

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

Учебное пособие
для студентов направления подготовки
12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика»

2018

Шандаров, Станислав Михайлович

Введение в оптическую физику : учебное пособие для студентов направления подготовки 12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика» / С.М. Шандаров; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. – Томск: ТУСУР, 2018. – 127 с.

В пособии изложены основы оптической физики – шкала электромагнитных колебаний, основы теории колебаний, описание электромагнитного излучения оптического диапазона, отражение и преломление плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела диэлектрических сред, интерференция монохроматического излучения, оптика анизотропных сред, теория дисперсии.

Предназначено для студентов обучающихся по направлению подготовки 12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика».

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ЭП
_____ С.М. Шандаров
«___» _____ 2018 г.

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

Учебное пособие
для студентов направления подготовки
12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика»

Разработчик
докт. физ.-мат. наук, проф.
каф. ЭП
_____ С.М. Шандаров
«___» _____ 2018 г.

| | |
|---|----|
| Введение | 6 |
| 1. Шкала электромагнитных колебаний | 7 |
| 2. Основы теории колебаний | 9 |
| 2.1. Линейные колебания в системах с одной степенью свободы | 10 |
| 2.1.1. Линейный осциллятор | 10 |
| 2.1.2. Затухающие колебания | 13 |
| 2.1.3. Вынужденные колебания | 15 |
| 2.1.4. Заключительные замечания | 15 |
| 2.2. Изображение колебательных процессов в фазовом пространстве | 16 |
| 2.2.1. Фазовый портрет гармонических колебаний | 19 |
| 2.2.2. Фазовый портрет системы с мнимыми собственными частотами ($\omega_0^2 < 0$) | 20 |
| 2.2.3. Фазовые траектории затухающих и нарастающих колебаний | 21 |
| 2.2.4. Собственные колебания нелинейной консервативной системы | 26 |
| 3. Описание электромагнитного излучения оптического диапазона | 28 |
| 3.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме | 28 |
| 3.2. Материальные уравнения | 29 |
| 3.3. Граничные условия | 30 |
| 3.4. Волновое уравнение для немагнитной безграничной среды | 30 |
| 3.5. Одномерное волновое уравнение | 31 |
| 3.6. Плоские скалярные волны | 32 |
| 3.7. Гармонические волны | 32 |
| 3.8. Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении | 34 |
| 3.9. Электромагнитные плоские волны | 35 |
| 3.10. Поляризация плоских электромагнитных волн | 37 |
| 3.11. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга | 39 |
| 3.12. Усреднение по времени энергетических характеристик поля | 40 |
| 3.13. Сферические электромагнитные волны | 42 |
| 4. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела диэлектрических сред | 43 |
| 4.1. Поляризация волн, нормальная к плоскости падения | 44 |
| 4.2. Поляризация волн в плоскости падения | 46 |
| 4.3. Анализ формул Френеля | 47 |
| 4.3.1. Отражение света при падении из менее плотной среды на более плотную. Угол Брюстера | 47 |
| 4.3.2. Отражение света при падении из более плотной среды на менее плотную. Полное внутреннее отражение | 49 |
| 5. Интерференция света | 52 |
| 5.1. Интерференция монохроматического излучения | 53 |
| 5.1.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн | 53 |
| 5.1.2. Интерференция двух сферических монохроматических волн | 56 |
| 5.2. Когерентность световых волн | 57 |
| 5.2.1. Временная когерентность | 58 |
| 5.2.2. Пространственная когерентность | 63 |
| 5.3. Методы наблюдения интерференционных картин | 64 |

| | |
|--|------------|
| 5.3.1. Метод деления амплитуды..... | 65 |
| 5.3.2. Метод деления волнового фронта | 71 |
| 5.3.3. Двухлучевые интерферометры | 74 |
| 5.3.4. Измерение угловых размеров источников. Звездный интерферометр | 77 |
| 6. Оптика анизотропных сред..... | 78 |
| 6.1. Эффекты взаимодействия оптического излучения с веществом и их классификация | 78 |
| 6.2. Материальные уравнения для анизотропных сред..... | 81 |
| 6.3. Симметричные тензоры второго ранга в различных средах..... | 82 |
| 6.4. Тензор диэлектрической восприимчивости | 84 |
| 6.5. Материальные уравнения с учетом временной дисперсии диэлектрической проницаемости | 85 |
| 6.6. Пространственная дисперсия | 87 |
| 6.7. Световые волны в прозрачных немагнитных кристаллах | 89 |
| 6.7.1. Волновое уравнение | 89 |
| 6.7.2. Световые волны в оптически неактивных изотропных средах..... | 90 |
| 6.7.3. Световые волны в изотропных непоглощающих средах с естественной оптической активностью..... | 91 |
| 6.7.4. Световые волны в средах с линейным двулучепреломлением | 97 |
| 6.8. Искусственная анизотропия | 102 |
| 6.8.1. Электрооптическая модуляция оптического излучения | 102 |
| 6.8.2. Квадратичный электрооптический эффект | 110 |
| 6.8.3. Фотоупругий эффект..... | 112 |
| 6.8.4. Эффект Фарадея..... | 113 |
| 7. Теория дисперсии | 114 |
| 7.1. Распространение волновых пакетов. Групповая скорость | 115 |
| 7.2. Поглощение света. Закон Бугера | 118 |
| 7.3. Нормальная и аномальная дисперсия | 119 |
| 7.4. Дисперсия вдали от линий поглощения | 123 |
| Список использованной литературы..... | 126 |

Введение

Свет является важнейшим носителем информации для многих живых существ с момента рождения. Использование света человеком в своих целях началось, по-видимому, с незапамятных времен. Интерес к природе света и расширению возможностей его использования растет и сейчас, когда знаний об этом накоплено очень много. Что же из этих знаний является предметом нашего изучения? Начнем с рассмотрения терминологии, принятой в настоящее время.

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, и законы ее движения. Физика относится к точным наукам и изучает количественные закономерности явлений.

Слово «Физика» происходит от греческого *physis* – природа.

Оптика – раздел науки и техники, в котором изучаются оптическое излучение (свет), процессы его распространения и явления, наблюдаемые при взаимодействии света и вещества.

Слово «Оптика» – от греческого *opto's* – видимый, зримый.

Оптику принято подразделять на геометрическую, физическую и физиологическую. *Геометрическая оптика* использует представление о распространяющихся независимо друг от друга световых лучах, преломляющихся и отражающихся на границах сред с различными оптическими свойствами и прямолинейных в оптически однородной среде. *Физиологическая оптика* изучает закономерности восприятия света (*видимого диапазона*) человеческим глазом. После обнаружения терапевтического воздействия узкополосного светового излучения на организмы живых существ закономерности распространения света в тканях и его воздействия на биологические объекты также стали предметом изучения физиологической оптики. *Физическая оптика* рассматривает проблемы, связанные с природой света и световых явлений.

Оптическая физика связывает воедино вопросы геометрической, физиологической и физической оптики, связанные с общими закономерностями оптических явлений в природе, науке и технике и с их количественным описанием.

В настоящем учебном пособии, ориентированном на студентов и аспирантов, излагаются сведения по ряду разделов оптической физики, с использованием материалов, опубликованных в некоторых учебных пособиях и монографиях [1–12]. Основное внимание уделяется таким вопросам, как шкала электромагнитных

колебаний, основы теории колебаний, описание электромагнитного излучения оптического диапазона, отражение и преломление плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела диэлектрических сред, интерференция монохроматического излучения, оптика анизотропных сред, теория дисперсии.

1. Шкала электромагнитных колебаний

Оптическое излучение является результатом колебательных и волновых процессов, происходящих в материальных средах и при взаимодействии материальных частиц, причем его распространение происходит и в вакууме, когда материальная среда предполагается отсутствующей. Простейшей математической моделью колебательного процесса является *гармоническое колебание*

$$x(t) = a_m \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right), \quad (1.1)$$

где функция $x(t)$ описывает временную зависимость отклонения колебательной системы от положения равновесия. Гармоническое колебание характеризуется *амплитудой* a_m и *фазой* $\omega t + \varphi_0$, которая показывает состояние колебательного процесса в данный момент времени. *Угловая (круговая) частота* ω гармонического колебания измеряется в рад/с, а φ_0 *определяет его начальную фазу*. *Период* $T = 2\pi/\omega$ гармонического колебания (рис. 1.1) связан с *циклической частотой* (или просто *частотой*) f , измеряемой в Гц, как $T = 1/f$.

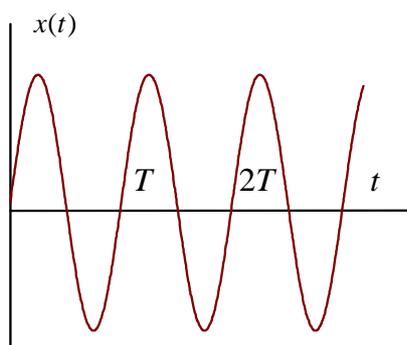


Рис. 1.1. Гармоническое колебание для $\varphi_0 = -\pi/2$

Частота гармонических колебаний зависит от параметров колебательной системы. Например, для качелей она может составлять доли Гц, для колебательных контуров радиоприемников – кГц и сотни МГц. Колебания атомов в молекулах могут происходить с частотами, превышающими ТГц, а для электронных оболочек атомов вполне доступны частоты колебаний в 10^{15} Гц.

Колебания электрически заряженных частиц приводят к колебаниям электрического поля и возникновению переменного тока, который порождает переменное магнитное поле. Таким образом возникают *электромагнитные колебания*. Переменное во времени электромагнитное поле вызывает распространение в

окружающем пространстве *электромагнитных волн*, во-первых, переносящих энергию, и, во-вторых, часто играющих роль носителей информации. В вакууме электромагнитные волны распространяются со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Для волны, порождаемой гармоническим колебанием, электромагнитное поле является периодическим с пространственным периодом $\lambda = cT = c/f$, называемым длиной волны.

Шкалу электромагнитных колебаний, то есть область возможных значений их частот f (длин волн λ), принято разделять на несколько диапазонов, перекрывающихся между собой. Часть этой шкалы, примыкающей к оптическому диапазону, показана на рис. 1.2.

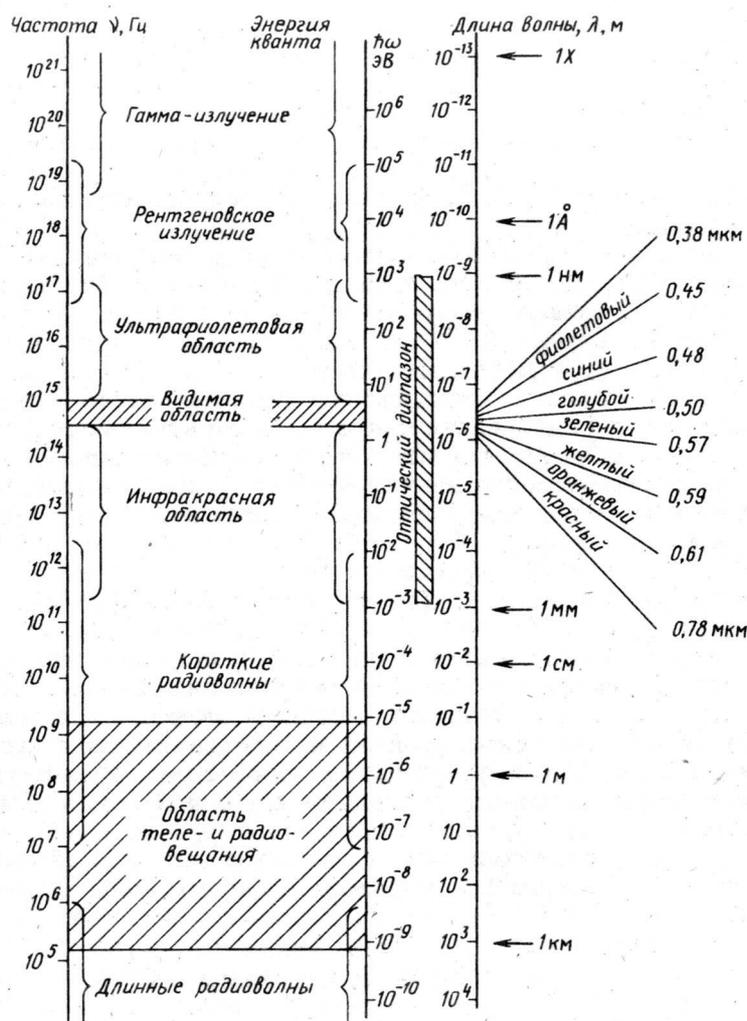


Рис. 1.2. Шкала электромагнитных колебаний

Диапазон *радиоволн* охватывает частоты от 3 кГц до 3 ТГц (длины волн от 100 км до 0.1 мм), и включает сверхдлинные волны (3–30 кГц, 100–10 км); длинные волны (30–300 кГц, 10–1 км); средние волны (0.3–3 МГц, 1000–100 м); короткие (3–30 МГц, 100–10 м) и ультракороткие волны (30 МГц – 1 ТГц, 10 м – 0,3 мм). В свою очередь, Ультракороткие волны подразделяются на поддиапазоны метровых (30–300 МГц, 10–1 м), дециметровых (0,3–3 ГГц, 10–1 дм), сантиметровых (3–30 ГГц, 10–1 см), миллиметровых (30–300 ГГц, 10–1 мм) и субмиллиметровых волн (0,3–3 ТГц, 1–0.1 мм).

К *оптическому* диапазону относят излучение с длинами волн от 1 мм до 1 нм ($3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{17}$ Гц); он подразделяется на *инфракрасную* (ИК), *видимую* и *ультрафиолетовую* (УФЛ) области (см. рис. 1.2). Видимому свету соответствует область длин волн от 0,78 до 0,38 мкм.

Следует отметить, что в устройствах фотоники наряду с излучением оптического диапазона (носитель информации – фотоны) используется и более низкочастотное излучение. В частности, чтобы передать информацию в оптическом диапазоне, свет нужно промодулировать, то есть наложить на него полезный сигнал, который, как правило, является электрическим. Пример – кодовые последовательности импульсов в компьютерных сетях. Такие устройства, использующие не только фотоны, но и электроны, называют оптоэлектронными.

Другой пример – устройства хранения информации на оптических дисках. Считывание и запись информации осуществляется излучением полупроводникового лазера, в котором электрическая энергия, носителем которой являются электроны, преобразуется в оптическое излучение.

В связи с этим, нас будут интересовать и электромагнитные колебания и волны в целом, а не только относящиеся к оптическому диапазону. Кроме того, колебательные и волновые процессы различной природы имеют много общего, и для их описания можно использовать универсальные математические модели.

2. Основы теории колебаний

С колебательными и волновыми процессами мы встречаемся повсеместно. Колебания совершаются различными механическими маятниковыми системами; в природе наблюдаются смена дня и ночи, изменения численности хищных и травоядных животных в регионе и другие периодические процессы; в некоторых химических

реакциях происходят колебания цвета реактивов. Особенно важную роль колебания играют в электронике и фотонике. Колебания совершаются в колебательном контуре, СВЧ–резонаторе, активном веществе лазера, кварцевом резонаторе часов. В газоразрядной и твердотельной плазме существуют плазменные колебания.

С колебаниями тесно связаны волновые процессы. Когда размеры колебательной системы d существенно превышают длину волны λ , колебания начинают происходить не только во времени, но и в пространстве. Мы переходим в этом случае от *сосредоточенных* колебательных систем к *распределенным* (от $\lambda \gg d$ к $\lambda \ll d$). Волны на воде, в воздухе, в твердом теле – акустические, в плазме – плазменные. Особое место занимают *электромагнитные волны*, которые могут распространяться и в вакууме.

Однако нет необходимости изучать различные типы колебаний и волн в отдельности. В нашем, курсе мы воспользуемся тем, что *основные законы колебательных и волновых процессов, встречающихся в природе, физике, электронике и технике одинаковы*. Наша задача состоит в изучении *колебательных и волновых процессов с единой точки зрения*. Нас интересуют *общие закономерности таких процессов и общие методы их описания*. Знакомство с конкретными видами колебаний и волн ждёт вас в дальнейших курсах.

2.1. Линейные колебания в системах с одной степенью свободы

2.1.1. Линейный осциллятор

Число независимых переменных величин, необходимых для полного описания процессов в системе, есть число степеней свободы. Рассмотрим малые колебания, которые консервативная механическая система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. В одномерном случае потенциальная энергия $U(x)$ вблизи положения равновесия x_0 представляет "потенциальную яму" (рис. 2.1). Образно можно положить в эту "яму" шарик (его моделью является *материальная точка*) и наблюдать за его колебаниями.

Естественно, что любая механическая система может быть описана следующим образом (математический маятник, физический маятник, крутильный маятник; шарик от пинг-понга, отскакивающий от горизонтальной поверхности; двухатомная молекула, и т.д.).

Отклонение системы от положения с минимальной потенциальной энергией $U(x_0)$ приводит к возникновению возвращающей силы (рис. 2.2).

$$F_v = -\frac{dU}{dx} x^0 = -\frac{dU}{dx} = -F_v x^0. \quad (2.1)$$

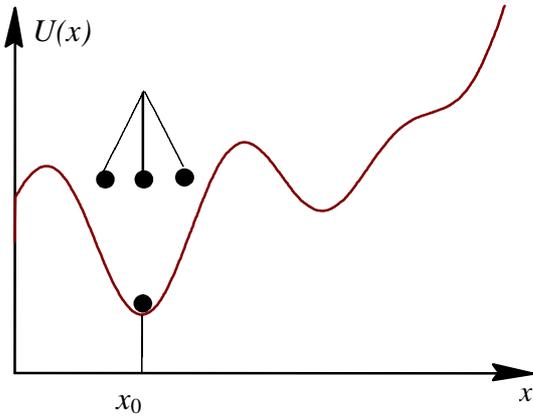


Рис. 2.1.

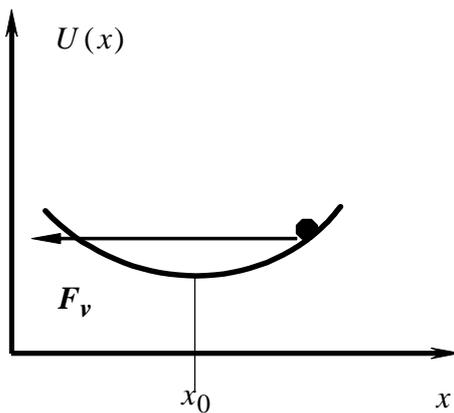


Рис.2.2.

При малых отклонениях системы от положения равновесия можно разложить разность $U(x) - U(x_0)$ по степеням $x - x_0$ по формуле Тейлора и сохранить в разложении первый не исчезающий член. Поскольку $dU/dx = 0$ при $x = x_0$, таковым является член второго порядка

$$U(x) - U(x_0) \cong \frac{k}{2}(x - x_0)^2, \quad (2.2)$$

где $k = U''(x_0)$ – положительный коэффициент, определяемый второй производной от функции $U(x)$ по x в точке $x = x_0$. Будем полагать в дальнейшем для простоты $U(x_0) = 0$ и $x_0 = 0$. В этом случае

$$U(x) = k \frac{x^2}{2}. \quad (2.3)$$

Кинетическая энергия такой системы с одной степенью свободы имеет вид

$$T(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (2.4)$$

где m – масса колеблющегося «шарика».

Заметим, что колебательную систему, в которой потенциальная энергия описывается соотношением (2.3), называют *линейным* (или *гармоническим*) *осциллятором*.

Как найти уравнение движения линейного осциллятора? Можно воспользоваться вторым законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_v. \quad (2.5)$$

Учитывая, что ускорение при одномерном движении вдоль оси x равно $\mathbf{a} = x^0 \ddot{x}$ и используя соотношения (2.1) и (2.3), получаем

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.6)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.7)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Мы получили, что *одномерный линейный осциллятор описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Решение этого уравнения хорошо известно:

$$x(t) = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t), \quad (2.8)$$

где $p_1 = \pm i\omega_0$ – корни характеристического уравнения

$$p^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (2.9)$$

Другой вид решения уравнения (2.7) позволяет описать колебательный процесс с помощью тригонометрических функций:

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t = a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.10)$$

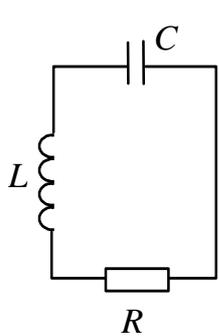
где $a_m = \sqrt{a^2 + b^2}$ – амплитуда колебаний, $\varphi_0 = -\arctg(b/a)$ – начальная фаза колебаний, а аргумент косинуса $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний и ω_0 – частота колебаний.

Как нам уже известно, такие колебания называются гармоническими.

Чем определяются параметры колебания ω_0 , A и B , или ω_0 , a_m и φ_0 ? Согласно выражению $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ частота колебаний определяется только свойствами механической системы. Напротив, произвольные постоянные A и B , a_m и φ_0 определяются начальными условиями $x(t_1) = x_1$, $\dot{x}(t_2) = v_2$. Отметим, однако, что независимость частоты ω_0 от начальных условий связана с малостью колебаний и называется *изохронностью*. При переходе к более высоким приближениям (большим амплитудам) колебания могут стать неизохронными, как мы увидим в дальнейшем.

2.1.2. Затухающие колебания

Другой подход к описанию колебаний рассмотрим на примере электрических колебаний в последовательном колебательном контуре (рис. 2.3).



Просуммируем напряжения на элементах контура, выражая их через заряд q :

$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_C &= 0, \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рис. 2.3. Преобразуем уравнение (2.11) к виду

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (2.12)$$

где $\gamma = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Обратим внимание, что при $R = 0$ мы получаем из (2.12) уравнение свободных колебаний линейного осциллятора (2.7). В этом случае колебания заряда в контуре (заряда емкости C) совершенно аналогичны механическим колебаниям малой амплитуды в консервативной системе. При $R \neq 0$ в системе возникают омические потери, и она перестает быть консервативной.

Мы снова имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами – *уравнение свободных колебаний* (2.12). Его решение дается выражением (2.8) при характеристическом уравнении

$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0. \quad (2.13)$$

Его корни

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.14)$$

являются комплексно-сопряженными при $\omega_0 > \gamma$ (рис. 2.4):

$$p_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (2.15)$$

В этом случае решение уравнения (2.12) имеет вид

$$q(t) = a_m \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (2.16)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Для $q(0)=0$ решение $q(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.5. Это затухающие колебания, близкие к гармоническим.

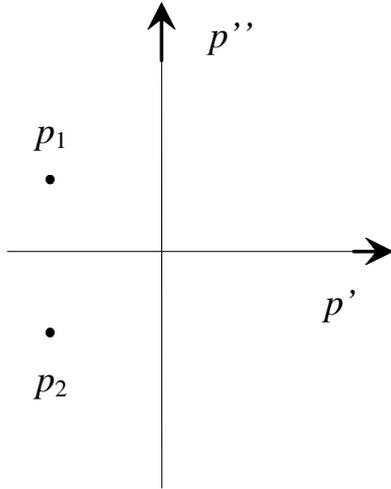


Рис. 2.4.

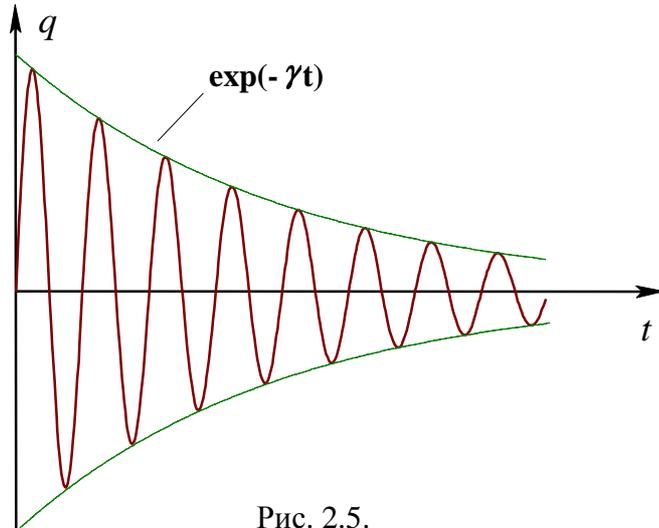


Рис. 2.5.

Поэтому часто эти колебания называют *гармоническими затухающими колебаниями*. Это не совсем точно – такие колебания не являются в строгом смысле гармоническими. Они даже не являются периодическими, когда

$$q(t + nT) = q(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.17)$$

где T – период колебаний (рис. 2.6). Для гармонических колебаний вида (2.10), как отмечалось выше

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}, \quad (2.18)$$

где $f_0 = \omega_0/2\pi$ – частота колебаний.

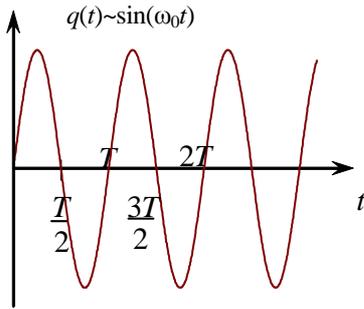


Рис. 2.6.

Как описать затухающие колебания в механической системе? Очевидно, также с помощью уравнения вида (2.12). Как можно ввести затухание? Обратимся к уравнению (2.5), выражающему второй закон Ньютона. Какую силу нужно ввести в (2.5), чтобы учесть потери? Обычно ее называют силой трения, и она пропорциональна скорости в первом неисчезающем члене разложения (на неподвижное тело сила трения не действует):

$$F_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x}. \quad (2.19)$$

Итак, вводя силу трения в уравнение (2.5), получаем уравнение свободных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.20)$$

где $\gamma = \alpha/2m$.

2.1.3. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания происходят в системе под действием внешней силы, которую также можно ввести в уравнение (2.20):

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_i(t). \quad (2.21)$$

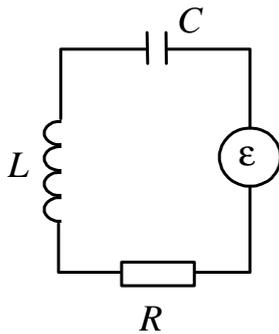


Рис. 2.7.

Это уравнение вынужденных колебаний является уже неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. В последовательном колебательном контуре вынуждающая сила $F_i(t) = \epsilon(t)/L$ может быть учтена введением внешнего источника э.д.с. (рис. 2.7).

2.1.4. Заключительные замечания

Заметим, что линейные колебательные системы с n степенями свободы описываются линейными дифференциальными уравнениями порядка $2n$.

В электронике большую роль играют нелинейные колебательные системы, которые содержат нелинейные элементы и описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В частности, все устройства, генерирующие электрические колебания, содержат нелинейные элементы наряду с колебательными системами.

В рассмотренном выше колебательном контуре собственная частота ω_0 является действительной величиной $\omega_0^2 > 0$, а $\gamma > 0$ – положительна. Естественно предположить, что в общем случае собственные частоты могут быть и мнимыми, тогда $\omega_0^2 < 0$. Если вместо омических потерь в контур будет вноситься э.д.с., пропорциональная току контура, то мы получим "отрицательное сопротивление" R , что означает $\gamma < 0$. Поэтому не будем накладывать ограничений на ω_0 и γ в общем рассмотрении.

2.2. Изображение колебательных процессов в фазовом пространстве

Решение уравнения (2.20) хорошо известно и может быть легко получено как в общем случае, так и при отсутствии вынуждающей силы (свободные колебания) $F(t)=0$; при отсутствии потерь, когда $\gamma=0$. Однако большинство реальных колебательных систем описываются более сложными уравнениями. В этом случае аналитического решения уравнений колебаний можно и не получить. Мощным средством исследования нелинейных систем является анализ движений колебательной системы в фазовом пространстве. Для систем с одной степенью свободы оно вырождается в фазовую плоскость. Познакомимся подробнее с этим методом на примере *свободных колебаний в линейной системе*. Уравнение свободных колебаний найдем из (2.21):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.22)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t), \quad (2.23)$$

где p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения

$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0. \quad (2.24)$$

Отсюда находим

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (2.25)$$

Единственное решение уравнения (2.22) определяется из начальных условий для $x(t_0)$ – координаты, и $\dot{x}(t_0)$ – скорости. В этом случае получаются два уравнения для двух произвольных постоянных A и B .

Таким образом, динамическое состояние системы однозначно определено двумя переменными: координатой и скоростью. Представим себе декартову плоскость (x, y) , где по оси абсцисс откладывается координата x , а по оси ординат – соответствующая x скорость, $\dot{x} = y$.

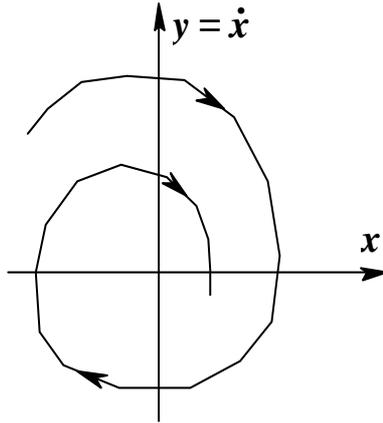


Рис. 2.8.

Точка с координатами $x(t)$, $y(t)$ называется *изображающей точкой*. Из уравнения колебаний (например, из (2.20)) можно получить уравнение, связывающее непосредственно x и y – уравнение кривой, которую называют *фазовой траекторией* или *интегральной кривой* на фазовой плоскости. В частности, для уравнения (2.20) второго порядка запишем два дифференциальных уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -(2\gamma y + \omega_0^2 x). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Перейдем отсюда к уравнению, не содержащему времени, разделив второе уравнение на первое:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\gamma y + \omega_0^2 x}{y}. \quad (2.27)$$

Решение этого уравнения $y=f(x,C)$, где C – константа, дает семейство фазовых траекторий. Это семейство представляет все возможные процессы в данной системе.

В общем случае для любой системы с одной степенью свободы можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y = Q(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d^2x}{dt^2} = P(x, y) \end{aligned} \quad (2.28)$$

где P и Q – известные функции от x и y . Уравнение фазовых траекторий найдем из (2.28):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (2.29)$$

Если функция P/Q ограничена и однозначна в некоторой области плоскости (x, y), то по теореме Коши при данных x и y есть только одно единственное решение уравнения (2.29). *Через такую точку проходит только одна фазовая траектория и они не могут пересекаться. В точках, где эти условия не выполняются, фазовые траектории могут пересекаться.*

Состояния равновесия соответствуют нулевым значениям скорости $\dot{x} = y = 0$ и ускорения $\dot{y} = 0$. Из (2.28) следует, что равновесие имеет место в точках x_0 и y_0 , где выполняются условия

$$P(x_0, y_0) = 0, Q(x_0, y_0) = 0. \quad (2.30)$$

В этих точках функция P/Q имеет неопределенное значение, поэтому они являются *особыми точками* дифференциального уравнения фазовых траекторий (2.29). Отсюда следует: *состояния равновесия соответствуют особым точкам* дифференциального уравнения фазовых траекторий.

Состояние равновесия системы, описываемой уравнением (2.28), имеет место при $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, т.е. в начале координат на фазовой плоскости. Точка $x_0 = 0, y_0 = 0$ является особой точкой и через нее может проходить несколько фазовых траекторий.

Отметим особенности движения изображающей точки по фазовой траектории во времени, которые облегчат нам анализ картины кривых:

1. В верхней полуплоскости, при $y > 0$ изображающая точка движется всегда вправо ($dx/dt > 0$).
2. В нижней полуплоскости ($y < 0$) точка всегда движется влево ($dx/dt < 0$).
3. Фазовая траектория пересекает ось абсцисс $y=0$ всегда под прямым углом ($dy/dx = \infty = \operatorname{tg} \alpha$) и эта точка пересечения не может быть точкой перегиба.

Рассмотрим ниже конкретные примеры фазовых траекторий.

2.2.1. Фазовый портрет гармонических колебаний

Как из (2.22) получить уравнение гармонического осциллятора? Нужно положить $\gamma=0$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня на комплексной плоскости (рис. 2.9): $p = p' + ip''$, $p = \pm i\omega_0$. Решение этого уравнения вам хорошо известно как гармоническое колебание:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

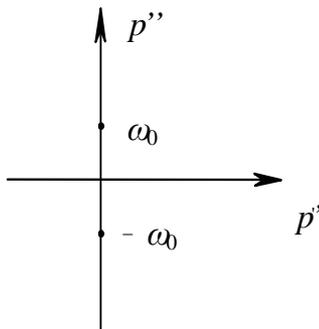


Рис. 2.9.

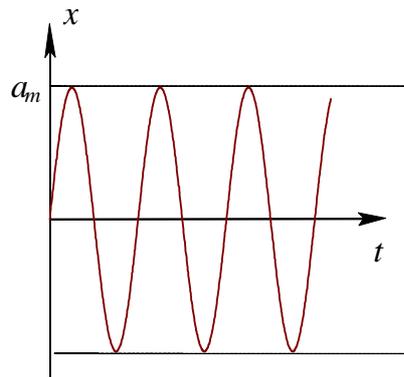


Рис. 2.10.

Для $x(0)=0$ временная зависимость $x(t)$ представлена на рис. 2.9.

Уравнение фазовых траекторий при $\gamma=0$ находим из (2.27):

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}. \quad (2.31)$$

Интегрируя (4.31), находим

$$y^2 + \omega_0^2 x^2 = C. \quad (2.32)$$

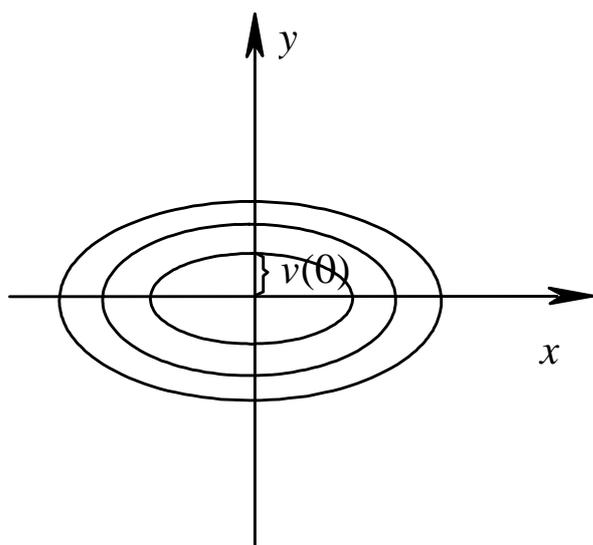


Рис. 2.11.

Видим, что фазовый портрет гармонических колебаний есть семейство эллипсов с центром в начале координат – *особой точкой* (рис. 2.11). Легко видеть, что константа C имеет смысл квадрата скорости v^2 в точке $x=0$:

$$\frac{y^2}{v^2} + \frac{x^2}{v^2/\omega_0^2} = 1. \quad (2.33)$$

Время, за которое изображающая точка обходит эллипс, равно периоду колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ и одинаково для всех эллипсов.

Состояние равновесия имеет место при

$x_0=0, y_0=0$; соответствующая ему *особая точка* называется **центром**.

2.2.2. Фазовый портрет системы с мнимыми собственными частотами ($\omega_0^2 < 0$)

Если возвращающая сила имеет то же направление, что и сила инерции, то уравнение колебаний принимает вид

$$\ddot{x} - |\omega_0^2| x = 0. \quad (2.34)$$

Характеристическое уравнение имеет корни $p_{1,2} = \pm |\omega_0|$ (рис. 2.12). Для начального условия $x(0)=0$ решение (2.34) имеет вид

$$x = a \operatorname{sh}(\omega_0 t), \quad (2.35)$$

и является неустойчивым, экспоненциально нарастая при $t \rightarrow \infty$.

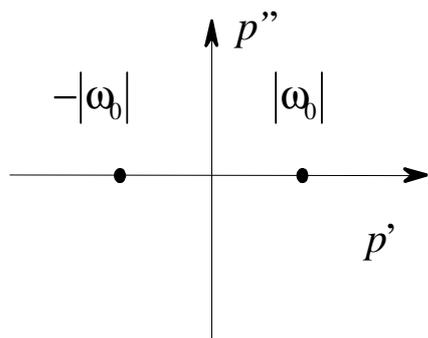


Рис. 2.12.

Из (2.34) находим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = |\omega_0^2| \frac{x}{y}. \quad (2.36)$$

Интегрирование уравнения (2.36) дает уравнение фазовых траекторий

$$y^2 - |\omega_0|^2 x^2 = C. \quad (2.37)$$

При $C = 0$ отсюда следуют уравнения двух прямых

$$y = \pm |\omega_0| x, \quad (2.38)$$

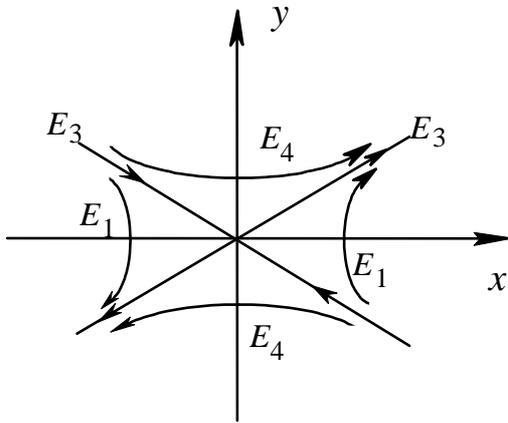


Рис. 2.13.

называемых *сепаратрисами*. Остальные фазовые траектории около особой точки будут гиперболами (рис. 2.13). Кривые E_1 соответствуют движениям, не доходящим до состояния равновесия. Кривые E_3 и E_4 соответствуют движениям, когда система проходит положение равновесия и далее продолжает движение в том же направлении. Кривая E_3 разделяет эти две области с различным характером движения (сепарирует).

Особая точка, соответствующая неустойчивому положению равновесия в этом случае, называется *седлом*.

2.2.3. Фазовые траектории затухающих и нарастающих колебаний

При наличии потерь $\gamma > 0$ и характеристическое уравнение имеет два корня в левой полуплоскости (рис. 2.14). Однако характер колебаний будет зависеть от соотношения между ω_0 и γ . Для $\omega_0 > \gamma$ решение уравнения (2.22) имеет вид *затухающих гармонических колебаний*

$$x(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (2.39)$$

где $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Для $x(0)=0$ функция $x(t)$ представлена на рис. 2.15.

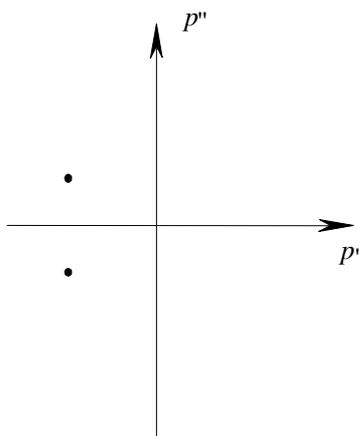


Рис. 2.14.

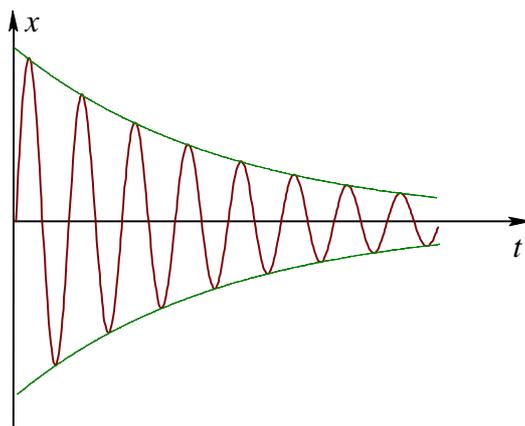


Рис. 2.15.

Уравнение фазовых траекторий имеет вид (2.27). Очевидно, что при малом затухании, когда $\gamma \ll \omega_0$, фазовый портрет здесь должен быть близок к таковому для гармонического колебания. Однако система должна стремиться к состоянию равновесия $x=0$, $y=0$. Поэтому фазовый портрет представляет для затухающего колебания скручивающуюся спираль (рис.2.16) почти эллиптической формы. При пересечении оси ординат $x=0$ из (2.27) находим, что наклон всех траекторий одинаков, $dy/dx = -2\gamma$, при $x=0$. Как уже отмечалось выше, ось абсцисс $y=0$ пересекается фазовыми траекториями под прямым углом. Из любого начального положения изображающая точка с течением времени приближается к состоянию равновесия. Если начертим на фазовой плоскости одну спираль, то все остальные, не пересекаясь, будут вливаться в нее. Особая точка такого типа называется **устойчивым фокусом**

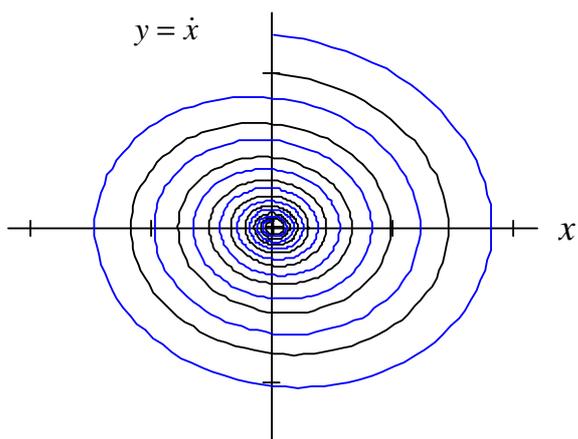


Рис. 2.16.

Если потери велики, $\gamma > \omega_0$, характеристическое уравнение будет иметь два действительных корня в левой полуплоскости. Решение для $x(t)$ будет аperiодическим

$$x(t) = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t).$$

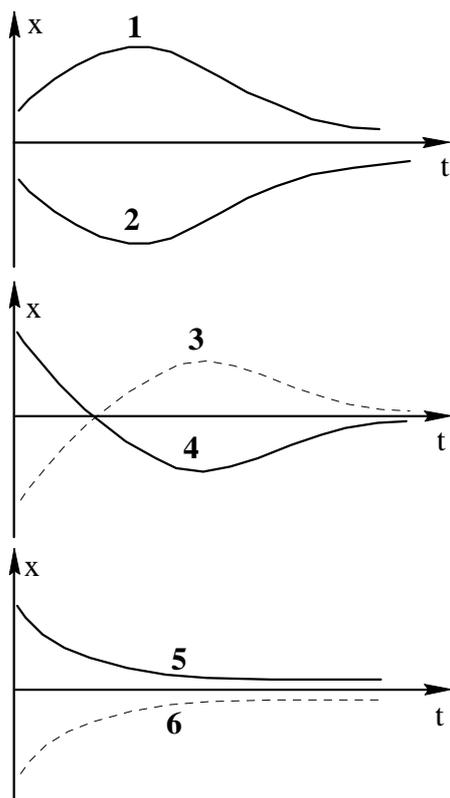


Рис. 2.17.

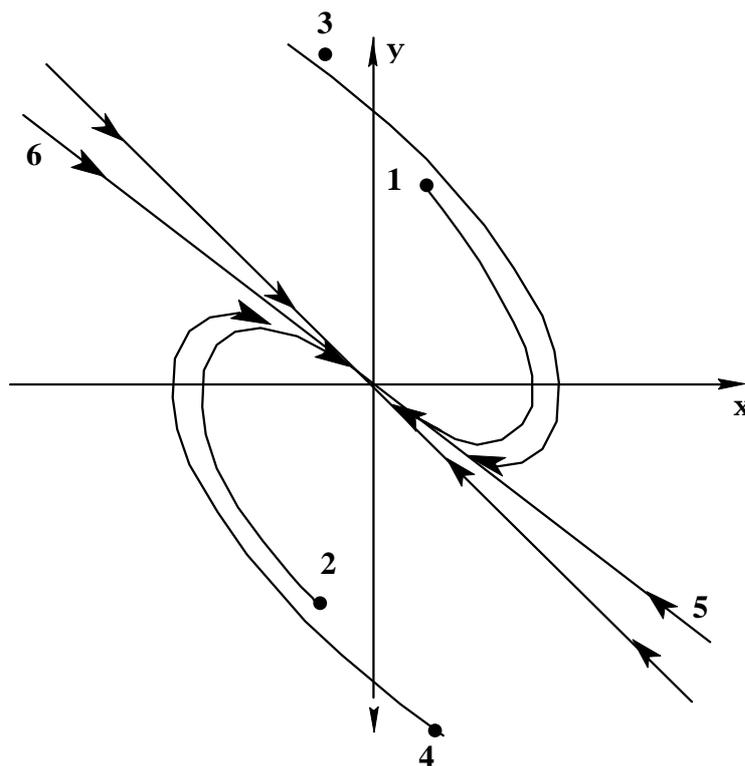


Рис. 2.18.

Система здесь может не более одного раза пройти через состояние равновесия, далее возвращаясь к нему. Характерные зависимости $x(t)$ для этого случая представлены на рис. 2.16. Фазовый портрет такого аperiodического процесса имеет вид (рис. 2.17). Особая точка в начале координат в этом случае носит название **устойчивый узел**.

Линейная колебательная система характеризуется только двумя параметрами: ω_0 и γ . При увеличении γ от нуля происходит следующая трансформация фазовой картины и особых точек:

- $\gamma = 0$ — центр;
- $0 < \gamma < \omega_0$ — устойчивый фокус;
- $\gamma > \omega_0$ — устойчивый узел.

Мы рассмотрели здесь колебания в системе с потерями. Если потери будут отрицательными, как изменится картина колебаний и ее фазовый портрет? Для малого отрицательного $|\gamma| \ll \omega_0$ корни характеристического уравнения будут расположены в правой полуплоскости (рис. 2.19); колебания будут нарастающими гармоническими

(рис. 2.20), а изображающая точка будет двигаться от равновесного положения по спиральной траектории (рис. 2.21).

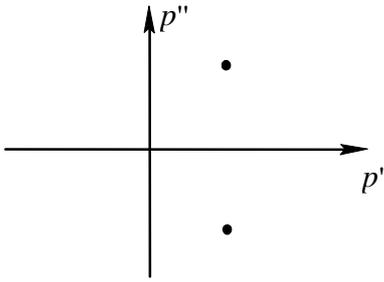


Рис. 2.19.

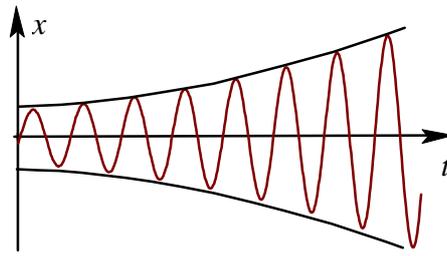


Рис. 2.20.

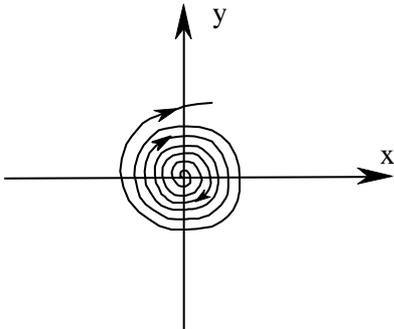


Рис. 2.21.

Особая точка в этом случае называется *неустойчивым фокусом*.

При большом отрицательном затухании $|\gamma| > \omega_0$ движение будет происходить из *неустойчивого узла* (рис. 2.22), а корни характеристического уравнения будут расположены на положительной части действительной оси (рис. 2.23).

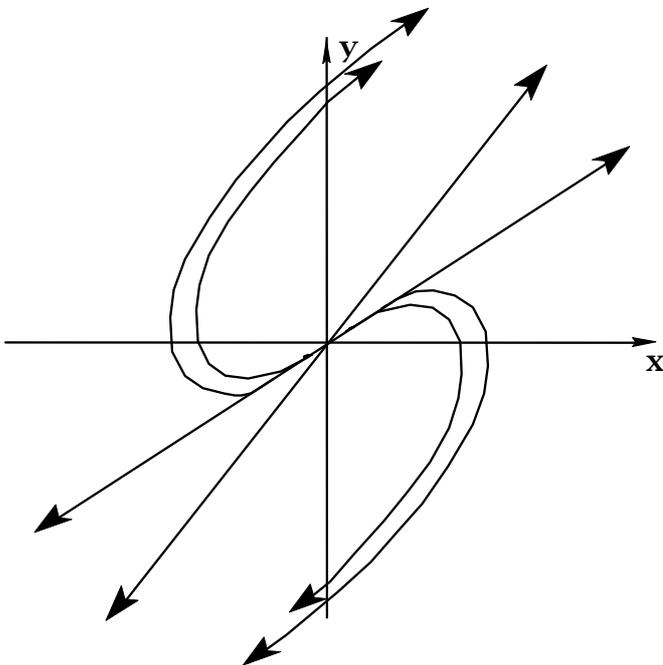


Рис. 2.22.

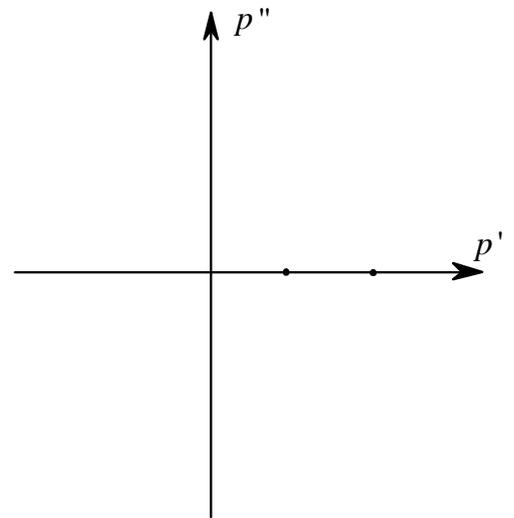


Рис. 2.23.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные варианты решения уравнения свободных колебаний в системе с одной степенью свободы, Эти результаты наглядно представлены на рис. 2.24.

Отметим, что устойчивые колебания имеют место только в первом квадранте, где корни характеристического уравнения имеют только отрицательную действительную часть. В более общем случае линейных систем с n степенями свободы это правило также остается справедливым. То есть, *линейная колебательная система является устойчивой, если корни ее характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть*. Важность этого правила состоит в том, что исследования колебательной системы на устойчивость можно осуществить и без решения соответствующего ей дифференциального уравнения.

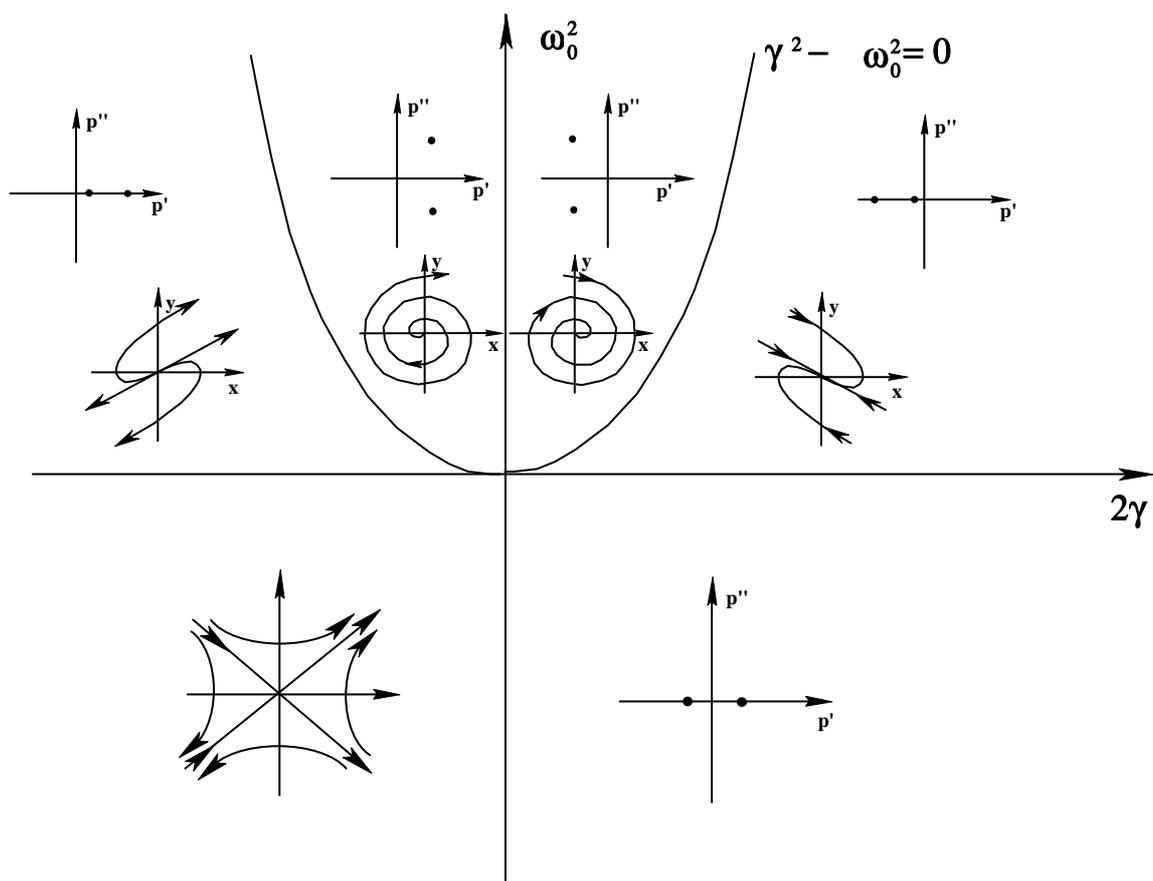


Рис. 2.24. Возможные виды решений общего уравнения свободных колебаний в колебательных системах с одной степенью свободы в зависимости от ее параметров

$$2\gamma \text{ и } \omega_0^2$$

2.2.4. Собственные колебания нелинейной консервативной системы

До сих пор мы анализировали поведение линейных колебательных систем. Для нелинейных систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, этот анализ представляет большие сложности. Обычно в каждом частном "нелинейном" случае приходится применять свой специальный прием. Рассмотрим здесь консервативную колебательную систему с нелинейной зависимостью возвращающей силы от смещения, но не зависящей от скорости. Общий вид уравнения в этом случае легко может быть получен в виде

$$m\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (2.40)$$

В качестве примера можно привести движение электрона в периодическом поле

$$\varphi = \varphi_0 \cos kx, \quad (2.41)$$

где $k = 2\pi/\Lambda$; Λ – период изменения поля. Такой вид имеет, например, поле голографической решетки при диффузионном механизме ее записи в фоторефрактивных кристаллах. Другой пример – поле в движущейся системе координат, связанной с электроном и замедленной электромагнитной волной (ускорители и лампы бегущей волны).

Возвращающая сила, действующая на электрон, является кулоновской силой

$$F_x = -eE_x = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e\varphi_0 k \sin kx, \quad (2.42)$$

откуда следует уравнение колебаний

$$m\ddot{x} + e\varphi_0 k \sin kx = 0. \quad (2.43)$$

Заметим, что при малых по сравнению с периодом поля Λ отклонениях x , когда $\sin kx \cong kx$, уравнение (2.43) описывает линейные колебания электрона

$$m\ddot{x} + e\varphi_0 k^2 x = 0,$$

совершаемые с частотой $\omega_0 = (2\pi/\Lambda) \sqrt{e\varphi_0/m}$.

Вернемся к уравнению (2.40). В консервативной системе энергия остается постоянной, поэтому удобно вести рассмотрение с помощью фазовой плоскости. Так как каждая фазовая траектория соответствует определенной величине энергии системы, то из закона сохранения энергии можно получить уравнение фазовой траектории. Действительно, умножая (2.40) на \dot{x} и интегрируя, получаем

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^x f(x)dx = E_0. \quad (2.44)$$

Здесь E_0 – начальный запас кинетической энергии при $x = x_0$. Потенциальная энергия системы в (2.44) определяется интегралом

$$U(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + U(x_0). \quad (2.45)$$

Вводя величину $E = E_0 + U(x_0)$ – начальный запас полной энергии системы, уравнение (2.44) перепишем в виде

$$y = \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}. \quad (2.46)$$

Уравнения (2.44) и (2.46) являются уравнением траектории системы на фазовой плоскости, поскольку дают зависимость y от x . Если для зависимости $U(x)$ данной системы известно аналитическое выражение или она дана графически, то траекторию на фазовой плоскости можно легко построить. Например, для $f(x) = e\varphi_0 k \sin kx$ имеем

$$U(x) = -e\varphi_0 \cos kx = \int_{x_0}^x e\varphi_0 k \sin kx dx + U(x_0), \quad (2.47)$$

$$y^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2e\varphi_0 \cos kx}{m}.$$

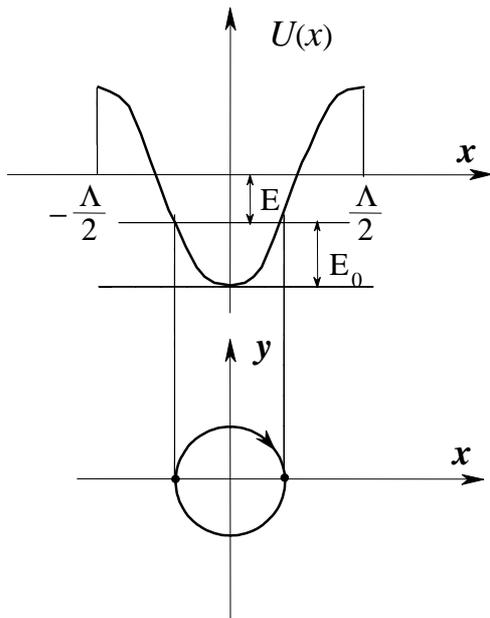


Рис. 2.25

В нашем случае

$$E = E_0 + U(x_0) = -e\varphi_0 + E_0,$$

$$y^2 = \frac{2E_0}{m} - \frac{2e\varphi_0}{m}(1 - \cos kx),$$

а функция $U(x)$ в интервале $x = [-\Lambda/2, \Lambda/2]$ имеет вид, иллюстрируемый рис. 2.25. Придавая E_0 определенные значения, из рис. 2.25 легко найти положения изображающей точки, при которых $E = U(x)$ и $y = 0$. Если изобразить графики $U(x)/m$ в масштабе с y , то по рис. 2.25 можно построить фазовую траекторию графическим методом.

Уравнение (2.46) позволяет определить и период колебаний в такой консервативной системе. Перепишем его в виде

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}. \quad (2.48)$$

Половина периода колебаний $T/2$ может быть найдена путем интегрирования (2.48), с учетом того, что он определяется временем прохода системы от одного крайнего положения x_1 до другого крайнего положения x_2 :

$$\frac{1}{2}T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}. \quad (2.49)$$

Величины x_1 и x_2 получаются из условия $y(E)=0$. В частности, для рассматриваемого конкретного примера из (2.47) находим

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{k} \text{Arc cos} \left[1 - \frac{E_0}{e\Phi_0} \right] = \pm \frac{1}{k} \text{Arc cos} \left(-\frac{E}{e\Phi_0} \right), \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{2}T = \int_{-\frac{\Lambda}{2\pi} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{E_0}{e\Phi_0} \right)}^{\frac{\Lambda}{2\pi} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{E_0}{e\Phi_0} \right)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_0 - e\Phi_0 (1 - \cos kx)]}}.$$

Из формул (2.49) и (2.50) видно, что в общем случае период колебаний (и частота ω_0) зависит от начальной энергии (т.е. от амплитуды колебаний). Поэтому в нелинейной системе в общем случае понятие собственной частоты колебаний теряет смысл.

*Зависимость частоты колебаний нелинейной консервативной системы от начальных условий называется **неизохронностью** собственных колебаний системы.*

3. Описание электромагнитного излучения оптического диапазона

Электромагнитные поля и волны являются важнейшим физическим объектом, как для фотоники и оптоинформатики, так и для квантовой и оптической электроники. Рассмотрим в данном разделе методы описания таких полей и волны в неограниченных диэлектрических средах.

3.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}_{\text{compl}} - \text{следствие закона Ампера, закона полного тока.} \quad (3.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея.} \quad (3.2)$$

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ – электрическое поле может иметь стоки и истоки. Ими являются электрические заряды с объемной плотностью ρ . (3.3)

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ – магнитное поле не имеет стоков и истоков, т.е. магнитные заряды в природе отсутствуют. (3.4)

В рамках классической электродинамики эти уравнения для векторов напряженности электрического и магнитного поля \vec{E} и \vec{H} , векторов электрической и магнитной индукции \vec{D} и \vec{B} являются строгими.

3.2. Материальные уравнения

Учитывают влияние материальной среды на связь между векторами поля. В обычных случаях используют идеализированные модели среды. В линейном приближении для изотропных сред, если можно пренебречь дисперсией, имеем

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3.6)$$

где $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ Ф/м; $\mu = \mu_r \mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Диэлектрическая и

магнитная проницаемости среды ϵ и μ здесь являются скалярными величинами, а векторы \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} параллельны друг другу. Кроме того, такая связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} является *локальной*. То есть значение вектора \vec{D} в данный момент времени t' в данной точке пространства \vec{r}' определяется значениями \vec{E} для тех же t' и \vec{r}' .

Как известно, полный ток состоит из 4-х составляющих:

$$\vec{\delta}_{\text{compl}} = \vec{\delta}_{\text{cond}} + \vec{\delta}_{\text{disp}} + \vec{\delta}_{\text{transf}} + \vec{\delta}_{\text{extr}}, \quad (3.7)$$

где плотности токов определяются выражениями:

$$\vec{\delta}_{\text{cond}} = \sigma \vec{E} \text{ – ток проводимости (закон Ома в дифференциальной форме),} \quad (3.8)$$

$$\vec{\delta}_{\text{disp}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ – ток смещения,} \quad (3.9)$$

$$\vec{\delta}_{\text{transf}} = \rho \vec{v} \text{ – ток переноса.} \quad (3.10)$$

Здесь σ – проводимость среды, $\vec{\delta}_{\text{cond}}$ – плотность тока проводимости и \vec{v} – скорость движения свободных зарядов. Сторонний ток с плотностью $\vec{\delta}_{\text{extr}}$ задается внешними источниками. Его роль может играть, например, диффузионный ток, созданный

вследствие неоднородности распределения объемного заряда ρ . Такое распределение ρ может быть получено при фотовозбуждении носителей заряда световым пучком в зону проводимости или при бомбардировке электронным пучком поверхности диэлектрика.

3.3. Граничные условия

Уравнения Максвелла пригодны в представленном виде для областей пространства, в пределах которых физические свойства среды (ϵ , μ и др.) непрерывны. На границах раздела сред I и II имеют место граничные условия:

$$E_{\tau}^I - E_{\tau}^{II} = 0, \quad (3.11)$$

$$D_n^I - D_n^{II} = \xi, \quad (3.12)$$

$$B_n^I - B_n^{II} = 0, \quad (3.13)$$

$$H_{\tau}^I - H_{\tau}^{II} = \eta. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.11) и (3.13) свидетельствуют, что тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля E_{τ} и нормальная составляющая вектора магнитной индукции B_n при переходе через границу раздела меняются непрерывно. Из (3.12) следует, что в этом случае нормальная составляющая вектора электрической индукции D_n изменяется на величину поверхностной плотности заряда ξ . В соответствии с (3.14), тангенциальный компонент вектора магнитной напряженности испытывает скачок на величину поверхностной плотности тока η . Необходимо учитывать, что векторы \vec{H}_{τ}^I и \vec{H}_{τ}^{II} ортогональны к направлению тока, текущего по границе раздела. Уравнения (3.12) и (3.13) выводятся на основании теоремы Гаусса; (3.11) и (3.14) – на основе применения теоремы Стокса к уравнениям Максвелла. Доказательства этих соотношений можно выполнить самостоятельно или найти в литературе (см., например, [1]).

3.4. Волновое уравнение для немагнитной безграничной среды

Рассмотрим немагнитную однородную среду, являющуюся непроводящей, в которой также отсутствуют сторонние токи и заряды. В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.18)$$

Первые два уравнения в данном случае образует замкнутую систему, причем одну из величин, характеризующих поле, можно отсюда исключить. Как это сделать? Применим к уравнению (3.16) операцию rot , и используем уравнение (3.15):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Используя далее соотношение $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$, и уравнение (3.17), получаем

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.20)$$

Аналогично можно найти уравнение и для \vec{H} :

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.21)$$

Данные уравнения называются волновыми, как и уравнение (3.19), которое является более общим, чем уравнения (3.20) и (3.21), и справедливым также для анизотропной среды, где условие $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ выполняется не всегда.

3.5. Одномерное волновое уравнение

Рассмотрим среду, в которой поле зависит только от координаты z . Из (3.20) получаем одномерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.22)$$

Отметим, что в данном случае из (3.17) получается уравнение,

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

откуда следует $E_z = \text{const}$. Такие решения нас не интересуют, и можно положить $E_z = 0$. То есть вектор \vec{E} колеблется в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, и может быть представлен в виде:

$$\vec{E} = \vec{e} \cdot E_t, \quad (3.23)$$

где \vec{e} – единичный вектор в плоскости xy , $E_t = |\vec{E}|$. Перепишем уравнение (3.22) с учетом (3.23) в виде скалярного одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = 0. \quad (3.24)$$

3.6. Плоские скалярные волны

Общее решение уравнения (3.24) представляет плоскую скалярную волну вида

$$E_t(z, t) = E_{t1} \left(t - \frac{z}{v} \right) + E_{t2} \left(t + \frac{z}{v} \right), \quad (3.25)$$

где $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ – скорость распространения волны вдоль оси z . Как представить себе такую волну? Предположим, что при $z = 0$ мы имеем источник поля, напряженность которого изменяется по закону $E_1(t)$, в общем случае произвольному. Тогда в области $z > 0$ имеем

$$E_t(z, t) = E_t \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad (3.26)$$

поскольку граничное условие (3.15) требует непрерывности тангенциальных компонент вектора \vec{E} . Это формальная сторона. А физическая? Мы имеем при $z > 0$ распространение сигнала вдоль оси z . Скорость распространения определяется соотношением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}. \quad (3.27)$$

Здесь $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ – скорость света в вакууме, n – показатель преломления среды.

3.7. Гармонические волны

Рассмотрим сигнал, заданный при $z = 0$ в виде:

$$E(t) = E_m \cos(\omega t + \psi) = \frac{E_m}{2} \left\{ \exp[i(\omega t + \psi)] + \exp[-i(\omega t + \psi)] \right\}. \quad (3.28)$$

Ему будут соответствовать гармонические плоские волны

$$E(z, t) = E_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi\right), \text{ при } z \geq 0,$$

$$E(z, t) = E_m \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v} z + \psi\right), \text{ при } z \leq 0, \quad (3.29)$$

распространяющиеся вдоль направлений $+z$ и $-z$.

Мгновенное значение $E(z, t)$ электрического поля в каждый момент времени и в каждой точке пространства определяется амплитудой E_m плоской волны и фазой

$$\varphi(z, t) = \omega t \mp kz + \psi. \quad (3.30)$$

Если E_m не зависит от координат x, y , то волна будет *однородной*. Здесь через $k = \frac{\omega}{v}$ мы обозначаем *волновое число*,

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}. \quad (3.31)$$

Геометрическое место точек, в которых фаза волны остается постоянной

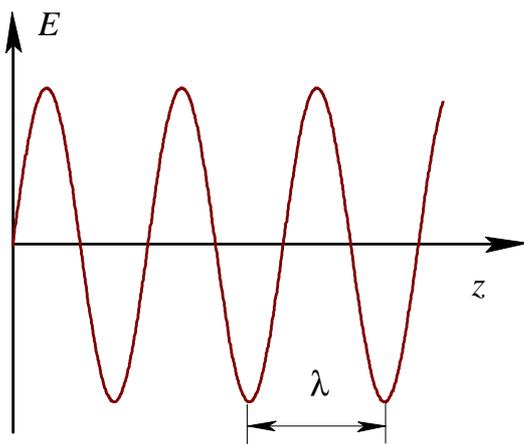


Рис. 3.1. Поле гармонической волны

$$\varphi = \omega t \mp kz + \psi = \text{const}, \quad (3.32)$$

называют *фазовым* или *волновым фронтом*. Для некоторого момента времени t' фазовый фронт рассматриваемой нами волны является плоскостью, перпендикулярной оси z . При изменении времени на Δt фазовый фронт волны сдвигается в пространстве на расстояние Δz . Отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = v$

определяет *фазовую скорость волны* –

скорость движения фазового фронта в пространстве, в данном случае вдоль оси z . Как изменяется поле плоской гармонической волны в фиксированный момент времени в пространстве? Очевидно, по косинусоидальному закону (рис. 3.1). Периодичность изменения поля в пространстве задается волновым числом k . Изменение фазы волны в пространстве на 2π соответствует прохождению волной расстояния λ : $\Delta\varphi = 2\pi = k\lambda$.

Отсюда получаем соотношения:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3.33)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{fn}, \quad (3.34)$$

где f – частота волны (в Гц).

3.8. Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении

Мы рассматривали выше волну, распространяющуюся вдоль оси z . Для волны в произвольном направлении необходимо использование более общего волнового уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Запишем сразу гармоническую плоскую волну, которая удовлетворяет данному уравнению

$$E_t(\vec{r}, t) = E_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (3.36)$$

Здесь мы для простоты считаем начальную фазу колебаний равной нулю ($\psi_0 = 0$) и вводим волновой вектор

$$\vec{k} = \vec{n} \frac{\omega}{v} = \vec{n} \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} (\vec{i}n_x + \vec{j}n_y + \vec{k}^0 n_z), \quad (3.37)$$

где \vec{n} – единичный вектор волновой нормали. Подставим выражение для $E_t(\vec{r}, t)$ в (3.35):

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) E_t - \mu\varepsilon \omega^2 E_t &= 0, \\ \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \mu\varepsilon \omega^2 \right) E_t = 0; \quad (k^2 - \mu\varepsilon \omega^2) E_t &= 0; \\ \left(\frac{1}{v^2} - \mu\varepsilon \right) E_t &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из (3.38) следует, что для $E_t \neq 0$ должно быть:

$$k^2 = \mu\varepsilon \omega^2. \quad (3.39)$$

Зависимость $k(\omega)$ называется дисперсионной зависимостью, а уравнение

$$k(\omega) = 0, \quad (3.40)$$

дисперсионным уравнением. В данном случае монохроматических волн имеем:

$$k^2 - \mu \epsilon \omega^2 = 0; \quad k^2 - \mu_r \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (3.41)$$

$$k = n \frac{\omega}{c}.$$

В общем случае показатель преломления зависит от частоты (явление дисперсии), что необходимо учесть в соотношении для волнового числа:

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}. \quad (3.42)$$

3.9. Электромагнитные плоские волны

В общем случае решение для плоской монохроматической однородной волны имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) &= \frac{\vec{E}_m}{2} \left\{ \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) \right] + \right. \\ &+ \left. \exp\left[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) \right] \right\} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] + c.c., \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m \exp(i\psi_0)$, а *c.c.* означает комплексно-сопряженную функцию к первому слагаемому. Нетрудно заметить, что функции $\exp\left[\pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) \right]$ также являются решениями волнового уравнения. Величина $\dot{\vec{E}}_m$ – комплексная векторная амплитуда волны. Поскольку работать с экспонентами очень удобно, то принято пользоваться понятием комплексной формы записи для гармонических плоских волн

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right], \quad (3.44)$$

опуская множитель 1/2 и комплексно-сопряженное слагаемое. Нужно понимать, что *это выражение справедливо только формально*. Истинное значение электрического поля будет определяться выражением

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \right\}. \quad (3.45)$$

Во многих случаях, когда мы имеем дело с линейными функциями от \vec{E} , этот подход дает одинаковые результаты с подходом, при котором используются тригонометрические функции. Исключение составляют случаи, когда необходимо вычислить произведения или степени – например, при расчетах интенсивности или вектора Пойнтинга.

В чем же достоинство комплексного метода? Найдем производную по времени от напряженности поля плоской гармонической волны:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\vec{E}}_m \exp \left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \right\} = i\omega \dot{\vec{E}}_m \exp \left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right].$$

Таким образом, операции дифференцирования по t соответствует умножение на $i\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega. \quad (3.46)$$

Нетрудно показать, что действие оператором ∇ на $\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ аналогично действию на нее оператором $-i\vec{k}$:

$$\nabla \cdot \dot{\vec{E}} = -i\vec{k} \cdot \dot{\vec{E}} = \text{div } \dot{\vec{E}}, \quad (3.47)$$

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -i\vec{k} \times \dot{\vec{E}} = \text{rot } \dot{\vec{E}}. \quad (3.48)$$

С учетом записанных соотношений представим уравнения Максвелла, которые мы применяли при описании волновых процессов в изотропной непроводящей среде в отсутствие сторонних токов и зарядов, в новой форме

| | | |
|---|--|---|
| $\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{\delta}_{\text{compl}}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{D} &= \rho, \\ \text{div } \vec{B} &= 0. \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">Общий вариант уравнений Максвелла</p> | $\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \rightarrow \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">Уравнения Максвелла в операторной форме для $\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\vec{\delta}_{\text{extr}} = 0$</p> | $\begin{aligned} -\vec{k} \times \vec{H} &= \omega \vec{D}, \\ +\vec{k} \times \vec{E} &= +\omega \vec{B}, \\ \rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{D} &= 0, \\ -i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">Уравнения Максвелла для плоских гармонических волн ($\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\vec{\delta}_{\text{extr}} = 0$)</p> |
|---|--|---|

С учетом материальных уравнений (3.5) и (3.6)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

из последней системы получаем:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon \vec{E}, \quad (3.49)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}, \quad (3.50)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.51)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0. \quad (3.52)$$

Отсюда следуют важные выводы о структуре полей в плоской электромагнитной волне:

1. Из первого уравнения – $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{E} \perp \vec{H}$.

2. Из второго – $\vec{H} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{E}$, векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую систему координат.

3. Третье и четвертое уравнения также свидетельствуют о поперечности полей \vec{E} и \vec{H} .

$$4. |\vec{k} \times \vec{H}| = \omega \sqrt{\mu \epsilon} H_m = \omega \epsilon E_m \quad (|\vec{k} \times \vec{H}| = |\vec{k}| \cdot |\vec{H}| \sin(\vec{k} \wedge \vec{H})),$$

$$H_m = \frac{E_m}{\sqrt{\mu/\epsilon}} = \frac{E_m}{W}. \quad (3.53)$$

Величина $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$ имеет размерность [Ом] и называется волновым сопротивлением среды. Напомним, что размерность H – А/м; E – В/м. Для вакуума получаем:

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}. \quad (3.54)$$

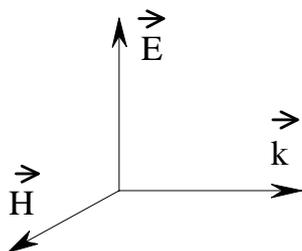


Рис. 3.2. Ориентация векторов в плоской электромагнитной волне

Итак, векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} в плоской волне можно изобразить так для фиксированного момента времени t (рис. 3.2). В общем случае в зависимости от вида поляризации (линейная, круговая, эллиптическая) векторы \vec{E} и \vec{H} могут синхронно изменять свое положение.

3.10. Поляризация плоских электромагнитных волн

Поле с векторами \vec{E} и \vec{H} , направление которых может быть определено в любой момент времени, называют *поляризованным*. При случайных направлениях \vec{E} и \vec{H} в пространстве поле является *неполяризованным* (солнечный свет и т.д.).

Плоскость поляризации проходит через вектор \vec{E} и направление распространения волны. Различают *линейную*, *эллиптическую* и *круговую* (правую и левую) поляризации – в зависимости от фигуры, которую описывает конец вектора \vec{E}

при распространении волны. Математически волну с произвольным видом поляризации представляют в виде двух составляющих

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \vec{i}E_{1m} \cos(\omega t - kz), \\ \vec{E}_y &= \vec{j}E_{2m} \cos(\omega t - kz - \varphi),\end{aligned}\quad (3.55)$$

сдвинутых по фазе и имеющих различные амплитуды в общем случае. Для плоскости $z=0$ имеем

$$\frac{E_x}{E_{1m}} = \cos \omega t, \quad \frac{E_y}{E_{2m}} = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi, \quad (3.56)$$

откуда получаем

$$\frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{1m} E_{2m}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (3.57)$$

Если учесть, что $E_x \sim x$, $E_y \sim y$, то (3.57) представляет уравнение эллипса. То есть, поскольку $E_x \sim \cos \omega t$, конец вектора $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y$, $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ будет описывать эллиптическую траекторию за время $T = 2\pi/\omega$. Рассмотрим характерные виды поляризации.

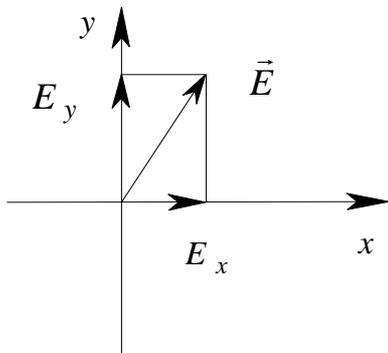


Рис. 3.3. Ориентация вектора поляризации в плоской электромагнитной волне

$$\begin{aligned}1. \quad \varphi = 0, \quad \frac{E_x}{E_{1m}} - \frac{E_y}{E_{2m}} &= 0, \\ E_y &= \frac{E_{2m}}{E_{1m}} E_x.\end{aligned}$$

Это уравнение прямой, наклон которой к оси Ox определяется отношением E_{2m}/E_{1m} . Действительно, при синфазном изменении E_x и $E_y \sim \cos \omega t$ синхронно

изменяется и результирующий вектор \vec{E} . Легко видеть, что такая же по типу *линейная* поляризация имеет место и при $\varphi = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

$$2. \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с большой и малой полуосями, ориентированными точно по осям x и y . Направление вращения вектора \vec{E}

определяется знаком φ . Для $\varphi = -\pi/2$ какое будет вращение, левое или правое? – Правое.

3. В каком случае мы будем иметь круговую поляризацию? $\varphi = \pm \pi/2$, $E_{1m} = E_{2m}$.

3.11. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля.

Вектор Пойнтинга

Как известно, в объеме V сосредоточен запас энергии электромагнитного поля

$$W = \int_V \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV = \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV. \quad (3.58)$$

Рассмотрим изменение энергии W во времени. Для этого перепишем уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{\delta}_{cond} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \end{aligned}$$

считая токи переноса и сторонние токи отсутствующими. Домножим первое уравнение на \vec{E} , а второе – на \vec{H} скалярно и вычтем полученные результаты:

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\delta}_{cond} \cdot \vec{E}. \quad (3.59)$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2), \\ \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (H^2), \\ \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} &= -\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}], \end{aligned}$$

и интегрируя (3.59) по объему, получаем

$$\int_V (\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}]) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV - \int_V (\vec{\delta}_{cond} \cdot \vec{E}) dV. \quad (3.60)$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса

$$\int_V \text{div } \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

и вводя вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}], \quad (3.61)$$

получаем

$$-\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \int_V (\vec{\delta}_{cond} \cdot \vec{E}) dV. \quad (3.62)$$

Уравнение (3.62) выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Левая часть – полное изменение электромагнитной энергии в объеме V во времени. Первый член в правой части – поток вектора Пойнтинга через поверхность, ограничивающую объем V ($\vec{\Pi}$ – плотность потока энергии через поверхность S в единицу времени). Второй член в правой части (3.62) – количество тепла, выделяющегося в проводящих частях объема V в единицу времени.

3.12. Усреднение по времени энергетических характеристик поля

Измерительные приборы, так же как и человеческий глаз, не могут воспринимать происходящие с большой частотой колебания электрического и магнитного поля световых волн. Все средства измерений производят *операции усреднения* по конечному интервалу времени Δt и по конечному объему пространства ΔV . Будем полагать, что в пределах данного объема ΔV измеряемая величина $\vec{A}(\vec{r}, t)$ изменяется незначительно, и достаточно проводить усреднение только по времени, равному периоду колебаний T . В этом случае среднее за период колебания значение физической величины в точке с координатами $\vec{r} = \vec{r}_0$ определяется, как

$$\langle \vec{A}(\vec{r}_0, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{A}(\vec{r}_0, t) dt. \quad (3.63)$$

Легко показать, что для *периодических* (в том числе гармонических) колебаний напряженности электрического поля, определяемых, например, соотношением (5.43), среднее значение равно нулю, $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = 0$. Однако измерительные приборы реагируют не на само поле, а на его энергетические характеристики – при каждом акте измерения должно поглощаться дискретное количество фотонов, каждый из которых имеет энергию $\hbar\omega$, где $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Найдем среднее значение плотности электрической энергии в электромагнитном поле, в случае его изменения во времени по гармоническому закону ($\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m(\vec{r}) \cos(\omega t + \psi)$):

$$\langle W_E \rangle = \left\langle \epsilon \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2} \right\rangle = \frac{\epsilon}{2T} \int_0^T (\vec{E}_m \cdot \vec{E}_m) \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} t + \psi \right) dt = \frac{\epsilon E_m^2}{4}, \quad (3.64)$$

где $E_m = |\vec{E}_m|$. Аналогично можно получить среднее значение плотности магнитной энергии в таком гармоническом во времени электромагнитном поле:

$$\langle W_M \rangle = \frac{\mu H_m^2}{4}, \quad (3.65)$$

где $H_m = |\vec{H}_m|$. Отметим, что с помощью соотношения (3.53), связывающего амплитуды электрического и магнитного полей через волновое сопротивление среды, можно получить, что *плотности электрической и магнитной энергии в плоской гармонической волне равны:*

$$\langle W_E \rangle = \langle W_M \rangle. \quad (5.66)$$

С учетом соотношения $\dot{A}_m \cdot \dot{A}_m^* = |\dot{A}_m|^2 = A_m^2$ плотности электрической и магнитной энергии могут быть выражены через комплексные амплитуды полей $\dot{E}_m = \vec{E}_m \exp(i\psi_E)$ и $\dot{H}_m = \vec{H}_m \exp(i\psi_M)$ в следующем виде:

$$\langle W_E \rangle = \frac{\varepsilon(\dot{E}_m \cdot \dot{E}_m^*)}{4}, \quad (3.67)$$

$$\langle W_M \rangle = \frac{\mu(\dot{H}_m \cdot \dot{H}_m^*)}{4}. \quad (3.68)$$

Выразим через комплексные амплитуды электрического поля и магнитного поля, фазы которых ψ_E и ψ_M в точке \vec{r} в общем случае могут не совпадать, среднее значение вектора Пойнтинга для гармонических полей:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E} \times \vec{H}] dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E}_m \times \vec{H}_m] \cos(\omega t + \psi_E) \cos(\omega t + \psi_M) dt = \frac{1}{2T} [\vec{E}_m \times \vec{H}_m] \cos(\psi_E - \psi_M), \\ \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m^*]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Таким образом, *среднее значение вектора Пойнтинга в гармоническом электромагнитном поле равно вещественной части комплексного вектора*

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*], \quad (3.70)$$

который носит название *комплексного вектора Пойнтинга*.

Для плоской электромагнитной волны вида (3.44) вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ совпадает по направлению с единичным вектором волновой нормали \vec{n} . Его среднее значение, модуль которого называется *интенсивностью* I , определяет мощность, переносимую электромагнитной волной через единичную площадку в направлении

вектора $\vec{\Pi}$, и с учетом соотношения (3.53) может быть выражено через амплитудные значения напряженности электрического или магнитного поля в следующем виде:

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = I\vec{n} = \frac{\vec{n}}{2\sqrt{\mu/\epsilon}} E_m^2 = \frac{\vec{n}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_m^2. \quad (3.71)$$

Следует отметить, что в научной литературе часто пользуются упрощенным определением интенсивности света

$$I = |\vec{E}|^2 = \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{E}}^*, \quad (3.72)$$

в котором постоянный коэффициент $1/(2\sqrt{\mu/\epsilon})$ опущен.

3.13. Сферические электромагнитные волны

Наряду с плоскими волнами, в оптике широко пользуются понятием *сферических волн*, для которых фазовый (волновой) фронт является сферой. Для изотропных сферических волн поле от источника, расположенного в начале координат, необходимо искать в виде $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$. В этом случае удобно воспользоваться сферической системой координат (r, θ, ϕ) , в которой действие оператора Лапласа на функцию A определяется выражением

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2}. \quad (3.73)$$

Поскольку отыскиваемое решение не зависит от угловых координат, волновое уравнение (3.20) принимает вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\vec{E}) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\vec{E}) = 0. \quad (3.74)$$

Уравнение (3.17) в сферической системе координат можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0.$$

Отсюда следует, что в волновом решении поле является поперечным, то есть E_r можно положить равным нулю и представить поле сферической волны, как

$$\vec{E}(r, t) = \vec{e}E(r, t), \quad (3.75)$$

где введен единичный вектор \vec{e} , расположенный в плоскости, ортогональной радиус-вектору \vec{r} в данной точке. В этом случае скалярная функция $E(r, t)$, удовлетворяющая волновому уравнению (5.74), может быть получена в виде:

$$E(r, t) = \frac{1}{kr} E_1 \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{kr} E_2 \left(t + \frac{r}{v} \right). \quad (3.76)$$

В данном выражении *первое слагаемое* представляет собой *расходящуюся сферическую волну*. *Второе слагаемое* соответствует волновому фронту, движущемуся к центру – *сходящейся сферической волне*. Характерно, что амплитуда расходящейся сферической волны уменьшается как $1/r$, а ее энергетические характеристики, пропорциональные квадрату амплитуды – как $1/r^2$.

4. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела диэлектрических сред

Отражение и преломление света – явления, которые издавна используются в обыденной жизни, науке, технике, оптическом приборостроении. В квантовой и оптической электронике, фотонике и оптоинформатике этим явлениям зачастую принадлежит ведущая роль, позволяющая реализовать преимущества света как носителя информации. В качестве примера можно упомянуть волоконно-оптические и интегрально-оптические системы, основанные на явлении полного внутреннего отражения света.

Рассмотрим отражение и преломление плоской монохроматической волны с линейной поляризацией для произвольного угла падения на границу раздела полубезграничных сред 1 и 2 с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Будем считать, что в них отсутствуют свободные заряды ($\rho = 0$), что они являются непроводящими ($\sigma = 0$) и немагнитными ($\mu = \mu_0$). Определим *плоскость падения волны* как плоскость, проходящую через направление распространения падающей волны, задаваемым волновым вектором \vec{k}_i , и нормаль \vec{m} к границе раздела.

Анализ обычно проводят для двух частных случаев, когда волны поляризованы нормально к плоскости падения, и когда вектор поляризации лежит в плоскости падения. Общий случай произвольной ориентации вектора \vec{E} можно рассмотреть как суперпозицию этих частных случаев. Остановимся подробно на случае поляризации волн перпендикулярно плоскости падения.

4.1. Поляризация волн, нормальная к плоскости падения

Рис. 4.1 иллюстрирует направления осей координат и векторов \vec{E} и \vec{H} падающей, отраженной и преломленной волн. Векторы электрического поля всех волн направлены перпендикулярно плоскости падения, то есть совпадают с осью x . Запишем волновые векторы для падающей (i), отраженной (r) и преломленной (t) волн:

$$\vec{k}_i = k_0 n_1 (-\vec{j} \cos \theta_i + \vec{k}^0 \sin \theta_i), \quad (4.1)$$

$$\vec{k}_r = k_0 n_1 (\vec{j} \cos \theta_r + \vec{k}^0 \sin \theta_r), \quad (4.2)$$

$$\vec{k}_t = k_0 n_2 (-\vec{j} \cos \theta_t + \vec{k}^0 \sin \theta_t), \quad (4.3)$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число для вакуума и $n_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{r1,r2}}$ – коэффициенты преломления для волн, распространяющихся в первой и во второй средах, соответственно.

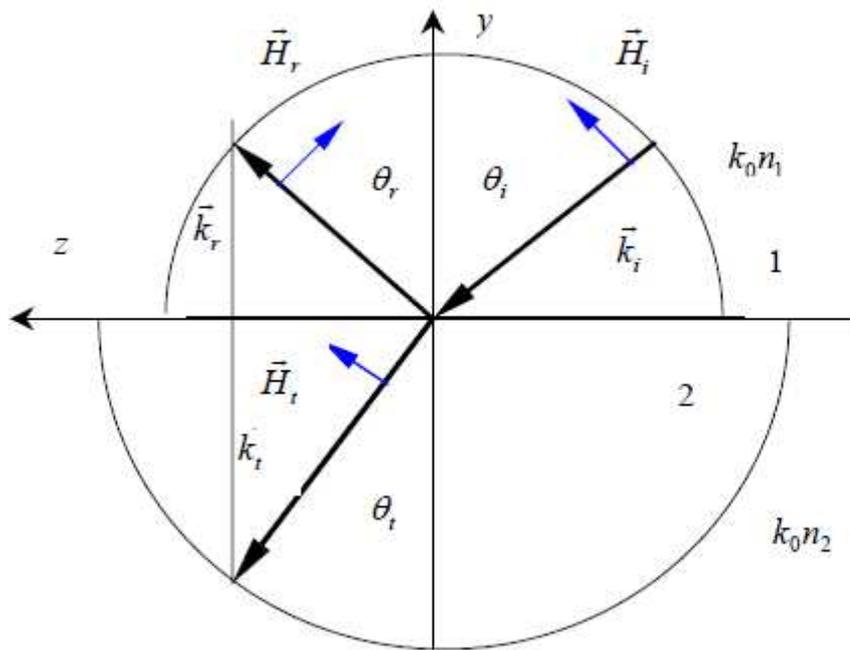


Рис. 4.1.

В соответствии с соотношениями (3.44) и (4.1)–(4.3), опуская множитель $\exp(i\omega t)$, напряженности электрического поля волн представим в виде:

$$\vec{E}_i = \vec{i}\vec{E}_{im} \exp[ik_0 n_1 (y \cos \theta_i - z \sin \theta_i)], \quad (4.4)$$

$$\dot{\vec{E}}_r = \vec{i}\dot{E}_{rm} \exp[-ik_0 n_1 (y \cos \theta_r + z \sin \theta_r)], \quad (4.5)$$

$$\dot{\vec{E}}_t = \vec{i}\dot{E}_{tm} \exp[ik_0 n_2 (y \cos \theta_t - z \sin \theta_t)]. \quad (4.6)$$

Используя далее уравнение (3.50), найдем тангенциальные составляющие векторов магнитного поля волн:

$$\dot{H}_{iz} = \frac{n_1 \cos \theta_i}{W_0} \dot{E}_{im} \exp[ik_0 n_1 (y \cos \theta_i - z \sin \theta_i)], \quad (4.7)$$

$$\dot{H}_{rz} = -\frac{n_1 \cos \theta_r}{W_0} \dot{E}_{rm} \exp[-ik_0 n_1 (y \cos \theta_r + z \sin \theta_r)], \quad (4.8)$$

$$\dot{H}_{tz} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{W_0} \dot{E}_{tm} \exp[ik_0 n_2 (y \cos \theta_t - z \sin \theta_t)]. \quad (4.9)$$

На границе раздела при $y = 0$, тангенциальные составляющие полей, электрического (\dot{E}_x) и магнитного (\dot{H}_z), должна быть равны между собой в первой и второй средах, в соответствии с граничными условиями (3.11) и (3.14) (поскольку $\eta = 0$ – поверхностный ток отсутствует). Для составляющих электрического поля получаем:

$$\dot{E}_{im} \exp(-ik_0 n_1 z \sin \theta_i) + \dot{E}_{rm} \exp(-ik_0 n_1 z \sin \theta_r) = \dot{E}_{tm} \exp(-ik_0 n_2 z \sin \theta_t). \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) должно быть справедливо при любом z . Это возможно, если выполняются условие

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r, \quad (4.11)$$

означающее, что угол падения равен углу отражения, и закон Снеллиуса:

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i. \quad (4.12)$$

Из уравнения (4.10) с учетом полученных соотношений следует, что

$$\dot{E}_{im} + \dot{E}_{rm} = \dot{E}_{tm}, \quad (4.13)$$

а условие равенства в средах 1 и 2 тангенциальных компонент магнитного поля позволяет получить, с использованием выражений (4.7)–(4.9) другое необходимое уравнение:

$$(\dot{E}_{im} - \dot{E}_{rm}) \cos \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \dot{E}_{tm} \cos \theta_t. \quad (4.14)$$

Решая систему уравнений (4.13) и (4.14), получаем:

$$\dot{E}_{rm} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \dot{E}_{im}, \quad (4.15)$$

$$\dot{E}_{tm} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \dot{E}_{im}. \quad (4.16)$$

Вводя коэффициент отражения света $R_{\perp} = \dot{E}_{rm} / \dot{E}_{im}$ и коэффициент прохождения $T_{\perp} = \dot{E}_{tm} / \dot{E}_{im}$ для поляризации, нормальной к плоскости падения, можно получить соотношения

$$R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (4.17)$$

$$T_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (4.18)$$

называемые *формулами Френеля*. Используя закон Снеллиуса (4.12), связывающий угол преломления θ_t с углом падения θ_i , формулы Френеля для коэффициентов отражения и прохождения можно представить в следующем виде:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (4.19)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}. \quad (4.20)$$

В случае нормального падения, когда $\theta_i = 0$, следовательно, и $\theta_r = \theta_t = 0$, получаем:

$$R_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_{\perp} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (4.21)$$

4.2. Поляризация волн в плоскости падения

Взаимная ориентация волновых векторов для падающей, отраженной и преломленной волн в этом случае будет такой же, как на рис. 4.1. Однако векторы магнитного поля волн будут направлены вдоль оси x , а векторы электрического поля волн должны иметь такую же ориентацию, которая изображена на рис. 4.1 для векторов магнитного поля. Анализ эффектов отражения и преломления для волн, поляризованных в плоскости падения, приводит к тем же соотношениям (4.11) и (4.12) для углов отражения и преломления, что и в предыдущем случае. Опуская вычисления,

методика которых аналогична рассмотренной, запишем формулы Френеля для волн, поляризованных в плоскости падения:

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_i - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}}{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2(n_2/n_1) \cos \theta_i}{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} \\ &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для нормального падения получаем:

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad T_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \quad (4.24)$$

Отметим, что знаки для R_{\perp} и R_{\parallel} в формулах (4.21) и (4.24) противоположны. Это связано с противоположной ориентацией векторов $\dot{\vec{E}}_i$ и $\dot{\vec{E}}_r$, принятой для падающей и отраженной волн в случае, когда они лежат в плоскости падения (см. рис. 4.1, с учетом замены векторов $\dot{\vec{H}}_i$ и $\dot{\vec{H}}_r$ на $\dot{\vec{E}}_i$ и $\dot{\vec{E}}_r$), в то время как для волн, поляризованных ортогонально плоскости падения, они по направлению совпадают.

4.3. Анализ формул Френеля

4.3.1. Отражение света при падении из менее плотной среды на более плотную. Угол Брюстера

Рассмотрим случай падения света на границу раздела из оптически менее плотной среды и его преломления в оптически более плотную среду, когда $n_1 < n_2$. При отражении света изменяется его амплитуда и фаза, поэтому удобно коэффициент отражения представить в виде:

$$R_{\perp, \parallel} = |R_{\perp, \parallel}| \exp(-i\varphi_{\perp, \parallel}), \quad (4.25)$$

где модуль коэффициента отражения $|R| < 1$ характеризует уменьшение амплитуды отраженной волны относительно падающей, а его фаза φ описывает приобретаемый

отраженной волной фазовый сдвиг. Из формулы (4.19) нетрудно видеть, что для волн, поляризованных ортогонально плоскости падения, $\varphi_{\perp} = \pi$, то есть отраженная волна в этом случае всегда является противофазной к падающей волне. Модуль коэффициента отражения $|R_{\perp}|$ монотонно увеличивается с углом падения (пунктирная кривая на рис. 4.2), а при скольльзящем падении ($\theta_i \rightarrow 90^{\circ}$) свет испытывает полное отражение.

Поведение коэффициента отражения для волн, поляризованных в плоскости падения, определяемого соотношением (4.22), является более сложным. При условии $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ модуль коэффициента отражения $|R_{\parallel}|$ обращается в нуль, то есть отраженная волна отсутствует (сплошная кривая на рис. 4.2). Угол θ_i в этом случае равен

$$\theta_{iB} = \operatorname{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \quad (4.26)$$

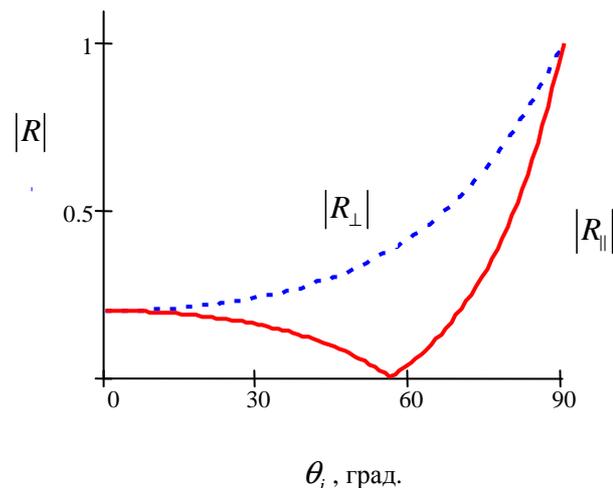


Рис. 4.2. Зависимости коэффициентов отражения от угла падения для отношения коэффициентов преломления сред $n_2 / n_1 = 1.5$.

и называется *углом Брюстера*, или *углом полной поляризации*. Второе название связано с тем, что при падении произвольно поляризованной волны на границу под углом θ_{iB} отраженная волна оказывается поляризованной перпендикулярно плоскости падения, поскольку компонента светового поля, поляризованная в плоскости падения, в этом случае не отражается, а полностью преломляется.

При углах падения $0 \leq \theta_i \leq \theta_{iB}$ величина $|R_{\parallel}|$ убывает от значения, определяемого формулой (6.24) при нормальном падении, до нуля. Для области $\theta_{iB} \leq \theta_i \leq \pi/2$ модуль коэффициента отражения $|R_{\parallel}|$ возрастает от 0 до 1. Фаза коэффициента отражения $\varphi_{\parallel} = 0$ при $0 \leq \theta_i \leq \theta_{iB}$, а при $\theta_{iB} \leq \theta_i \leq \pi/2$ она имеет значение $\varphi_{\parallel} = \pi$, то есть она изменяется скачком при переходе θ_i через значение θ_{iB} .

4.3.2. Отражение света при падении из более плотной среды на менее плотную. Полное внутреннее отражение

При падении световой волны из оптически более плотной среды на менее плотную, имеем $n_1 > n_2$. Из закона Снеллиуса (4.12) следует, что в этом случае угол преломления $\theta_t = \arcsin(n_1 \sin \theta_i / n_2)$ больше угла падения, то есть $\theta_t > \theta_i$ (см. рис. 4.3). Поэтому при увеличении угла падения до некоторого критического значения θ_{ic} , при котором $\sin \theta_{ic} = n_2 / n_1$, угол преломления становится равным 90° , то есть преломленная волна распространяется точно вдоль границы раздела. Если угол падения превышает критический угол полного внутреннего отражения θ_{ic} , то преломленная волна в оптически менее плотной среде отсутствует.

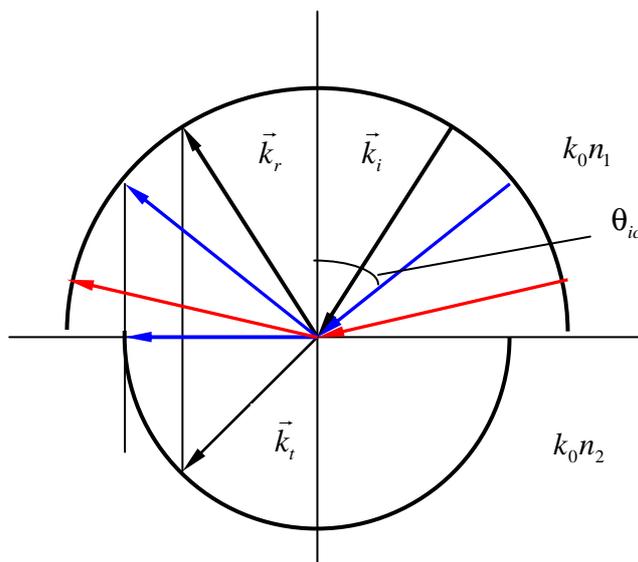


Рис. 4.3. Волновые векторы падающих и отраженных волн в оптически более плотной среде и волновой вектор преломленной волны в оптически менее плотной среде для различных углов падения

При выполнении условия полного внутреннего отражения числитель и знаменатель в формулах (4.19) и (4.20) для R_{\perp} и R_{\parallel} становятся комплексно-сопряженными величинами, откуда следует, что $|R_{\perp}|=1$ и $|R_{\parallel}|=1$. Фазы этих коэффициентов различны и являются следующими функциями угла падения:

$$\varphi_{\perp} = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i} \right], \quad (4.27)$$

$$\varphi_{\parallel} = 2 \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i} \right]. \quad (4.28)$$

Таким образом, полное отражение сопровождается изменением фазы волны, различным для поляризации в плоскости падения и ортогонально ей. Если полное отражение испытывает волна, плоскость поляризации которой наклонена к плоскости падения под некоторым углом, то отраженная волна будет иметь эллиптическую поляризацию.

Зададимся вопросом: если преломленная волна при полном внутреннем отражении в оптически менее плотной среде отсутствует, будет ли в ней присутствовать какое-либо электромагнитное поле? В случае волн, поляризованных ортогонально плоскости падения, напряженности электрического и магнитного полей в среде 2 даются выражениями (4.6) и (4.9), соответственно. Однако проекции волнового вектора \vec{k}_i на оси координат в этих формулах выражаются через угол θ_i , не имеющий физического смысла, поскольку при полном внутреннем отражении $\sin \theta_i > 1$. Для нахождения проекции волнового вектора \vec{k}_i на ось z воспользуемся условием (4.10), в соответствии с которым она должна быть такой же, как для падающей и отраженной волн:

$$k_{iz} = k_0 n_1 \sin \theta_i. \quad (4.29)$$

Учтем также, что согласно формулам (3.38), электромагнитное поле в среде отлично от нуля только тогда, когда волновое число (длина волнового вектора) удовлетворяет дисперсионному уравнению (3.41), которое в рассматриваемом случае может быть записано в виде $|\vec{k}_i| = n_2 k_0$. Используя (4.29), получаем, что проекция

вектора \vec{k}_i на ось y в условиях полного внутреннего отражения является чисто мнимой величиной:

$$k_{iy} = \sqrt{|\vec{k}_i|^2 - k_{iz}^2} = ik_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}. \quad (4.30)$$

Таким образом, при полном внутреннем отражении волн, поляризованных перпендикулярно плоскости падения, распределение электрического поля в среде 2 имеет вид

$$\dot{\vec{E}}_i(y, z, t) = \vec{i}\dot{E}_m \exp(\gamma_2 y) \exp[i(\omega t - k_{iz} z)], \quad (4.31)$$

где $\gamma_2 = k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}$ – постоянная затухания, характеризующая скорость уменьшения амплитуды электрического поля с удалением от границы раздела. Выражение (4.31) описывает распространяющуюся вдоль оси z (вдоль границы раздела сред) плоскую волну с фазовым фронтом, ортогональным данной оси (рис. 4.4). Такие волны, амплитуда которых в пределах фазового фронта зависит от поперечных координат, называются неоднородными плоскими волнами. Расстояние от границы, на котором поле в неоднородной плоской волне существенно уменьшается по амплитуде, характеризует глубину проникновения света в менее плотную среду, и сравнимо с длиной волны λ .

Составляющие магнитного поля неоднородной плоской волны могут быть найдены из уравнения (3.50) в следующем виде:

$$\dot{H}_{iy} = \frac{n_1 \sin \theta_i}{W_0} \dot{E}_m \exp(\gamma_2 y) \exp[i(\omega t - k_{iz} z)], \quad (4.32)$$

$$\dot{H}_{iz} = -i \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{W_0} \dot{E}_m \exp(\gamma_2 y) \exp[i(\omega t - k_{iz} z)]. \quad (4.33)$$

Как следует из соотношений (4.31)–(4.33), рассматриваемая неоднородная плоская волна не является поперечной – она содержит продольную (параллельную нормали к фазовому фронту) составляющую магнитного поля \dot{H}_{iz} . Такие волны, у которых составляющие электрического поля ортогональны волновой нормали, называют поперечно-электрическими, или ТЕ-волнами. Характерно, что продольная составляющая магнитного поля сдвинута по фазе относительно поперечных составляющих электрического поля по фазе на $-\pi/2$. Поэтому конец результирующего вектора магнитного поля в рассматриваемой неоднородной плоской

ТЕ-волне описывает эллиптическую траекторию, причем плоскость данного эллипса лежит в плоскости падения (рис. 4.4).

Аналогичным образом можно рассмотреть электромагнитное поле, существующее в оптически менее плотной среде при полном внутреннем отражении волны, поляризованной в плоскости падения. Это поле будет представлять неоднородную плоскую поперечно-магнитную волну, то есть ТМ-волну.

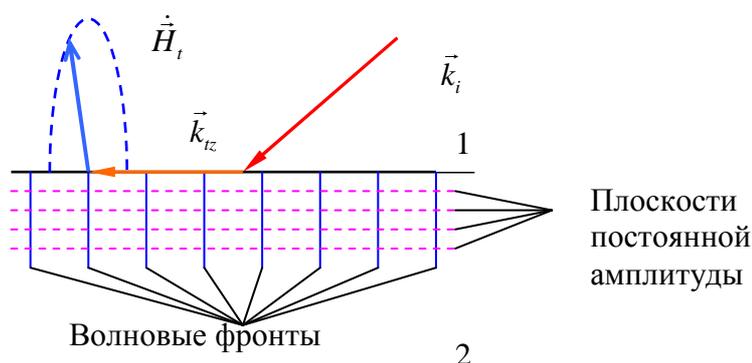


Рис. 4.4. Структура неоднородной плоской ТЕ-волны, существующей при полном внутреннем отражении в оптически менее плотной среде 2

Отметим, что явление проникновения светового поля в среду, от которой происходит полное внутреннее отражение, широко используется в научных исследованиях и в оптической технике.

5. Интерференция света

Интерференцией называют явление, при котором суперпозиция волновых процессов приводит к изменению средней плотности потока энергии. Интерференция реализуется для волн любой природы – электромагнитных, акустических, плазменных, и других. В оптике, где среднее значение потока электромагнитной энергии принято характеризовать интенсивностью (см. формулы (3.71) и (3.72)), под интерференцией света понимают широкий круг явлений, в которых при наложении пучков света результирующая интенсивность в данной точке пространства не равна сумме интенсивностей отдельных пучков.

Используя *принцип суперпозиции*, справедливый для линейных оптических систем, световое поле нескольких световых пучков в точке наблюдения представим в виде векторной суммы:

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{E}}_i(\vec{r}, t). \quad (5.1)$$

Интенсивность данного светового поля, которое в общем случае не является монохроматическим, найдем с помощью усреднения по времени, существенно превышающему периоды колебаний, квадрата модуля $\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t)$:

$$I(\vec{r}) = \left\langle \left| \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 + \dots + \dot{\vec{E}}_n \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left(\dot{\vec{E}}_1 \cdot \dot{\vec{E}}_1^* + \dots + \dot{\vec{E}}_n \cdot \dot{\vec{E}}_n^* \right) + \left(\dot{\vec{E}}_1 \cdot \dot{\vec{E}}_2^* + \dot{\vec{E}}_2 \cdot \dot{\vec{E}}_1^* + \dots \right) \right\rangle. \quad (5.2)$$

Таким образом, выражение для интенсивности разбивается на *аддитивный член*, являющийся простой суммой интенсивностей всех n пучков, и *интерференционный член*, содержащий перекрестные скалярные произведения напряженностей полей от различных источников. Если интерференционный член в результате усреднения обращается в ноль, то световые пучки являются *некогерентными*. Отличие интерференционного члена от нуля говорит о *полной или частичной когерентности* пучков. В этом случае в некоторых точках пространства интенсивность света больше арифметической суммы интенсивности пучков (аддитивного члена), а в других – меньше его. В результате в пространстве возникает чередование максимумов и минимумов интенсивности света – *интерференционная картина*.

Интерференция света широко используется для построения различных измерительных систем и устройств и является одним из главных этапов записи оптических голограмм.

5.1. Интерференция монохроматического излучения

5.1.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн

Рассмотрим интерференцию двух плоских монохроматических электромагнитных волн одинаковой частоты, световое поле которых имеет вид

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{e}_1 \dot{E}_{1m} \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} \right) \right] + \vec{e}_2 \dot{E}_{2m} \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} \right) \right], \quad (5.3)$$

с различными волновыми векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , комплексными векторными амплитудами $\dot{\vec{E}}_{1m} = \vec{e}_1 E_{1m} \exp(-i\psi_{01})$ и $\dot{\vec{E}}_{2m} = \vec{e}_2 E_{2m} \exp(-i\psi_{02})$ и начальными фазами ψ_{01} и ψ_{02} . Использование формулы (5.2) (или (3.72), справедливой для монохроматических

волн) позволяет получить распределение интенсивности света в интерференционной картине в следующем виде:

$$I(\vec{r}) = I_0 \left[1 + m \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Delta\psi_{21}) \right], \quad (5.4)$$

где $I_0 = I_1 + I_2 = |\dot{\vec{E}}_{1m}|^2 + |\dot{\vec{E}}_{2m}|^2 = E_{1m}^2 + E_{2m}^2$ – средняя интенсивность света в интерференционной картине, равная суммарной интенсивности пучков; $m = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha / I_0$ – контраст интерференционной картины; α – угол между векторами поляризации интерферирующих волн; $\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$ – волновой вектор интерференционной картины, называемый также вектором решетки интенсивности; $\Delta\psi_{21} = \psi_{02} - \psi_{01}$ – разность начальных фаз.

В качестве примера рассмотрим интерференцию световых волн, поляризованных вдоль оси y , имеющих одинаковые начальные фазы и распространяющихся в плоскости xz в среде с показателем преломления n .

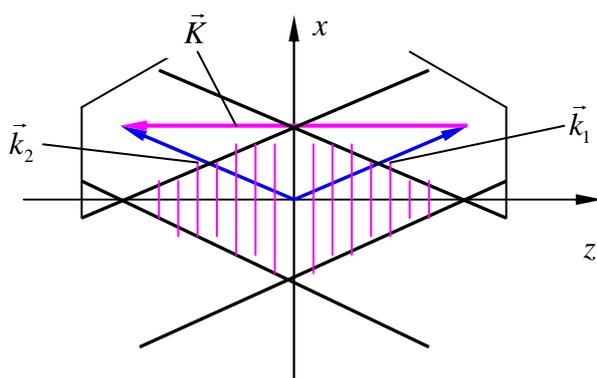


Рис. 5.1. Интерференция встречных световых волн

Будем полагать, что волны распространяются почти навстречу друг другу, и их волновые векторы составляют углы θ и $180^\circ - \theta$ с осью $+z$ (рис. 5.1). Волновой вектор интерференционной картины в этом случае имеет проекцию только на ось z , $\vec{K} = 2k_0 n \cos \theta \vec{k}^0$, и распределение света в интерференционной картине может быть получено из (5.4), как

$$I(z) = I_0 \left[1 + m \cos(Kz) \right] = I_0 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right), \quad (5.5)$$

где $K = |\vec{K}|$ и $\Lambda = 2\pi/K = \lambda/(2n \cos \theta)$ – пространственный период интерференционной картины. Распределение интенсивности света при интерференции световых волн с

интенсивностями $I_1 = 0.9$ и $I_2 = 0.1$ Вт/м², образующими картину с контрастом $m = 0.6$, показано на рис. 5.2.

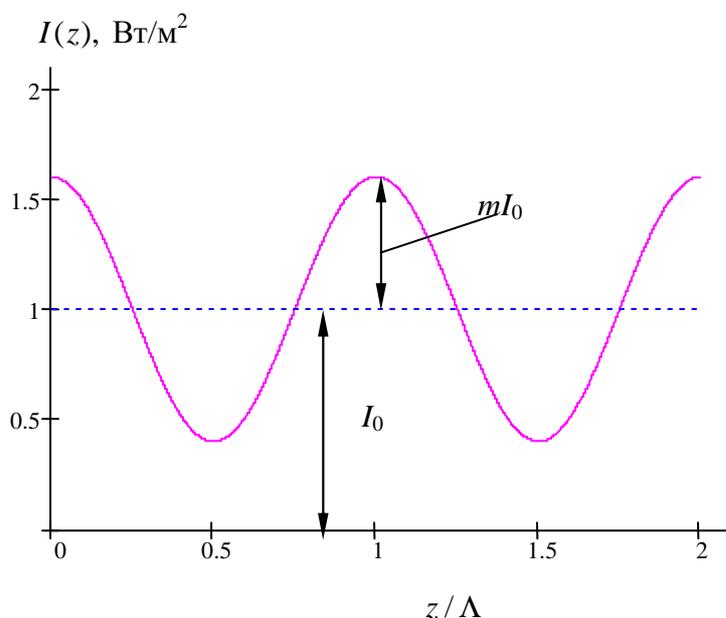


Рис. 5.2. Распределение интенсивности света в интерференционной картине

Таким образом, суперпозиция монохроматических плоских волн приводит к интерференционной картине, представляющей периодическое чередование плоскостей, соответствующих максимумам и минимумам светового поля. В максимуме световые поля являются синфазными, то есть имеют фазовый сдвиг $\vec{K} \cdot \vec{r} - \Delta\psi_{21} = 2\pi p$, где p – целое число. Противофазность световых волн в областях пространства, где фазовый сдвиг принимает значение $\vec{K} \cdot \vec{r} - \Delta\psi_{21} = (2p + 1)\pi$, приводит к тому, что волны гасят друг друга. При одинаковых интенсивностях $I_1 = I_2$ интерференционная картина имеет контраст $m = 1$, и гашение светового поля в минимуме является полным. Минимальный пространственный период интерференционной картины $\Lambda_{\min} = \lambda/(2n)$ наблюдается, когда волны распространяются точно навстречу друг другу (при $\theta = 0$, см. рис. 5.1).

5.1.2. Интерференция двух сферических монохроматических волн

Используя формулу (3.76), поле двух сферических монохроматических (то есть гармонических) световых волн одинаковой частоты в точке наблюдения представим в виде суперпозиции

$$\dot{E}(r_1, r_2, t) = \frac{\dot{E}_{1m}}{kr_1} \exp[i(\omega t - kr_1 + \psi_{01})] + \frac{\dot{E}_{2m}}{kr_2} \exp[i(\omega t - kr_2 + \psi_{02})], \quad (5.6)$$

где r_1 и r_2 – расстояния до источников сферических волн и $k = k_0 n = 2\pi n / \lambda$. Здесь мы пренебрегаем векторным характером светового поля, то есть пользуемся так называемым *скалярным приближением*.

Интерференция такого рода наблюдалась впервые Томасом Юнгом в 1801 году. Схема опыта Юнга представлена на рис. 5.3.

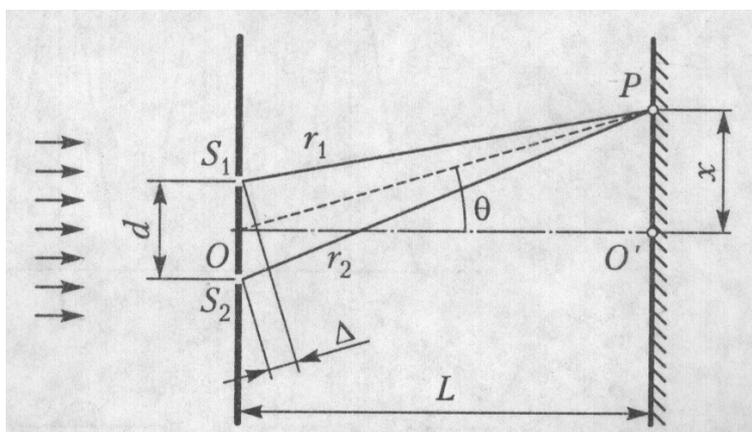


Рис. 5.3. Схема интерференции Юнга

Источниками сферических волн здесь являются два одинаковых отверстия в непрозрачном экране, освещаемом однородным световым пучком. В этом случае можно положить $\dot{E}_{1m} = \dot{E}_{2m}$ и $\psi_{01} = \psi_{02}$. Воспользуемся также параксиальным приближением, считая малым угол $\theta \sim x/L$, что позволяет пренебречь изменением расстояний r_1 и r_2 в амплитудных множителях $1/(kr_1)$ и $1/(kr_2)$, и считать их постоянными величинами.

С использованием данных приближений распределение интенсивности света в интерференционной картине может быть представлено в виде

$$I(P) = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta r\right) \right], \quad (5.7)$$

где учтено, что $n = 1$, интенсивности источников равны $I_1 = I_2 = I_0/2$, и разность хода лучей обозначена как $\Delta r = r_2 - r_1$.

Таким образом, в зависимости от разности хода от источников до точки наблюдения интенсивность в картине интерференции Юнга меняется от 0 в тех точках, для которых $\Delta = (2p+1)\lambda/2$ и куда волны приходят в противофазе, до $2I_0$ в точках, для которых $\Delta = p\lambda$ (здесь волны синфазны). Отношение разности хода к длине волны, в данном случае равное p , называют *порядком интерференции*. В центре картины, очевидно, наблюдается светлая интерференционная полоса нулевого порядка.

Если рассматривать двумерную картину, то интерференционные полосы на экране представляют собой семейство гипербол, отвечающих постоянству оптической разности хода (рис. 5.4). По мере удаления экрана от плоскости источников в доступной для наблюдения области остается практически прямолинейная система полос (область P_3 на рис. 5.4).

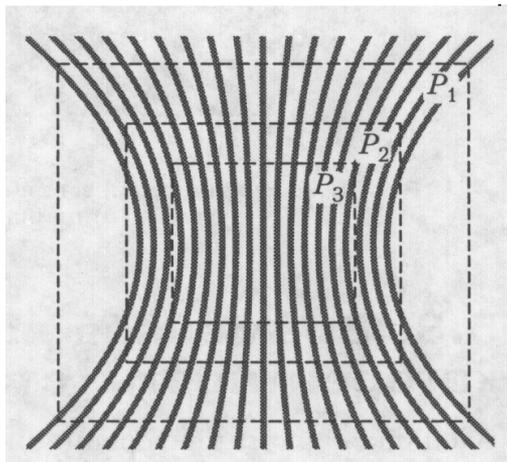


Рис. 5.4. Интерференционные полосы от двух точечных источников

5.2. Когерентность световых волн

Когерентностью называют согласованное протекание во времени нескольких волновых процессов или свойство, отражающее стабильность фазы одной или нескольких электромагнитных волн.

Именно когерентность характеризует способность электромагнитных волн интерферировать друг с другом. Легче всего получить интерференцию монохроматических волн. Однако реальные источники излучения не являются

монохроматическими и характеризуются некоторой *степенью монохроматичности*, определяемой как *отношение ширины спектра частот, генерируемых источником, к центральной частоте*, $\delta f/f_0$. Со степенью монохроматичности связана временная когерентность оптического излучения.

5.2.1. Временная когерентность

Монохроматическое световое излучение, интерференция которого рассмотрена в предыдущем подразделе 5.1, является математической идеализацией, поскольку существует только на бесконечных интервалах во времени и в пространстве, и не может быть реализовано на практике. Все реальные сигналы, в том числе и световые, ограничены во времени. В качестве простейшей реалистичной модели рассмотрим напряженность светового поля в некоторой точке пространства, изменяющуюся во времени по закону

$$E(t) = E_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.8)$$

где $E_m(t)$ – функция, называемая огибающей сигнала, медленно изменяющаяся во времени по сравнению с гармонической несущей сигнала и отличная от нуля на конечном интервале времени, значительно превышающем период $T_0 = 2\pi/\omega_0$. В качестве примера на рис. 5.5 приведен сигнал с огибающей в виде функции Гаусса $E_m(t) = \exp[-(t-t_0)^2/\tau^2]$, для $\tau = 3T_0$ и $\varphi_0 = 0$, представляющий собой световой импульс.

Отметим, что основная энергия сигнала сосредоточена в его центральной части, где $|t-t_0| \leq \tau$. Поэтому можно считать, что длительность импульса τ_p равна ширине его огибающей по уровню $1/e$, то есть $\tau_p = 2\tau$.

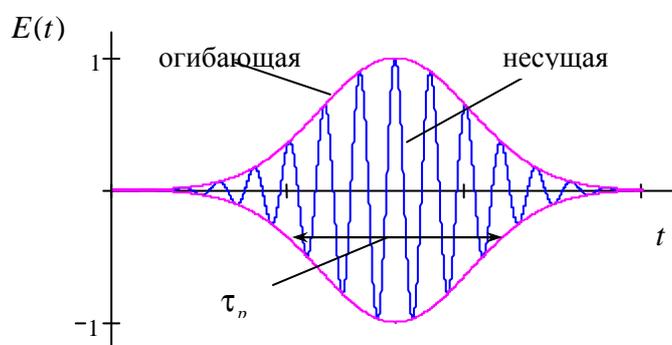


Рис. 5.5. Сигнал с гармонической несущей и с огибающей в виде функции Гаусса

Как известно, непериодическую функцию времени можно представить в виде интеграла Фурье

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (5.9)$$

то есть в виде линейной суперпозиции гармонических составляющих, имеющих частоты $-\infty < \omega < \infty$ и амплитуды $F(\omega)$, в общем случае комплексные. Величина $F(\omega)$ называется *спектром сигнала* $E(t)$ и определяется выражением

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (5.10)$$

Для представленного на рис. 5.5 сигнала $E(t)$ с гармонической несущей и с огибающей в виде функции Гаусса использование преобразования Фурье (5.10) дает спектр, амплитуда которого также изменяется по закону Гаусса:

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}\tau}{2} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{4/\tau^2}\right] \exp[i(\omega_0 - \omega)t_0] + \exp\left[-\frac{(\omega_0 + \omega)^2}{4/\tau^2}\right] \exp[i(\omega_0 + \omega)t_0] \right\}.$$

Этот спектр является *сплошным* и отличен от нуля как в положительной, так и в отрицательной области частот, с максимумами при $\omega = \pm\omega_0$. Ширина спектра в рад/с по уровню $1/e$ равна:

$$\delta\omega = \frac{4}{\tau} = \frac{8}{\tau_p}. \quad (5.11)$$

Найдем связь длительности импульса огибающей τ_p с шириной спектра в Гц:

$$\delta f = \frac{\delta\omega}{2\pi} = \frac{4}{\pi\tau_p} \approx \frac{1}{\tau_p}. \quad (5.12)$$

Мы получили, что длительность импульсного сигнала и ширина спектра частот, где содержится его основная энергия, связаны обратно-пропорциональной зависимостью. Для монохроматического (гармонического) сигнала, бесконечного во времени, ширина спектра стремится к нулю, и он представлен единственной спектральной составляющей, имеющей частоту ω_0 . Чем короче длительность огибающей импульсного сигнала, тем шире его спектр.

Рассмотрим интерференцию двух волн, не являющихся монохроматическими, и осуществляемую, например, с помощью интерферометра Юнга (рис. 5.3). Наблюдаемые в интерференционной картине максимумы (при $k\Delta r = k(r_2 - r_1) = 2\pi p$ для каждой спектральной составляющей) чередуются с минимумами (при

$k\Delta r = k(r_2 - r_1) = \pi(2p + 1)$). Для монохроматического света ее контраст определяется только соотношением интенсивностей интерферирующих волн и углом α между векторами поляризации, $m = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha / (I_1 + I_2)$ (см. выше п. 5.1). Однако контрастность интерференционной картины m , введенная для монохроматических волн, может быть найдена через значения интенсивности света I_{\max} и I_{\min} в максимумах и минимумах:

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (5.13)$$

Такое определение контрастности картины можно использовать как характеристику интерференции и для света, не являющегося монохроматическим. Контрастность интерференционной картины определяет ее *видность* (рис. 5.5). При $m = 1$ излучение полностью когерентно, и интерференционная картина хорошо видна. При $m = 0$ картина интерференции не видна, то есть излучение является полностью некогерентным, и интерференционный член в формуле (5.2) равен нулю.

Для всех реальных источников света $m < 1$, что связано с двумя причинами:

1. *Излучение не строго монохроматично.*
2. *Источник излучения имеет конечные размеры, причем фазы волн, испускаемых из разных точек источника, отличаются друг от друга.*

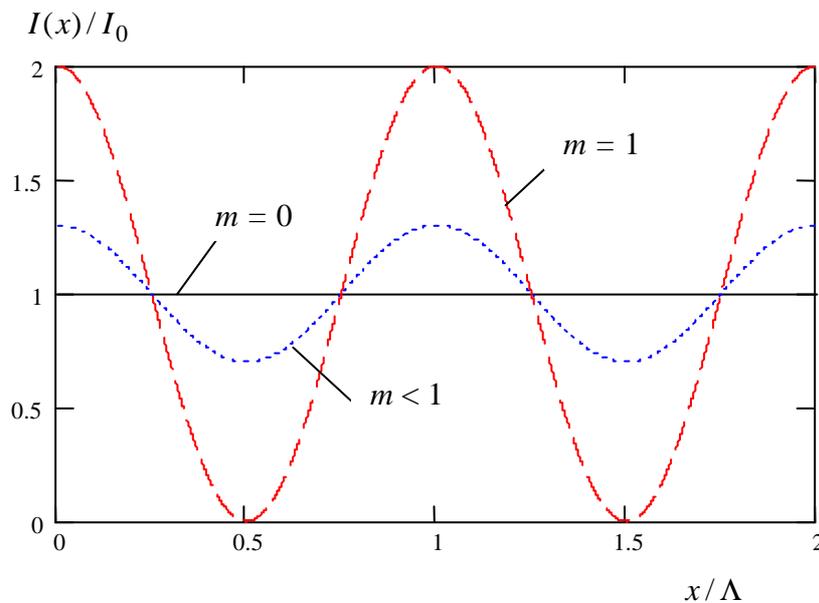


Рис. 5.6. Распределение интенсивности света в интерференционной картине при ее различных контрастах

Действительно, при ширине спектра излучения $\delta f \neq 0$ условие $k\Delta r = (2\pi/\lambda)(r_2 - r_1) = (\omega/c)(r_2 - r_1) = (2\pi f/c)\Delta r = 2\pi p$ выполняется в некоторой области значений Δr – положение максимумов и минимумов на оси x (рис. 5.6) различно для разных частот, картина интерференции замывается. Для количественной оценки учтем, что частицы вещества излучают не непрерывно, а в течение некоторых интервалов времени, расстояния между которыми случайны (рис. 5.7).

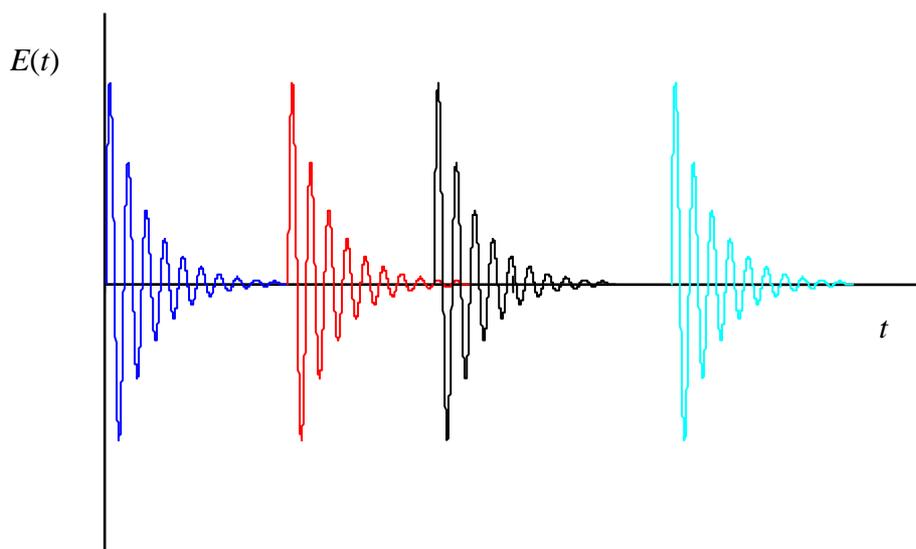


Рис. 5.7. Цуги излучения нескольких микрочастиц.

Часть сигнала, в течение которой его фаза меняется непрерывно, называется **цугом** – за это время **когерентность сохраняется**. Длина цуга τ_c , как следует из формулы (5.12), обратно пропорциональна ширине спектра излучения δf ,

$$\tau_c = \frac{1}{\delta f}, \quad (5.14)$$

и связана со степенью его монохроматичности.

Время τ_c называют **временем когерентности**, а длину цуга в пространстве $l_c = c\tau_c = c/\delta f = \lambda_0^2/\delta\lambda$ – **длиной когерентности**. Очевидно, что контрастная интерференционная картина получается в том случае, когда изменение разности фаз, $d(k\Delta r) = (2\pi/\lambda_0^2)\delta\lambda\Delta r$, связанное с конечной шириной спектра $\delta\lambda$, будет много меньше, чем 2π . Отсюда получаем:

$$\Delta r \ll \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}; \Delta r \ll l_c. \quad (5.15)$$

Таким образом, для получения контрастной интерференционной картины разность хода волн должна быть много меньше длины когерентности.

Какова же длина когерентности различных источников света? Для белого света $\delta f \sim 10^{14}$ Гц, $\tau_c \sim 10^{-14}$ с, $l_c \sim 1$ мкм. Для многомодового гелий-неонового лазера $\lambda_0 = 633$ нм, $\delta f \sim 5 \cdot 10^8$ Гц, $\tau_c \sim 2 \cdot 10^{-9}$ с, $l_c \sim 60$ см. Для одночастотного лазера, при $\delta f \sim 15$ Гц, имеем $\tau_c \sim 6,7 \cdot 10^{-2}$ с и $l_c \sim 2 \cdot 10^7$ м.

Данное свойство *временной когерентности* очень важно для голографии. Схема записи голограммы Лейта и Упатниекса представлена на рис. 5.8. На фотопластинку падает как опорная волна R , так и предметная волна S от объекта. Интерференционная картина этих волн фиксируется на фотоэмульсии. После экспонирования, проявления, закрепления, промывки и просушки она играет роль дифракционной решетки, на которой при дифракции опорной волны создаются рассеянные волны в том же направлении, что и сигнальные волны, «пронизывающие» фотоэмульсию. У наблюдателя создается иллюзия, что за пластинкой находится объект, имеющий объем, тот, который находился в данном месте при записи голограммы. Естественно, здесь Δr должно быть существенно меньше l_c . Чем больше длина когерентности лазера, тем больше глубина сцены, которую можно запечатлеть на голограмме.

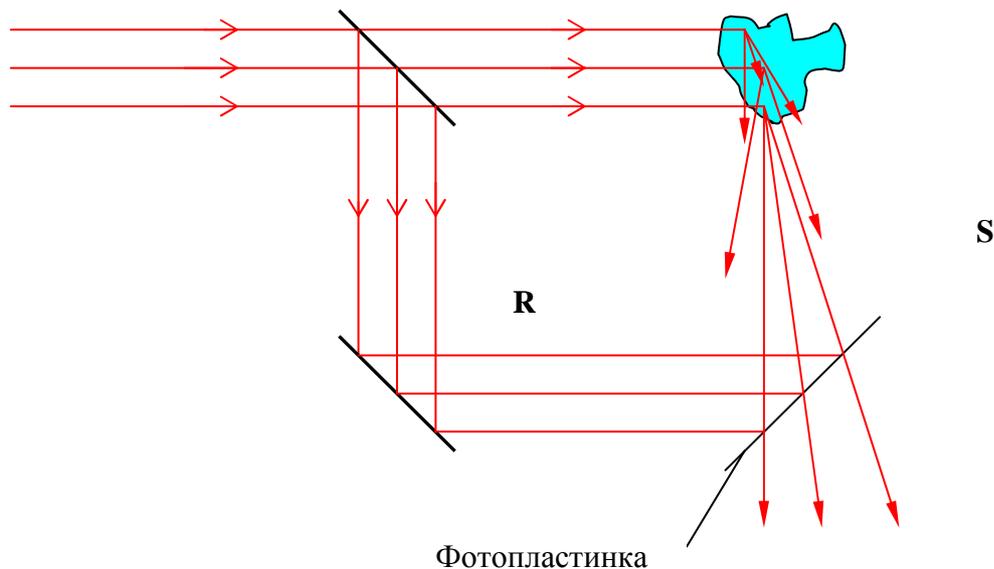


Рис. 5.8. Схема записи голограмм по методу Лейта и Упатниекса.

5.2.2. Пространственная когерентность

Пространственная когерентность связана со стабильностью фазы излучения в плоскости поперечного сечения пучка. Если для реализации интерференции Юнга (рис. 5.3) используется **излучение стандартного лазера**, например, гелий-неонового, то фазовый фронт пучка близок к плоскому. В этом случае фаза является постоянной по всему сечению пучка, разность начальных фаз источников сферических волн в интерферометре Юнга $\Delta\psi_{12} = \psi_{01} - \psi_{02} = \text{const} = 0$ не зависит от времени, и на экране наблюдается стационарная интерференционная картина. Излучение таких лазерных источников обладает высокой пространственной когерентностью.

Точно также, эта разность фаз будет оставаться постоянной, если экран с двумя отверстиями в интерферометре Юнга будет освещаться точечным монохроматическим источником. Если этот источник расположен на *оптической оси* системы, обозначенной как ось z на рис. 5.9, то $\Delta\psi_{12} = 0$ и в центре экрана, в точке O' , будет наблюдаться максимум интерференционной картины. При смещении источника в точку с координатой $x' = w/2$ разность хода лучей до нижнего и верхнего отверстий в непрозрачном экране станет отличной от нуля,

$$r'_2 - r'_1 = \sqrt{(R')^2 + (d+w)^2/4} - \sqrt{(R')^2 + (d-w)^2/4}, \quad (5.16)$$

и максимум интерференционной картины сместится из точки O' вдоль оси x на некоторое расстояние $-\Delta x$.

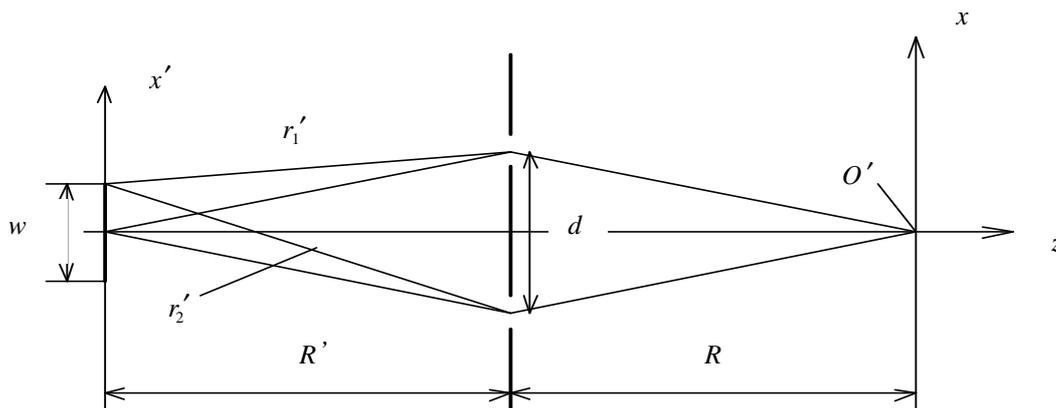


Рис. 5.9. Интерференция Юнга от протяженного источника излучения

Рассмотрим интерференцию для протяженного источника излучения с поперечным размером w , каждая точка которого излучает сферические волны с

начальной фазой, не связанной с фазами во всех других точках. Угловой размер такого источника, видимый из центра непрозрачного экрана, $\varphi = w/R'$, будем считать малым, $\varphi \ll 1$. В этом случае, используя разложение в ряд Тейлора и, учитывая в нем только два первые члена, из (5.16) получаем разность хода для крайних точек, расположенных при $x' = \pm w/2$:

$$\Delta r_{\max} = |r_2' - r_1'| \approx R' \left[1 + \frac{(d+w)^2}{8(R')^2} - 1 - \frac{(d-w)^2}{8(R')^2} \right] = \frac{\varphi d}{2}. \quad (5.17)$$

Для разности хода $\Delta r_{\max} = \lambda/2$ в точке O' будет наблюдаться минимум интерференционной картины, образуемой наложением световых полей, пришедших в нее от крайних точек протяженного излучателя. Очевидно, что в этом случае интерференционная картина будет сильно замыта и её контраст m будет близок к нулю. Интерференция на экране будет видна при условии $\Delta r_{\max} < \lambda/2$, то есть когда угловой размер протяженного источника излучения удовлетворяет неравенству:

$$\varphi < \frac{\lambda}{d}. \quad (5.18)$$

Это означает, что излучение такого источника *пространственно когерентно* в конусе с углом при вершине $\theta_c = d/R' \leq \lambda/(R'\varphi)$, называемым *апертурой интерференции*. Поперечный *размер области когерентности* может быть определен как $d = \lambda/\varphi$.

Если выделить из спектра Солнца, угловой размер которого составляет $\sim 10^{-2}$ рад, излучение с длиной волны 500 нм, то оно будет когерентно освещать пятно с диаметром ~ 50 мкм.

5.3. Методы наблюдения интерференционных картин

Два независимых источника света всегда некогерентны. Поэтому для наблюдения интерференции света используется один источник, излучение которого делится на два, или на большее количество пучков. *Интерференционные схемы, в которых присутствуют два таких источника света, называются двухлучевыми*. Все двухлучевые интерференционные схемы делятся на два класса:

- схемы, построенные по методу *деления амплитуды волны*;
- схемы, использующие методы *деления волнового фронта*.

5.3.1. Метод деления амплитуды

Амплитудное деление осуществляется с помощью полупрозрачных зеркал, границ раздела, пленок, и т.д., *всего волнового фронта* падающей волны как *единого целого*. В плоскости наблюдения обе разделенные волны перекрываются и создают, при достаточной степени когерентности, различные интерференционные эффекты, часть из которых обсуждается ниже.

Полосы равной толщины

При интерференции параллельного пучка света в тонком зазоре максимумы и минимумы интенсивности имеют одинаковые условия наблюдения при одинаковых толщинах зазора – картина полос “отслеживает” вариации толщины. Такая интерференция приводит к появлению *полос равной толщины*, каждая из которых соответствует геометрическому месту точек с одинаковой толщиной зазора или пленки. Для идеального плоского клина эти полосы эквидистантны и параллельны ребру клина (рис. 5.10).

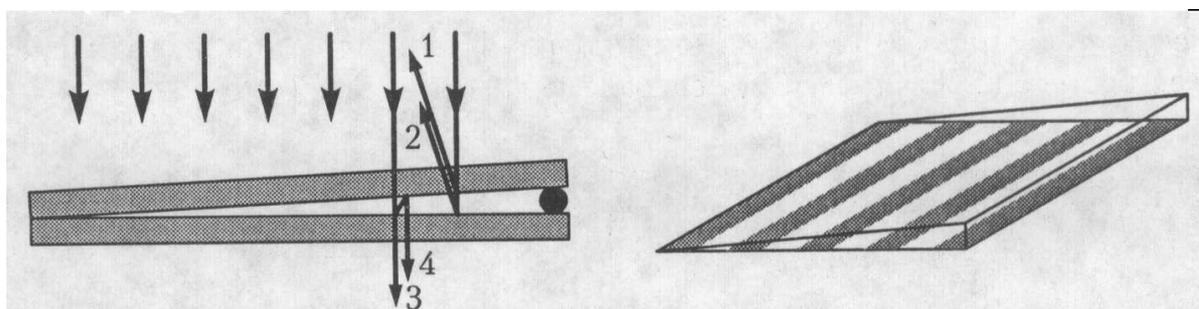


Рис. 5.10. Полосы равной толщины в воздушном клине. Углы отклонения лучей от нормали сильно преувеличены

Полосы могут наблюдаться как в отраженном, так и в прошедшем свете, однако в последнем случае видность интерференционной картины существенно ниже. Это связано с тем, что лучи 1 и 2 примерно равны по интенсивности и могут сильно гасить друг друга в минимумах, в то время как луч 4, испытывающий двукратное отражение, значительно слабее луча 3 (коэффициент отражения по интенсивности, если клин сделан из стекла, составляет примерно 4 %).

Разность хода между интерферирующими лучами очень близка к удвоенной толщине зазора d . Для зазора, заполненного средой с показателем преломления n ,

$\Delta r = 2dn$. При расчете положения максимумов и минимумов необходимо учитывать, что при отражении от более плотной среды происходит сдвиг по фазе на π (см. раздел 4).

Кольца Ньютона

Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона, образующиеся в зазоре между сферической линзой и плоской поверхностью (рис. 5.11). Лучше всего, как уже отмечалось выше, это интерференционное явление наблюдается в отраженном свете. В этом случае в центре картины, за счет фазового сдвига луча 2 при отражении от плоской поверхности, он будет в противофазе относительно пучка 1, и их наложение приводит к образованию темного пятна.

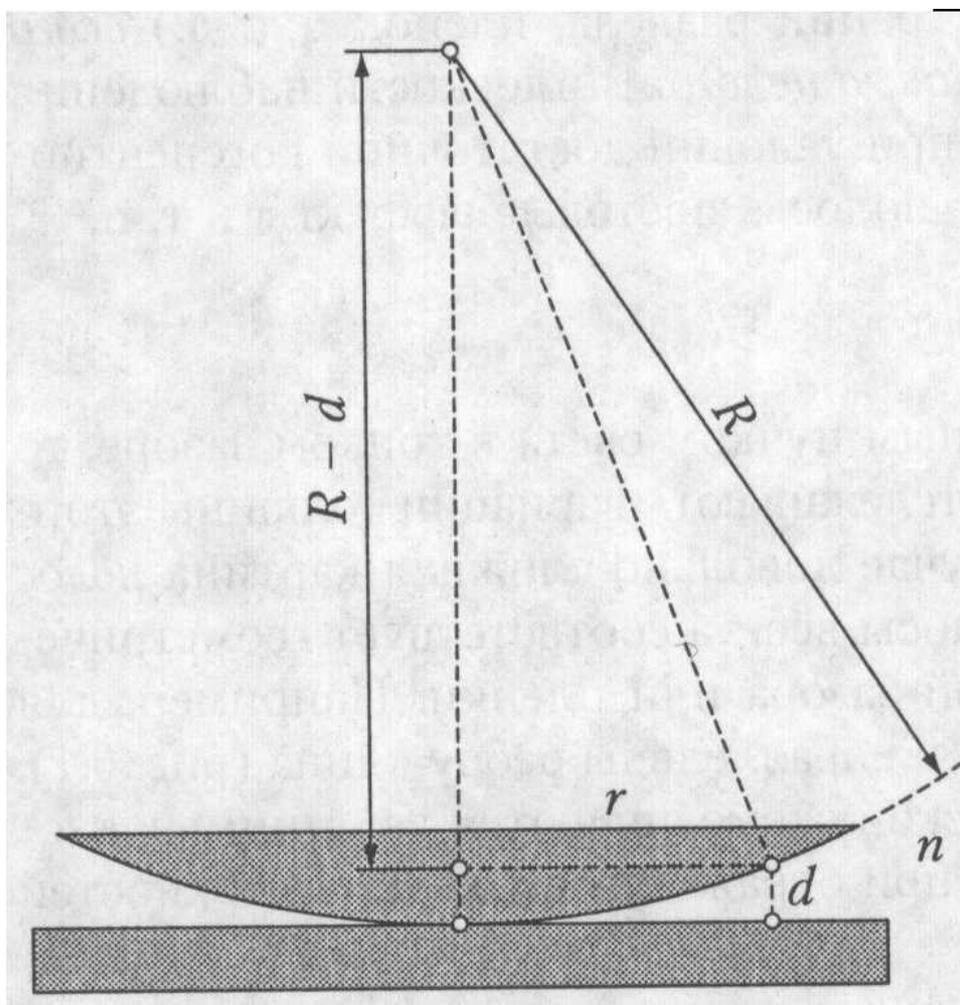


Рис. 5. 11. Получение колец Ньютона

Между радиусом кривизны линзы R , толщиной зазора d и радиусом ньютонического кольца r существует следующее геометрическое соотношение:

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rd + r^2, \quad (5.19)$$

где приближенное равенство хорошо выполняется при $d \ll R$.

Из формулы (5.19) получаем величину зазора, как

$$d = \frac{r^2}{2R}. \quad (5.20)$$

Если разность хода $\Delta r = 2dn$ равна четному числу полувольт, то (с учетом дополнительного фазового сдвига) в интерференционной картине наблюдается темное кольцо, если нечетному – то светлое. Отсюда находим радиусы темных колец, как

$$r_d = \sqrt{R\lambda m}, \quad (5.21)$$

и светлых, как

$$r_l = \sqrt{R\lambda(m + 1/2)}, \quad (5.22)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$. Так как толщина зазора d меняется по квадратичному закону (при её малых значениях), то система колец постепенно сгущается от центра к периферии (рис. 5.12).

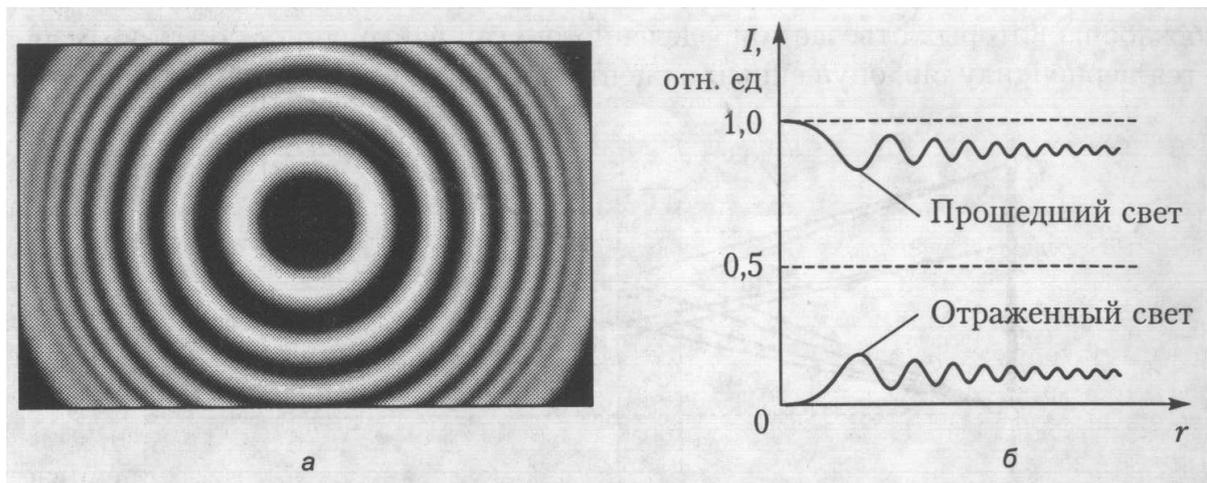


Рис. 5.12. Вид колец Ньютона в отраженном свете (а) и радиальное распределение интенсивности для квазимонохроматического источника (б)

Три-четыре первых ньютоновских кольца можно наблюдать при освещении белым светом, при этом ярко выражена их хроматичность (окрашенность), усиливающаяся к краям. Ширина колец увеличивается с ростом длины волны освещающего излучения, а их контрастность возрастает при сужении спектра излучения, например, с помощью светофильтров.

С ростом порядка интерференции (с увеличением номера кольца) для излучения с небольшой степенью монохроматичности контрастность ньютоновских колец падает. Для источника с шириной спектра $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ интерференционная картина пропадает, если максимум порядка m для λ_1 совпадает с минимумом $(m+1)$ -го порядка для λ_2 :

$$2d = m\lambda_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_2.$$

Отсюда находим число видимых колец:

$$m = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{l_c}{\lambda_0}, \quad (5.23)$$

где $\lambda_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ – средняя (центральная) длина волны. Таким образом, длину когерентности l_c , определенную выше в п. 5.2.1, можно оценить из числа видимых колец Ньютона.

Следует отметить, что при отсутствии поглощения в линзе и плоской пластине (см. рис. 5.11), картины колец в отраженном и прошедшем свете являются *дополнительными*, то есть в любой точке зазора сумма их интенсивностей постоянна и равна интенсивности падающей плоской волны.

Полосы равного наклона

Методом деления амплитуды можно получить еще один тип интерференционной картины – полосы равного наклона. Они наблюдаются при освещении пленок или плоскопараллельных пластинок расходящимся пучком. Отражения от передней и задней поверхностей пластины формируют два мнимых изображения S' и S'' источника S (рис. 5.13).

Сферические волны от этих мнимых источников, накладываясь в плоскости экрана, создают систему интерференционных колец, каждое из которых отвечает определенному углу наклона. Осью этих колец является перпендикуляр, опущенный из центра источника на поверхность пластины.

Рассмотрим ситуацию, при которой оба отраженных луча образуются из одного и того же падающего (рис. 5.14)

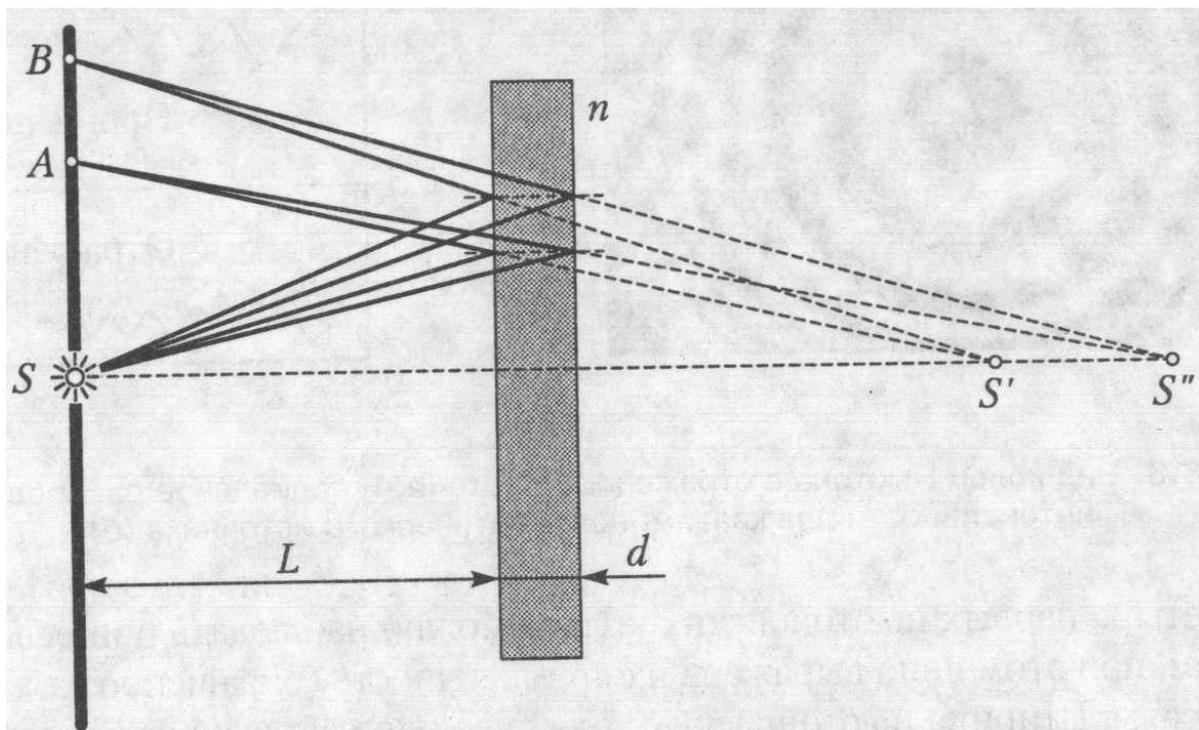


Рис. 5.13. Получение полос равного наклона

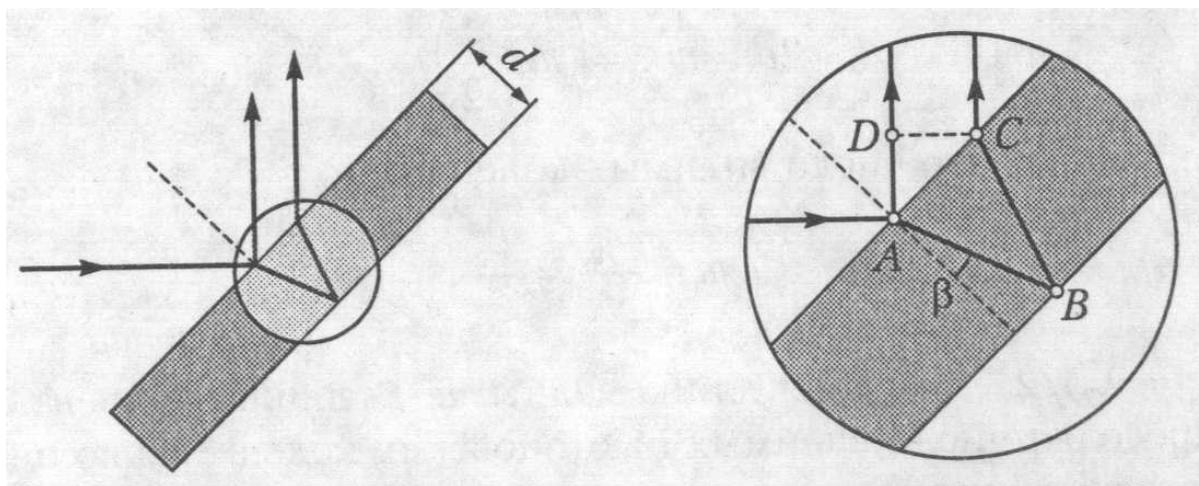


Рис. 5.14. Интерференция лучей, отраженных тонкой пленкой

Разность хода между отраженными лучами при произвольном угле падения для случая тонкой пленки, находящейся в воздухе, равна

$$\Delta r = (AB + BC)n - AD + \frac{\lambda}{2} = 2nd \cos \beta + \frac{\lambda}{2}. \quad (5.24)$$

Таким образом, для всех волн, падающих на пленку под одним и тем же углом, разность хода одинакова. Отраженные лучи при этом параллельны, вследствие чего

интерференционная картина локализована в бесконечности и может наблюдаться на экране, помещенном в фокальную плоскость положительной линзы.

Из формулы (5.24) следует, что при увеличении угла падения света оптическая разность хода между отраженными лучами уменьшается. Следовательно, номера колец равного наклона (порядки интерференции m) будут *убывать* по мере перехода от центра к периферии. Для источника S с не очень хорошей временной когерентностью это приведет к тому, что внешние кольца будут иметь большую видность, чем внутренние. В этом состоит качественное отличие полос равного наклона от полос равной толщины.

При применении в качестве светоделителей плоскопараллельных стеклянных пластин толщиной в единицы и десятки миллиметров требуются лазерные источники света, иначе длина когерентности может оказаться меньше оптической разности хода. Порядки полос в этом случае могут составлять десятки тысяч (для оси системы колец имеем $m = 2dn/\lambda$).

При использовании реальных протяженных источников полосы равной толщины оказываются локализованными на поверхности пленок или зазоров, а полосы равного наклона – на бесконечности. Для случая точечных источников это различие теряется: оба типа полос делокализованы, то есть наблюдаются в любой точке области перекрытия интерферирующих пучков.

Просветление оптических элементов

Рассмотрим тонкую пленку, нанесенную на поверхность оптического элемента, причем показатели преломления воздуха, пленки и материала, из которого изготовлен элемент, удовлетворяют соотношению $n_0 < n_1 < n_2$. Поскольку фазовый сдвиг на 180° возникает при отражении от оптически более плотной среды, оба интерферирующих луча, отраженных от пленки и оптического элемента, претерпевают одинаковый скачок фазы и взаимной расфазировки не происходит. Можно показать, что при толщине пленки, равной $d = \lambda/4n_1$, коэффициент отражения по интенсивности $R = I_r/I_i$ минимален и определяется выражением:

$$R = \left(\frac{n_0 n_2 - n_1^2}{n_0 n_2 + n_1^2} \right)^2. \quad (5.25)$$

Нетрудно заметить, что $R = 0$ при выполнении условия

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2}. \quad (5.26)$$

Это условие имеет простое физическое объяснение. Коэффициент отражения на границе двух сред при нормальном падении зависит только от *отношения* показателей преломления (см. формулы (4.21) и (4.24)). На границе раздела воздух-пленка это отношение равно n_1/n_0 , на границе пленка-оптический элемент – n_2/n_1 . Приравнявая эти выражения, получаем условие (5.26).

Эффект уменьшения отражения нанесением такой пленки называется *просветлением оптики*, он широко применяется для уменьшения потерь света в оптических приборах. Однако полное просветление может быть достигнуто лишь для одной длины волны, для которой выполняется соотношение $\lambda = 4dn_1$.

5.3.2. Метод деления волнового фронта

Применение этого метода предполагает формирование вторичных источников из единого волнового фронта путем выделения различных его частей. Все основные интерференционные схемы, основанные на методе деления волнового фронта, тем или иным образом *сводятся к схеме Юнга* (см. рис. 5.3). Здесь необходимо сформировать вместо одного источника излучения два, желательно *на минимальном расстоянии* друг от друга, с целью получения полос *максимальной ширины* в области перекрытия пучков.

Бипризма Френеля (рис. 5.15) представляет собой две клиновидные призмы, соединенные основаниями, и для точечного излучателя S формирует два мнимых источника S_1 и S_2 . Преломляющий угол α , одинаковый для обеих половин, будем считать малым, составляющим единицы минут. Для параксиальных лучей, распространяющихся под малым углом к оптической оси, каждый клин отклоняет их к своему основанию на угол $\theta \approx (n-1)\alpha$. Это приводит к смещению изображения источника на величину $SS_1 = L_1 \operatorname{tg} \theta \approx L_1 \theta$.

Определим ширину интерференционной полосы на экране наблюдения как расстояние между соседними минимумами Δx в его центре. Из условия минимума $\Delta r = \lambda/2 = \sqrt{(L_1 + L_2)^2 + (d + \Delta x)^2/4} - \sqrt{(L_1 + L_2)^2 + (d - \Delta x)^2/4}$, где $d = S_1 S_2 \approx 2L_1(n-1)\alpha$ – расстояние между мнимыми источниками (по сути дела, расстояние между отверстиями в интерферометре Юнга), получаем:

$$\Delta x \approx \frac{L_1 + L_2}{d} \lambda \approx \frac{L_1 + L_2}{2L_1(n-1)\alpha} \lambda. \quad (5.27)$$

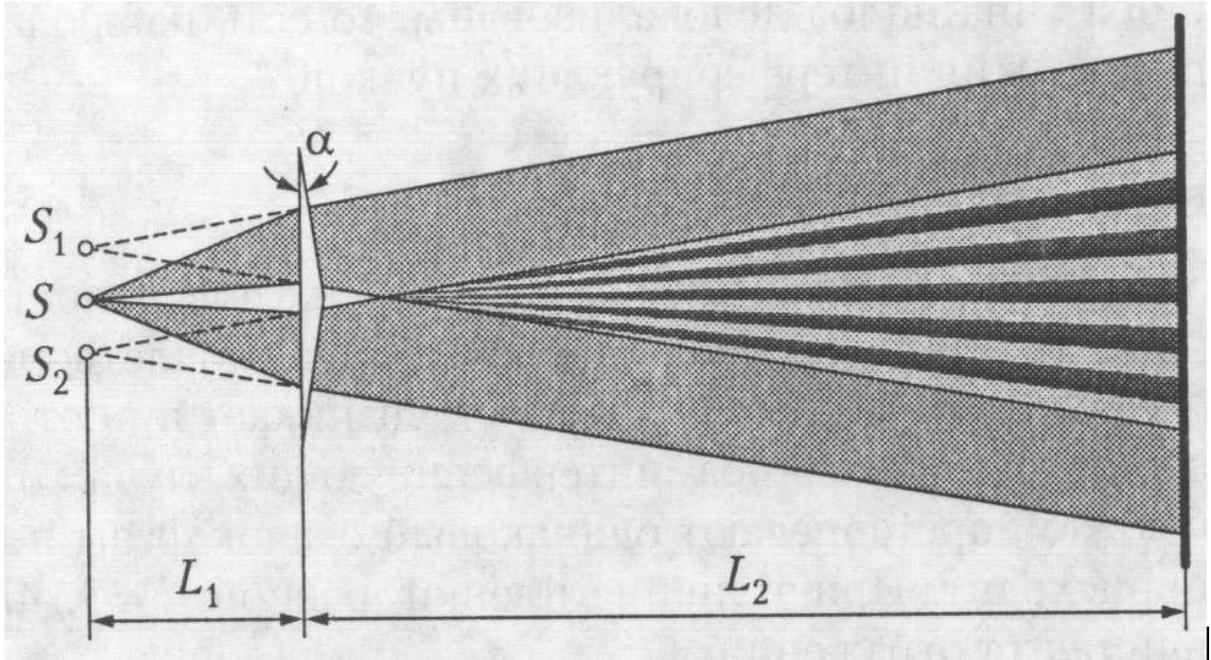


Рис. 5.15. Бипризма Френеля

Таким образом, ширина интерференционной полосы обратно пропорциональна преломляющему углу α .

Бизеркала Френеля (рис. 5.16) составляют плоский угол, близкий к 180° , и позволяют за счет отражения сформировать два мнимых источника S_1 и S_2 .

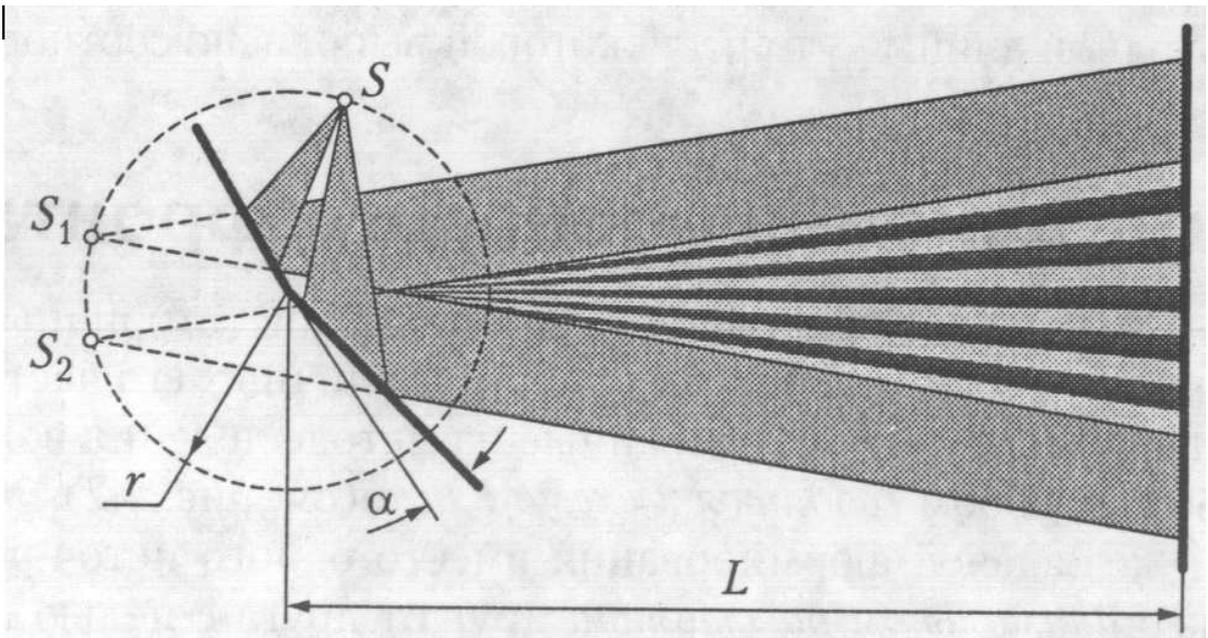


Рис. 5.16. Бизеркала Френеля

Как и в любой системе плоских зеркал, все три источника находятся на одинаковом расстоянии от ребра плоского угла (на окружности с центром в ребре). Хотя при отражении от зеркала происходит фазовый сдвиг, дополнительной разности фаз не возникает, поскольку сдвигаются фазы обоих пучков. При повороте зеркала на угол α отраженный луч поворачивается на 2α , поэтому $S_1S_2 = r \operatorname{tg}(2\alpha)$. В силу малости угла α расстояние между источниками $d = S_1S_2 \approx 2r\alpha$, и ширина интерференционной полосы определяется из выражения:

$$\Delta x = \frac{L+r}{d} \lambda = \frac{L+r}{2r\alpha} \lambda. \quad (5.28)$$

Билинза Бийе (рис. 5.17) изготавливается из единой линзы с фокусным расстоянием f путем ее разрезания по диаметру и раздвигания половин на расстояние h поперек оптической оси. Другой вариант – вырезание вдоль диаметра тонкого пояса и склеивание оставшихся половин.

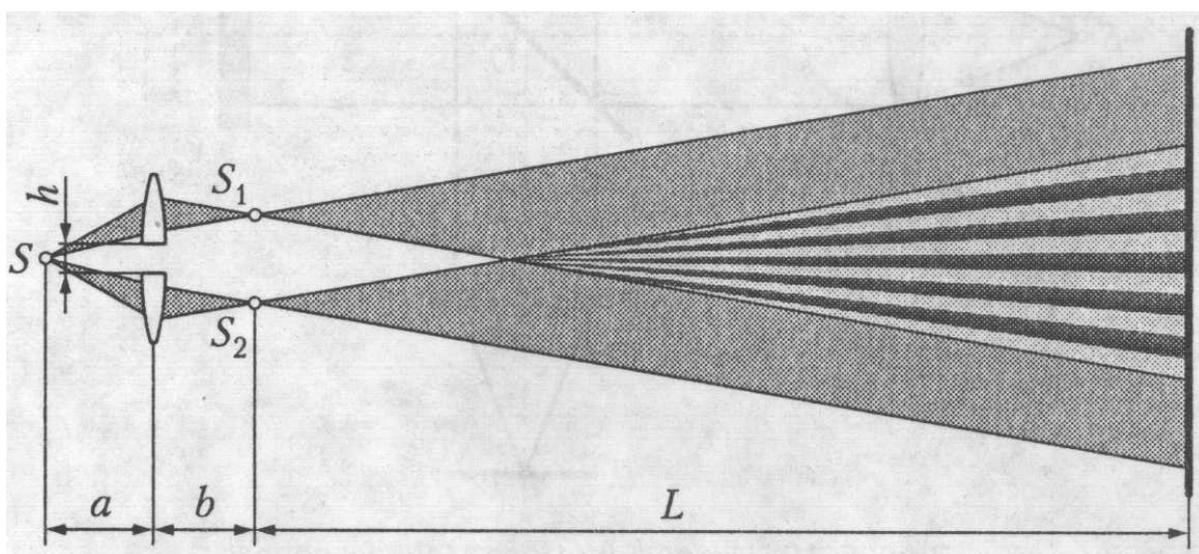


Рис. 5.17. Билинза Бийе

В обоих случаях формируются два действительных источника S_1 и S_2 , с расстоянием между ними

$$d = \frac{hf}{a-f}, \quad (5.29)$$

поскольку $h/a = d/b$ и $1/a + 1/b = 1/f$. Ширина интерференционной полосы определяется, как

$$\Delta x \approx \frac{L\lambda}{d} = \frac{L(a-f)}{ahf} \lambda. \quad (5.30)$$

Зеркало Ллойда (рис. 5.18) позволяет получить интерференцию от самого источника S и от его мнимого изображения S_1 в плоском зеркале M , размещенном как можно ближе к источнику. Поскольку отраженный пучок испытывает фазовый сдвиг, то *положения максимумов и минимумов интерференции меняются местами.*

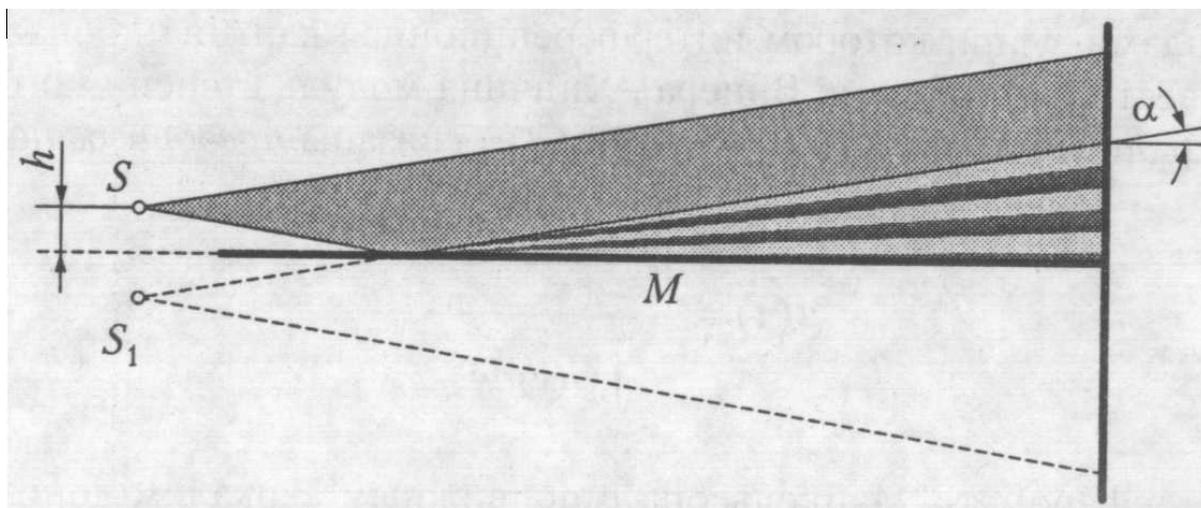


Рис. 5.18. Зеркало Ллойда

Ширина интерференционной полосы зависит не только от высоты источника над зеркалом h ($S_1S_2 = 2h$), но и от угла скольжения α , так как разность хода составляет величину $\Delta r = S_1S_2 \operatorname{tg} \alpha - \lambda/2 \approx 2h\alpha - \lambda/2$.

5.3.3. Двухлучевые интерферометры

Большинство *двухлучевых интерферометров* построено по схеме деления амплитуды. Наиболее известным из них является *интерферометр Майкельсона* (рис. 5.19) с одним 50-процентным светоделителем и двумя зеркалами M_1 и M_2 .

Разность хода в нем равна удвоенной разности расстояний OM_1 и OM_2 , называемых *плечами интерферометра*. Сьюстированный равноплечий интерферометр дает равномерную засветку поля зрения в плоскости наблюдения P (бесконечная полоса нулевого порядка). В случае наклона или отклонения от идеальной плоскостности одного из зеркал в поле зрения появляются полосы, ширина которых обратно пропорциональна углу наклона зеркала и прямо пропорциональна фокусному расстоянию объектива L_2 .

Отличительной особенностью интерферометра Майкельсона является возможность изменения разности хода в очень широких пределах. Например, с его использованием становится возможным прямое измерение длины когерентности источника излучения, как расстояния между зеркалами x , при котором интерференционная картина пропадает.

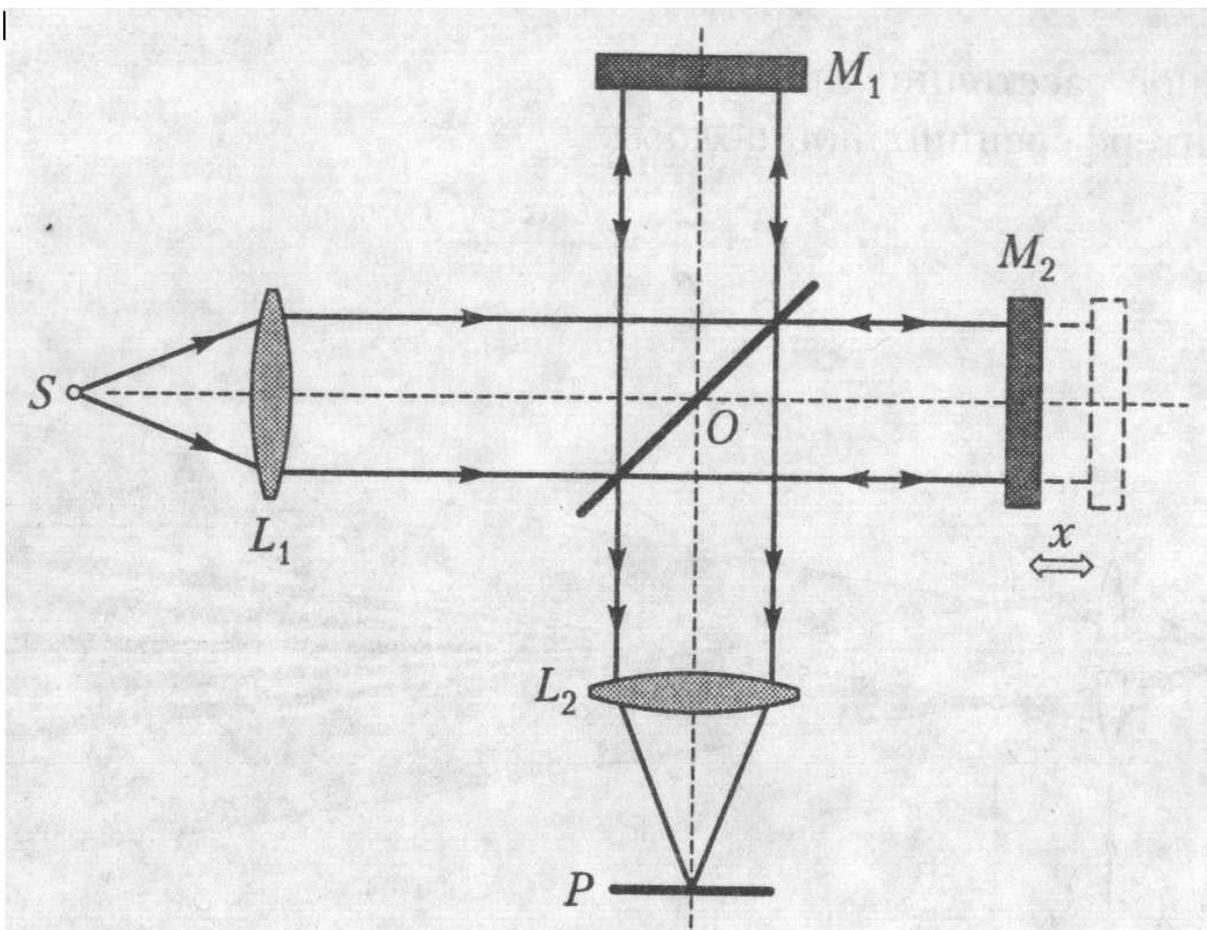


Рис. 5.19. Интерферометр Майкельсона

Для контроля качества оптических элементов используется *интерферометр Тваймана-Грина*, схема которого (рис. 5.20, а), является модификацией схемы интерферометра Майкельсона. В его измерительное плечо помещается проверяемый элемент. В случае проверки призмы второе плечо просто разворачивается, а отражающее зеркало остается плоским. Для контроля линз или многолинзовых объективов зеркало M_2 делают сферическим.

Интерферометр Маха-Цендера (рис. 5.20, б) предназначен в первую очередь для измерения показателей преломления газов. В плечи интерферометра помещаются

кюветы K_1 и K_2 , одна из которых заполняется исследуемым веществом, а другая служит для компенсации разности хода, обусловленной окнами кюветы. При прохождении света через кюветы появляется добавочная разность хода $\Delta r = (n_2 - n_1)L$, где L – длина кюветы, n_1 и n_2 – показатели преломления веществ, заполняющих кюветы. Такие устройства для прецизионного измерения показателя преломления называют *интерференционными рефрактометрами*.

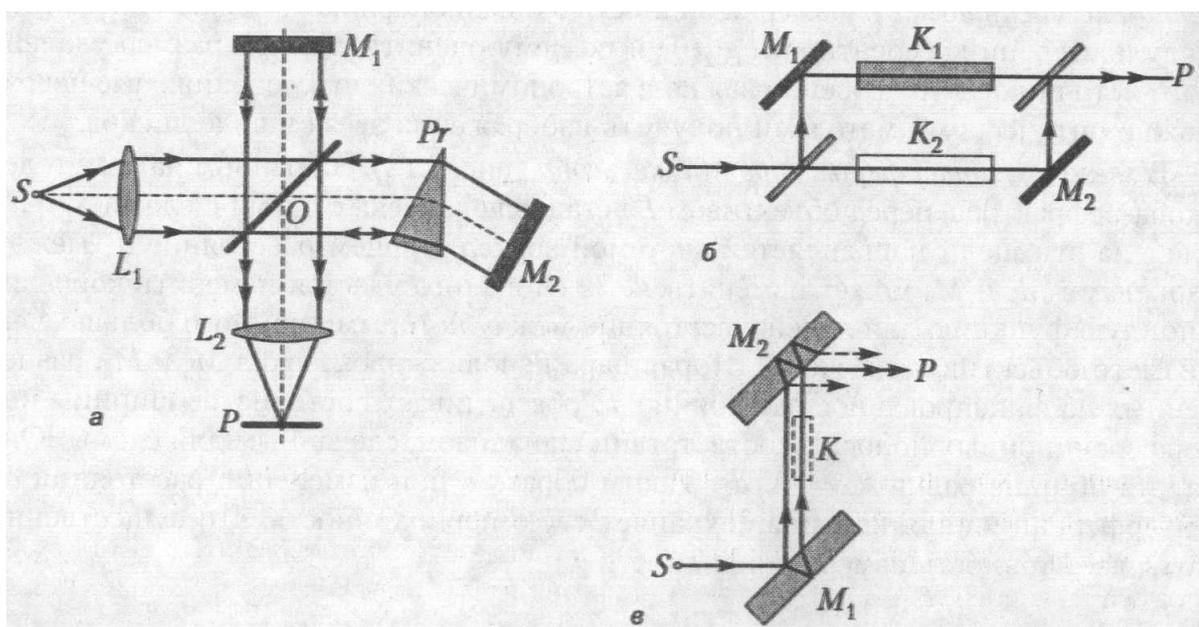


Рис. 5.20. Оптические схемы интерферометров Тваймана-Грина (а), Маха-Цендера (б) и Жамена (в)

Такие рефрактометры обладают предельно высокой чувствительностью, определяемой отношением длины световой волны λ к длине кюветы L . Действительно, визуально можно заметить сдвиг интерференционной картины с точностью до $1/40$ порядка, что при $L = 10$ см позволяет обнаружить разность показателей преломления порядка 10^{-7} .

Интерферометр Жамена (рис. 5.20, в), состоящий из двух толстых плоскопараллельных пластин, наиболее прост в настройке и регулировке (в оптической технологии это называется *юстировкой*). Он также может использоваться для измерения показателей преломления жидкостей и газов. Его недостаток – слишком близкое расположение обоих световых лучей, которые называются *объектным и реперным пучками*, не позволяющее размещать в нем кюветы большого диаметра.

5.3.4. Измерение угловых размеров источников. Звездный интерферометр

Как известно из предыдущего рассмотрения (см. п. 5.2.2), в случае протяженного источника, расфазированность колебаний, приходящих от различных его точек, приводит к уменьшению видности интерференционных полос (контраста интерференционной картины m). Для таких источников, характеризующихся *конечной пространственной когерентностью*, можно определить угловой размер удаленного источника по исчезновению видности интерференционной картины при увеличении расстояния между отверстиями в интерферометре Юнга (см. формулу (5.12)). Изменяя контраст в низких порядках интерференции, можно оценить угловой размер астрономических объектов (звезд). Следует отметить, что обычными оптическими методами получить изображения звезд в виде дисков не удастся.

В звездном интерферометре Майкельсона (рис. 5.21), собранном на базе телескопа-рефрактора, перед объективом L установлена маска с двумя щелями S_1 и S_2 .

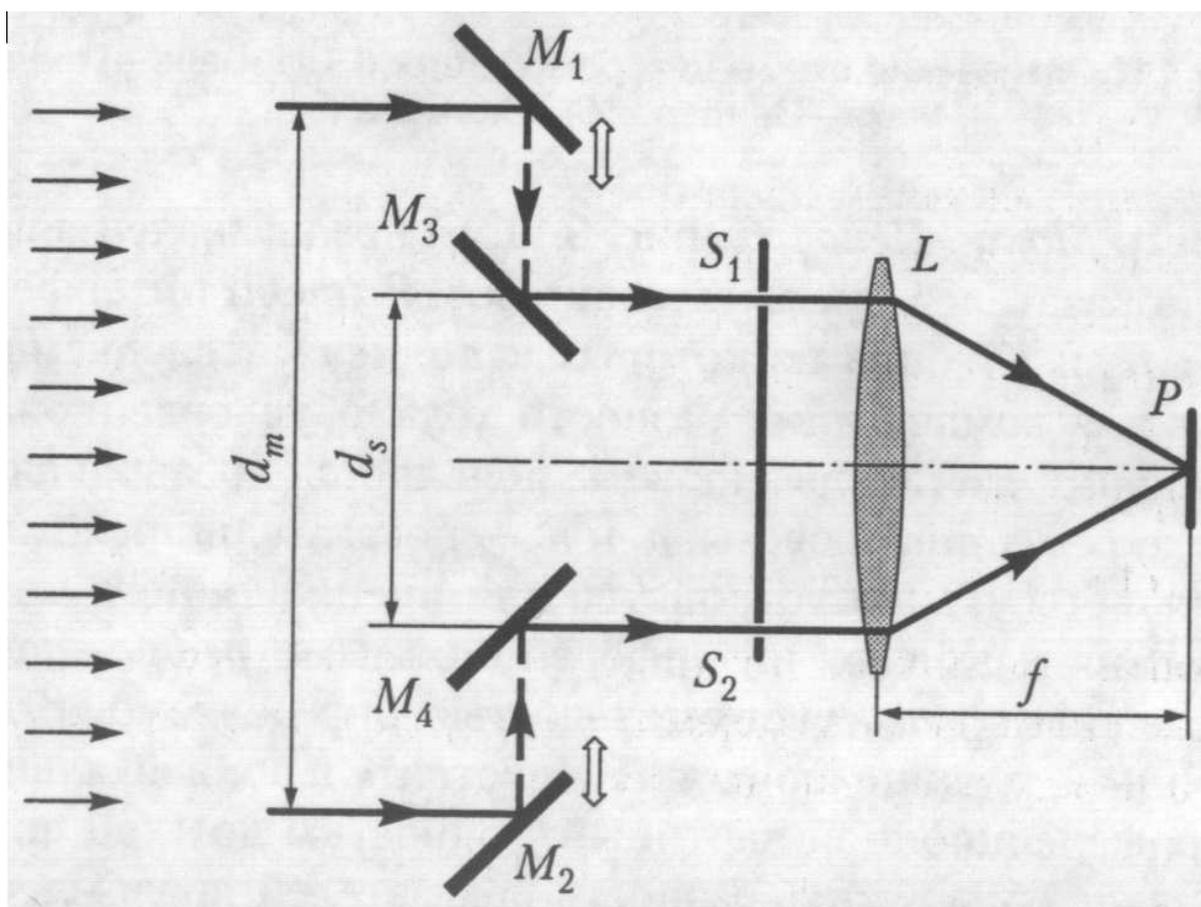


Рис. 5.21. Звездный интерферометр

Свет на эти щели направляется системой зеркал, причем расстояние d_m между зеркалами M_1 и M_2 может изменяться. За счет этого удается охватить гораздо больший угловой размер, в котором излучение протяженного источника имеет конечную пространственную когерентность (то есть увеличить возможную для изучения *апертуру интерференции*, см. п. 5.2.2). Вторая пара неподвижных зеркал M_3 и M_4 , разнесенных на фиксированное расстояние d_s , обеспечивает постоянство ширины интерференционных полос, определяемой в данном случае как $\Delta x = f\lambda/d_s$. Таким образом, при изменении расстояния d_m интерференционная картина сохраняет свою периодичность, что существенно повышает точность измерения её контраста.

При увеличении расстояния d_m видность полос в плоскости P падает. Определив значение d_m , при котором $m(d_m) \rightarrow 0$, можно оценить угловой размер источника ϕ . Можно показать, что в предположении о равномерном распределении интенсивности на источнике контраст интерференционной картины определяется как

$$m = \left(\frac{\sin(\pi d_m \phi / \lambda)}{\pi d_m \phi / \lambda} \right)^2. \quad (5.31)$$

Эта функция обращается в ноль при $d_m = \lambda/\phi$. Несмотря на высокие требования, предъявляемые к конструкции интерферометра, допускающей перемещение зеркал M_1 и M_2 с сохранением их ориентации с точностью до долей длины волны, Майкельсону удалось обеспечить размер d_m , достигающий 6 м, что соответствует угловому разрешению 0.02 угловых секунды.

6. Оптика анизотропных сред

6.1. Эффекты взаимодействия оптического излучения с веществом и их классификация

Распространение оптического излучения в веществе (материальной среде) сопровождается их взаимодействием. Именно благодаря взаимодействию света (электромагнитного излучения) с веществом мы можем его обнаруживать, усиливать, генерировать, преобразовывать и т.д. Схему взаимодействия излучения с веществом можно условно представить в следующем виде (рис. 6.1). Входное излучение может представлять как монохроматическую плоскую волну, так и поле, представляющее

суперпозицию плоских волн с различными направлениями распространения и частотами.

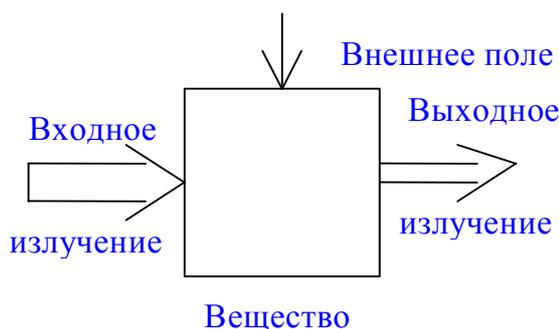


Рис. 6.1.

Иногда это может быть излучение, локализованное во времени (например, импульс) или (и) в пространстве (например, гауссов пучок). Мы полагаем, что на вещество могут действовать и некоторые низкочастотные внешние поля – электрические, магнитные, акустические, температурные и др. В основе многих устройств управления излучением лежит именно этот подход.

Дадим некоторую *классификацию эффектов взаимодействия*.

1. Воздействие вещества на излучение – какие-либо характеристики излучения на выходе отличаются от входных. Такие эффекты известны людям давно – отражение света от водной поверхности, преломление света (изображение рыбы в воде не соответствует её действительному положению и др.). Ньютон с помощью призмы разложил белый свет в спектр, Эразм Бартолин в 1669 г. наблюдал двулучепреломление света в кристалле исландского шпата – эти примеры можно продолжать бесконечно, поскольку *вещество всегда действует на излучение каким-либо образом*.

2. Воздействие излучения на вещество – параметры вещества, характеристики вещества, его форма, состояние и т.д. меняются при его облучении. Простой пример – одежда хорошо высыхает на солнце. Она также выцветает на нём со временем. Сфокусированное солнечное излучение может прожечь бумагу, зажечь костер и т.д. Однако наибольшее развитие эффекты воздействия излучения на вещество, их исследования и приложения, получили после появления лазеров. Достижимые здесь плотности энергии позволяют вызвать в веществе как обратимые, так и необратимые изменения. Примеры – динамические голограммы в фотохромных и фоторефрактивных

материалах (обратимые); резка, сварка, сверление отверстий лазерным лучом (необратимые).

3. Эффекты самовоздействия – излучение действует на вещество, а изменение его свойств приводит к изменению параметров излучения. Примеры: самофокусировка и самодиффузия световых пучков, распространения солитонов, и т.д.

Описание *эффектов взаимодействия излучения с веществом* требует соединения знаний о веществе и о поле. В некоторых случаях проявляется квантовая природа вещества – под действием поля происходят переходы между энергетическими уровнями частиц, из которых это вещество состоит. Обычно это имеет место при совпадении частоты излучения с частотой перехода, $\hbar\omega_{mn} = E_m - E_n$ (постулат Бора). Такие же эффекты происходят при межзонном поглощении в полупроводниках и диэлектриках, когда рождаются электронно-дырочные пары, или при примесном поглощении, когда рождается электрон в зоне проводимости или дырка в валентной зоне. В этом случае зачастую приходится прибегать к *квантово-механическому описанию*: заменить физические величины соответствующими операторами (проквантовать состояние вещества), применять аппарат статической физики. Если квантовая природа вещества не проявляется, то его проще рассматривать на основе *классического описания*, используя макроскопические характеристики, такие как диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, проводимость и т.д.

Поле можно рассматривать с позиций *квантовой электродинамики*, вводя операторы рождения и уничтожения фотонов, и используя другой формализм описания. *Классическое описание поля* предполагает использование *уравнений Максвелла*, хорошо вам знакомых. Когда речь идет о взаимодействии излучения с веществом, часто используют *полуклассическое описание*: *вещество рассматривается как квантовая система* и соответствующие физические величины заменяются операторами, а *поле* рассматривается классически, на основе *уравнений Максвелла*.

Многие эффекты воздействия вещества на свет можно рассматривать с позиций *линейной электродинамики* (линейной оптики), когда воздействием света на вещество пренебрегается. Однако при больших интенсивностях света отклик вещества становится нелинейным, то есть *зависящими от поля становятся характеристики вещества*. Такие эффекты рассматривает *нелинейная оптика*.

В настоящем разделе рассмотрим распространение световых волн в материальных средах в *линейном приближении*, с позиций классической электродинамики. При описании будем исходить из уравнений Максвелла для сред, в которых отсутствуют свободные заряды и сторонние токи:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}_{cond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (6.4)$$

6.2. Материальные уравнения для анизотропных сред

Анизотропия – зависимость физических свойств вещества от направления. *Естественная анизотропия* – характерная особенность кристаллов, характеризующихся упорядоченным периодическим расположением элементарных ячеек. Различные направления в элементарной ячейке, даже состоящей из одинаковых атомов, неравноправны. Приложение к среде, даже изначально изотропной, внешних полей (см. рис. 6.1), приводит к *наведенной анизотропии*.

В анизотропной среде связь между векторами, которые являются тензорами первого ранга, дается тензорами второго ранга: вместо диэлектрической проницаемости ϵ вводится тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, вместо магнитной проницаемости μ – тензор магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ и вместо проводимости σ – тензор проводимости $\hat{\sigma}$. В краткой записи материальные уравнения, характеризующие линейную зависимость одного вектора от другого и соответствующие сплошным средам, не обладающим дисперсией, представляются следующим образом:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}, \quad (6.5)$$

$$\vec{B} = \hat{\mu} \cdot \vec{H}, \quad (6.6)$$

$$\vec{\delta}_{cond} = \hat{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (6.7)$$

Развернутая форма этих уравнений может быть легко записана с учетом того, что векторам (тензорам первого ранга) соответствуют матрицы-столбцы

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\delta}_{cond} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

с элементами, равными проекциям векторов на оси $x \leftrightarrow 1$, $y \leftrightarrow 2$ и $z \leftrightarrow 3$.

Материальные тензоры второго ранга выражаются квадратными матрицами:

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

Например, материальное уравнение (6.5) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_{11}E_1 + \epsilon_{12}E_2 + \epsilon_{13}E_3, \\ D_2 &= \epsilon_{21}E_1 + \epsilon_{22}E_2 + \epsilon_{23}E_3, \\ D_3 &= \epsilon_{31}E_1 + \epsilon_{32}E_2 + \epsilon_{33}E_3, \end{aligned} \quad (6.10)$$

выражающем линейную зависимость каждой компоненты вектора \vec{D} от каждой из компонент вектора \vec{E} .

Запишем уравнения (6.10) в более компактном виде:

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j \quad (i=1,2,3). \quad (6.11)$$

Опуская далее знак суммирования, воспользуемся **правилом Эйнштейна**: *если в одном и том же члене индекс суммирования повторяется дважды, то автоматически подразумевается суммирование по этому индексу от 1 до 3*. Таким образом, вместо (6.11) будем пользоваться его кратким вариантом записи:

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j. \quad (6.12)$$

Отметим, что рассматриваемые нами тензоры второго ранга $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ симметричны, то есть для их недиагональных компонент выполняются соотношения

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (6.13)$$

6.3. Симметричные тензоры второго ранга в различных средах

Симметричные тензоры второго ранга имеют в общем случае шесть независимых компонент – 3 диагональных и 3 недиагональных. Однако, когда среда обладает симметрией, число независимых компонент уменьшается.

К *оптически изотропным средам* относятся аморфные материалы (стекла, жидкости, полимеры и др.) и кристаллы кубической системы (Si, Ge, GaAs, $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ и др.), характеризующиеся наличием четырех осей симметрии третьего порядка. В таких средах имеется только одна независимая компонента тензора второго ранга, и он имеет одинаковый вид при любом выборе координатных осей. Например, для тензора диэлектрической проницаемости получаем

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6.14)$$

то есть

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}, \quad (6.15)$$

где ε – скалярная диэлектрическая проницаемость среды и δ_{ij} – единичный симметричный тензор второго ранга. Нетрудно видеть, что в оптически изотропной среде можно пользоваться обычными материальными уравнениями ($\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ и др.).

К *одноосным* относятся кристаллы тригональной (имеют одну основную ось симметрии третьего порядка), тетрагональной (имеют одну основную ось симметрии четвертого порядка) и гексагональной (имеют одну основную ось симметрии шестого порядка) систем. В этих кристаллах принято ось z декартовой кристаллофизической системы координат совмещать с указанными осями симметрии и называть ее *оптической осью*. Тензор диэлектрической проницаемости в этом случае не зависит от выбора осей x и y и имеет вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{vmatrix}, \quad (6.16)$$

где ε_{\perp} и ε_{\parallel} имеют смысл диэлектрических проницаемостей для компонент поля, направленных перпендикулярно и параллельно оптической оси, соответственно.

Кристаллы ромбической, моноклинной и триклинной систем относятся к группе *двуосных*, то есть имеющих две оптические оси. У кристаллов ромбической системы есть более одной оси второго порядка или более одной плоскости симметрии. Все оси кристаллофизической системы координат кристаллов ромбической системы направлены по осям симметрии второго порядка или по нормальям к плоскостям симметрии. Тензор диэлектрической проницаемости здесь является диагональным

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (6.17)$$

и характеризуется тремя независимыми компонентами. Кристаллы моноклинной системы имеют лишь одну ось симметрии второго порядка, или одну плоскость симметрии, или и ось, и плоскость. В кристаллографической системе координат с осью y , направленной по оси второго порядка или по нормали к плоскости симметрии, тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{31} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad (6.18)$$

требуя для описания диэлектрических свойств знания четырех независимых компонент. Кристаллы триклинной системы не имеют ни осей, ни плоскостей симметрии, и симметричные тензоры второго ранга, характеризующие их физические свойства, имеют все шесть независимых компонент.

Ограничимся далее анализом распространения световых волн в *немагнитных средах*, для которых тензор магнитной проницаемости имеет вид $\mu_{ij} = \mu_0 \delta_{ij}$.

6.4. Тензор диэлектрической восприимчивости

Как известно, вектор электрической индукции диэлектрической среды определяется выражением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (6.19)$$

где вектор электрической поляризации \vec{P} , равный сумме дипольных моментов, приходящихся на единицу объема диэлектрика, линейно связан с вектором напряженности приложенного поля:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \hat{\chi} \cdot \vec{E}. \quad (6.20)$$

Компоненты тензора диэлектрической восприимчивости среды $\hat{\chi}$, как можно видеть из формул (6.5), (6.19) и (6.20), связаны с компонентами тензора диэлектрической проницаемости соотношением

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}). \quad (6.21)$$

Отметим, что в общем случае векторы $\epsilon_0 \vec{E}$ и \vec{P} по направлению не совпадают (рис. 6.2).

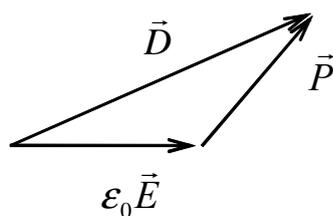


Рис. 6.2.

Линейная связь векторов индукции с соответствующими векторами напряженности, а также векторов плотности тока проводимости и электрической поляризации с напряженностью электрического поля, определяемая соотношениями (6.5)–(6.7) и (6.20), является частным случаем, относящимся к линейной электродинамике и средам без дисперсии. Однако тензоры $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ могут быть функциями координат и времени благодаря низкочастотным полям, приложенным к веществу. Обычно предполагается, что возмущения компонент тензоров, вызванные внешними полями, существенно меньше значений компонент этих тензоров, отличных от нуля в невозмущенной среде. Например, для компонент тензора диэлектрической проницаемости в оптически изотропных средах, одноосных кристаллах и двуосных кристаллах ромбической системы должны выполняться неравенства $\Delta\epsilon_{ij} \ll \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$. Эти возмущения являются медленными во времени, так что выполняется условие $\Omega \ll \omega$ (Ω – частота внешнего поля, ω – частота световой волны), и в пространстве, когда $\Lambda \gg \lambda$ (Λ – пространственный период вариаций $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, λ – длина световой волны).

6.5. Материальные уравнения с учетом временной дисперсии диэлектрической проницаемости

Будем полагать $\sigma = 0$ и $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{\delta}$, то есть рассмотрим диэлектрическую немагнитную среду. При высоких частотах внешнего излучения, действующего на вещество, поляризация вещества \vec{P} не успевает мгновенно отслеживать изменение поля. Здесь нарушается однозначная связь \vec{D} и \vec{B} со значениями \vec{E} и \vec{H} в тот же момент времени. Можно утверждать, что в общем случае значения \vec{D} и \vec{B} в данный момент времени зависят от значений функций $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$ во все предыдущие моменты времени. В линейном приближении наиболее общий вид зависимости между $\vec{D}(t)$ и $\vec{E}(t)$ может быть записан в виде интегрального соотношения

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \epsilon_0 \int_0^{\infty} f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau, \quad (6.22)$$

где $f(\tau)$ – функция времени, зависящая от свойств среды. Всякое переменное поле может быть сведено к совокупности монохроматических компонент, в которых

зависимость от времени дается как $\exp(i\omega t)$. Для таких полей связь между \vec{D} и \vec{E} приобретает вид:

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E}, \quad (6.23)$$

где функция $\varepsilon(\omega)$ определяется как

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right). \quad (6.24)$$

Таким образом, для периодических полей может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости, как о коэффициенте пропорциональности между \vec{D} и \vec{E} , причем этот коэффициент зависит не только от свойств среды, но и от частоты поля. О зависимости ε от частоты говорят как о законе её *дисперсии* (частотной дисперсии). Соотношение (6.24) можно обобщить и на анизотропные среды

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_0 \left(\delta_{ij} + \int_0^{\infty} f_{ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right), \quad (6.25)$$

где $f_{ij}(\tau)$ – компоненты тензора 2-го ранга. Функция $\varepsilon(\omega)$ является комплексной:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \hat{\varepsilon}'(\omega) + i\hat{\varepsilon}''(\omega). \quad (6.26)$$

Из (6.25) следует соотношение

$$\hat{\varepsilon}(-\omega) = \hat{\varepsilon}^*(\omega), \quad (6.27)$$

или

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega); \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \quad (6.28)$$

Таким образом, вещественная часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\omega)$ является четной, а мнимая $\varepsilon''(\omega)$ – нечетной функцией частоты. В пределе $\omega \rightarrow 0$ ε' стремится к статической диэлектрической проницаемости, а ε'' пропорциональна ω . Физически комплексная часть диэлектрической проницаемости соответствует потерям в среде, т.е. затуханию волн при их распространении. При использовании комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ отпадает необходимость во введении проводимости $\hat{\sigma}$ на частоте световой волны. Можно, однако, пользоваться и тензором $\hat{\sigma}$ вместо $\hat{\varepsilon}''$:

$$\varepsilon_{ij}'' = \sigma_{ij}(\omega) / \omega, \quad (6.29)$$

сохраняя в уравнении Максвелла (6.1) $\hat{\sigma} \neq 0$. Отметим, что для изотропной среды $\varepsilon'(\omega)$ и $\varepsilon''(\omega)$ связаны соотношениями Крамерса–Кронига:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right), \quad (6.30)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0 \left(-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right), \quad (6.31)$$

где интеграл от полюсного выражения понимается в смысле его главного значения.

6.6. Пространственная дисперсия

Наряду с частотной дисперсией, в диэлектриках может проявляться и *пространственная дисперсия* – значение электрической индукции $\vec{D}(\vec{r})$ зависит от значений электрической напряженности не только в данной точке \vec{r} , но и от её значений в некоторой области пространства вокруг точки \vec{r} , $\vec{E}(\vec{r}')$. Такая связь \vec{D} и \vec{E} называется *нелокальной* и в общем случае может быть представлена в виде:

$$D_i(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left[E_i(\vec{r}) + \int f_{ik}(\vec{r} - \vec{r}') E_k(\vec{r}') dV' \right]. \quad (6.32)$$

Применяя разложение по плоским монохроматическим волнам, в общем случае *пространственной и временной дисперсии* можно получить

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_0 \left(\delta_{ik} + \int_0^{\infty} \int_V f_{ik}(\omega, \vec{r} - \vec{r}') \exp\{i[\omega\tau - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \} d\tau dV' \right), \quad (6.33)$$

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) E_k, \quad (6.34)$$

$$f_{ik}(\omega, \vec{r} - \vec{r}') = f_{ki}(\omega, \vec{r}' - \vec{r}).$$

Свойства симметрии для компонент тензора ε_{ik} выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik}(-\omega, -\vec{k}) &= \varepsilon_{ki}^*(\omega, \vec{k}), \\ \varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) &= \varepsilon_{ki}(\omega, -\vec{k}). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Если пространственная дисперсия является слабой, то тензор $\varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k})$ можно разложить по степеням \vec{k} и ограничиться членами первого порядка малости

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ik}^{(0)}(\omega) - i\gamma_{ikl} k_l, \quad (6.36)$$

где $\varepsilon_{ik}^{(0)} = \varepsilon_{ik}(\omega, 0)$, а γ_{ikl} – некоторый тензор третьего ранга, зависящий от частоты. Для обычных диэлектрических сред это есть разложение по степеням a/λ , где a – атомные

размеры (для кристаллов – размер элементарной ячейки), поэтому оно справедливо при $a/\lambda \ll 1$. Отвечающая проницаемости (6.36) связь между \vec{D} и \vec{E} в монохроматическом поле имеет вид

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k + \gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}. \quad (6.37)$$

Из второго условия симметрии в (6.35) получаем

$$\gamma_{ikl}(\omega) = -\gamma_{kil}(\omega). \quad (6.38)$$

Как известно, в отсутствие поглощения тензор $\hat{\varepsilon}$ должен быть эрмитовым, $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*$.

Отсюда получаем

$$\gamma_{ikl} = -\gamma_{kil}^*. \quad (6.39)$$

Объединяя (6.38) и (6.39), получаем, что тензор γ_{ikl} должен быть вещественными антисимметричным тензором:

$$\gamma_{ikl} = \varepsilon_0 (c/\omega) \delta_{ikm} g_{ml}, \quad (6.40)$$

где g_{ml} – псевдотензор второго ранга и δ_{ikm} – единичный антисимметричный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чивита). Компонент этого тензора $\delta_{123} = 1$, а компоненты, получаемые перестановкой индексов нечетное число раз, равны -1 ($\delta_{213} = \delta_{321} = \delta_{132} = -1$). При четном количестве перестановок имеем $\delta_{231} = \delta_{312} = \delta_{123} = 1$.

Физический смысл материального уравнения для среды с пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости (6.37) состоит в том, что $D_i(\vec{r})$ определяется как полем $E_k(\vec{r})$ в данной точке, так и полем вблизи этой точки (то есть его градиентом, при слабом изменении). Второй член в правой части (6.37) характеризует вклад *нелокальной* составляющей вектора поляризации в вектор электрической индукции среды, в то время как первый член описывает локальную часть – электрическую индукцию в данной точке пространства, определяемую напряженностью поля в той же самой точке.

6.7. Световые волны в прозрачных немагнитных кристаллах

6.7.1. Волновое уравнение

Рассмотрим распространение плоских монохроматических электромагнитных волн с векторами поля

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}^m \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \vec{D}^m \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}^m \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})],\end{aligned}\tag{6.41}$$

в немагнитной ($\mu_{ij} = \mu_0 \delta_{ij}$) и непроводящей среде ($\sigma_{ij} = 0$). Волновой вектор плоской волны представим в виде

$$\vec{k} = k_0 n \vec{m} = \frac{2\pi}{\lambda} n \vec{m} = \frac{\omega}{c} n \vec{m},\tag{6.42}$$

где n – показатель преломления волны в данной среде, характеризующий замедление фазовой скорости v относительно скорости света в вакууме ($n = c/v$), и \vec{m} – единичный вектор волновой нормали. В рассматриваемом случае уравнения Максвелла (6.1)– (6.4) могут быть представлены в следующей форме:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D},\tag{6.43}$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H},\tag{6.44}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0,\tag{6.45}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0.\tag{6.46}$$

Из уравнений (6.43) и (6.44) получаем волновое уравнение для анизотропной среды:

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \vec{D} = 0.\tag{6.47}$$

Воспользуемся далее материальным уравнением вида (6.5), с использованием тензора относительной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}^r$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon}^r \cdot \vec{E}.\tag{6.48}$$

В этом случае, с учетом соотношений (6.42) для волнового вектора, волновое уравнение (6.47) может быть переписано в виде

$$n^2 \vec{m} \times \vec{m} \times \vec{E} + \hat{\epsilon}^r \cdot \vec{E} = 0.\tag{6.49}$$

Используя известное соотношение $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, перепишем волновое уравнение (6.49) в виде

$$n^2 \left[\vec{E} - \vec{m}(\vec{m} \cdot \vec{E}) \right] - \hat{\epsilon}^r \cdot \vec{E} = 0. \quad (6.50)$$

Выражая компоненты вектора напряженности электрического поля в среде, определяемого соотношением (6.41), через амплитуду волны E^m и ее единичный вектор поляризации \vec{e} ,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E^m \vec{e} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad (6.51)$$

из (6.50) получаем следующую однородную систему алгебраических уравнений для компонент этого вектора e_j :

$$\left[n^2 (\delta_{ij} - m_i m_j) - \epsilon_{ij}^r \right] e_j = 0. \quad (6.52)$$

Отметим, что для среды с конечной проводимостью $\sigma_{ij} \neq 0$ и с учетом пространственной дисперсии компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости, с использованием соотношений (6.26), (6.29), (6.36) и (6.40) могут быть представлены в виде

$$\epsilon_{ij}^r = \frac{\epsilon_{ij}^{(0)}}{\epsilon_0} - i \frac{\sigma_{ij}}{\epsilon_0 \omega} - i \delta_{ijk} g_{kl} m_l. \quad (6.53)$$

Система уравнений (6.52) позволяет найти показатели преломления и векторы поляризации световых волн, которые могут распространяться в среде с данной диэлектрической проницаемостью. Рассмотрим далее волны в важнейших типах прозрачных сред.

6.7.2. Световые волны в оптически неактивных изотропных средах

В оптически неактивных изотропных средах (кубических кристаллах и аморфных материалах) тензоры $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\sigma}$ являются диагональными и имеют по одной независимой компоненте

$$\epsilon_{ij}^r = n_0^2 \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}, \quad (6.54)$$

а $g_{kl} = 0$. В этом случае из (6.52) получаем

$$\left[n^2 (\delta_{ij} - m_i m_j) - \dot{\epsilon} \delta_{ij} \right] e_j = 0, \quad (6.55)$$

где $\dot{\epsilon} = n_0^2 - i\sigma/(\omega\epsilon_0)$ – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Из уравнений (6.45) и (6.48), с учетом (6.51) и (6.54) легко показать, что в оптически изотропной среде вектор поляризации световой волны \vec{e} ортогонален вектору волновой нормали \vec{m} :

$$m_j e_j = 0. \quad (6.56)$$

С учетом соотношения (6.56) уравнение (6.55) упрощается:

$$(n^2 - \dot{\epsilon})e_i = 0. \quad (6.57)$$

Полагая среду слабо поглощающей ($\sigma/(\omega\epsilon_0) \ll n_0^2$), находим отсюда комплексный показатель преломления световой волны:

$$n = n' - in'' = \sqrt{\dot{\epsilon}}, \quad n' = n_0, \quad n'' = \frac{\sigma}{2\omega n_0 \epsilon_0}. \quad (6.58)$$

Уравнение (6.57) не накладывает ограничений на вектор поляризации световой волны \vec{e} , поэтому он может быть ориентирован произвольно в плоскости, перпендикулярной вектору волновой нормали \vec{m} .

Пользуясь определением (3.70) для комплексного вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ и выражая вектор \dot{H}^* из (6.44), с учетом соотношений (6.42), (6.51), (6.58) и (6.54), представим вектор Пойнтинга для плоской световой волны в непроводящей среде, являющийся в данном случае вещественным, в виде

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \dot{E} \times \dot{H}^* = n_0 \frac{|E^m|^2}{2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \vec{e} \times \vec{m} \times \vec{e} = n_0 \frac{|E^m|^2}{2W_0} [\vec{m} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{m})], \quad (6.59)$$

справедливом и для анизотропных немагнитных сред. Учитывая условие (6.56), для оптически изотропных сред из (6.59) получаем

$$\vec{\Pi} = n_0 \frac{|E^m|^2}{2W_0} \vec{m}. \quad (6.60)$$

Отсюда следует условие коллинеарности векторов \vec{m} и $\vec{\Pi}$ в изотропной среде.

6.7.3. Световые волны в изотропных непоглощающих средах с естественной оптической активностью

При прохождении линейно поляризованного света через оптически изотропную среду, обладающую естественной оптической активностью (гиротропией) плоскость, в

которой колеблется ее вектор поляризации, поворачивается на некоторый угол α . Естественная оптическая активность является проявлением пространственной дисперсии, которая количественно характеризуется псевдотензором второго ранга g_{ml} , введенным ранее в подразделе 6.6. Рассмотрим ниже распространение световых волн в кубических кристаллах и аморфных средах, обладающих естественной оптической активностью и называемых поэтому гиротропными. В отсутствие поглощения в таких средах тензор проводимости $\hat{\sigma} = 0$, а тензор $\hat{\epsilon}^r$ и псевдотензор \hat{g} являются диагональными и имеют по одной независимой компоненте:

$$\epsilon_{ij}^r = n_0^2 \delta_{ij}, \quad g_{ij} = g_0 \delta_{ij}, \quad (6.61)$$

где n_0 – показатель преломления среды и g_0 – параметр гиротропии. Отметим, что угол поворота плоскости поляризации α за счет естественной оптической активности в оптически изотропных средах пропорционален параметру гиротропии g_0 . Таким образом, компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости для рассматриваемых сред могут быть получены из (6.53), как

$$\epsilon_{ij}^r = n_0^2 \delta_{ij} - i g_0 \delta_{ijk} m_k. \quad (6.62)$$

Для плоских волн вида (6.51) из (6.45), (6.48) и (6.62) нетрудно показать, что и в этом случае вектор поляризации \vec{e} ортогонален волновой нормали, то есть удовлетворяет соотношению (6.56). С учетом (6.62) и (6.56) из (6.52) получаем:

$$\left[(n^2 - n_0^2) \delta_{ij} + i g_0 \delta_{ijk} m_k \right] e_j = 0. \quad (6.63)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением распространения волн вдоль оси z и учтем, что в изотропной среде физические свойства от направления не зависят. Таким образом, полученные ниже результаты будут справедливы для любого направления распространения света. В нашем частном случае имеем $m_1 = m_2 = 0$ и $m_3 = 1$. В результате система уравнений (6.63) принимает вид

$$\begin{cases} (n^2 - n_0^2) e_1 + i g_0 e_2 = 0, \\ -i g_0 e_1 + (n^2 - n_0^2) e_2 = 0, \\ (n^2 - n_0^2) e_3 = 0, \end{cases} \quad (6.64)$$

и распадается на систему уравнений

$$\begin{cases} (n^2 - n_0^2)e_1 + ig_0e_2 = 0, \\ -ig_0e_1 + (n^2 - n_0^2)e_2 = 0, \end{cases} \quad (6.65)$$

и уравнение

$$(n^2 - n_0^2)e_3 = 0. \quad (6.66)$$

Последнее уравнение удовлетворяется автоматически, поскольку $\vec{e} \perp \vec{m}$, то есть $m_k e_k = 0$ и $e_3 = 0$. Чтобы система уравнений (6.65) имела нетривиальное решение, её определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (n^2 - n_0^2) & ig_0 \\ -ig_0 & (n^2 - n_0^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.67)$$

Отсюда получаем следующее биквадратное уравнение:

$$n^4 - 2n_0^2n^2 + (n_0^4 - g_0^2) = 0. \quad (6.68)$$

Решение уравнения (6.68) для неизвестного показателя преломления световой волны имеет вид

$$n_{1,2}^2 = n_0^2 \pm g_0. \quad (6.69)$$

Учитывая, что показатели преломления должны быть положительными, а пространственная дисперсия является слабым эффектом, так что $g_0 \ll n_0$, и отбрасывая члены второго порядка малости, из решения (6.69) находим показатели преломления для так называемых **собственных волн**:

$$n_1 = n_0 + \frac{g_0}{2n_0}, \quad n_2 = n_0 - \frac{g_0}{2n_0}. \quad (6.70)$$

Чтобы определить векторы поляризации собственных волн, найдем из любого уравнения системы (6.65) связь его составляющих e_1 и e_2 :

$$e_2 = i \frac{n^2 - n_0^2}{g_0} e_1, \text{ или } e_2 = i \frac{g_0}{n^2 - n_0^2} e_1. \quad (6.71)$$

Подставляя в любое из этих уравнений n_1^2 и n_2^2 , получаем:

$$e_2^{(1)} = ie_1^{(1)}, \quad e_2^{(2)} = -ie_1^{(2)}, \quad (6.72)$$

где индексы (1) и (2) относятся к первой и второй собственным волнам с показателями преломления n_1 и n_2 , соответственно. Векторы поляризации являются единичными, то есть $|e_1^{(1)}|^2 + |e_2^{(1)}|^2 = 1$ и $|e_1^{(2)}|^2 + |e_2^{(2)}|^2 = 1$. С учетом этого из (6.72) находим:

$$\vec{E}_1 \vec{e}_1 = \frac{\vec{x}^0 + i\vec{y}^0}{\sqrt{2}}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}^0 - i\vec{y}^0}{\sqrt{2}}, \quad (6.73)$$

где введены орты \vec{x}^0 и \vec{y}^0 вместо \vec{i} и \vec{j} , соответственно.

Таким образом, **в оптически изотропной среде с естественной оптической активностью могут распространяться две собственные волны с круговой поляризацией:**

$$\vec{E}_1 = E^{(m1)} \vec{e}_1 \exp[i(\omega t - k_0 n_1 z)] = E^{(m1)} \frac{\vec{x}^0 + i\vec{y}^0}{\sqrt{2}} \exp\{i[\omega t - k_0 (n_0 + \rho/k_0) z]\}, \quad (6.74)$$

$$\vec{E}_2 = E^{(m2)} \vec{e}_2 \exp[i(\omega t - k_0 n_2 z)] = E^{(m2)} \frac{\vec{x}^0 - i\vec{y}^0}{\sqrt{2}} \exp\{i[\omega t - k_0 (n_0 - \rho/k_0) z]\}, \quad (6.75)$$

где параметр гиротропии выражен через удельное оптическое вращение ρ :

$$g_0 = \frac{2n_0\rho}{k_0}. \quad (6.76)$$

Действительно, для каждой из собственных волн, \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , модули проекций векторных амплитуд на оси x и y одинаковы, а по фазе проекция на ось y сдвинута на угол $\varphi_1 = -\pi/2$ относительно проекции на ось x для первой волны, и на угол $\varphi_2 = \pi/2$ – для второй. Согласно рассмотрению, проведенному в подразделе 5.10, первая собственная волна имеет правую круговую поляризацию, а вторая – левую круговую поляризацию.

Решения волновых уравнений в виде совокупности собственных (или нормальных) волн обладают следующими основными свойствами.

1. Каждая собственная волна является свободным (без стороннего воздействия) движением системы и может быть возбуждена независимо от других собственных волн специальным выбором начальных и граничных условий.

2. Произвольный волновой процесс в системе без источников можно представить в виде суперпозиции собственных волн.

3. В случае монохроматических процессов средний по периоду поток энергии равен сумме потоков энергии отдельных собственных волн.

Проведем анализ распространения линейно поляризованного света через оптически изотропный слой, обладающий гиротропными свойствами. Предположим, что такая волна имеет плоскость поляризации, проходящую через ось x при $z = 0$, где расположена входная грань образца (рис. 6.3) и распространяется при $z < 0$ точно вдоль оси z :

$$\vec{E}_0 = E^{(m0)} \vec{x}^0 \exp[i(\omega t - k_0 z)].$$

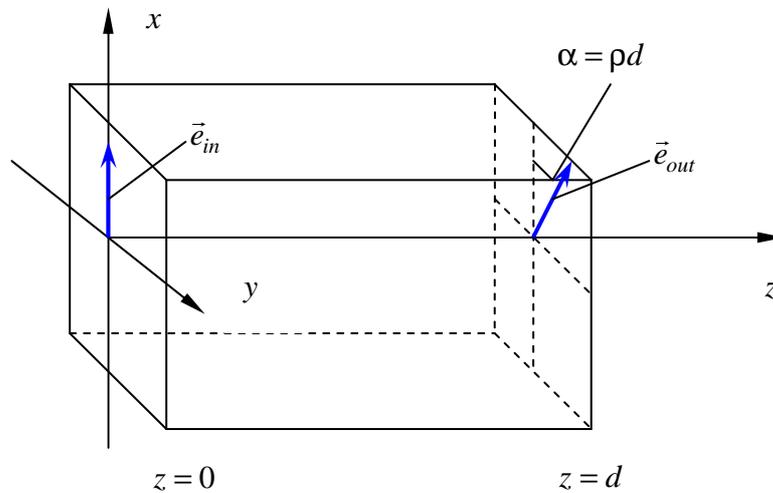


Рис. 6.3.

Эта волна возбуждает в образце линейную суперпозицию собственных волн \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . Амплитуды этих волн могут быть найдены из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора \vec{E} . Пренебрегая для простоты отраженной волной (просветленная входная грань), получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(E^{(m1)} + E^{(m2)}) = E^{(m0)}, \\ i \frac{E^{(m1)}}{\sqrt{2}} - i \frac{E^{(m2)}}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases} \quad (6.77)$$

Отсюда находим:

$$E^{(m1)} = E^{(m2)} = \frac{E^{(m0)}}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z, t) &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{E^{(m0)}}{2} \exp[i(\omega t - k_0 n_0 z)] \times \\
&\times \left\{ \vec{x}^0 [\exp(-ipz) + \exp(ipz)] + i\vec{y}^0 [\exp(-ipz) - \exp(ipz)] \right\} = \\
&= E^{(m0)} \exp[i(\omega t - k_0 n_0 z)] \left[\vec{x}^0 \cos(\rho z) + \vec{y}^0 \sin(\rho z) \right].
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Найдем далее отношение проекций вектора напряженности светового поля на оси y и x , которое, как видно из (8.88), является линейно поляризованным в любой точке рассматриваемой гиротропной среды:

$$\frac{E_y^{(m)}}{E_x^{(m)}} = \operatorname{tg}(\rho z) = \operatorname{tg}(\alpha), \tag{6.79}$$

где $\alpha = \rho z$ определяет угол поворота плоскости поляризации светового поля в среде по отношению к входной поляризации. Таким образом, удельное оптическое вращение ρ характеризует угол поворота плоскости поляризации при прохождении волной единичного расстояния.

Удельное вращение для кубических кристаллов класса силленитов имеет сильную зависимость от длины волны и достигает десятков угловых градусов на миллиметр. Для кристалла $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ на длине волны 633 нм $\rho = 22^0 / \text{мм}$, а для $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ оно равно $6.5^0 / \text{мм}$. Отсюда легко оценить значения параметра гиротропии, определяемого соотношением (6.76), как $g_0 \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$. Показатель преломления для этих кристаллов составляет $n_0 \sim 2.5 \div 2.6$. Поэтому используемое выше неравенство $g_0 \ll n_0$ выполняется с большим запасом.

Световые волны с круговой поляризацией часто называют *циркулярно поляризованными*. Как было получено выше, в гиротропных оптически изотропных средах, где параметр гиротропии $g_0 \neq 0$ (удельное оптическое вращение $\rho \neq 0$), могут распространяться две собственные волны с различными показателями преломления. Оптические среды, в которых показатели преломления собственных волн отличаются друг от друга, называют *двулучепреломляющими* – свет с различной поляризацией здесь преломляется по-разному, так как $n_1 \neq n_2$:

$$n_1 = n_0 + \frac{\rho}{k_0}, \quad n_2 = n_0 - \frac{\rho}{k_0}. \tag{6.80}$$

Первая собственная волна будет *право-циркулярно поляризованной*, вторая – *лево-циркулярно поляризованной*. Поэтому оптически изотропные среды с естественной

оптической активностью (гиротропией) называют *средами с циркулярным двулучепреломлением*.

Величину двулучепреломления характеризуют разностью $\Delta n = n_1 - n_2$. В рассмотренных выше оптически изотропных средах с естественной оптической активностью $\Delta n = 2\rho/k_0$, причем двулучепреломление является очень слабым. Для кристалла $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ на длине волны 633 нм оно достигает величины $\Delta n = 7,74 \times 10^{-5}$.

6.7.4. Световые волны в средах с линейным двулучепреломлением

К средам с *линейным двулучепреломлением*, строго говоря, относятся только те одноосные и двуосные кристаллы, в которых псевдотензор $\hat{g} = 0$. В этих кристаллах собственные световые волны имеют *линейную поляризацию*. Однако в одноосных и двуосных гиротропных кристаллах, где $\hat{g} \neq 0$, собственные волны имеют поляризацию, очень близкую к линейной, за исключением случаев их распространения вдоль оптических осей. Это обусловлено тем, что линейное двулучепреломление гораздо выше, чем циркулярное. Например, для кристалла кварца, обладающего естественной оптической активностью, линейное двулучепреломление составляет величину $\Delta n = 0.009$ на длине волны 589 нм, при распространении света ортогонально оптической оси.

Рассмотрим распространение света в среде с чисто линейным двулучепреломлением, полагая, что $\hat{g} = 0$, а тензор $\hat{\epsilon}^r$ может иметь, наряду с диагональными, и недиагональные компоненты. Векторы поляризации собственных волн в этом случае определяются уравнением (8.52), которое может быть переписано в виде

$$A_{ij}e_j = 0, \quad A_{ij} = \left[n^2 (\delta_{ij} - m_i m_j) - \epsilon_{ij}^r \right]. \quad (6.81)$$

Приравнивая определитель данной однородной системы алгебраических уравнений к нулю, найдем дисперсионное уравнение

$$n^4 \left(\epsilon_{mk}^r m_m m_k \right) - n^2 \left[\left(\epsilon_{mk}^r m_m m_k \right) \epsilon_{ll}^r - \epsilon_{ml}^r \epsilon_{lk}^r m_m m_k \right] + \left\| \epsilon_{mk}^r \right\| = 0, \quad (6.82)$$

биквадратное относительно показателя преломления собственных волн, и называемое *уравнением Френеля*.

Нетрудно показать, что в оптически анизотропной среде, за исключением случаев, когда свет распространяется вдоль оптических осей, векторы поляризации собственных волн могут быть найдены в виде

$$e_j^{(\alpha)} = \frac{a_{kj}^{(\alpha)}}{\sqrt{|a_{k1}^{(\alpha)}|^2 + |a_{k2}^{(\alpha)}|^2 + |a_{k3}^{(\alpha)}|^2}}, \quad (6.83)$$

где $a_{kj}^{(\alpha)}$ – алгебраическое дополнение элемента $A_{kj}^{(\alpha)}$ в определителе системы уравнений (6.81). Индекс α означает, что величины a_{kj} и A_{kj} вычисляются для собственных волн с показателем преломления n_α ($\alpha = 1, 2$).

Компоненты вектора Пойнтинга для световых волн, распространяющихся в среде с линейным двулучепреломлением, определяются из полученного ранее соотношения (6.59), как

$$\Pi_k^{(\alpha)} = n_\alpha \frac{|E^{m\alpha}|^2}{2W_0} (\delta_{kj} - e_k^{(\alpha)} e_j^{(\alpha)}) m_j. \quad (6.84)$$

Поскольку условие ортогональности векторов поляризации $\vec{e}^{(\alpha)}$ и волновой нормали \vec{m} в общем случае не выполняется, то есть не всегда $e_j^{(\alpha)} m_j = 0$, в такой среде векторы \vec{m} и $\vec{\Pi}$ могут быть неколлинеарными (рис. 6.4), причем угол γ между ними тот же самый, что и между векторами \vec{E} и \vec{D} .

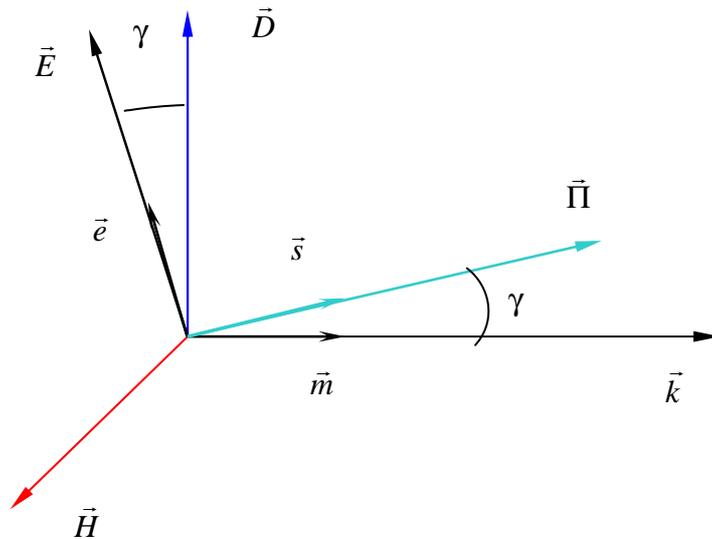


Рис. 6.4.

Вектору потока энергии (вектору Пойнтинга) соответствует единичный вектор этого направления \vec{s} , называемый *лучевым вектором*. Если на пути световой волны в кристалле поместить экран с узкой диафрагмой, то направление прошедшего через диафрагму луча будет определяться именно вектором \vec{s} (рис. 6.5).

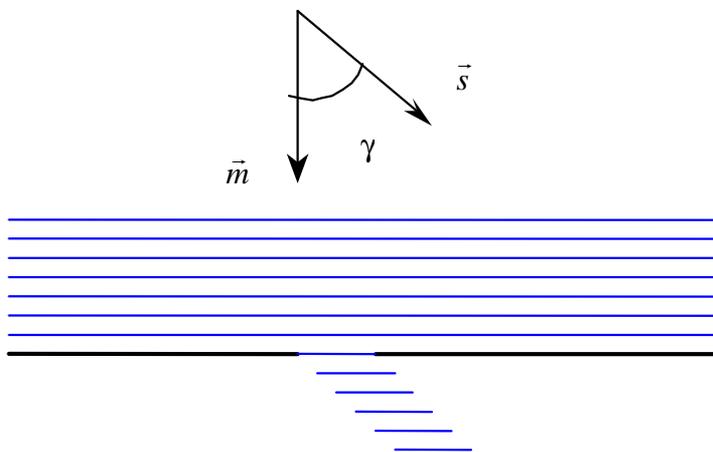


Рис. 6.5. Волна и луч в анизотропной среде

Наиболее простой вид выражения (6.81)–(6.83) принимают в одноосных кристаллах, когда отличны от нуля только диагональные компоненты тензора $\hat{\epsilon}^r$:

$$\epsilon_{11}^r = \epsilon_{22}^r = n_o^2 - i \frac{\sigma_1}{\omega \epsilon_0} = \dot{\epsilon}_1,$$

$$\epsilon_{33}^r = n_e^2 - i \frac{\sigma_3}{\omega \epsilon_0} = \dot{\epsilon}_3, \quad (6.85)$$

где n_o и n_e – *обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла*, соответственно. В этом случае из уравнения Френеля (6.82) находим простые соотношения для *комплексных показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн*:

$$n_{ord}^2 = \dot{\epsilon}_1, \quad (6.86)$$

$$n_{eord}^2 = \frac{\dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 (m_1^2 + m_2^2) + \dot{\epsilon}_3 m_3^2}. \quad (6.87)$$

Единичные векторы поляризации обыкновенных световых волн могут быть получены из (6.83) в виде

$$e_1^{ord} = -\frac{m_2}{\sqrt{1-m_3^2}}, \quad e_2^{ord} = \frac{m_1}{\sqrt{1-m_3^2}}, \quad e_3^{ord} = 0. \quad (6.88)$$

Таким образом, показатель преломления обыкновенной волны, являющейся одной из двух собственных волн в одноосном кристалле, не зависит от ее направления распространения, а соответствующий вектор поляризации лежит в плоскости xu и ортогонален единичному вектору волновой нормали. Лучевой вектор \vec{s} для обыкновенной волны совпадает с вектором \vec{m} . В одноосном кристалле без потерь, при $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, из (6.86) получаем

$$n_{ord} = n_o. \quad (6.89)$$

Для необыкновенных световых волн ограничимся анализом их распространения в среде без потерь ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$). Выражая компоненты вектора \vec{m} через углы сферической системы координат, $m_1 = \sin \theta \cos \alpha$, $m_2 = \sin \theta \sin \alpha$ и $m_3 = \cos \theta$, из (6.87) получаем:

$$n_{eord} = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}. \quad (6.90)$$

Компоненты вектора поляризации необыкновенной волны из (6.83) получаем в виде

$$e_1^{eord} = -\frac{n_e^2 \cos \theta \cos \alpha}{\sqrt{n_e^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}},$$

$$e_2^{eord} = -\frac{n_e^2 \cos \theta \sin \alpha}{\sqrt{n_e^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}, \quad (6.91)$$

$$e_3^{eord} = \frac{n_o^2 \sin \theta}{\sqrt{n_e^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}.$$

Если от начала координат отложить во всех направлениях \vec{m} отрезки длины $n(\vec{m})$, получится двухполостная поверхность, соответствующая двум решениям уравнения Френеля (6.82) $n_1(\vec{m})$ и $n_2(\vec{m})$, называемая *поверхностью показателей преломления*. Для одноосных кристаллов она определяется в сферических координатах уравнениями (6.89) и (6.90) и представляет *сферу* и *эллипсоид вращения*, касающиеся

друг друга в точках, которые определяют *направление оптической оси*. Таким образом, оптическая ось соответствует направлению волновой нормали, для которого фазовые скорости собственных волн (обыкновенной и необыкновенной) совпадают. Отметим, что оптическая ось в одноосных кристаллах является единственной и совпадает с единственной осью симметрии 3-го, 4-го или 6-го порядков.

Если из одной точки отложить для всех направлений волновые векторы распространяющихся в кристалле волн одной частоты, то их концы образуют *поверхность волновых векторов*. От поверхности показателей преломления она отличается только масштабом: отрезки, отложенные из начала координат, имеют длину $(2\pi/\lambda)n(\vec{m})$. Сечения поверхностей волновых векторов плоскостями xz и xy для оптически положительных ($n_e > n_o$) и оптически отрицательных одноосных кристаллов ($n_o > n_e$) показаны на рис. 6.6.

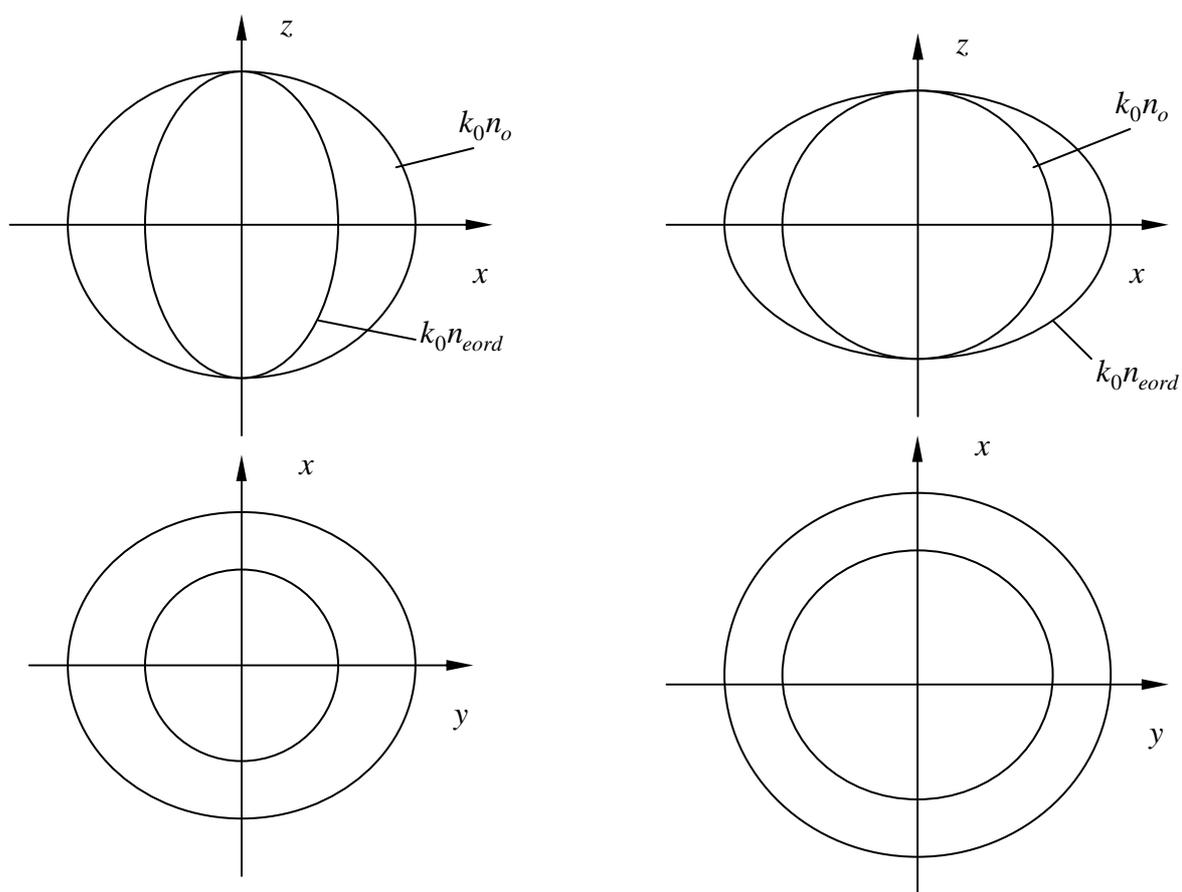


Рис. 6.6. Сечения поверхностей волновых векторов плоскостями xz и xy для одноосных кристаллов

6.8. Искусственная анизотропия

В результате воздействия на вещество упругими (акустическими), электрическими и магнитными полями, имеющими частоту $\Omega \ll \omega$, низкую по сравнению с частотой света, происходят изменения его структуры, очень незначительные. Однако малая длина световой волны и значительная длина оптического пути в веществе позволяет эффективно использовать эти слабые наведенные возмущения диэлектрической и магнитной проницаемости среды $|\Delta\epsilon_{ij}| \ll \epsilon_{mm}$, $|\mu_{ij}| \ll \mu_{mm}$ для управления параметрами света. Ниже мы ограничимся анализом влияния на распространение света в веществе наведенной анизотропии диэлектрических свойств среды, полагая $\mu = \mu_0$.

6.8.1. Электрооптическая модуляция оптического излучения

Тензорное описание электрооптического эффекта

Перепишем материальное уравнение (6.5) в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{b} \cdot \vec{D}, \quad (6.92)$$

где $\hat{b} = (\hat{\epsilon}^r)^{-1}$ – тензор диэлектрической непроницаемости среды. Исторически сложилось, что действие внешних электрических полей на вещество принято рассматривать как наведение изменений тензора диэлектрической непроницаемости среды для светового поля. Представим компоненты тензора \hat{b} в следующем виде

$$b_{ij} = b_{ij}^0 + \Delta b_{ij}(\vec{E}^0), \quad (6.93)$$

где \vec{E}^0 – напряженность «низкочастотного» (по сравнению со световым) электрического поля, прикладываемого к веществу. Если это поле далеко от порога разрушения или пробоя, оно приводит к небольшим изменениям оптических свойств среды, так что выполняются соотношения

$$\Delta b_{ij} \ll b_{mm}^0, \quad (6.94)$$

где b_{mm}^0 – диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости для невозмущенной среды. Для случая диагонального тензора $\hat{\epsilon}^0$, тензор \hat{b}^0 также является диагональным:

$$b_{ij}^0 = \frac{1}{\epsilon_{ij}^r} \delta_{ij}, \quad \hat{b}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_{11}^r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_{22}^r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_{33}^r} \end{pmatrix}, \quad (6.95)$$

и может быть найден по обычным правилам отыскания обратной матрицы.

Тензор Δb_{ij} , описывающий изменение диэлектрических свойств среды для светового излучения под действием «низкочастотного» электрического поля, можно представить в виде разложения по степеням \vec{E}^0 . Опыт показывает, что достаточно ограничиться линейными и квадратичными членами разложения:

$$\Delta b_{ij} = r_{ijk} E_k^0 + R_{ijkl} E_k^0 E_l^0. \quad (6.96)$$

Здесь первый член описывает линейный электрооптический эффект Поккельса, а второй – квадратичный электрооптический эффект Керра. Коэффициенты в разложении являются тензорами 3-го (r_{ijk}) и 4-го (R_{ijkl}) рангов, а их компоненты называются соответственно электрооптическими и квадратичными электрооптическими постоянными.

Волновое уравнение, которое описывает распространение света в возмущенной среде, оперирует с тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \hat{\epsilon}^r$. Можно показать, что в пренебрежении квадратичными членами по Δb_{ij} , вкладом которых можно пренебречь с большим запасом, выполняется соотношение

$$\Delta \epsilon_{ij}^r = -\epsilon_{ik}^{0r} \epsilon_{jl}^{0r} \Delta b_{kl}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_0 (\epsilon_{ij}^{0r} + \Delta \epsilon_{ij}^r). \quad (6.97)$$

Линейный электрооптический эффект

В случае кристаллов без центра симметрии тензор 3-го ранга r_{ijk} отличен от нуля, и линейный электрооптический эффект (эффект Поккельса) является определяющим. В этом случае можно пренебречь в формуле (6.96) квадратичным членом:

$$\Delta b_{ij} = r_{ijk} E_k^0. \quad (6.98)$$

Тензор 3-го ранга r_{ijk} имеет в общем случае 27 компонент. Поскольку тензор ϵ_{ij} является симметричным, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, то и тензор r_{ijk} симметричен по перестановке первых двух индексов:

$$r_{ijk} = r_{jik}. \quad (6.99)$$

Это дает возможность перейти от тензорных обозначений к матричным, заменив комбинацию индексов ij на один индекс (например, m) по правилам:

$$11 \leftrightarrow 1, 22 \leftrightarrow 2, 33 \leftrightarrow 3; 23, 32 \leftrightarrow 4; 13, 31 \leftrightarrow 5; 12, 21 \leftrightarrow 6. \quad (6.100)$$

Эти правила легко запомнить для случая тензора второго ранга:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 \searrow & 6 & \leftarrow 5 \\ \circ & 2 \searrow & 4 \uparrow \\ \circ & \circ & 3 \uparrow \end{array} \right| \leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ \circ & 22 & 23 \\ \circ & \circ & 33 \end{array} \right|. \quad (6.101)$$

Таким образом, в общем случае матрица электрооптических коэффициентов может быть представлена в виде таблицы 6×3 . Симметрия кристалла накладывает ограничения на электрооптические коэффициенты. Многие из них оказываются равными нулю; некоторые коэффициенты связаны друг с другом определенными соотношениями. Рассмотрим конкретный вид матрицы r_{mk} для некоторых кристаллов.

Кубические нецентросимметричные кристаллы классов симметрии 23 и $\bar{4}3m$

Имеют один независимый электрооптический коэффициент,

$$r_{123} = r_{213} = r_{231} = r_{312} = r_{321} = r_{132}. \quad \text{Таким образом, } r_{41} = r_{52} = r_{63}, \quad \text{и}$$

электрооптическому тензору соответствует следующая матрица:

$$r_{mk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{vmatrix}. \quad (6.102)$$

К кубическим электрооптическим кристаллам относятся GaAs, $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{GeiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ и другие. Для кристаллов $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ и $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ $r_{41} \cong 5 \cdot 10^{-12}$ м/В. Для других кристаллов кубической сингонии электрооптические коэффициенты имеют меньшие значения.

Кристаллы симметрии 4mm

Являются одноосными и характеризуются тремя независимыми электрооптическими коэффициентами: $r_{113} = r_{223}$ ($r_{13} = r_{23}$), $r_{333} = r_{33}$, $r_{232} = r_{322} = r_{131} = r_{311}$ ($r_{42} = r_{51}$). Электрооптический тензор изображается матрицей коэффициентов

$$r_{mk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.103)$$

К данному классу симметрии относятся сегнетоэлектрические кристаллы BaTiO_3 ; стронций-бариевый ниобат ($\text{Sr}_x\text{Ba}_{1-x}\text{Nb}_2\text{O}_6$), кратко SBN; и другие. Для BaTiO_3 $r_{42} = 730 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{43} = 46 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{13} = 10,2 \cdot 10^{-12}$ м/В, то есть имеется большая анизотропия электрооптического эффекта. «Недиагональный» коэффициент r_{42} в этом кристалле более чем на 2 порядка превосходит электрооптический коэффициент кубических кристаллов.

Для SBN при $x = 0,75$ максимален электрооптический коэффициент $r_{33} = 237 \cdot 10^{-12}$ м/В. Отметим, что эти коэффициенты зависят и от длины световой волны, то есть имеет место дисперсия электрооптических постоянных.

Кристаллы симметрии 3m

Данные кристаллы имеют одну ось симметрии третьего порядка, то есть являются одноосными. Наиболее широкое применение в различных областях оптики, оптоэлектроники, интегральной оптики имеют монокристаллы этой симметрии ниобат лития LiNbO_3 и танталат лития LiTaO_3 . Электрооптическому тензору для кристаллов симметрии $3m$ соответствует матрица коэффициентов

$$r_{mk} = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.104)$$

Для кристалла LiNbO_3 на длине волны $\lambda = 633$ нм электрооптические коэффициенты принимают значения: $r_{22} = 3,4 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{13} = 8,6 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{33} = 30,8 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{51} = 28 \cdot 10^{-12}$ м/В.

Распространение световых волн в среде с линейным двулучепреломлением при однородном внешнем поле

Как и в подразделе 6.7, ограничимся анализом распространения плоских монохроматических волн с волновым вектором $\vec{k} = k_0 n \vec{m}$ и векторной амплитудой $\vec{E}^m = E^m \vec{e}$, где единичные векторы волновой нормали \vec{m} и поляризации \vec{e} имеют компоненты m_m и e_k ($m, k = 1, 2, 3$), соответственно. В этом случае, для среды без потерь и в отсутствие гиротропии волновое уравнение сводится (ср. с уравнениями (6.55) и (6.81)) к следующей системе алгебраических уравнений для собственных волн:

$$\left[n^2 (\delta_{mk} - m_m m_k) - \epsilon_{mk}^r \right] e_k = 0, \quad (6.105)$$

где в соответствии с соотношениями (6.97) компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости имеют вид

$$\epsilon_{mk}^r = \epsilon_{mk}^{0r} - \epsilon_{mi}^{0r} \epsilon_{kj}^{0r} r_{ijk} E_k^0. \quad (6.106)$$

Здесь мы считаем поле E_k^0 заданным и однородным, и пренебрегаем квадратичным электрооптическим эффектом.

Рассмотрим распространение волн вдоль оси x в кристалле ниобата лития, к которому внешнее поле приложено вдоль оси z (рис. 6.7).

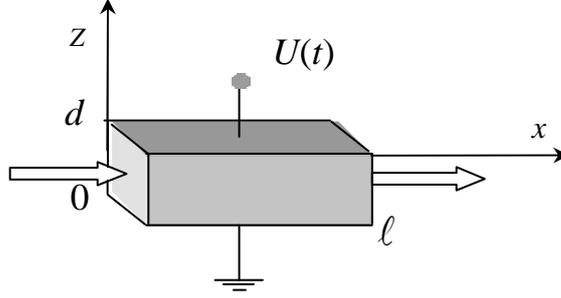


Рис. 6.7.

В этом случае, в соответствии с формулами (6.97), (6.98) и видом электрооптического тензора (6.104), тензор возмущений относительной диэлектрической проницаемости внешним электрическим полем $\Delta\hat{\epsilon}$ будет диагональным:

$$\Delta\epsilon_{11}^r = -n_o^4 r_{13} E_3^0, \quad \Delta\epsilon_{22}^r = -n_o^4 r_{13} E_3^0, \quad \Delta\epsilon_{33}^r = -n_e^4 r_{33} E_3^0, \quad (6.107)$$

$$\epsilon_{11}^{0r} = \epsilon_{22}^{0r} = n_o^2, \quad \epsilon_{33}^{0r} = n_e^2, \quad (6.108)$$

где n_o и n_e – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла.

Поскольку вектор \vec{m} имеет компоненты $m_1=1$, $m_2=m_3=0$, уравнение (6.105) принимает вид

$$\begin{cases} -\epsilon_{11}^r e_1 = 0, \\ (n^2 - \epsilon_{22}^r) e_2 = 0, \\ (n^2 - \epsilon_{33}^r) e_3 = 0. \end{cases} \quad (6.109)$$

Отсюда находим, учитывая соотношения (6.107) и (6.108):

$$\begin{cases} e_1 = 0, \\ n_1^2 = \epsilon_{22}^r = n_o^2 - n_o^4 r_{13} E_3^0, \quad e_2^{(1)} = 1; \\ n_2^2 = \epsilon_{33}^r = n_e^2 - n_e^4 r_{33} E_3^0, \quad e_3^{(2)} = 1. \end{cases} \quad (6.110)$$

Таким образом, одна собственная волна имеет обыкновенную поляризацию (вектор $\vec{e}^{(1)}$ направлен вдоль оси y) и показатель преломления n_1 :

$$n_1 = n_o + \Delta n_o, \quad \Delta n_o \approx -\frac{n_o^3 r_{13}}{2} E_3^0 = -\frac{n_o^3 r_{13}}{2} \frac{U}{d}. \quad (6.111)$$

Вторая собственная волна имеет необыкновенную поляризацию (вектор $\vec{e}^{(2)}$ направлен вдоль оси z) и показатель преломления n_2 :

$$n_2 = n_e + \Delta n_e, \quad \Delta n_e \approx -\frac{n_e^3 r_{33}}{2} E_3^0 = -\frac{n_e^3 r_{33}}{2} \frac{U}{d}. \quad (6.112)$$

В случае входной световой волны с произвольной поляризацией поле в кристалле будет представлять линейную суперпозицию двух собственных волн – обыкновенной и необыкновенной.

Фазовый электрооптический модулятор поперечного типа

Конструкция фазового модулятора поперечного типа имеет вид, изображенный на рис. 6.7. В случае распространения необыкновенно поляризованной волны имеем

$$\begin{aligned} \vec{E}(l, t) &= E_{3m} \vec{z}^0 \exp[i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e l)] \exp[-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(t) l] = \\ &= E_{3m} \vec{z}^0 \exp[i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e l)] \exp[i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_e^3 r_{33}}{2} U(t) \frac{l}{d}]. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Таким образом, световая волна на выходе модулятора приобретает фазовую модуляцию с величиной фазового сдвига

$$\psi(t) = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(t) l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_e^3 r_{33}}{2} U(t) \frac{l}{d}. \quad (6.114)$$

Качество материала модулятора, определяемое его физическими свойствами, характеризуется величиной $n_e^3 r_{33}$. Для ниобата лития рассмотренная ориентация внешнего поля и поляризация света являются оптимальными, поскольку r_{33} имеет самую большую величину.

При поляризации света вдоль оси y качество материала будет определяться параметром $n_o^3 r_{13}$, примерно в три раза меньшим, чем $n_e^3 r_{33}$.

Величина l/d определяется размерами кристалла и светового пучка и для объемного модулятора может составлять $\sim 10 \div 30$, при апертуре пучка ~ 1 мм и длине кристалла $\sim 10 \div 30$ мм. Для электрооптических модуляторов на полосковых волноводах эта величина, l/d , как минимум на порядок больше.

Очень часто в качестве характеристики фазового модулятора используют *полуволновое напряжение* $U_{\lambda/2}$ — напряжение, при котором дополнительный фазовый сдвиг ψ в модуляторе равен π . Обычно оно составляет сотни вольт.

Амплитудный электрооптический модулятор

Рассмотрим световую волну на входе устройства, изображенного на рис. 6.7, при ее поляризации под углом 45° к осям z и y . В этом случае поле на выходе кристалла будет иметь две составляющие

$$E_z(l, t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \exp(i\omega t) \exp(-i \frac{2\pi}{\lambda} n_e l) \exp(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_e l), \quad (6.115)$$

$$E_y(l, t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \exp(i\omega t) \exp(-i \frac{2\pi}{\lambda} n_o l) \exp(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_o l), \quad (6.116)$$

равные по амплитуде, и имеющие как постоянный фазовый сдвиг

$$\Gamma_{oe} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) l, \quad (6.117)$$

так и зависящий от приложенного напряжения

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta n_o(t) - \Delta n_e(t)] l = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}) \frac{U(t)}{2d} l. \quad (6.118)$$

Для нормальной работы амплитудного модулятора постоянный фазовый сдвиг Γ_{oe} нужно довести до значения πp , где p — целое число. Это можно сделать с помощью четвертьволновой пластинки, представляющей x - или y -срез одноосного кристалла с толщиной $t = \lambda/[4(n_o - n_e)]$, осуществляющей фазовую задержку в $\Gamma_m = \pi/2$ между обыкновенной и необыкновенной волнами. Чаще всего для этого используют тонкие пластины слюды, толщину которых можно подобрать их расщеплением. Поворачивая такую пластину на некоторый угол, можно изменять вносимый ею фазовый сдвиг от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Тогда на выходе системы (рис. 6.8) будет иметь место линейная поляризация светового поля, которую можно подавить анализатором А.

Таким образом, при $U = 0$ интенсивность выходного излучения будет равна нулю. При $U = U_{\lambda/2}$ она будет максимальна, а амплитудная характеристика пропускания модулятора будет иметь вид

$$T(t) = \frac{I_{\text{вых}}(t)}{I_{\text{вх}}} = \sin^2 \frac{\Gamma(t)}{2} = \sin^2 \left\{ \frac{\pi U(t)}{2 U_{\lambda/2}} \right\}, \quad (6.119)$$

где $U_{\lambda/2} = \lambda d / [(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}) l]$.

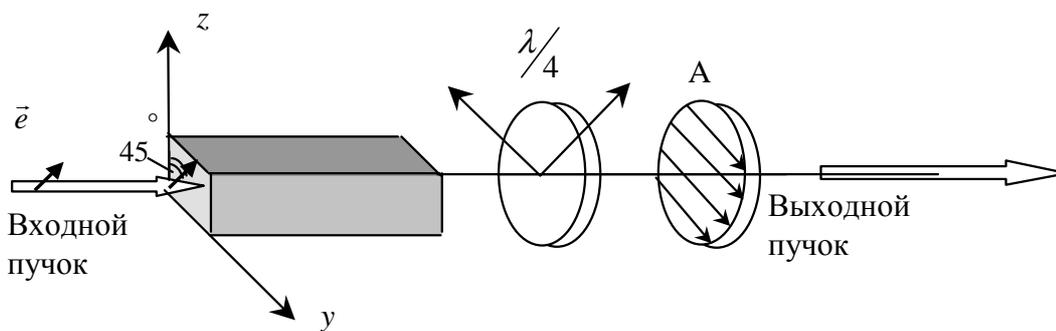


Рис. 6.8.

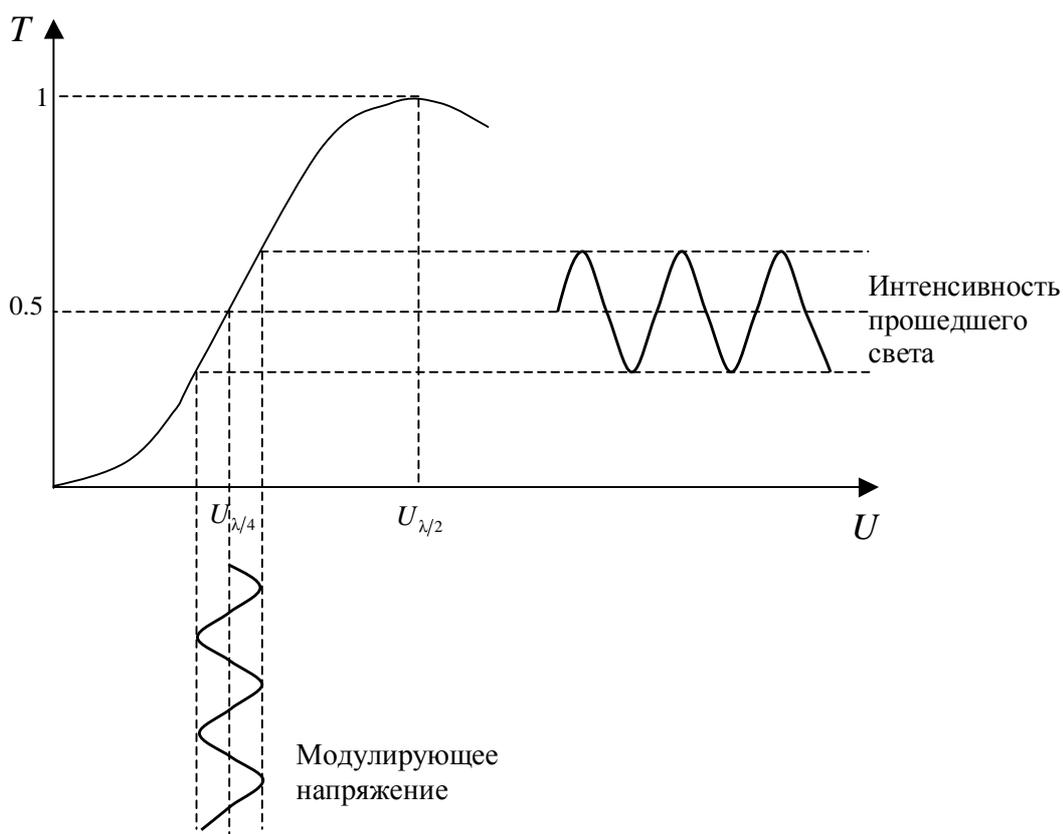


Рис. 6.9

Амплитудная характеристика модулятора изображена на рис. 6.9, где для обеспечения линейности к модулятору приложено постоянное смещающее напряжение $U_{\lambda/4}$.

6.8.2. Квадратичный электрооптический эффект

Когда линейный электрооптический эффект отсутствует (в кристаллах с центром симметрии и в изотропной среде), вклад в изменение оптических свойств среды под

действием внешнего поля дает квадратичный электрооптический эффект (см. формулу (6.96)):

$$\Delta b_{ij} = R_{ijkl} E_k^0 E_l^0 . \quad (6.120)$$

Тензор 4-го ранга R_{ijkl} , описывающий квадратичный электрооптический эффект Керра, имеет в общем случае 81 элемент и отличен от нуля для любых сред. Его элементы удовлетворяют свойствам симметрии,

$$R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{ijlk} = R_{jilk} ,$$

по перестановке первых двух и последних двух индексов, что связано с симметрией тензора $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ и тензора-диады $(\mathbf{E}\mathbf{E})_{kl} = (\mathbf{E}\mathbf{E})_{lk}$. Это позволяет заменить две пары индексов ij и kl на два индекса (например, m и n), изменяющиеся от 1 до 6, в соответствие со следующим правилом:

$$R_{mn} = \begin{cases} R_{ijkl}, & (ij \leftrightarrow m = 1, \dots, 6; \quad kl \leftrightarrow n = 1, 2, 3), \\ 2R_{ijkl}, & (ij \leftrightarrow m = 1, \dots, 6; \quad kl \leftrightarrow n = 4, 5, 6). \end{cases} \quad (6.121)$$

В результате приходим к матричной форме записи тензора квадратичных электрооптических коэффициентов, количество которых может достигать 36.

Количество независимых коэффициентов этого тензора в изотропной среде равно двум:

$$R_{mn} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{12} & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(R_{11} - R_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(R_{11} - R_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(R_{11} - R_{12}) \end{pmatrix} . \quad (6.122)$$

В кристаллах триклинной системы все 36 квадратичных электрооптических коэффициентов являются независимыми и могут быть отличны от нуля.

Легко показать, что приложение внешнего электрического поля вдоль любого направления к изотропной среде наводит в ней линейное двулучепреломление. В результате среда становится оптически одноосной, с оптической осью вдоль направления приложения поля. Действительно, если это направление совместить с осью x , из соотношений (6.121) и (6.97) получаем

$$\begin{aligned} \Delta b_{11} &= R_{1111}(E_1^0)^2, \quad \Delta b_{22} = \Delta b_{33} = R_{2211}(E_1^0)^2, \quad \Delta b_{12} = \Delta b_{21} = \Delta b_{13} = \Delta b_{31} = \Delta b_{23} = \Delta b_{32} = 0; \\ \epsilon_{11}^r &= n_a^2 - n_a^4 R_{11}(E_1^0)^2, \quad \epsilon_{22}^r = \epsilon_{33}^r = n_a^2 - n_a^4 R_{12}(E_1^0)^2, \quad \epsilon_{12}^r = \epsilon_{21}^r = \epsilon_{13}^r = \epsilon_{31}^r = \epsilon_{23}^r = \epsilon_{32}^r; \\ n_o &= \sqrt{\epsilon_{22}^r} \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} R_{12}(E_1^0), \quad n_e = \sqrt{\epsilon_{11}^r} \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} R_{11}(E_1^0), \end{aligned} \quad (6.123)$$

где n_a – показатель преломления невозмущенной среды, а n_o и n_e – показатели преломления для света, поляризованного перпендикулярно и параллельно направлению приложенного поля, соответственно. Величина наведенного двулучепреломления $n_e - n_o$ дается выражениями

$$n_e - n_o = \frac{n_a^3}{2} (R_{12} - R_{11})(E_1^0)^2 = -n_a^3 R_{44}(E_1^0)^2, \quad (6.124)$$

в последнем из которых учтено, что в изотропной среде $R_{44} = (R_{11} - R_{12})/2$ (см. матрицу коэффициентов (6.122)). Формулы (6.124) нередко записывают в виде

$$n_e - n_o = K\lambda(E_1^0)^2, \quad (6.125)$$

где K – постоянная Керра, связанная с квадратичными электрооптическими коэффициентами для изотропной среды соотношением

$$R_{44} = -K \frac{\lambda}{n_a^3}. \quad (6.126)$$

Для нитробензола на длине волны 589 нм постоянная Керра равна $K = 2,44 \cdot 10^{-12}$ м/В², для воды – $K = 5,1 \cdot 10^{-14}$ м/В².

6.8.3. Фотоупругий эффект

Приложение к среде механических воздействий (упругих деформаций) изменяет ее оптические свойства, что и составляет суть фотоупругого эффекта. Традиционно его принято описывать соотношением

$$\Delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl}^0, \quad (6.127)$$

где коэффициенты p_{ijkl} образуют тензор фотоупругости 4-го ранга, а S_{kl}^0 является симметричным тензором упругих деформаций 2-го ранга, имеющим компоненты

$$S_{kl}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right), \quad (6.128)$$

определяемые компонентами вектора упругого смещения \vec{U} частиц среды.

Тензор p_{ijkl} имеет ту же симметрию и может быть описан такой же матрицей коэффициентов p_{mn} , как и тензор R_{mn} . Однако для фотоупругих коэффициентов замена

двух пар индексов ij и kl на два индекса m и n , изменяющихся от 1 до 6, производится в соответствие с другим правилом,

$$p_{mn} = p_{ijkl}, \quad (ij \leftrightarrow m = 1, \dots, 6; \quad kl \leftrightarrow n = 1, \dots, 6), \quad (6.129)$$

как и для тензора упругих деформаций:

$$S_n^0 = S_{kl}^0, \quad (kl \leftrightarrow n = 1, \dots, 6). \quad (6.130)$$

Для изотропной среды фотоупругий тензор имеет вид, определяемый (6.122), и характеризуется только двумя независимыми фотоупругими коэффициентами p_{11} и p_{12} . Отсюда следует, что продольные деформации изотропной среды наводят в ней линейное двулучепреломление. Пусть они приложены вдоль оси x , тогда отлична от нуля компонента тензора деформации $S_{11}^0 = S_1^0$. В этом случае изменяются только диагональные компоненты тензора ϵ_{ij}^r :

$$\epsilon_1^r = n_a^2 - n_a^4 p_{11} S_1^0, \quad \epsilon_2^r = \epsilon_3^r = n_a^2 - n_a^4 p_{12} S_1^0. \quad (6.131)$$

Таким образом, среда становится анизотропной, причем одноосной, с оптической осью вдоль направления приложения продольных деформаций. Обыкновенный и необыкновенный показатели преломления определяются соотношениями

$$n_o \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} p_{12} S_1^0, \quad n_e \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} p_{11} S_1^0, \quad (6.132)$$

а наведенное двулучепреломление равно:

$$n_e - n_o = \frac{n_a^3}{2} (p_{12} - p_{11}) S_1^0. \quad (6.133)$$

Отметим, что фотоупругие постоянные являются безразмерными величинами. Для плавленого кварца на длине волны 633 нм $p_{11} = 0,121$ и $p_{12} = 0,270$.

6.8.4. Эффект Фарадея

Эффект Фарадея наблюдается в прозрачных веществах, помещенных в магнитное поле \vec{H}_0 , и заключается во вращении плоскости поляризации электромагнитных волн при их распространении. Величина вращения пропорциональна составляющей магнитного поля вдоль направления распространения света. Этот эффект был открыт М. Фарадеем в 1846 году и обусловлен действием постоянного магнитного поля на движение электронов в оболочках атомов. Электрическая компонента электромагнитного (светового) поля приводит к смещению электронов относительно их положения равновесия. Воздействие на это движение

статического магнитного поля обусловлено силой Лоренца, $\vec{F}_L \sim \vec{v} \times \vec{B}$, вызывающей движение электронов в поперечном направлении. В результате возникает индуцированный дипольный момент (электрическая поляризация), пропорциональный $\vec{B} \times \vec{E}$, и материальное уравнение может быть записано в виде

$$D_i = \epsilon_0 \left(\epsilon_{ij}^r + i\delta_{ijk} f_{km} H_m^0 \right) E_j, \quad (6.134)$$

где f_{km} – компоненты тензора 2-го ранга коэффициентов Фарадея.

Для оптически изотропных сред $f_{km} = F\delta_{km}$, и фарадеево вращение плоскости поляризации после прохождения волной расстояния z выражается через *постоянную Верде* V как

$$\alpha(z) = VH_z^0 z = k_0 \frac{n_a^3}{2} FH_z^0 z, \quad (6.135)$$

определяемую соотношением $V = \pi n_a^3 F / \lambda$. У немагнитных веществ постоянная Верде невелика. Например, для кристалла $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ она составляет величину $V = 0.31$ угл. мин/А. В магнитных материалах эффект Фарадея значительно сильнее; в этом случае он пропорционален не напряженности магнитного поля, а намагниченности материала.

В среде с естественной оптической активностью направление вращения вектора поляризации относительно заданной системы координат однозначно зависит от направления распространения света. Поэтому *после отражения пучка света*, например, от выходной грани образца или от зеркальной поверхности вне его, *и распространении в обратном направлении, полный поворот плоскости поляризации равен нулю*. Однако *в эффекте Фарадея* направление вращения однозначно задается магнитным полем \vec{H}_0 , так что *отражение пучка с распространением в обратном направлении приводит к удвоению вращения*.

7. Теория дисперсии

Реакция поляризации вещества $\vec{P}(t)$ на внешнее поле $\vec{E}(t)$ всегда запаздывает. Для монохроматического сигнала связь поляризации и поля (см. раздел 6.5) дается простым выражением

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega), \quad (7.1)$$

учитывающим связанную с запаздыванием *временную (частотную) дисперсию*. Реальная световая волна представляет собой суперпозицию колебаний с различными

частотами, имеющими вследствие дисперсии различные фазовые скорости. Рассмотрим ниже влияние дисперсии на распространение реальных оптических сигналов и основные сведения из классической теории дисперсии света.

7.1. Распространение волновых пакетов. Групповая скорость

Гармоническая плоская волна является, строго говоря, неограниченной как в пространстве, так и во времени. Как только мы ограничим размеры волнового фронта, то в результате дифракции сразу получим волны с другими направлениями распространения (рис. 7.1). Точно также, если мы ограничим сигнал во времени (рис. 7.2), мы должны представить его в виде интеграла Фурье – в виде суперпозиции колебаний с различными частотами.

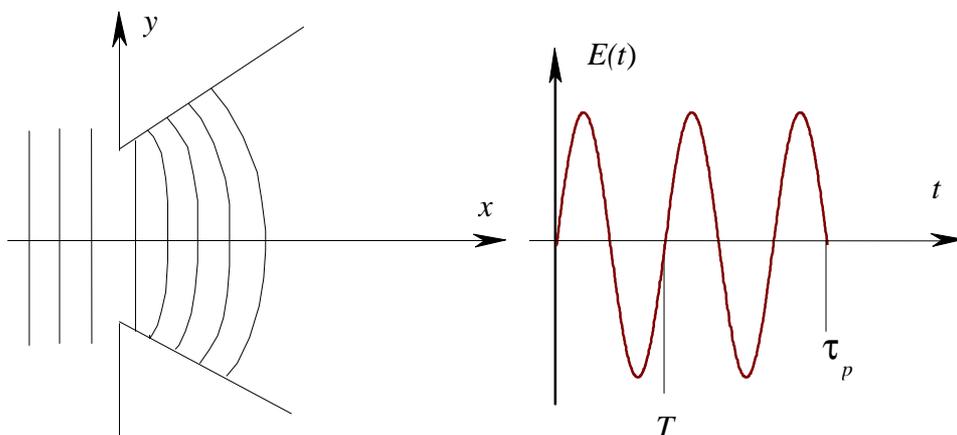


Рис. 7.1. Дифракция плоской волны на отверстии в непрозрачном экране

Рис. 7.2. Электромагнитный импульс

Ограниченная длительность электромагнитного сигнала, таким образом, приводит к существованию некоторой конечной полосы частот $\Delta\omega$ вблизи некоторой центральной частоты ω_0 . В силу линейности уравнений Максвелла распространение импульсного электромагнитного сигнала в линейной среде можно представить в виде линейной комбинации плоских волн с различными частотами и волновыми числами:

$$E(x, t) = \sum_{\ell} \dot{E}_m(k_{\ell}) \cdot \exp[i(\omega_{\ell}t - k_{\ell}x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp\{i[\omega(k)t - kx]\} dk. \quad (7.2)$$

Эти сумма и интеграл удовлетворяют уравнениям Максвелла, поскольку суммируются (интегрируются) плоские волны, являющиеся решением тех же уравнений. Если $\dot{E}_m(k)$ отличаются заметно от нуля лишь в небольшом промежутке

$\Delta k \ll k$, то поле $E(x, t)$ описывает *волновой пакет*, или *волновую группу*. В этом случае и $\Delta \omega \ll \omega_0$, и поле будет *почти монохроматическим* (квазимонохроматическим). Вспомним теперь дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между ω и k для плоской волны:

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c},$$

и перепишем его в виде

$$\omega(k) = \frac{c}{n(k)} k. \quad (7.3)$$

В изотропной среде дисперсионные свойства не зависят от направления векторов \vec{k} и \vec{E} , поэтому

$$\omega(-k) = \omega(k).$$

Рассмотрим теперь эволюцию волнового пакета $E(x, t)$ во времени. Для этого разложим $\omega(k)$ в ряд Тейлора вблизи центрального волнового числа $k_0 = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)$:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) + \dots, \quad (7.4)$$

и ограничимся первыми двумя членами разложения, т. к. $\Delta k = (k - k_0) \ll k_0$, $\Delta \omega \ll \omega_0$.

Подставим это разложение в интеграл для $E(x, t)$:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[\omega_0 t + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) t - kx + k_0 x - k_0 x \right] \right\} = \\ &= \exp \left[i(\omega_0 t - k_0 x) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t - x \right] (k - k_0) \right\} dk. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Интеграл в конечном выражении зависит только от комбинации переменных $[x - (d\omega/dk)_0 t]$ и называется *огибающей* $E[x - (d\omega/dk)_0 t]$ *волнового пакета*. Первый же сомножитель представляет некоторую *несущую* (заполнение) этого пакета и соответствует гармонической (монохроматической) плоской волне (рис. 7.3).

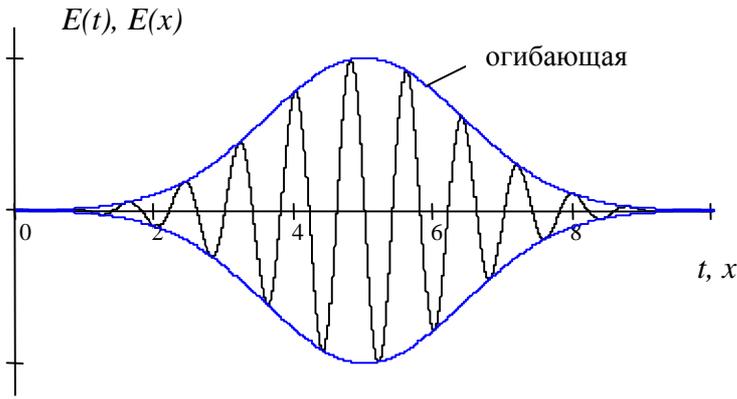


Рис. 7.3. Волновой пакет

Таким образом,

$$E(x, t) = E \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \exp [i(\omega_0 t - k_0 x)]. \quad (7.6)$$

Отсюда следует, что волновой пакет распространяется с сохранением своей формы со скоростью

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0, \quad (7.7)$$

которая называется *групповой скоростью* волны. Приведенное соотношение справедливо для волн любой природы: электромагнитных, акустических и т.д. Для дисперсионной зависимости в изотропной среде

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn}{d\omega_0}} = \frac{c}{n + \omega_0 \frac{dn}{d\omega_0}}. \quad (7.8)$$

Из соотношения (7.7) можно также получить *формулу Рэлея*:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (7.9)$$

Возможны следующие 3 варианта частотной дисперсии.

1. $dv/d\lambda = dn/d\lambda = 0$ и дисперсия отсутствует; эта ситуация реализуется только в вакууме. Иногда дисперсия настолько мала (например, при распространении в воздухе), что ею можно пренебречь.
2. $dv/d\lambda > 0$, $dn/d\lambda < 0$ ($dn/d\omega > 0$) – показатель преломления убывает с длиной волны. Такую дисперсию называют *нормальной*, и в этом случае *групповая скорость меньше фазовой*. Данный тип дисперсии типичен для прозрачных сред.

3. $dv/d\lambda < 0$, $dn/d\lambda > 0$ ($dn/d\omega < 0$) – показатель преломления растет с длиной волны. Этот вид зависимости параметров среды от длины волны (частоты) называют *аномальной дисперсией*. Для областей спектра, где вещество обладает аномальной дисперсией, характерно *превышение групповой скорости над фазовой* и *сильное поглощение света*.

Отметим, что и в случае аномальной дисперсии, когда $v_g > v$, выполняется условие $v_g < c$ – *скорость переноса энергии не превышает скорости света в вакууме*. Действительно, при выводе формул (7.8) и (7.9) использовано разложение (7.4), в котором были отброшены члены второго и высшего порядков малости. Если членом второго порядка $(d^2\omega/dk^2)_0 (k - k_0)^2 / 2$ пренебречь нельзя, то ширина импульса электромагнитного излучения будет изменяться в процессе распространения (уширяться), а форма его огибающей испытывает деформацию. В этом случае само понятие групповой скорости, как скорости перемещения волнового пакета, нуждается в уточнении. Анализ показывает, что при нормальной дисперсии максимум огибающей импульса отстает от переднего фронта, в то время как для аномальной дисперсии этот максимум смещается к переднему фронту.

7.2. Поглощение света. Закон Бугера

Как отмечалось выше в подразделе 6.5, временная дисперсия электрических свойств среды, связанная с запаздыванием электрической поляризации относительно изменений наводящего её электрического поля, обуславливает комплексный характер диэлектрической проницаемости вещества (см. формулу (6.26)). В этом случае и показатель преломления волны, распространяющейся в среде, является комплексной величиной:

$$\tilde{n}(\omega) = n'(\omega) - in''(\omega) = n(\omega)[1 - i\kappa(\omega)], \quad (7.10)$$

где вещественный параметр $\kappa(\omega)$ называют *показателем затухания*, или *коэффициентом экстинкции*. Используя соотношения, приведенные в п. 6.7.1, запишем выражение для светового поля волны с таким комплексным показателем преломления, распространяющейся вдоль оси z :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_{m0} \exp[i(\omega t - \tilde{n}k_0 z)] = \vec{E}_{m0} \exp(-n\kappa k_0 z) \exp[i(\omega t - nk_0 z)], \quad (7.11)$$

из которого видно, что в среде с $\kappa \neq 0$ амплитуда поля убывает по мере распространения волны, то есть происходит его поглощение. Переходя к

интенсивности рассматриваемой волны, определяемой соотношениями (3.71) или (3.72), получаем:

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z), \quad (7.12)$$

где коэффициент поглощения $\alpha = 2nk_0 = 4\pi k/\lambda$. Соотношение (7.12) носит название закона Бугера – Ламберта – Бэра. Таким образом, действительная часть $n(\omega)$ комплексного показателя преломления определяет преломляющие (рефракционные) свойства среды для рассматриваемой волны. Мнимая часть $n(\omega)k(\omega)$ описывает её поглощение (абсорбционные свойства среды для данной волны).

7.3. Нормальная и аномальная дисперсия

В классической теории широко применяется квазиупругая модель, в которой атом рассматривается в виде совокупности положительно заряженного атомного остатка и отрицательно заряженного электрона. Эти заряды находятся на некотором равновесном расстоянии d_0 между ними. При смещении электрона из положения равновесия на расстояние $\vec{x} = \vec{x}^0 x$ атом, во-первых, приобретает наведенный дипольный момент $\vec{p} = -e\vec{x}$, где e – элементарный электрический заряд. Во-вторых, на него начинает действовать возвращающая квазиупругая сила, пропорциональная отклонению x от положения равновесия. Такая система в отсутствие потерь является аналогом рассмотренного выше в п. 2.1.1 гармонического осциллятора с собственной частотой ω_0 , определяемой параметрами атома. С учетом потерь движение электрона в поле световой волны, изменяющемся во времени по гармоническому закону $\vec{E}(t) = \vec{x}^0 E_0 \exp(i\omega t)$, описывается уравнением вынужденных колебаний (2.21), с кулоновской вынуждающей силой:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E_0 \exp(i\omega t), \quad (7.13)$$

где m_e – масса электрона. Стационарное по амплитуде (только «вынужденное», без учета переходных процессов) решение этого уравнения имеет вид

$$x_{st}(t) = -\frac{e}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} E_0 \exp(i\omega t). \quad (7.14)$$

Таким образом, в поле световой волны атом приобретает дипольный момент, изменяющийся во времени по гармоническому закону с её частотой ω . Если среда является достаточно разреженной, когда взаимовлиянием поляризованных атомов друг

на друга можно пренебречь, то электрическая поляризация среды (суммарный дипольный момент единицы объема) пропорциональна их концентрации N : $\vec{P} = N\vec{p}$. С использованием приведенных в подразделе 6.4 соотношений из (7.14) можно найти, что восприимчивость рассматриваемой среды равна:

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}, \quad (7.15)$$

где $\omega_p = Ne^2 / (\epsilon_0 m_e)$ – плазменная частота, физический смысл которой подробно обсуждается в следующем подразделе. Таким образом, вещественная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости данной среды, описывающие дисперсию и поглощение света, определяются соотношениями

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}, \quad (7.16)$$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) = \omega_p^2 \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (7.17)$$

Соотношения (7.16) и (7.17) упрощаются, если показатель преломления среды близок к единице, коэффициент поглощения мал, а частота света ω близка к собственной частоте осциллятора ω_0 , так что в этом случае $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$.

Тогда

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}, \quad (7.18)$$

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (7.19)$$

Пример дисперсионных зависимостей $\kappa(\omega)$ и $n(\omega) - 1$ представлен на рис. 7.4, где использовано обозначение $C = \omega_p^2 / (2\gamma\omega_0)$. Как видно, если частота света достаточно далека от ω_0 , показатель преломления растет с частотой, то есть имеет место нормальная дисперсия. Аномальная дисперсия наблюдается только вблизи ω_0 , но в этой области существует сильное поглощение.

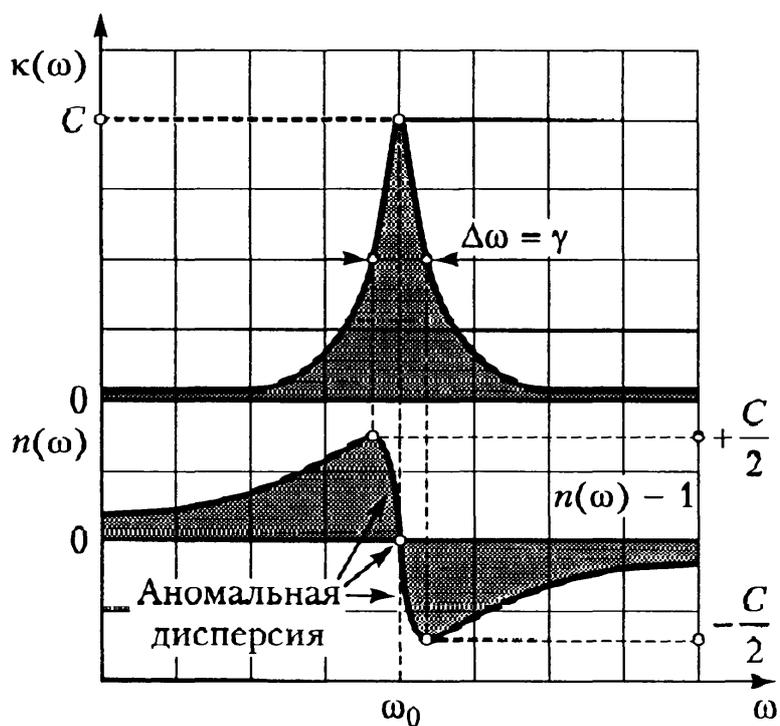


Рис. 7.4. Дисперсионные зависимости для $\kappa(\omega)$ и $n(\omega) - 1$

Экспериментально дисперсионную зависимость можно наблюдать, например, методом скрещенных призм (рис. 7.5). Первая призма (с вертикальным ребром) – стеклянная, она разлагает проходящий через неё белый свет в спектральную полосу. Вторая призма (с горизонтальным ребром) изготавливается из исследуемого материала. Она смещает каждую точку спектра по вертикали, причем величина смещения зависит от показателя преломления на данной частоте.

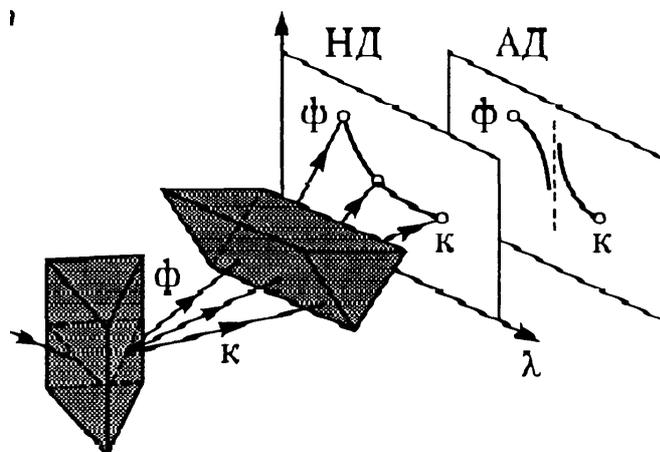


Рис. 7.5. Наблюдение дисперсии методом скрещенных призм

Таким образом, форма спектральной полосы на экране отражает зависимость показателя преломления от длины волны. На рис. 7.5 показан примерный вид спектра для случаев нормальной (НД) и аномальной (АД) дисперсии.

Для более точного определения изменения показателя преломления в области аномальной дисперсии, где велико поглощение, Д.С. Рождественским был разработан метод «крюков», основанный на внесении дополнительной разности хода между опорным и измерительным пучками в двухлучевом интерферометре (рис. 7.6).

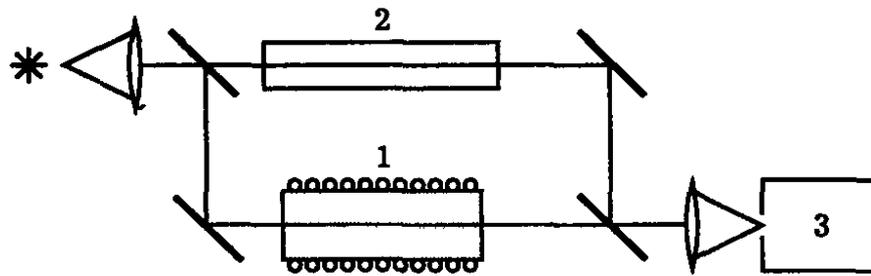


Рис. 7.6. Схема установки для измерения дисперсии атомных паров: 1 – кювета с парами, 2 – компенсационная кювета, 3 – спектрограф

В результате интерференционные полосы оказываются наклоненными, что позволяет количественно оценить параметры аномальной дисперсии. На рис. 7.7 изображена картина, отображающая дисперсию в парах натрия в области желтой дублетной линии.

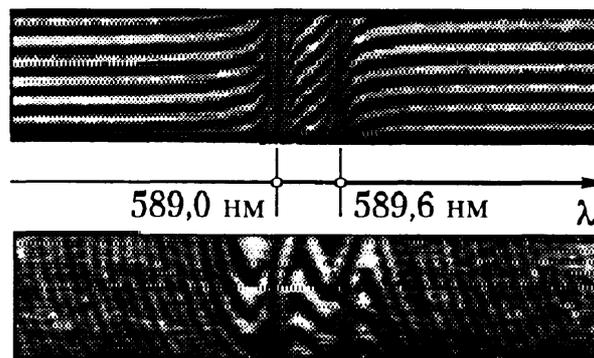


Рис. 7.7. Фотографии дисперсионных кривых в методе «крюков»

7.4. Дисперсия вдали от линий поглощения

Рассмотрим более подробно поведение показателя преломления прозрачных сред. При выполнении неравенства $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ дисперсионная зависимость (7.16) может быть представлена в виде

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (7.20)$$

Как следует из (7.20), при любых частотах в области прозрачности имеет место нормальная дисперсия (рис. 7.8). В реальных случаях собственные частоты ω_0 , как правило, лежат в ультрафиолетовом диапазоне. Поэтому для относительно низких частот ($\omega < \omega_0$, видимая область) показатель преломления превышает единицу. Напротив, в высокочастотной области ($\omega > \omega_0$, рентгеновский диапазон) $n < 1$, и, следовательно, фазовая скорость волны больше скорости света в вакууме, $v > c$.

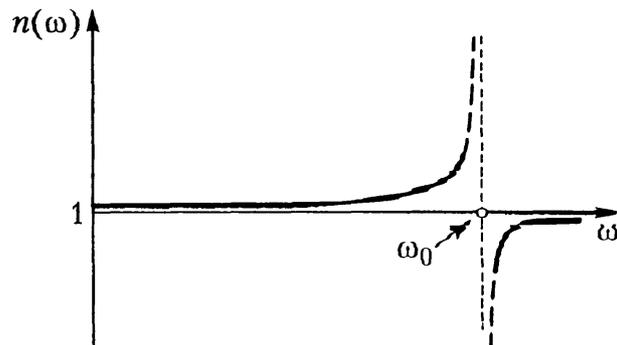


Рис. 7.8. Дисперсионная зависимость в прозрачной среде

Однако групповая скорость волнового пакета, характеризующая скорость переноса энергии, как отмечалось в подразделе 7.1, и в данном случае не превосходит скорость света.

В спектральной области, где выполняется неравенство $\omega \ll \omega_0$, дисперсионную зависимость (7.20) можно разложить по степеням малого параметра ω/ω_0 . В этом случае

$$n^2(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right). \quad (7.21)$$

Переходя от частоты к длине волны, получаем *дисперсионную формулу Коши*:

$$n^2(\lambda) \approx 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right), \quad (7.22)$$

где $A = \omega_p^2 / \omega_0^2$ – коэффициент рефракции, $B = 4\pi^2 c^2 / \omega_0^2$ – коэффициент дисперсии.

Другой важный случай соответствует дисперсии в высокочастотной области, когда $\omega \gg \omega_0$. Он реализуется, в частности, при распространении электромагнитных волн в плазме, то есть в среде, содержащей большое количество свободных зарядов, для которых отсутствует квазиупругая возвращающая сила, то есть $\omega_0 = 0$. Из (7.20) в этом случае находим:

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (7.23)$$

Отсюда следует, что при распространении в плазме показатель преломления $n < 1$ для частотной области $\omega > \omega_p$, а при $\omega < \omega_p$ он становится мнимым. Последнее означает, что при частотах излучения, меньших ω_p , от границы раздела обычной среды с плазмой наблюдается полное отражение ($|R| = 1$) при любых углах падения. Граничная частота $\omega_p = \sqrt{Ne^2 / (\epsilon_0 m_e)}$ называется *плазменной* или *лэнгмюровской частотой*.

Описываемое явление проявляется, например, в отражении радиоволн длинноволнового, средневолнового и коротковолнового диапазонов с $\lambda > \lambda_p$ от различных слоев ионосферы, обеспечивающем дальнюю радиосвязь. Более высокочастотные ультракороткие волны проходят через ионосферу и широко используются на линиях радиосвязи «земля-космос-земля».

Аналогично объясняется зеркальный блеск металлов, обусловленный твердотельной плазмой свободных электронов. В этом случае из-за высокой концентрации зарядов плазменная частота лежит в УФ-области.

Вблизи лэнгмюровской частоты наблюдается *плазменный минимум отражения* R_{\min} , возникающий при переходе показателя преломления через единицу.

Физический смысл плазменной частоты заключается в том, что она соответствует собственной частоте колебаний электронов в плазме, состоящей из N частиц с зарядом $\pm e$. Такие колебания возникают при смещении электронов из положения равновесия. Затем под действием кулоновских сил они будут ускоренно двигаться навстречу положительно заряженным ионам, проскочат по инерции

положение равновесия, далее начнут двигаться в противоположном направлении, и т.д., совершая затухающие колебания с частотой ω_p .

Учтем теперь, что вклад в дисперсию дают колебания не только электронов, но и ионов. Поскольку масса ионов намного больше, чем электронов, соответствующие собственные частоты оказываются существенно меньшими. Ионные линии поглощения для веществ, прозрачных в видимой области, попадают в ИК-диапазон. Дисперсионная зависимость с их учетом может быть записана в виде

$$n^2 = 1 + \frac{C_1}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{C_2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}. \quad (7.24)$$

Формулы (7.21) и (7.24) были получены в предположении, что среда является достаточно разреженной и взаимодействием поляризованных частиц можно пренебречь. В конденсированных средах (жидкости, твердые тела) локальное поле, действующее на атом, обусловлено не только полем световой волны, но и соседними атомами. Г. Лоренц и Л. Лоренц показали, что в этом случае справедливо соотношение (*формула Лоренц–Лоренца*):

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\omega_p^2}{3(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (7.25)$$

Если показатель преломления близок к единице, то $n^2 + 2 \approx 3$ и (7.25) переходит в (7.21). В правой части (7.25) величина ω_p^2 пропорциональна концентрации атомов N , а следовательно, и плотности вещества ρ . Поэтому во многих случаях справедлив *закон постоянной удельной рефракции*:

$$r = \frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{const}. \quad (7.26)$$

Например, для воздуха при увеличении давления в 200 раз удельная рефракция r изменяется на доли процента.

Классическая теория дисперсии в определенных случаях требует уточнения с учетом квантовой природы вещества. Тем не менее, её основные качественные (а во многих случаях и количественные) результаты остаются справедливыми. Так, дисперсионную зависимость (7.21) следует заменить *уравнением Селлмейера*:

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{\omega_p^2 f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}, \quad (7.27)$$

где ω_{0k} – частота, соответствующая одному из переходов между квантованными уровнями энергии атома и f_k – *сила осциллятора*, коэффициент, зависящий от квантовых чисел уровней.

Список использованной литературы

1. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. – М.: Мир, 1987. – 468 с.
2. Стафеев С.К., Боярский К.К., Башнина Г.Л. Основы оптики: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 336 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2005. – 651 с.
4. Калитеевский Н.И. Волновая оптика: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2006. – 480 с.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 855 с.
6. Ахманов С.А. Физическая оптика Учебник. 2-е изд. / С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. – М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. – 656 с.
7. Дубнищев Ю.Н. Колебания и волны: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2011., http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=683
8. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
9. Матвеев А.Н. Оптика: Учеб. пособие для физ. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 351 с.
10. Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски; пер. с англ. под ред. Т.А. Шмаонова. – М.: Мир, 1977. – 367 с.
11. Пихтин А.Н. Оптическая и квантовая электроника. Учебник для ВУЗов.– М.: Высшая школа, 2001. – 574 с.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1992. – 454 с.

Учебное пособие

Шандаров Станислав Михайлович

Введение в оптическую физику

Усл. печ. л. Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40