстве случаев отличается от эффективной.

Меняя частоту начисления процентов или вид ставки, можно существенно влиять на эффективность операции. В частности, оговоренная в контракте ставка может при определенных условиях вовсе не отражать истинный относительный доход (относительные расходы). Например, 6% годовых при условии ежедневного начисления процентов соответствуют на самом деле 8,21%, начисляемых ежегодно. Отмеченная особенность исключительно значима в условиях высоких номинальных ставок. При составлении финансовых договоров данный прием нередко используется для сокрытия истинных расходов. Поэтому, заключая контракт, целесообразно уточнять, о какой ставке (процентной, учетной, эффективной и др.) идет речь или, по крайней мере, отдавать себе отчет в этом.

**Цель выполнения лабораторной работы** - научиться проводить расчеты по замене ставок и условий финансовых контрактов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL; сравнивать эффективность различных финансовых операций.

### Основные формулы

$$r_e = (1 + r/m)^m - 1 \quad (6.1)$$

$$r_e = e^\delta - 1 \quad (6.2)$$

$$\delta = m \cdot \ln(1 + r/m) \quad (6.3)$$

$$r = m \cdot [(1 + r_e)^{1/m} - 1] \quad (6.4)$$

$$d_e = 1 - (1 - d/m)^m \quad (6.5)$$

$$d = m \cdot [1 - (1 - d_e)^{1/m}] \quad (6.6)$$

$$r = \frac{d}{1 - nd} \quad (6.7)$$

$$d = \frac{r}{1 + nr} \quad (6.8)$$

$$r_c = \frac{d_c}{1 - d_c} \quad (6.9)$$

$$d_c = \frac{r_c}{1 + r_c} \quad (6.10)$$

$$r = \frac{\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{n} \quad (6.11)$$

$$d = \frac{1 - \left(1 - \frac{d(m)}{m}\right)^{m \cdot n}}{n} \quad (6.12)$$

где

$r_e$  — эффективная ставка,

$e^\delta$  — сила роста,

$r$  - простая процентная ставка,

$d$  - простая учетная ставка,

$r_c$  - сложная ссудная ставка,

$d_c$  - сложная учетная ставка,

$r(m)$  - сложная процентная ставка с начислением процентов  $m$  раз за период,

$d(m)$  - сложная учетная ставка с начислением процентов  $m$  раз за период,

$n$  - продолжительность финансовой операции в годах

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Какие условия предоставления кредита и почему более выгодны банку: 1) 28% годовых с ежеквартальным начислением процентов; 2) 30% годовых с полугодовым начислением процентов?

#### Решение

Рассчитаем эффективную годовую процентную ставку для каждого варианта.

1) По формуле (5.1) при  $r=0,28$ ;  $m=4$

$$r_e = (1 + 0.28/4)^4 - 1 = 0,3107 = 31,1\%$$

2) По формуле (5.1) при  $r=0,32$ ;  $m=2$

$$r_e = (1 + 0.3/2)^2 - 1 = 0,3225 = 32,25\%$$

Для банка выгоднее предоставлять кредит по варианту 2), так как в этом случае эффективная годовая ставка выше (предоставлять кредит под 32,25% годовых выгоднее, чем под 31,1%).

**Задача 2.** Срок уплаты по долговому обязательству – полгода, простая учетная ставка – 18% годовых. Какова доходность этой операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

**Решение**

По формуле (5.7) при  $d=0,18$ ;  $n=0,5$

$$r = 0,18 / (1 - 0,5 \cdot 0,18) = 0,198.$$

Доходность операции, выраженная в виде простой ставки ссудного процента, равна 19,8% годовых.

**Задача 3.** Определить, под какую ставку ссудных процентов выгоднее поместить капитал в 10 млн. руб. на пять лет – под простую ставку 14% годовых или под сложную ставку 12% при ежеквартальном начислении процентов?

**Решение.**

В данном случае можно не считать наращенную сумму, поэтому не важна величина первоначального капитала. Достаточно, например, найти простую процентную ставку, эквивалентную данной сложной ставке, воспользовавшись формулой эквивалентности по формуле (5.11) при  $r(m)=0,12$ ;  $n=5$ ;  $m=4$ :

$$r = \frac{(1 + \frac{0,12}{4})^{4 \cdot 5} - 1}{5} = 0,1612$$

Так как простая процентная ставка 16,12%, которая дала бы одинаковый результат с данной сложной процентной ставкой больше предложенной ставки в 14%, ясно, что предпочтительнее использовать сложную процентную ставку. Чтобы убедиться, насколько сложная ставка выгоднее, определим наращенные суммы:

$$F(14\%) = 17$$

$$F(16,12\%) = 22,04$$

Владелец капитала в 10 млн. руб. за 5 лет может накопить 17 млн. руб. с использованием простой ставки 14% годовых; с использованием сложной ставки 12% годовых при ежеквартальном начислении процентов можно накопить 22,04 млн. руб.

### **Задачи для подготовки к лабораторной работе**

**Задача 1.** На капитал в сумме 500 тыс. руб. ежегодно начисляются сложный проценты по ставке 8% годовых в течение 5 лет. Определить эквивалентную ставку непрерывного начисления процентов (силу роста).

**Задача 2.** Определить номинальную ставку, если эффективная ставка равна 9% и сложные проценты начисляются ежемесячно.

**Задание на лабораторную работу 6. Эффективные и эквивалентные ставки.**

### **Контрольные вопросы**

1. Какая ставка называется эффективной? От каких параметров она зависит?



2. Как изменяется эффективная ставка с ростом количества начислений сложных процентов в году?
3. В каком случае эффективная ссудная ставка совпадает с номинальной?
4. Какие ставки называются эквивалентными?

**Задача 1.** Определить номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 20% годовых и учет осуществляется 1) каждые полгода; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно.

**Задача 2.** Ссуда выдана при условии начисления сложных процентов по ставке 8 % годовых. Определить эквивалентную простую ставку при сроке ссуды 5 лет, 180 дней, 365 дней.

**Задача 3.** Вексель учитывается за 180 дней до срока погашения по простой учетной ставке 10 % годовых. Какова доходность этой операции для банка, выраженная по сложной учетной ставке?

**Задача 4.** Банк учитывает вексель за 300 дней до срока погашения по сложной учетной ставке 10% годовых при временной базе 360 дней. Какая простая годовая процентная ставка должна быть применена при выдаче кредита, если используется временная база 365 дней и банк хочет получить такой же доход?

**Задача 5.** Банк выдает ссуду под сложную процентную ставку 20% годовых. Какую простую годовую процентную ставку должен установить банк, чтобы его доход не изменился, если начисление процентов происходит а) по полугодиям; б) каждые 2 месяца; в) каждую неделю.

**Задача 6.** Определить номинальную годовую учетную ставку с дисконтированием 4 раза в год, эквивалентную номинальной годовой учетной ставке 12% с дисконтированием 12 раз в год.

**Задача 7.** Банк А принимает депозиты под 13% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов и их капитализацией. Банк В принимает депозиты под 12,5 % годовых с ежемесячным начислением сложных процентов и их капитализацией. Определить наилучший вариант вложения средств на депозит.

**Задача 8.** Капитал, взятый в кредит, вложен под сложную ставку ссудных процентов 10% годовых. Для расчета с кредиторами надо выплатить 40 млн. через 4 года или 50 млн. через 6 лет. Какой вариант предпочтительнее?

**Задача 9.** Определить сложную ссудную ставку, необходимую для того, чтобы сумма в 250 тыс. руб, внесенная на депозит на 2 года, была равна сумме 200 тыс. руб, внесенной на депозит на 3 года под сложную учетную ставку 30% годовых.

**Задача 10.** Определить номинальную ссудную ставку, если эффективная ставка равна 20 % и сложные проценты начисляются 1) ежеквартально; 2) ежемесячно; 3) еженедельно.

## Лабораторная работа 7. Налоги и начисление процентов

Налогообложение играет большую роль в экономике любой страны. Во многих странах налогом облагают проценты, полученные при помещении некоторой суммы на депозит, что уменьшает реальную наращенную сумму и реальную доходность финансовой операции.

Налоги, начисляемые на полученные проценты, уменьшают реальную доходность финансовой операции. Учет налога при определении наращенной суммы приводит к уменьшению ставки.

Введем обозначения:

$t$  - ставка налога на проценты

$T$  – общая сумма налога

$F$  - наращенная сумма до выплаты налога на проценты

$F_t$  - наращенная сумма после выплаты налога на проценты

$P$  – вложенная сумма

$n$  – продолжительность финансовой операции

Пусть  $r$  - простые ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период  $n$ , равна  $Pnr$ .

Сумма налога на начисленные проценты равна  $T=Pnr$  (7.1)

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1+r(1-t)n)] \quad (7.2)$$

Таким образом, налог на проценты уменьшает процентную ставку и вместо ставки  $r$  применяется ставка  $(1-t)r$ .

Пусть на сумму  $P$  за период времени  $n$  начислялись простые учетные проценты по учетной ставке  $d$ . Величина начисленных процентов равна  $Pnd/(1-nd)$ .

Сумма налога на начисленные проценты составит

$$T=Pndt/(1-nd) \quad (7.3)$$

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = F-T=P(1-ndt)/(1-nd) \quad (7.4)$$

Пусть  $r$  - сложные ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период  $n$ , равна  $P[(1+r)^n - 1]$

Сумма налога на начисленные проценты равна

$$T=P[(1+r)^n - 1]t \quad (7.5)$$

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1+r)^n (1-t)+t] \quad (7.6)$$

В случае сложных процентов налог на начисленные проценты можно выплачивать как в конце финансовой операции, так и каждый год. При этом общая сумма исчисленного налога не изменяется.

Пусть на сумму  $P$  за период времени  $n$  начислялись сложные учетные проценты по учетной ставке  $d$ . Величина начисленных процентов равна

$$\frac{P[1 - (1-d)^n]}{(1-d)^n}$$

Сумма налога на начисленные проценты равна  $T = \frac{P[1 - (1-d)^n]}{(1-d)^n} t$  (7.7)

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1-d)^{-n}(1-t) + t] \quad (7.8)$$

Пусть на сумму  $P$  за период времени  $n$  начислялись непрерывные проценты по ставке  $\delta$ .

Сумма налога на начисленные проценты равна  $T = P(e^\delta - 1)t$  (7.9)

$$F_t = P[e^\delta (1-t) + t] \quad (7.10)$$

**Цель выполнения лабораторной работы** - научиться рассчитывать влияние налогов на доходность финансовых операций, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые учетные проценты по ставке под 14% годовых. Определить нарастившую сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

#### Решение

Используем формулу (8.4) при  $P=300$ ;  $n=1,5$ ;  $t=0,12$ ;  $d=0,14$

$$F_t = 300(1 - 1,5 \cdot 0,14 \cdot 0,12) / (1 - 1,5 \cdot 0,14) = 370,018$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 370018 руб.

**Задача 2.** На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые проценты по ставке под 16% годовых. Определить нарастившую сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

#### Решение

Используем формулу (8.2) при  $P=300$ ;  $n=1,5$ ;  $t=0,12$ ;  $r=0,16$

$$F_t = 300[1 + 0,16(1 - 0,12)1,5] = 360,336$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 360336 руб.

**Задача 3.** На вклад в 2 млн. руб. в течение 4 лет каждые полгода начислялись сложные проценты по годовой номинальной ставке 12% годовых. Определить нарастившую сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 8% годовых.

#### Решение

Запишем формулу (8.6) с учетом полугодового начисления процентов:

$$F_t = P[(1 + r/m)^{nm} (1-t) + t]$$

при  $P=2$ ;  $r=0,12$ ;  $n=4$ ;  $m=2$ ;  $t=0,08$

$$F_t = 3,09268$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 3 092 680 руб.

### Задачи для подготовки к лабораторной работе

**Задача 1.** Для участия в некотором проекте предпринимателю необходимо 280 тыс. руб. Между тем он располагает суммой 250 тыс. руб. С целью накопления необходимой суммы предприниматель собирается положить 250 тыс. руб. в банк. Предлагаемая банком ставка по вкладам равна 14% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, использует точный процент с точным числом дней, а ставка налога на проценты равна 1%?

**Задача 2.** Клиент положил в банк 60 тыс. рублей под простую процентную ставку 10% годовых и через полгода с учетом налога на проценты получил 62,8 тыс. руб. Определить ставку налога на проценты.

## **Задание на лабораторную работу 7. Налоги и начисление процентов**

### **Контрольные вопросы**

1. Как налог на проценты при наращении простыми процентами влияет на процентную ставку?
2. Как налог на проценты при наращении сложными процентами влияет на процентную ставку?
3. Верно ли следующее утверждение: при наращении сложными процентами величина налога на проценты не зависит от времени уплаты налога-ежегодно или в конце финансовой операции?

**Задача 1** В банк на депозит внесено 5000 долл. , срок депозита - полгода, простая ссудная ставка равна 5% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 3%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.

**Задача 2.** Какую сумму необходимо положить в банк под сложную процентную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов, чтобы накопить 300 тыс. руб. с учетом уплаты налога на проценты 1) за 2 года; 2) за три года? Ставка налога на начисленные проценты равна 6%.

**Задача 3.** В банк на депозит внесено 100 тыс. руб., срок депозита – три года, сложная ссудная ставка равна 8% годовых. Определить ставку налога на начисленные проценты, если после его уплаты у вкладчика осталось 120 тыс. руб.

**Задача 4.** Вкладчик имеет 180 тыс. рублей и планирует увеличить эту сумму до 200 тыс. руб. через полгода. Определить требуемую простую годовую ставку, на основании которой вкладчик должен выбрать банк, если ставка налога на начисленные проценты равна 2%.

**Задача 5.** Предприниматель положил в банк 500 тыс. руб. под простую процентную ставку 9% годовых и через 9 месяцев получил 540 тыс. руб. Определить ставку налога на проценты.

**Задача 6.** Какую сумму необходимо положить в банк под простую процентную ставку 10% годовых, чтобы с учетом налога на проценты можно было бы ежегодно снимать со счета 60 тыс. руб. с учетом налога на проценты, и сумма на счете не изменялась? Ставка налога на проценты равна 4%.

## Лабораторная работа 8. Финансовые ренты

Одним из ключевых понятий в финансовом менеджменте является понятие денежного потока как совокупности притоков и/или оттоков денежных средств, имеющих место через некоторые временные интервалы.

Денежный поток, срок действия которого ограничен, называется срочным; если притоки (оттоки) осуществляются неопределенно долго, денежный поток называется бессрочным. Если притоки (оттоки) осуществляются в начале периодов, денежный поток носит название пренумерандо, если в конце периодов - постнумерандо.

Известны две задачи оценки денежного потока с учетом фактора времени: прямая и обратная. Первая задача позволяет оценить будущую стоимость денежного потока; для понимания экономической сущности этой задачи ее легче всего увязывать с процессом накопления денег в банке и оценкой величины наращенной суммы. Вторая задача позволяет оценить приведенную стоимость денежного потока; наиболее наглядная ситуация в этом случае - оценка текущей стоимости ценной бумаги, владение которой дает возможность в будущем получать некоторые платежи.

Аннуитет представляет собой частный случай денежного потока. Аннуитет - однонаправленный денежный поток, элементы которого имеют место через равные временные интервалы. Постоянный аннуитет имеет дополнительное ограничение, его элементы одинаковы по величине.

Ускоренные методы оценки денежных потоков основаны на применении мультиплицирующих и дисконтирующих множителей, которые табулированы в специальных финансовых таблицах. Таблицы инвариантны по отношению к виду потока - постнумерандо или пренумерандо; оценки для потока пренумерандо отличаются от соответствующих оценок для потока постнумерандо на величину множителя  $(1+r)$ , где  $r$  - ставка в долях единицы.

В финансовой математике разработаны универсальные формулы, позволяющие делать расчеты несопадения моментов поступления аннуитетных платежей и начисления процентов.

**Цель выполнения лабораторной работы** - научиться решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

### Основные формулы

$$FV_{pst} = A \sum_{k=1}^n (1+r)^{n-k} = A \cdot FM3(r, n) \quad (8.1)$$

$$PV_{pst} = A \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(1+r)^k} \right) = A \cdot FM4(r, n) \quad (8.2)$$

$$FV_{pre} = (1 + r) \cdot FV_{pst} \quad (8.3)$$

$$PV_{pre} = (1 + r)PV_{pst} \quad (8.4)$$

$$FM3 = \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \quad (8.5)$$

$$FM4 = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad (8.6)$$

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Анализируются 2 варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо, т.е. поступление денежных средств осуществляется в начале соответствующего временного интервала:

План 1: Вносить на депозит 5000 долл. каждые полгода при условии, что банк начисляет 10% годовых с полугодовым начислением процентов:

План 2: делать ежегодный вклад в размере 10000 долл. на условиях 9% годовых при ежегодном начислении процентов.

Ответьте на следующие вопросы:

1. Какая сумма будет на счёте через 10 лет при реализации каждого плана? Какой план более предпочтителен?
2. Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка в плане 2 будет повышена до 10%?

### Решение

План 1:

Принимая за базовый период полгода, воспользуемся формулой (9.1) при  $A=5000$ ;  $r=5\%$ ;  $n=20$ :

$$FV_1 = 0,5 \cdot FM3(5\%, 20) = 5000 \cdot 33,066 = 165330$$

План 2:

Принимая за базовый период год, воспользуемся формулой (9.1) при  $A=10000$ ;  $r=9\%$ ;  $n=10$ :

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(9\%, 10) = 10000 \cdot 15,193 = 151930$$

В данной задаче более предпочтительным является план 1, так как в этом случае будущая стоимость денежного потока выше. Если процентная ставка в плане 2 будет снижена до 8%, то будущая стоимость денежного потока будет равна:

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(10\%, 10) = 10000 \cdot 15,937 = 159370$$

то и в этом случае решение не изменится, то есть выгоднее план 1.

**Задача 2.** Предприниматель в результате инвестирования в некоторый проект будет получать в конце каждого квартала 8 тыс. долл. Определить возможные суммы, которые через три года получит предприниматель, если можно помес-

тить деньги в банк под сложную процентную ставку 24% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

### **Решение**

Используем формулу (9.2), считая базовым периодом квартал, тогда  $A=8$ ;  $n=12$ ;  $r=6\%$  :

$$FV=8 \cdot FM3(6\%,12)=8 \cdot 16,8699=134959$$

Через три года в банке на счете предпринимателя будет 134 959 000 долл.

**Задача 3.** Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 6% годовых, чтобы в течение 6 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 100 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком ежегодно начисляются сложные проценты?

### **Решение**

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо. По формуле (9.2) при  $A=100$ ;  $r=6\%$ ;  $n=6$ :

$$PV=100 \cdot FM4(6\%,6)=100 \cdot 4,917=491,7$$

В банк на счет необходимо положить 491 700 руб.

## **Задачи для подготовки к лабораторной работе**

**Задача 1.** Клиент в конце каждого года вкладывает 300 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 10% годовых. Определить сумму, которая будет на счете через 7 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?

**Задача 2.** Фирме предложено инвестировать 200 млн. руб. на срок 4 года при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 50 млн. руб.); по истечении четырех лет будет выплачено дополнительное вознаграждение в размере 25 млн. руб. Примет ли она это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 8% годовых?

## **Задание на лабораторную работу 8. Финансовые ренты**

### **Контрольные вопросы**

1. Какой денежный поток называется потоком пренумерандо? Приведите пример.
2. Какой денежный поток называется потоком постнумерандо? Приведите пример.
3. Как используются финансовые таблицы для оценки постоянных аннуитетов?
4. Чему равен коэффициент наращивания аннуитета?
5. Чему равен коэффициент дисконтирования аннуитета?
6. Какая связь существует между будущей и приведенной стоимостями аннуитета?

**Задача 1.** Страховая компания заключила договор с предприятием на 5 лет, установив ежемесячный страховой взнос в сумме 500 тыс. руб.. Страховые взносы помещаются в банк под сложную процентную ставку 10 % годовых, начисляемую ежемесячно. Определите сумму, которую получит по данному контракту страховая компания.

**Задача 2.** Анализируются два плана накопления денежных средств по схеме аннуитета пренумерандо: 1) класть на депозит 100 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов; 2) делать ежегодный вклад в размере 420 тыс. руб. при условии, что банк ежегодно начисляет сложные проценты по ставке 7%. Какая сумма будет на счете через 5 лет при реализации каждого плана?

**Задача 3.** Преуспевающий предприниматель в знак уважения к своей школе намерен заключить договор со страховой компанией, согласно которому компания ежегодно будет выплачивать школе сумму в 500 тыс. руб. от имени предпринимателя в течение 20 лет. Какой единовременный взнос должен сделать предприниматель, если банковская ставка по вкладам равна 5% годовых?

**Задача 4.** Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка 9% в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене имеет смысл приобрести эту ренту?

**Задача 5.** В начале каждого года вы вкладываете 500 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 9 % годовых. Определить сумму, которая накопится на счете через 5 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?

**Задача 6.** От сдачи в аренду здания предприниматель получает в конце каждого квартала доход в размере 5 тыс. долл., которые он переводит на депозит в банк. Какая сумма будет получена арендодателем в банке в конце года, если банковская ставка по депозитам равна 8% годовых, начисляемых ежеквартально?

**Задача 7.** Предприниматель планирует после выхода на пенсию обеспечить себе ежегодный годовой доход в размере 60 тыс. руб. в течение 8 лет. Какую сумму ему необходимо для этого поместить на депозит в момент выхода на пенсию, если банковская ставка по депозитам будет 10% годовых? Предприниматель планирует снимать денежные средства с депозита в начале каждого года и за 8 лет исчерпать депозит полностью.

**Задача 8.** В начале каждого года в течение 13 лет на счет вносится 130 тыс. рублей, процентная ставка составляет 13% годовых. Определить наращенную сумму через 13 лет.

**Задача 9.** Сумма 75 тыс. рублей вносится в конце каждого года на протяжении 18 лет под 13% годовых. Определить величину накопленного вклада через 18 лет.



**Задача 10.** Найти дисконтированную величину 16 вкладов постнумерандо по 100 тыс. рублей при ставке 14% годовых на текущий момент времени и через 3 года.

**Задача 11.** Найти текущую стоимость суммы 15 вкладов пренумерандо по 75 тыс. рублей при ставке 20% годовых.

**Задача 12.** Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 10% годовых, чтобы в течение 12 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 120 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком ежегодно начисляются сложные проценты?

## Лабораторная работа 9. Определение параметров ренты

Постоянный аннуитет (финансовая рента) описывается набором основных параметров – платеж аннуитета, процентная ставка, срок действия аннуитета. Зная эти параметры, можно решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета - определить его будущую и приведенную стоимость. При разработке финансовых контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задаются будущая или приведенная стоимость ренты, и необходимо рассчитать значения ее параметров.

**Цель выполнения лабораторной работы** – научиться определять параметры аннуитетов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

### Основные формулы

$$A = \frac{FV_{pst}}{FM 3(r, n)} \quad (9.1)$$

$$A = \frac{PV_{pst}}{FM 4(r, n)} \quad (9.2)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV_{pst}}{A} r + 1\right)}{\ln(1 + r)} \quad (9.3)$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{PV_{pst}}{A} r\right)}{\ln(1 + r)} \quad (9.4)$$

$$FM 3 = \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \quad (9.5)$$

$$FM 4 = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad (9.6)$$

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 60 лет) фирма обязуется в начале каждого года перечислять на счет работника в банке одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 30 000 руб. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10% ?

#### Решение

Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо.

По формуле (10.2) при  $A=30\ 000$ ;  $r=10\%$ ;  $n=10$  найдем приведенную стоимость этого аннуитета :

$$PV=30000 \cdot FM4(10\%,10) = 30\ 000 \cdot 6,145 = 184350$$

Таким образом, если иметь на счете в момент выхода на пенсию 184 350 руб. можно ежегодно снимать с него 30 000 руб. и через 10 лет исчерпать счет полностью.

Теперь необходимо выяснить, какую сумму фирма должна в начале года перечислять на счет работника, чтобы за 20 лет ( $60 - 40 = 20$ ) накопить 184350 руб.

Размер вклада можно найти из формулы (11.1), полагая  $FV_{pre}=184350$ :

$$A=184350 / [FM3(10\%,20) (1+r)] = 184350 / (57,274 \cdot 1,1) = 2926,125$$

Таким образом, фирме достаточно перечислять на счет работника 2916 руб.13 коп.

**Задача 2.** Иванов должен Петрову 200 тыс. руб. Он предлагает вернуть долг равными ежегодными платежами в 50 тыс. руб. Через какое время долг будет погашен, если на него ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых?

**Решение**

По формуле (11.4) при  $A=50$ ;  $r=0,12$ ;  $PV_{pst}=200$

$$n = - \frac{\ln(1 - \frac{200}{50} \cdot 0,12)}{\ln(1 + 0,12)}$$

$$n=5,77$$

Долг будет погашен через 5,77 года

### Задачи для подготовки к лабораторной работе

**Задача 1.** Господин X выплатил жене при разводе 1 млн. руб. Жена после развода планирует получать ежегодно одинаковые суммы в течение 20 лет. Какую сумму она будет получать, при условии, что процентная ставка по вкладам в банк равна 10% годовых?

**Задача 2.** Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 3500 тыс. руб. С этой целью в конце каждого года фирма предполагает вносить по 600 тыс. руб. в банк под 8% годовых. Найти срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты ежегодно.

### Задание на лабораторную работу 9. Определение параметров финансовых рент.

#### Контрольные вопросы

1. Как изменяется коэффициент наращивания аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?

2. Как изменяется коэффициент дисконтирования аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?
3. Какая связь существует между оценками аннуитета пренумерандо и постнумерандо?

**Задача 1.** Предприниматель инвестировал 700 000 руб. в пенсионный контракт. На основе анализа таблиц смертности страховая компания предложила условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться ежегодно в течение 20 лет исходя из ставки 15% годовых. Какую сумму ежегодно будет получать предприниматель?

**Задача 2.** К моменту выхода на пенсию через 10 лет предприниматель хочет иметь на счете 300 000 руб. Для этого намерен делать ежегодный взнос по схеме пренумерандо. Определите размер взноса, если банковская ставка по депозитам составляет 7% годовых.

**Задача 3.** Какой срок необходим для того, чтобы на депозите накопилось 10 млн. руб., при условии, что на ежегодные взносы в сумме 1 млн. руб. начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых? Взносы на депозит делаются в начале каждого года. Как изменится срок, если взносы на депозит будут в конце каждого года.

**Задача 4.** Необходимо найти размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций, каждая из которых предусматривает начисление сложных процентов по ставке 8% годовых:

- 1) создать за 5 лет резервный фонд в сумме 1 млн. руб.
- 2) погасить через 5 лет текущую задолженность в сумме 1 млн. руб.

**Задача 5.** Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому фирма обеспечит работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 8000 руб. в течение 18 лет. Какую сумму ежегодно фирма должна перечислять на банковский счет работника, если работнику 30 лет, выход на пенсию – в 60 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10% годовых?

**Задача 6.** Владелец малого предприятия планирует за три года создать фонд развития в сумме 1,5 млн. руб. Он рассматривает следующие возможности для создания фонда с помощью банковского депозита, на который начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых: 1) делать ежегодные равные взносы на депозит; 2) сделать разовый платеж. Определить размеры сумм в каждом варианте.

**Задача 7.** Индивидуальный предприниматель погашает кредит равными ежемесячными платежами в 100 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк согласился уменьшить платежи до 80 тыс. руб. Насколько увеличится срок погашения кредита, если банк использует сложную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов?

**Задача 8.** Задолженность в сумме 500 тыс. руб. погашается в течение 3 лет равными ежемесячными платежами. Определить размер платежа, в расчетах использовать ставку 8% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

**Задача 9.** Семья планирует накопить на отпуск 200 тыс. руб.. Для этого в начале каждого месяца в банк на депозит вносится одинаковая сумма. Определить размер ежемесячного взноса, если банковская ставка по депозитам равна 8% годовых с полугодовым начислением процентов.

**Задача 10.** Предприятие намеревается за 2 года создать фонд развития в сумме 5 млн. руб. Какую сумму предприятие должно ежемесячно ассигновать на эти цели при условии помещения этих денег в банк под сложную процентную ставку 8% годовых с ежемесячным начислением процентов? Какой единовременный вклад в начале первого года нужно было бы сделать для создания фонда?

## Лабораторная работа 10. Конверсия и замена рент

На практике часто сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе его выполнения необходимо изменить условия выплаты ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты*); или наоборот: замена разового платежа рентой (*рассрочка платежей*). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент в одну – *консолидация рент*.

**Цель выполнения лабораторной работы** – научиться рассчитывать характеристики заменяющих рент, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

### Основные формулы

**Выкуп ренты.** Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом, поэтому для вычисления размера разового платежа выбирается формула для нахождения приведенной стоимости аннуитета постнумерандо или пренумерандо:

$$PV_{pst} = A \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(1+r)^k} \right) = A \cdot FM4(r, n) \quad (10.1)$$

$$PV_{pre} = (1+r)PV_{pst} = A \cdot FM4(r, n) \quad (10.2)$$

**Рассрочка платежей.** Рассрочка платежей – обратная задача к задаче выкупа ренты. Обязательство по уплате некоторой суммы заменяется равными платежами в рассрочку. Для решения задачи приравнивают современную стоимость ренты, с помощью которой проводится рассрочка, к сумме долга. Задача может заключаться в определении параметров этой ренты - члена ренты или ее срока, при условии, что остальные параметры заданы. Подобные задачи рассматриваются в лабораторной работе № 12.

**Объединение (консолидация) рент.** Объединение рент заключается в замене нескольких рент с заданными параметрами новой рентой, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющих и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству:

$$PV = \sum_{i=1}^n PV_i \quad (10.3)$$

где  $PV$ - современная стоимость заменяющей ренты;

$PV_i$  – современная стоимость  $i$ -той заменяемой ренты.

**Замена немедленной ренты на отсроченную.** Пусть имеется немедленная рента с параметрами  $A$ ,  $n$ ,  $r$ . Необходимо отсрочить выплаты на  $t$  лет. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности равенство приведенных стоимостей запишется следующим образом:

$$PV_1 = (1+r)^{-t} PV_2 = FM 2(r, n) \cdot PV_2 \quad (10.4)$$

где  $PV_1$  - современная стоимость немедленной ренты;

$PV_2$  - современная стоимость отложенной ренты.

Пусть срок отложенной ренты не изменяется, тогда неизвестный платеж отложенной ренты находится из уравнения:

$$A_2 = A_1 \cdot (1+r)^t \quad (10.5)$$

Где  $A_1$  - платеж исходной ренты

$A_2$  - неизвестный платеж отложенной ренты

$t$  - время отложения ренты

Пусть платеж отсроченной ренты не изменяется, тогда новый срок отложенной ренты находится из уравнения:

$$n_2 = - \frac{\text{Ln}\{1 - [1 - (1+r)^{-n_1}](1+r)^t\}}{\text{Ln}(1+r)} \quad (10.6)$$

где  $n_2$  - неизвестный срок отложенной ренты

$n_1$  - срок исходной ренты

$t$  - время отложения ренты

в общем случае, когда  $n_1 \neq n_2$  из равенства  $PV_1 = PV_2$  следует:

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{FM 4(n_1, r)}{FM 4(n_2, r)} (1+r)^t \quad (10.7)$$

## Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями  $A=2$  млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока ренты. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

### Решение

По формуле (12.4) при  $A_1=2$ ;  $t=2$ ;  $r=0,2$

$$A_2 = 2 \cdot (1+0,2)^2$$

$$A_2 = 2,88$$

Отказ от немедленной выплаты ренты приводит к увеличению платежа до 2,88 млн.руб.

**Задача 2.** Рента с ежегодными платежами в 2 млн. руб. и сроком 5 лет откладывается на три года без изменения сумм выплат. Найти новый срок ренты при

условии, что на поступающие платежи ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых.

### Решение

В соответствии с (12.5) при  $n_1 = 5$ ;  $t = 3$ ;  $r = 0,08$ ;  $A = 2$

$$n_2 = - \frac{\text{Ln}\{1 - (1 - 1,08^{-5})1,08^3\}}{\text{Ln}1,08} = 6,689$$

Отказ от немедленной выплаты ренты увеличивает ее срок до 6,689 года, т.е. на 1,689 года.

Пусть продолжительность новой ренты в целых годах равна 6. тогда приведенная стоимость новой ренты составит

$$PV_2 = 2 \cdot FM_4(8\%, 6) \cdot FM_2(8\%, 3) = 2 \cdot 4,6288 \cdot 0,7938 = 7,3396$$

Современная стоимость исходной ренты составит

$$PV_1 = 2 \cdot FM_4(8\%, 5) = 2 \cdot 3,9927 = 7,9854$$

Разность в сумме 0,6458 млн. руб. необходимо уплатить в начале действия контракта.

**Задача 3.** Три ренты постнумерандо- немедленные, годовые, заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент:

$A_1 = 100$ ;  $A_2 = 120$ ;  $A_3 = 300$  (тыс. руб.);  $n_1 = 6$ ;  $n_2 = 11$ ;  $n_3 = 8$  лет. Необходимо:

- 1) Определить платеж заменяющей ренты при использовании сложной ставки 20% годовых:
- 2) Определить срок заменяющей ренты при условии, что размер платежа равен 1500 тыс. руб.

### Решение

Данные для определения приведенных стоимостей заменяемых рент занесем в таблицу:

№ ренты	Платеж ренты	Срок ренты	$FM_4(r, n)$	PV
1	100	6	3,32551	332,551
2	120	11	4,32706	519,472
3	300	8	3,83716	1151,148
Итого				2002,946

1) Платеж заменяющей ренты находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM_4(20\%, 7) \cdot FM_2(20\%, 3)} = \frac{2002,946}{3,60459 \cdot 0,5787} = 960,189$$

Платеж заменяющей ренты равен 960 189 руб.

Если бы заменяющая рента была бы немедленной, ее платеж находим из уравнения:



$$A = \frac{PV}{FM 4(20\%, 7)} = \frac{2002,946}{3,60459} = 555,665$$

2) Определим современную стоимость заменяющей немедленной ренты:  
 $PV = 2002,946 \cdot (1 + 0,2)^3 = 3461,091$

Неизвестный срок ренты находим из формулы (11.4) (лабораторная работа № 11):

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{PV_{pst}}{A} r\right)}{\ln(1 + r)} \quad \text{при } A=1500; r=20\%; PV=3461,091$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{3461,091}{1500} \cdot 0,2\right)}{\ln 1,2} = 3,395$$

Установим срок заменяющей ренты 4 года. При этом приведенная стоимость ренты равна

$$PV = 1500 \cdot FM 4(20\%, 4) = 1500 \cdot 2,5887 = 3883,05$$

Излишек в сумме  $3883,05 - 3461,091 = 421,959$  компенсируем в начале финансовой операции.

### Задачи для подготовки к лабораторной работе

**Задача 1.** Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями  $A=2$  млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года с изменением срока ренты до 11 лет. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

**Задача 2.** Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене можно приобрести эту ренту, если выплаты будут осуществляться 1) через 3 года; 2) немедленно, а сложная процентная ставка равна 4% годовых?

### Задание на лабораторную работу 10. Замена и консолидация рент.

#### Контрольные вопросы

1. Что такое выкуп ренты? Каковы методы решения этой задачи?
2. В чем заключается сущность консолидации рент?
3. Как заменить немедленную ренту на отсроченную ренту?

**Задача 1.** Найти годовую ренту - сумму сроком в 10 лет для двух годовых рент: одна продолжается 5 лет с годовым платежом 1 млн. руб., другая - продолжительностью 8 лет и годовым платежом 0,8 млн. руб. Годовая ставка сложных процентов равна 8%.

**Задача 2.** Необходимо выкупить полугодовую ренту с платежами в 50 тыс. руб., срок ренты – 10 лет; сложные проценты по ставке 10% начисляются по полугодиям.

**Задача 3.** Годовая рента постнумерандо с платежами  $A=200$  тыс. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка для пролонгирования равна 10% годовых. Определить размер платежа отложенной ренты. Как изменится ответ, если платежи в отложенной ренте будут производиться в начале года?

**Задача 4.** Рента постнумерандо с платежами  $A=500$  тыс. руб. и сроком 10 лет откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. Определить срок отложенной ренты при ставке пролонгирования 12% годовых.

**Задача 5.** Индивидуальный предприниматель погашает кредит равными ежемесячными платежами в 100 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк согласился уменьшить платежи до 80 тыс. руб. Насколько увеличится срок погашения кредита, если банк использует сложную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов?

## Решения задач для подготовки к лабораторным работам

### Простые ссудные ставки

#### Задача 1.

По формуле (1.5) при  $F=8,9$  тыс. руб.,  $P=8$  тыс. руб.,  $t=120$  дней,  $T=360$  дней, получим :

$$r=360 \cdot (8,9-8) / (8 \cdot 120) = 0,3375 = 33,75\%$$

Доходность банка составит 33,75 процентов годовых.

#### Задача 2.

Применяя формулу (1.4), получим :

$$F=160 \cdot (1+0,5 \cdot 0,08+0,25 \cdot 0,09+0,25 \cdot 0,1+0,25 \cdot 0,11+0,25 \cdot 0,12) = 183,2$$

Через полтора года на счете накопится 183 200 руб.

Постоянную ставку, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, находим из уравнения:

$$160 \cdot (1+1,5 \cdot r) = 183,2$$

$$r=0,096667=9,67\%$$

Постоянная ставка, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, равна 9,67 % годовых.

#### Задача 3.

По формуле (1.2) при  $F=3500$ ;  $n=250/365$ ;  $r=0,24$  получаем:

$$P=3500 / (1+0,24 \cdot 250/365) = 3017,2$$

Сумма, получаемая заемщиком, составит 3 017 200 руб.

Сумма процентных денег равна  $(3\,500\,000 - 3\,017\,200) = 482\,800$  тыс. руб.

### Простые учетные ставки

#### Задача 1.

По формуле (2.6) при  $F=900$ ;  $F-P=60$ ;  $t=120$ ;  $T=360$  дней, получим :

$$d=60 \cdot 360 / (900 \cdot 120) = 0,20 = 20\%$$

Годовая учетная ставка при временной базе 360 дней в году равна 20% годовых.

#### Задача 2.

По формуле (2.8) вычислим множитель наращенения:

$$1 - (0,5 \cdot 0,30 + 0,5 \cdot 0,36 + 0,25 \cdot 0,38 + 0,25 \cdot 0,4) = 0,475$$

$$P=500 \cdot 0,475 = 237,50$$

Сумма, полученная владельцем векселя равна 237 500 руб.

По формуле 1.11 дисконт равен  $D=500-237,5=262,5$

Дисконт банка равен 262 500 руб.

### Сложные ссудные ставки

#### Задача 1.

Для решения воспользуемся формулами для вычисления наращенной суммы, если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет.

1) Схема сложных процентов - формула (3.4), считая полугодие базовым периодом;

$w=6; f = 3,25 \cdot 2 - 6 = 0,5; r=5\%:$

$$F = 5000 \cdot (1+0,05)^{6+0,5} = 6865,9$$

По схеме сложных процентов возвращаемая сумма равна 6865,9 долл.

2) Смешанная схема – формула (3.5), считая полугодие базовым периодом;

$w=6; f = 3,25 \cdot 2 - 6 = 0,5; r=5\%:$

$$F = 5000 \cdot (1+0,05)^6 \cdot (1+0,5 \cdot 0,05) = 6867,99$$

По смешанной схеме возвращаемая сумма равна 6867,99 долл.

### **Задача 2.**

Используем формулу (3.2) при  $r=0,34; n=7/12:$

$$P = 400 / (1 + 0,34)^{7/12} = 337,22$$

1 января 2010 г. должник должен иметь 337 220 руб.

1) используем формулу (2.1) при  $r=0,34; n=5/12:$

$$F = 400 \cdot (1 + 0,34)^{5/12} = 451,87$$

1 января 2011 г. должник должен иметь 451 870 руб.

2) 1 августа 2010 г. должник должен иметь 400 000 руб.

## **Сложные учетные ставки**

### **Задача 1**

Срок даты учета до даты погашения векселя равен 153 дня, число дней в году 365. По формуле (4.1) при  $F=100; d=0,07; n=153/365$

$$P = 100 \cdot (1 - 0,07)^{153/365} = 97,038$$

Владелец векселя получит 97 038 руб.

### **Задача 2.**

По формуле (4.6) при  $d1 = 16\%, d2 = 19\%, d3 = 23\%$  получаем:

$$F = \frac{20}{(1 - 0,16)^2 (1 - 0,19)^2 (1 - 0,23)} = 56,106$$

Нарощенная сумма равна 56106 руб.

Постоянную годовую учетную ставку  $d$ , дающую тот же результат, находим из равенства:

$$(1 - d)^5 = (1 - 0,16)^2 (1 - 0,19)^2 (1 - 0,23)$$

$$d = 0,1864$$

Постоянная ставка, которая дает тот же результат, равна 18,64% годовых.

## **Эквивалентные и эффективные ставки**

### **Задача 1**

По формуле (6.2) при  $r=0,08; m=1$

$$\delta = \ln(1 + 0,08) = 0,077$$

Таким образом, ежегодное начисление процентов по ставке 8% эквивалентно непрерывному начислению процентов по ставке 7,7 %.

### **Задача 2.**

По формуле (6.4) при  $r(e) = 0,09$ ;  $m=12$

$$r = 12 \cdot [(1 + 0,09)^{1/12} - 1] = 0,086$$

Таким образом, ежегодное начисление сложных процентов по ставке 9% годовых дает тот же результат, что и ежемесячное начисление сложных процентов по ставке 8,6 %.

## **Налоги и начисление процентов**

### **Задача 1.**

Обозначим через  $X$  необходимое число дней, тогда формула (8.2) запишется в виде:

$$F_t = P[(1+r(1-t)X/365)]$$

При  $F_t=280$ ;  $P=250$ ;  $r=0,14$ ;  $t=0,01$

$$280=250 \cdot [1+0,014 \cdot (1-0,01)X / 365]$$

Решая полученное уравнение относительно  $X$ , получаем:

$$X=316,017$$

Для накопления требуемой суммы необходимо 317 дней.

### **Задача 2**

Из формулы (8.2) выразим ставку налога на проценты

$$t = 1 - \frac{1}{nr} \left( \frac{F_t}{P} - 1 \right)$$

При  $F_t=62,8$ ;  $P=60$ ;  $r=0,1$ ;  $n=0,5$

$$t=0,067$$

Ставка налога на проценты равна 6,7%.

## **Финансовые ренты**

### **Задача 1.**

По формуле (9.1) при  $A=300$ ;  $r=10\%$ ;  $n=7$ :

$$FV=300 \cdot FM3(10\%,7)=300 \cdot 9,487=2846,1.$$

Через 7 лет на счете накопится 2846100 руб.

Величину однократного взноса в начале первого года находим по формуле (3.2, лабораторная работа Сложные ссудные ставки) при  $F=2846,1$ ;  $r=10\%$ ;  $n=7$ :

$$P=2846,1 \cdot FM2(10\%,7)=2846,1 \cdot 0,51 = 1450,44$$

Взнос равен 1450440 руб.

### **Задача 2.**

По формуле (3.1) (лабораторная работа Сложные ссудные ставки) при  $P=200000$ ;  $r=0,08$ ;  $n=4$  определим сумму, которая накопится на счете, если положить деньги в банк:

$$F1 = 200 \cdot (1 + 0,08)^4 = 272,098$$

По формуле (9.1) при  $A=50000$ ;  $r=8\%$ ;  $n=4$  определим будущую стоимость аннуитета постнумерандо:

$$FV = 50 \cdot FM3(8\%, 4) = 50 \cdot 4,5061 = 225,305$$

С учетом дополнительного вознаграждения в 25 млн. руб., при условии инвестирования 200 млн., на конец четвертого года на счете фирмы будет сумма, равная

$$F2 = 225,305 + 25 = 250,305$$

$F1 > F2$ , поэтому фирме выгодно положить деньги в банк и не принимать данное предложение.

## Определение параметров ренты

### Задача 1.

1 млн. руб. – это приведенная стоимость срочной ренты постнумерандо, срок ренты – 20 лет, выплаты по ренте – ежемесячные. Величину неизвестного платежа находим из формулы (11.2) при  $PV = 1\,000\,000$ ;  $n=20$ ;  $r=0,1$

$$A = 1\,000\,000 / FM4(10\%, 20)$$

$$A = 1\,000\,000 / 8,5136 = 117\,459,1$$

Ежегодно жена будет получать 117 459 руб.10 коп.

### Задача 2.

По формуле (10.3) при  $FV=3500$ ;  $A=600$ ;  $r=0,08$ :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{3500}{600} \cdot 0,08 + 1\right)}{\ln(1 + 0,08)}$$

$$n = 4,976443$$

Для создания фонда потребуется 5 лет.

## Конверсия и замена рент

### Задача 1.

По формуле (10.6) при  $A_1=2$ ;  $t=2$ ;  $r=0,2$ ;  $n_1=8$ ;  $n_2=11$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{FM4(20\%, 8)}{FM4(20\%, 11)} \cdot 1,2^2 = 2 \cdot \frac{3,8372}{4,3271} \cdot 1,2^2 = 2,5539$$

Платеж отложенной ренты равен 2,5539 млн.руб.

### Задача 2.

1) используем формулу (10.3), считая полугодие базовым периодом, при  $t=6$

$$PV=100 \cdot FM2(2\%,6) \cdot FM4(2\%,30)=100 \cdot 0,888 \cdot 22,3965=1988,809$$

Ренту можно приобрести за 1 988 809 руб.

2) используем формулу (12.3), считая полугодие базовым периодом при  $t=0$

$$PV=100 \cdot FM4(2\%, 30)=100 \cdot 22,3965=2239,65$$

Ренту можно приобрести за 2239650 руб.