МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

В.И.Смагин

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Томск
2018

УДК 519.6

Смагин В.И.

Вычислительная математика. Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2018. – 160 с.

В учебном пособии рассматриваются основы теории погрешностей, вопросы приближения функций и изучаются алгоритмы численного дифференцирования. Приводятся контрольные вопросы и задания.

Для студентов вузов, обучающихся по образовательной программе бакалавриата по направлению подготовки Информатика и вычислительная техника и Информационные системы и технологии.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники, 2018

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная математика находит применение всюду, где рассматриваются явления и процессы, подчиняющиеся количественным оценкам. Эти явления и процессы могут возникать в различных сферах и областях, например, в физике, технике, экономике, механике, астрономии, биологии, медицине и т.д.

Известно, что не всякая задача имеет аналитическое решение. Кроме того достаточно часто аналитическое решение поставленной задачи очень сложно получить. В этом случае задачи приходится решать с помощью вычислительных алгоритмов и численных методов, которые и являются предметом исследования вычислительной математики.

В разработке численных методов принимали участие такие известные ученые как Эйлер, Лагранж, Ньютон, Чебышев, Лобачевский. Но особенно бурно методы вычислительной математики начали развиваться в связи с появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ). Поэтому изучение вычислительных алгоритмов должно осуществляться с учетом специфики ЭВМ:

а) ограниченное быстродействие;

б) ограниченный размер разрядной сетки, используемой для хранения чисел;

в) ограниченность памяти.

Кроме того, к математической задаче должны быть предъявлены следующие требования:

а) устойчивость (малые изменения исходные данных должны приводить к малым изменениям результата);

б) корректность (задача называется корректной, если для любых значений исходных данных из некоторого заданного класса, ее решение существует, единственно и устойчиво по исходным данным).

Отметим, что численные методы в некоторых случаях разработаны и для решения некорректных задач. Здесь существенный вклад внес академик А.Н.Тихонов.

Основные требования, предъявляемые к вычислительным алгоритмам, заключаются в том, алгоритм должен быть:

1) реализуемым, т.е. давать решение задачи за допустимое машинное время;

2) экономичным по времени счета (среди эквивалентных по точности алгоритмов необходимо выбрать тот, который дает решение за минимальное время счета);

3) экономичным по объему используемой памяти ЭВМ;

4) сходящимся (при неограниченном увеличении числа итераций или числа решаемых уравнений решение должно стремиться к решению исходной задачи);

5) вычислительно устойчивым (это свойство характеризует скорость накопления суммарной погрешности за счет влияния погрешности округления, обусловленной ограниченностью разрядной сетки представления чисел в ЭВМ).

Данное учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника» и соответствует содержанию Федерального государственного образовательного стандарта по дисциплине «Вычислительная математика» (бакалавриат). Учебное пособие включает основные понятия теории погрешностей, теорию аппроксимации функций, методы численного дифференцирования. Изучение этих разделов дает необходимые знания для студентов данного направления и служит основой для изучения других дисциплин, преподаваемых на старших курсах. В учебном пособии изложены теоретические вопросы дисциплины, в нем содержится большое количество примеров, контрольных тестов и заданий для организации компьютерного практикума. В приложении приведены варианты исходных данных к заданиям. Учебное пособие написано с учетом требований компетентностного подхода по дисциплине «Вычислительная математика». В результате освоения этой дисциплины студенты получают навыки использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяют методы математического анализа и моделирования, осваивают методики использования программных средств для решения практических задач.

Учебное пособие может быть полезным для студентов, обучающихся по инженерно-техническим и экономическим направлениям подготовки, а также для специалистов, желающих познакомиться с методами численного решения практических задач.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1. Математические оценки точности приближенного числа

Введем обозначения: x^* – точное значение числа, x – приближенное значение число, $\varepsilon = x^* - x$ – погрешность числа (ошибка), $|\varepsilon| = |x^* - x|$ – модуль ошибки. В силу того, что точное значение x^*, как правило, неизвестно вводится понятие абсолютной погрешности числа Δx.

Абсолютной погрешностью числа называется наименьшее из всех возможных чисел Δx, которого не превышает модуль ошибки

$$|\varepsilon| \le \Delta x.$$

Для того, чтобы характеризовать точность вычислений (измерений) вводится понятие *относительной погрешности*, определяющей величину погрешности, которая приходится на единицу измеряемой величины

$$\delta = \frac{|\varepsilon|}{|x^*|}.$$

На практике используют следующую оценку относительной погрешности

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

1.2. Запись чисел на ЭВМ

При записи чисел в ЭВМ применяется двоичная система счисления, используемая для представления любого числа z с плавающей запятой

$$z^* \approx \pm 2^p \sum_{k=1}^{m} \alpha_k 2^{-k}, \; (|p| \le p_0, \; \alpha_1 = 1).$$

Здесь p – порядок, m – длина разрядной сетки. Типичное значение параметра p_0, определяющее границу для порядка и параметра n равно:

$$p_0 = 64,\ n = 35.$$

В десятичной системе счисления порядок и число знаков определяются равенствами:

$$2^{p_0} = 2^{64} \approx 7 \cdot 10^{19},\ 2^{-n} = 2^{-35} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-10}.$$

При вводе числа x в ЭВМ, его обычно округляют и приближенно записывают в виде

$$x^* \approx \pm 2^p \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 2^{-k} = x.$$

Абсолютная погрешность такой записи числа не больше единицы последнего разряда в x, то есть:

$$|x^* - x| \le 2^{p-n}.$$

При этом относительная погрешность числа равна:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{2^{p-n}}{2^p \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 2^{-k}} \le 2^{-n}.$$

1.3. Верные знаки приближенного числа

Приближенные числа принято записывать с верными знаками. Если β – основание системы счисления (β – обычно равно 2, 3, 8, 10, 16), то число может быть представлено в виде

$$x^* = \pm(\alpha_1 \beta^m + \alpha_2 \beta^{m-1} + \ldots + \alpha_n \beta^{m-n+1} + \ldots).$$

Приближенное число x имеет n верных знаков, если для абсолютной погрешности справедливо неравенство

$$\Delta x \le \omega \beta^{m-n+1}.$$

Для десятичной системы счисления (β=10), если ω=0,5, то число x имеет n верных знаков в узком смысле

$$\Delta x \le 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}, \qquad (1.1)$$

если ω=1,0, то число x имеет n верных знаков в широком смысле. Если число имеет n верных знаков, то цифры α_{n+1}, α_{n+2} называются сомнительными.

Относительная погрешность числа, содержащего n верных знаков, определяется соотношением

$$\delta x = \frac{\omega\beta^{m-n+1}}{\alpha_1\beta^m + \alpha_2\beta^{m-1} + ...} \le \frac{\omega\beta^{m-n+1}}{\alpha_1\beta^m} \le \frac{\omega}{\alpha_1}\beta^{1-n} \le \omega\beta^{1-n}.$$

На практике обычно используется понятие числа с верными знаками в узком смысле. Тогда можно сказать, что абсолютная погрешность числа с верными знаками равна половине последнего правильного разряда. Отметим также, что при записи числа с верными знаками необходимо пользоваться правилами округления чисел.

Пример 1.1. Записать с верными десятичными знаками в узком смысле значение числа $x = 0,009665212$, если оно задано с погрешностью $\Delta x = 0,0000031$. Для решения задачи необходимо сначала определить значение m, оно в нашем случае равно -3. Затем необходимо для погрешности Δx записать неравенство

$$0,0000031 \le 0,5 \cdot 10^{-5},$$

в котором справа должна стоять минимально возможная целая степень. Далее в силу формулы (1.1) составляется уравнение

$$m - n + 1 = -5,$$

решение, которого дает количество верных знаков числа. Очевидно $n = 3$. Тогда, записанное с верными знаками число с учетом правил округления, имеет вид

$$x = 0,00967.$$

1.4. Классификация погрешностей

Существуют три основных типа погрешностей.

1. *Неустранимая погрешность* $\Delta_{\text{Н}}$ – это погрешность, обусловленная неточностью исходных данных и несоответствием математической модели реальному процессу.

2. *Погрешность метода* $\Delta_{\text{М}}$ – возникает при замене исходной математической задачи на аппроксимирующую задачу. Необходимость такой замены обусловлена тем, что часто исходную задачу точно невозможно решить из-за ограниченного быстродействия ЭВМ, а также из-за ограниченности памяти.

3. *Погрешность округления* $\Delta_{\text{ОК}}$ обусловлена ограниченной разрядной сеткой, используемой при представлении чисел в ЭВМ. Округление данных производится также при их вводе в ЭВМ, при выполнении арифметических операций и при выводе данных.

Рассматривается также *полная погрешность* $\Delta_{\text{П}}$, которая обусловлена всеми перечисленными выше факторами. На практике же, полную погрешность оценивают как сумму неустранимой погрешности и погрешности метода

$$\Delta_{\text{П}} = \Delta_{\text{Н}} + \Delta_{\text{М}}.$$

Для вычислительно устойчивых алгоритмов влиянием погрешности округления обычно пренебрегают.

При решении задач нет смысла применять численный метод с погрешностью метода, существенно меньшей, чем значение неустранимой погрешности. Это означает, что погрешность метода должна быть согласована с неустранимой погрешностью.

1.5. Погрешность вычисления функции многих переменных

Пусть требуется вычислить значение функции многих переменных

$$y^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*). \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что нам известны приближенные значения аргументов функции $x_1, x_2, ..., x_n$, которые заданы с погрешностями Δx_i. Необходимо определить абсолютную погрешность $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Дополнительно будем предполагать, что:

1) погрешности Δx_i малы;

2) частные производные $\dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}$ существуют и являются непрерывными плавно изменяющимися функциями.

Разлагая функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в ряд Тейлора нулевой степени, оценим ошибку

$$\varepsilon = y^* - y = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) - f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

В результате получим

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)}{\partial x_i}(x_i^* - x_i),$$

где $\xi_i = x_i + \Theta_i(x_i^* - x_i)$, Θ_i – некоторое заранее неизвестное число, принадлежащее интервалу [0 1] ($i = \overline{1, n}$). Заметим, что здесь ε представляет собой остаточный член многочлена Тейлора.

В силу сделанных предположений, $|\varepsilon|$ будет приблизительно ограничен сверху величиной

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i ,$$

которая и будет *абсолютной погрешностью* величины y, т.е.

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i . \qquad (1.3)$$

Разделив левую и правую части равенства (1.3) на $|y|$ оценим *относительную погрешность* функции y

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right| \delta x_i \ . \tag{1.4}$$

Величины

$$S_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right| \tag{1.5}$$

называются *чувствительностями*. Они определяют степень влияния погрешности i-го аргумента на погрешность результата.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу вычисления функции

$$y = \arcsin(x) \, .$$

Чувствительность для этой функции определится по формуле

$$S(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)} \, .$$

Если значение x находится вблизи 1, то чувствительность будет высокой, а значит исходная задача неустойчива (малые отклонения исходных данных приводят к большим отклонениям результата).

1.6. Обратная задача теории погрешностей

Общая постановка обратной задачи теории погрешностей следующая: Требуется определить погрешности аргументов функции, таким образом, чтобы погрешность самой функции не превышала заданной величины. Так как эта задача математически определена не полностью. Рассмотрим два простейших варианта решения обратной задачи теории погрешностей.

Пусть задана абсолютная погрешность функции Δy, дополнительно предполагаем, что $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = \Delta$. Требуется определить Δ.

Решение этой задачи следует из формулы (1.3) и имеет вид

$$\Delta = \frac{\Delta y}{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right|}. \qquad (1.6)$$

Пусть задана относительная погрешность функции δy, дополнительно предполагаем, что $\delta x_1 = \delta x_2 = \cdots = \delta x_n = \delta$. Требуется определить δ.

Решение этой задачи строится на основе формулы (1.4) и имеет вид

$$\delta = \frac{\delta y}{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right|}. \qquad (1.7)$$

1.7. Погрешности простейших функций

Выполним оценку абсолютной и относительной погрешностей простейших функций. При этом будем использовать результаты раздела 1.5 по анализу погрешностей функции многих переменных. Будем предполагать, что абсолютные и относительные погрешности аргументов Δx_k и δx_k ($k = \overline{1, n}$) известны.

1. Сложение.

$$y = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad (x_k \geq 0, k = \overline{1, n}).$$

В силу формул (1.3), (1.4) имеем

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k, \quad \delta y = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{y} \delta x_k.$$

Очевидно, что справедливо неравенство

$$\delta y \leq \max(\delta x_k) \frac{1}{y} \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \max(\delta x_k).$$

Таким образом, относительная погрешность суммы не превосходит наибольшей относительной погрешности слагаемых.

1. Вычитание.

$$y = x_1 - x_2, \quad (x_1 > 0,\ x_2 > 0).$$

Тогда

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2, , \qquad \delta y = \frac{x_1}{|x_1 - x_2|}\delta x_1 + \frac{x_2}{|x_1 - x_2|}\delta x_2 .$$

Абсолютная погрешность операции вычитания равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого. Отметим, что относительная погрешность при вычитании близких чисел может быть очень большой. При написании программ необходимо избегать операций вычитания близких чисел. Поэтому целесообразно преобразовать выражение так, чтобы операция вычитания близких чисел исключалась. Например, использование в программе формулы $z = (r + a)^3 - r^3$ (при малом a) приведет к увеличению относительной погрешности результата, и если эту формулу записать в преобразованном виде: $z = 3r^2a + 3ra^2 + a^3$, то такого увеличения относительной погрешности уже не будет.

3. Взвешенное суммирование. Пусть требуется вычислить выражение

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k ,$$

где α_k – известные параметры, тогда в силу формул (1.3) и (1.4) имеем

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \Delta x_k , \quad \delta y = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \left|\frac{x_i}{y}\right| \delta x_k .$$

4. Умножение. Погрешности произведения

$$y = x_1 x_2 \cdots x_n$$

определятся по формулам:

$$\Delta y = |y| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x_k|} \Delta x_k \ ,$$

$$\delta y = \sum_{k=1}^{n} \delta x_k \ .$$

5. Деление. Погрешности деления двух чисел

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

определятся по формулам:

$$\Delta y = \frac{1}{|x_2|} \Delta x_1 + \frac{|x_1|}{x_2^2} \Delta x_2 \ ,$$

$$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2 \ .$$

6. Возведение в степень. Погрешности операции возведения в степень

$$y = x^m \quad (\ x > 0\ )$$

следующие

$$\Delta y = m x^{(m-1)} \Delta x \ , \quad \delta y = m \delta x \ .$$

1.8. Контрольные вопросы

1. Укажите чем обусловлена погрешность метода:

1) неточностью исходных данных;

2) заменой исходной задачи на аппроксимирующую;

3) ограниченностью разрядной сетки;

4) несоответствием математической модели реальному процессу;

5) быстродействием компьютера.

2. Укажите чем обусловлена неустранимая погрешность:

1) неточностью исходных данных;

2) заменой исходной задачи на аппроксимирующую;

3) ограниченностью разрядной сетки;
4) несоответствием математической модели реальному процессу;
5) быстродействием компьютера.

3. Укажите чем обусловлена погрешность округления:

1) неточностью исходных данных;
2) заменой исходной задачи на аппроксимирующую;
3) ограниченностью разрядной сетки;
4) ограниченностью объема оперативной памяти;
5) быстродействием компьютера.

4. Укажите правильно записанное число $x = 0{,}17572$ **с верными знаками в узком смысле, если оно задано с погрешностью** $\Delta = 0{,}00068$**:**

1) 0,176;
2) 0,175;
3) 0,18;
4) 0,17.

5. Укажите правильно записанное число $x = 0{,}00966552$ **с верными знаками в узком смысле, если оно задано с погрешностью** $\Delta = 0{,}0000043$:

1) 0,00967;
2) 0,0097;
3) 0,00966;
4)0,009666.

6. Чему равна абсолютная погрешность числа 5,4563 **заданного с верными знаками в узком смысле:**

1) 0,0001;
2) 0,0005;
3) 0,00005;
4) 0,000025.

7. Укажите правильно записанное число $x = 7{,}09712$ **с верными знаками в узком смысле, если оно задано с погрешностью** $\Delta = 0{,}000345$:

1)7,0971;
2) 7,09712;

3) 7,1000;

4) 7,097.

8. Укажите правильную формулу для оценки абсолютной погрешности функции многих переменных $y = f(x_1,...,x_n)$ (Δx_i – абсолютные погрешности аргументов):

1) $\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(\xi_1,...,\xi_n)}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$;

2) $\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$;

3) $\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}\Delta x_i$.

9. Чему равна абсолютная погрешность величины $y = \sum_{k=0}^{m}\lambda_k z_k$, если известны абсолютные погрешности z_k (величины λ_k заданы точно):

1) $\Delta y = \sum_{k=0}^{m}\lambda_k\left|\Delta z_k\right|$;

2) $\Delta y = \sum_{k=0}^{m}\lambda_k\Delta z_k$;

3) $\Delta y = \sum_{k=0}^{m}\left|\lambda_k\right|\Delta z_k$.

1.9. Задания к главе 1

Задание 1.1. Определить для п.п. а) и б) число верных знаков приближенного числа, если известна абсолютная погрешность; для п. в) определить абсолютную и относительную погрешность, если известно число верных знаков; для п. г) определить абсолютную погрешность Δz, если известны абсолютные погрешности аргументов $\Delta x = 0,5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta y = 0,1 \cdot 10^{-4}$

$(x = 0,871, \quad y = 1,153)$. Значение функции z записать с верными знаками.

Дополнительно для пункта г) решить обратные задачи теории погрешности:

- Задана абсолютная погрешность $\Delta z = 10^{-5}$, найти $\Delta = \Delta x = \Delta y$.

- Задана относительная погрешность $\delta z = 0,15\%$, найти $\delta = \delta x = \delta y$.

Варианты исходных данных для задания приведены в п. 4.1.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

2.1. Постановка задачи

Пусть в результате эксперимента для некоторой функции $y = f(x)$ получены значения $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \ldots,$ $y_n = f(x_n)$, т.е. задана таблица значений x_i, y_i, $i = \overline{0, n}$. Такие таблицы могут быть построены в различных предметных областях. Например, в технике таблица может быть построена по показаниям измерительных приборов, в экономике таблица может являться результатом анализа экономической деятельности фирмы.

На практике наиболее часто встречаются следующие задачи:

- найти значение функции $y = f(x)$ в некоторой точке $x \in (x_0, x_n)$ такой, что $x \neq x_j$, $j = \overline{0, n}$;
- найти значение x по заданному значению функции $y = f(x)$, $y \neq y_j$, $j = \overline{0, n}$;
- найти значения производных $y', y'', \ldots$ в точке x;
- найти значение интеграла $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$;
- найти для функции $y = f(x)$, заданной таблично, приближенное аналитическое выражение.

Решения перечисленных задач можно найти, построив для функции $f(x)$ интерполяционную функцию $\varphi(x)$.

Отметим, что эти задачи имеют смысл и в том случае, если аналитическое выражение функции $y = f(x)$ известно, но оно очень сложное. В этом случае функцию табулируют и строят для нее интерполяционную функцию. Таким образом, можно получить более простое приближенное аналитическое выражение для функции $y = f(x)$, которое затем использовать в вычислениях.

Рассмотрим требования, которым должна удовлетворять интерполяционная функция. Пусть R – множество вещественных функций, заданных на отрезке $[a,b]$. Зададим на множестве R счетную систему функций $\{\varphi_i,(x)\}$. Построим функцию

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x), \tag{2.1}$$

где a_i, $i = \overline{0,n}$ – некоторые, подлежащие определению вещественные коэффициенты. Система функций $\{\varphi_i(x)\}$ должна быть линейно независимой. Потребуем, чтобы в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значения функции $\varphi(x)$ совпадали со значениями функции $f(x)$, т.е.

$$\varphi(x_j) = f(x_j). \tag{2.2}$$

Условие (2.2) – основное требование, которое используется при построении интерполяционных функций. В этом случае функция $\varphi(x)$ вида (2.1) называется *интерполирующей*, а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – *узлами интерполирования*. В силу требования (2.2) будем иметь систему n линейных уравнений для определения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x_j) = f(x_j), \;\; j = \overline{0,\, n}\,. \tag{2.3}$$

Перепишем систему (2.3) в векторно-матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0)\ldots\varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1)\ldots\varphi_n(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_0(x_n)\ldots\varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.4) имеет единственное решение, если определитель матрицы системы не равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0)\ldots\varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1)\ldots\varphi_n(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_0(x_n)\ldots\varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Система функций $\{\varphi_i(x)\}$, для которой $\Delta \neq 0$ при всех $x_i \neq x_j$, где $i \neq j$ называется *системой Чебышева*.

Таким образом, первое условие, которое накладывается на функции $\varphi_i(x)$, заключается в том, что $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0,n}$ должны составлять *систему Чебышева*.

Второе условие, которому должна удовлетворять система функций $\{\varphi_i\}$ является *условием полноты*.

Поясним это условие. Пусть F – класс интерполируемых функций и $f(x) \in F$. Семейство линейных комбинаций $\varphi(x)$ вида (2.1) называется *полным* в классе F, если для всякой функции $f(x) \in F$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое n и такие коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$, что для всех $x \in [a,b]$ справедливо неравенство

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Отметим также, что для построения аппроксимирующих функций кроме интерполяционной функции, построенной на основе условия (2.2), используются приближения, минимизирующие сумму квадратов отклонений аппроксимирующей функции от заданных табличных значений (см. метод наименьших квадратов п. 2.14, п. 2.16.3), и метод аппроксимации с помощью сплайн-функций (см. п. 2.13).

2.2. Вычисление интерполяционного многочлена по формуле Лагранжа

Определим систему функций $\{\varphi_i\}$ в виде $\{\varphi_i\} = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$. Эти функции являются линейно независимыми. Из условия (2.2) совпадения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$ следующего вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = f(x_j),\ j = \overline{0, n},$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 1\, x_0\ x_0^2 \ldots x_0^n \\ 1\, x_1\ x_1^2 \ldots x_1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\, x_n\ x_n^2 \ldots x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \qquad (2.5)$$

Определить системы (2.5)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1\ x_0 \ldots x_0^n \\ \ldots\ldots \\ 1\ x_0 \ldots x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_i - x_j),$$

называется определителем Вандермонда и он не равен нулю, если $x_i \neq x_j,\ i, j = \overline{0, n}$. Таким образом, система функции $\{\varphi_i\}$ является системой Чебышева. По теореме Вейерштрасса функция $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ будет полной в классе непрерывных функций на конечном интервале $[a, b]$.

Найдем решение системы (2.5), используя правило Крамера

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = \overline{0, n}, \qquad (2.6)$$

где Δ_i – определитель матрицы системы (2.5), в которой i-ый столбец заменен столбцом свободных членов. Соотношение (2.6) перепишем в виде

$$a_i = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_j)\Delta_{ij}}{\Delta}, \tag{2.7}$$

где Δ_{ij} – алгебраические дополнения элементов i-го столбца в определителе Δ. Подставим (2.7) в выражение для функции $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ и приведем подобные члены относительно $f(x_i)$, $i = \overline{0,\, n}$. Тогда функция $\varphi(x)$ запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x_0)\Phi_0(x) + f(x_1)\Phi_1(x) + \ldots + f(x_n)\Phi_n(x), \tag{2.8}$$

где $\Phi_j(x)$, $j = \overline{0,\, n}$ – многочлены степени *n*. Из условия совпадения значений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах, т.е. $f(x_i) = \varphi(x_i)$, $i = \overline{0,\, n},$ в силу (2.8), получим

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\Phi_j(x)$ – многочлен, корнями которого являются узлы $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ и его можно построить в виде

$$\Phi_j(x) = A_j(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n),$$

где A_j – некоторая константа, которая определяется из условия $\Phi_j(x_j) = 1.$ В результате получим

$$A_j = \frac{1}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}.$$

Тогда функция $\Phi_j(x)$ имеет вид

$$\Phi_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}. \quad (2.9)$$

Подставляя выражение (2.9) в (2.8), получим

$$\varphi(x) = L_n(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}. \quad (2.10)$$

Многочлен вида (2.10) называется *интерполяционным многочленом Лагранжа* (формула (2.10) – *формулой Лагранжа*). Для того, чтобы отличить этот многочлен от других интерполяционных многочленов, его обозначают $L_n(x)$. Обозначим $\omega(x) = (x-x_0)\,(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Тогда формулу Лагранжа (2.10) можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}. \quad (2.11)$$

С вычислительной точки зрения формула Лагранжа не очень удобна, так как если потребуется увеличить степень интерполяционного многочлена, то для этого добавляются к уже имеющимся узлам дополнительные узлы и все вычисления по формуле (2.11) повторяются заново. Формула (2.11) может использоваться и для построения аналитического выражения многочлена Лагранжа.

Пример 2.1. Таблица значений функции имеет вид

x_i	y_i
0	1
1	2
2	4

Требуется найти аналитическое выражение многочлена Лагранжа.

1. Найдем коэффициенты многочлена, решив систему линейных алгебраических уравнений (2.5), которая в нашем случае будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решением этой системы будет следующим: $a_0 = 1$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,5$, а соответствующее аналитическое выражение многочлена Лагранжа имеет вид: $L_2(x) = 1 + 0,5x + 0,5x^2$.

2. Найдем решение поставленной задачи по формуле Лагранжа (2.10). Тогда

$$L_2(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{1\cdot(x-1)(x-2)}{-1\cdot(-2)} + \frac{2\cdot(x-0)(x-2)}{1\cdot(-1)} + \frac{4\cdot(x-0)(x-1)}{2\cdot 1} =$$

$$= 1 + 0,5x + 0,5x^2.$$

2.3. Вычисление многочлена Лагранжа по схеме Эйткена

Применение формулы Лагранжа для вычисления интерполяционного многочлена в точке x неудобно из-за ее громоздкости. Существенно упростить расчет интерполяционного многочлена в конкретной точке можно, используя интерполяционную *схему Эйткена*, которая заключается в следующем.

На первом этапе строится последовательность многочленов первой степени по двум рядом стоящим узлам:

$$L_{0,1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0},$$

$$L_{1,2}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_1},$$

$$\vdots$$

$$L_{n-1,n}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_{n-1} & x_{n-1}-x \\ y_n & x_n-x \end{vmatrix}}{x_n-x_{n-1}}.$$

Очевидно, что все построенные многочлены являются многочленами Лагранжа (здесь $y_i = f(x_i),\ i=\overline{0,n}$). На втором этапе строится последовательность многочленов Лагранжа 2-ой степени, при этом используются многочлены, вычисленные на предыдущем этапе. Расчеты выполняются по формулам:

$$L_{0,1,2}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0-x \\ L_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0},$$

$$L_{1,2,3}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{1\,2}(x) & x_1-x \\ L_{2\,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix}}{x_3-x_1},$$

$$\vdots$$

$$L_{n-2,n-1,n}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{n-2\,n-1}(x) & x_{n-2}-x \\ L_{n-1\,n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}}{x_n-x_{n-2}}.$$

Количество таких многочленов будет на 1 меньше чем на предыдущем этапе. Наконец на n-ом этапе строится многочлен Лагранжа степени n по формуле

$$L_{0,1,\ldots,n}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{01\ldots n-1}(x) & x_0-x \\ L_{12\ldots n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}}{x_n-x_0}.$$

Это и будет значение многочлена Лагранжа степени n в точке x, построенного по узлам $x_0, x_1, ..., x_n$.

Применяя схему Эйткена, можно подключить новые узлы, увеличивая при этом степень интерполяционного многочлена. При этом не требуется полностью повторять все предыдущие вычисления заново.

Расчеты по интерполяционной схеме Эйткена можно представить в виде следующей таблицы

x_i	y_i	$L_{i-1,i}(x)$	$L_{i-2,i-1,i}(x)$	$\cdots$	$L_{0,1,2,...n}(x)$
x_0	y_0				
x_1	y_1	$L_{0,1}(x)$			
x_2	y_2	$L_{1,2}(x)$	$L_{0,1,2}(x)$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
x_0	y_0	$L_{n-1,n}(x)$	$L_{n-2,n-1,n}(x)$	$\cdots$	$L_{0,1,2,...n}(x)$

Пример 2.2. Рассмотрим задачу вычисления многочлена Лагранжа в заданной точке для таблицы 2.1. Расчеты выполним для точки $x = 1,5$. Схема Эйткена дает следующие результаты:

$$L_{0,1}(1,5) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0-1,5 \\ 2 & 1-1,5 \end{vmatrix}}{1-0} = 2,5; \; L_{1,2}(1,5) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-1,5 \\ 4 & 2-1,5 \end{vmatrix}}{2-1} = 3;$$

$$L_2(1,5) = L_{0,1,2}(1,5) = \frac{\begin{vmatrix} 2.5 & 0-1.5 \\ 3 & 2-1.5 \end{vmatrix}}{2-0} = 2,875.$$

Подставив в аналитическое выражение многочлена Лагранжа, полученное в примере 2.1 значение $x = 1,5$, имеем тот же результат:

$$L_2(1,5) = 1 + 0.5 \cdot 1,5 + 0.5 \cdot 1,5^2 = 2,875.$$

2.4. Остаточный член многочлена Лагранжа. Погрешность метода

Если точка $x \in [a,b]$ не совпадает с узлом интерполирования $x_i \in \left[a,b\right]$, то погрешность интерполяционного многочлена (остаточный член)

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

будет не равна нулю. Оценим остаточный член.

Теорема 2.1. Если $f(x)$ непрерывная и $n+1$ раз дифференцируемая функция на интервале $[a, b]$, то существует некоторая точка $\xi \in [a, b]$, такая что *остаточный член формулы Лагранжа* равен:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x). \tag{2.12}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = f(z) - L_n(x) - K\omega(x), \tag{2.13}$$

где K − некоторая, пока неизвестная константа. Учитывая, что $\omega(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ и $f(x_i) = L_n(x_i)$ для $i = \overline{0, n}$, функция $\psi(z)$ имеет $n+1$ корень $x_0, x_1, ..., x_n$. Выберем константу K так, чтобы и точка x, не совпадающая ни с каким узлом x_i, тоже была корнем функции $\psi(z)$. Тогда очевидно, что

$$R_n(x) = K\omega(x), \tag{2.14}$$

функция $\psi(z)$ будет иметь $n+2$ корня $x, x_0, x_1, ..., x_n$. Пусть точка $x \in (x_k, x_{k+1})$, тогда на концах каждого из $n+1$ интервала $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_k, x], [x, x_{k+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ функция $\psi(z)$ равна нулю. Сформулируем теорему Ролля. Если $f(a) = f(b)$, то для непрерывной и дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ найдется не менее одной точки $\bar{x}$, в которой $f'(\bar{x}) = 0$. Применяя эту теорему к каждому из перечисленных выше интервалов, на концах которых значения функции $\psi(z)$ равны, можно утверждать, что внутри каждого интервала имеется хотя бы один корень. А это означает, что функция $\psi'(z)$ на интервале $[a,b]$ имеет не менее $n+1$ корня. Аналогично можно доказать, что $\psi''(z)$ на интервале $[a,b]$ имеет не менее n корней и, наконец, $\psi^{(n+1)}(z)$ имеет не менее одного корня. Обозначим корень уравнения $\psi^{(n+1)}(z)=0$ переменной ξ, тогда дифференцируя (2.13) $n+1$ раз и учитывая, что $\omega^{(n+1)}(z)=(n+1)!$, получим формулу:

$$\psi^{(n+1)}(z)=f^{(n+1)}(z)-0-(n+1)!K,$$

заменяя в которой переменную z на переменную ξ, получим уравнение для определения K:

$$0=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K. \qquad (2.15)$$

Тогда из (2.15), выразив переменную K и подставив ее в выражение (2.14), получается формула для остаточного члена (2.12). Теорема доказана.

Оценивая максимальное значение $|R_n(x)|$, получим формулу для погрешности метода при интерполировании в точке x

$$\Delta_{\text{M}}=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \qquad (2.16)$$

где

$$M_{n+1}=\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|. \qquad (2.17)$$

Максимальная погрешность интерполирования на отрезке $[a,b]$ оценивается значением

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|\omega(x)|.$$

Пример 2.3. Для функции $f(x)=\sin(x)$ по значениям в интерполяционных узлах $x_0=0{,}3$, $x_1=0{,}4$, $x_2=0{,}5$ построен многочлен Лагранжа 2-ой степени. Требуется оценить погрешность при вычислении многочлена в точке $x = 0,32$. Оценим величину $M_3 = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| f^{(3)}(x) \right|$, где интервал интерполирования зададим по крайним узлам: $a = x_0$, $b = x_2$. Вычислив производную, имеем $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$. Видно, что на интервале $[a, b]$ $\left| f^{(3)}(x) \right| = \cos(x)$ убывает, тогда $M_3 = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| f^{(3)}(x) \right| = \cos(0,3) =$ $=0,95534$. Погрешности метода, вычисленная по формуле (2.16) будет следующей:

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{0,95534}{(3)!} \left|(0,34-0,3)(0,34-0,4)(0,34-0,5)\right| = 0,000061.$$

Построенная оценка погрешности (2.16) требует знание аналитического выражения функции, подлежащей интерполированию, однако, на практике $f(x)$ обычно неизвестна, и воспользоваться рассмотренным методом оценки погрешности нельзя. Отметим, что оценка (2.16) имеет важное теоретическое значение и в дальнейшем будет часто использоваться. На практике применяют менее строгие оценки погрешности метода, некоторые из них приведены ниже в разделах 2.7 и 2.15.6.

2.5. Разделенные разности и их свойства

Для функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, построим *разделенные разности* первого порядка

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \; i = \overline{0, n-1}. \quad (2.18)$$

Вычислив разделенные разности 1-го порядка можно определить разделенные разности 2-го порядка:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \; i = \overline{0, n-2}. \quad (2.19)$$

По аналогии можно вычислять разделенные разности и более высокого порядка, например, разделенные разности k-го порядка определяются по формуле:

$$f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, ...x_k) - f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \quad (2.20)$$

при этом индекс i должен изменяться от 0 до $n-k$. Все разделенные разности удобно представить в табличном виде, например, для $n=3$ таблица имеет вид:

Таблица 2.1.

x_i	$f(x_i)$	Разделенные разности 1-го порядка	Разделенные разности 2-го порядка	Разделенные разности 3-го порядка
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$		
x_3	$f(x_3)$			

Основное свойство разделенных разностей связывает разделенные разности с табличными значениями функции с помощью следующей формулы:

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}. \quad (2.21)$$

Доказательство этой формулы может быть выполнено с помощью метода математической индукции. Действительно справедливость формулы (2.21) для разделенных разностей первого порядка очевидна в силу соотношения:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Далее, используя индуктивное предположение (2.21) и формулу (2.20) при $i=0$ и $k=n$, легко доказывается справедливость формулы (2.21) для $f(x_0, x_1, ..., x_{n+1})$.

Перечислим основные следствия, которые вытекают из формулы (2.21).

Следствие 1. Разделенные разности являются симметрическими функциями своих аргументов. Это позволяет переставлять у разделенных разностей их аргументы.

Следствие 2. Разделенные разности обладают свойством аддитивности. То есть разделенная разность от суммы двух функций равна сумме разделенных разностей слагаемых, вычисленных в одних и тех же узлах.

Следствие 3. Постоянный множитель можно выносить за знак операции разделенной разности.

Следствия 2 и 3 означают, что операция взятия разделенной разности является линейной. Отметим также, что вычисление разделенной разности от многочлена понижает его степень на единицу. Ниже в разделе 2.7 мы получим свойство связи разделенных разностей с производными.

2.6. Вычисление многочлена Лагранжа по формуле Ньютона

Используя понятие разделенных разностей, получим новую формулу для вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа. Для этого представим многочлен Лагранжа в виде

$$L_n(x) = L_0(x) - [L_1(x) - L_0(x)] + \ldots + [L_k(x) - L_{k-1}(x)] + \\ + \cdots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]. \qquad (2.22)$$

Очевидно, что разность $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ является многочленом степени k, корнями которого являются узлы $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. С учетом этого можно записать

$$L_k(x)-L_{k-1}(x)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}).$$

Константу A найдем, полагая $x=x_k$. В результате получим

$$f(x_k)-L_{k-1}(x_k)=A(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1}),$$

откуда

$$A=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}-$$

$$-\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} f(x_j)\dfrac{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{j-1})(x_k-x_{j+1})\cdots(x_k-x_{k-1})}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{k-1})}}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}=$$

$$=f(x_0,x_1,\ldots,x_k). \qquad (2.23)$$

Последнее соотношение получено в силу формулы (2.21). Используя (2.23), соотношение (2.22) запишем в виде

$$\begin{aligned}L_n(x)=\ & f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+\\ &+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+\cdots+\\ &+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,\ldots,x_n). \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа в виде (2.24) носит название интерполяционного *многочлена Ньютона* (*формулы Ньютона*) для неравноотстоящих узлов. В отличие от формулы Лагранжа формула Ньютона более удобна для вычислений, так как добавление одного или нескольких узлов не требует повторения всех вычислений.

Пример 2.4. Построим интерполяционный многочлен Ньютона для таблицы функции, приведенной в примере 2.1. Построим таблицу разделенных разностей

Таблица 2.2.

x_i	$f(x_i)$	Разделенные разности 1-го порядка	Разделенные разности 2-го порядка
0	1	$f(x_0,x_1)=1$	$f(x_0,x_1,x_2)=2/4=0,5$
1	2	$f(x_1,x_2)=2$	
2	4		

Тогда выполнив расчеты по формуле (2.24), получим:

$$L_2(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)=1+(x-0)\cdot 1+$$
$$+(x-0)(x-1)\cdot 0,5=1+0,5x+0,5x^2.$$

2.7. Остаточный член формулы Ньютона

В силу того, что формула Лагранжа и формула Ньютона являются различными аналитическими представлениями многочлена Лагранжа, то в качестве остаточного члена формулы Ньютона можно взять остаточный член в виде (2.12). В настоящем разделе мы получим новую форму остаточного члена многочлена Лагранжа. Для этого рассмотрим формулу для разделенной разности $n+1$ порядка, построенной по узлам $x, x_0, x_1, ..., x_n$, где x – точка, в которой вычисляется многочлен Лагранжа. Эта формула, в силу (2.21), имеет вид:

$$f(x,x_0,x_1,...,x_n)=\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}+$$
$$+\frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}+\cdots+\frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}. \quad (2.25)$$

Выразив из (2.25) $f(x)$ получим

$$f(x)=L_n(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f(x,x_0,x_1,...,x_n)=$$
$$=L_n(x)+\omega(x)f(x,x_0,x_1,...,x_n), \quad (2.26)$$

где $L_n(x)$ – формула Лагранжа. Тогда из (2.26) учитывая, что остаточный член $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ получим новую формулу для *остаточного члена формулы Ньютона*:

$$R_n(x) = \omega(x) f(x, x_0, x_1, ..., x_n)\,. \qquad (2.27)$$

Формулу связи разделенной разности с производной получим, приравнивая правые части (2.27) и (2.12), при этом переобозначив точку x, как x_{n+1} и учитывая свойство симметричности для разделенных разностей, имеем:

$$f(x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,. \qquad (2.28)$$

В тех случаях, когда $f^{(n+1)}(x)$ плавно изменяющаяся на интервале $[a, b]$ функция, учитывая свойство разделённой разности (2.28), можно погрешность метода (2.16) оценить приближенно

$$\Delta_{\text{М}} \approx | f(x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}) |\ | \omega(x) |. \qquad (2.29)$$

Заметим, что для того чтобы вычислить разделенную разность $n+1$ порядка, входящую в формулу (2.29), необходимо задать дополнительный узел x_{n+1} и иметь значение функции в этом узле.

Для оценки погрешности метода по формуле (2.29), в отличие от (2.12), уже не требуется знания функции $f(x)$, подлежащей интерполированию, здесь достаточно иметь только табличные значения этой функции.

2.8. Многочлены Чебышева и их свойства

Многочлены Чебышева степени n определяются по формуле

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))\,. \qquad (2.30)$$

Они определены на отрезке $[-1,1]$. Применяя формулы тригонометрии, вычислим многочлены Чебышева. Для этого введем обозначение $\theta=\cos(x)$, тогда имеем:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=\cos(\theta)=x,$$

$$T_2(x)=\cos(2\theta)=2\cos(\theta)^2-1=2x^2-1,$$

$$T_3(x)=\cos(3\theta)=4\cos(\theta)^3-3\cos(\theta)=4x^3-3x,\ldots,\text{ и т.д.}$$

Используя тригонометрическое тождество:

$$\cos((n+1)\theta)=2\cos(\theta)\cos(n\theta)-\cos((n-1)\theta),$$

получим рекуррентное соотношение для вычисления многочленов Чебышева

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), \tag{2.31}$$

со следующими начальными условиями

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x.$$

Перечислим свойства многочленов Чебышева:

1) коэффициент при старшей степени $T_n(x)$ равен 2^{n-1} (свойство следует из соотношения (2.31));

2) корни многочленов Чебышева вычисляются по формуле

$$x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\ k=\overline{0,\ n-1}, \tag{2.32}$$

(определяются из уравнения $\cos(n\arccos(x))=0$);

3) многочлены Чебышева имеют $n+1$ точку экстремума

$$x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k=\overline{0,\ n}, \tag{2.33}$$

(определяются из уравнения $\cos(n\arccos(x))=\pm1$);

4) $T_n(-x)=(-1)^nT(x)$;

5) многочлены Чебышева ортогональны с весом $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} p(x)T_n(x)T_m(x)dx = \begin{cases} \pi, \text{ если } \quad m=n=0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{если } \quad m=n\neq 0 \\ 0, \text{ если } \quad m\neq n \end{cases}; \qquad (2.34)$$

6) многочлены Чебышева являются наименее отклоняющимися от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Обоснование 6-го свойства следует из теоремы.

Теорема 2.2. Для любого многочлена $P_n(x)$ степени n с единичным коэффициентом при старшей степени справедливо неравенство

$$\sup_{x\in[-1,\,1]} |P_n(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Доказательство. Допустим противное $\sup\limits_{x\in[-1,\,1]} |P_n(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Тогда разность $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - P_n(x)$ является многочленом степени n-1. В $n+1$ точках многочлен $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ принимает попеременно значения $\pm\dfrac{1}{2^{n-1}}$, а так как по предположению $|P_n(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, то разность попеременно принимает, то положительное, то отрицательное значение в $n+1$ точке. Таким образом, получается, что разность $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - P_n(x)$ пересекает на интервале $[-1,1]$ ось абсцисс n раз, то есть имеет n корней. Но это противоречие, так как разность является многочленом степени $n-1$ и должна иметь $n-1$ корень. Теорема доказана.

Итак, мы доказали, что из всех многочленов степени n с единичным коэффициентом при старшей степени, точная верхняя грань на интервале $[-1,1]$ будет наименьшей у многочлена

Чебышева $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$. Поэтому, как указывалось в 6-ом свойстве, многочлены Чебышева называются многочленами, наименее отклоняющими от нуля.

Графики многочленов Чебышева 1, 2, 3 и 10 порядка приведены на рис.2.1.

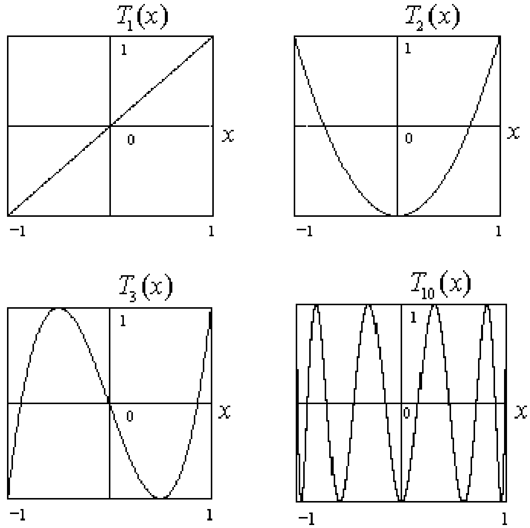

Рис. 2.1 – Графики многочленов Чебышева

Как видно из графиков корни многочлена Чебышева располагаются на интервале $[-1,1]$ чаще вблизи концов интервала.

2.9. Минимизация погрешности многочлена Лагранжа

Рассмотренные выше способы вычисления многочлена Лагранжа – формула Лагранжа, схема Эйткена и формула Ньютона, дают одинаковую погрешность метода, которую можно оценить, зная выражение для остаточного члена формулы Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$, подлежащая интерполированию, на интервале $[a, b]$ имеет непрерывные производные до $n+1$ порядка включительно. Тогда, как показано в п. 2.4, остаточный член многочлена Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x), \tag{2.35}$$

где ξ – некоторое число, принадлежащее интервалу $[a, b]$. Анализируя остаточный член (2.35) видно, что при неудачном расположении узлов интерполирования x_i значение

$$\max_{x\in[a,b]} |R_n(x)|$$

может оказаться очень большим. Поэтому возникает задача выбора узлов интерполирования x_i (при заданном n) таких, чтобы величина

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)|$$

была минимальной или иначе многочлен $\omega(x)$ был бы наименее отклоняющимся от нуля на отрезке $[a, b]$. Как отмечалось в п. 2.8, наименее отклоняющимися от нуля являются многочлены Чебышева. Многочлен $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ имеет единичный коэффициент при старшей степени и для этого многочлена справедливо

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда вытекает, что если требуется минимизировать погрешность метода при интерполировании на интервале $[-1, 1]$ с помощью многочлена Лагранжа, то в силу (2.35), необходимо выбрать многочлен $\omega(x)$ так, чтобы $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |\omega(x)|$ была наименьшей. А это можно достигнуть, если в качестве $\omega(x)$ взять многочлен Чебышева $\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$, который является наименее отклоняющимся от нуля. При этом в качестве узлов интерполирования необходимо взять корни многочлена Чебышева степени $n+1$

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right),\ m=\overline{0,n}. \tag{2.36}$$

Погрешность метода при интерполировании на интервале $[-1,1]$ будет минимальной и определится по формуле:

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}. \tag{2.37}$$

В случае интерполирования на произвольном интервале $[a,b]$ вводится линейное преобразование

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t+b+a], \tag{2.38}$$

где $t\in[-1,1]$. Тогда узлы интерполирования на $[a,\ b]$ будут следующие:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right)+b+a\right],\ m=\overline{0,n}. \tag{2.39}$$

Для оценки погрешности метода при интерполировании на интервале $[a,b]$, необходимо найти верхнюю грань $|\omega(x)|$. Оценим эту величину, учитывая свойства многочленов Чебышева:

$$|\omega(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\times$$

$$\times\left|\left(t-\cos\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)\right)\left(t-\cos\left(\frac{3\pi}{2n+2}\right)\right)\cdots\left(t-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n+2}\right)\right)\right| =$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\frac{|T_{n+1}(x)|}{2^n} \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \tag{2.40}$$

Тогда в силу (2.40), погрешность метода при интерполировании на интервале $[a,b]$ определится по формуле

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \qquad (2.41)$$

2.10. Многочлены наилучшего равномерного приближения

Введем абсолютное отклонение Δ аппроксимирующего многочлена $\varphi(x)$ от аппроксимируемой на интервале $[a,b]$ непрерывной функции $f(x)$

$$\Delta = \max_{x\in[a,b]}\left| f(x) - \varphi(x)\right|. \qquad (2.42)$$

Если многочлен $\varphi(x)$ выбран отрезке $[a,b]$ так, что отклонение Δ минимально, то $\varphi(x)$ называется многочленом *наилучшего равномерного приближения*. Точки, в которых реализуется максимальное отклонение многочлена $\varphi(x)$ от $f(x)$ называются *точками чебышевского альтернанса*.

Отметим, что существование и единственность многочлена наилучшего равномерного приближения на ограниченном отрезке $[a,b]$ может быть строго доказана. Однако, ни общий вид многочленов наилучшего равномерного приближения, ни способы их построения, неизвестны. Имеются лишь методики построения многочленов наилучшего равномерного приближения для достаточно узкого класса функций и некоторые способы построения многочленов близких к многочленам наилучшего равномерного приближения.

Рассмотрим простой пример построения многочлена наилучшего равномерного приближения $\varphi(x)$. Пусть для непрерывной функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ требуется построить многочлен нулевой степени $\varphi(x) = P_0(x) = a_0$. Для того чтобы найти значение a_0 воспользуемся свойством непрерывной на ограниченном замкнутом интервале функции, согласно которому на этом интервале найдутся по крайней мере две точки, в которых функция принимает максимальное и минимальное значение. Введем обозначения:

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \; m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Тогда очевидно, что

$$\varphi(x) = a_0 = \frac{M + m}{2},$$

при этом абсолютное отклонение определится по формуле

$$\Delta = \frac{M - m}{2}.$$

Пример 2.5. Пусть для непрерывной функции $f(x) = x^{n+1}$ на интервале $[a, b]$ требуется построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени n $\varphi(x) = P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. В силу определения наилучшего равномерного приближения многочлен $x^{n+1} - P_n(x)$ должен быть наименее отклоняющимся от нуля на интервале $[-1, 1]$. Но такой многочлен степени $n+1$ нам известен – это многочлен Чебышева $\frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$.

Тогда из равенства

$$x^{n+1} - P_n(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$$

легко определить многочлен $P_n(x)$ степени n:

$$P_n(x) = x^{n+1} - \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}.$$

В частном случае при $n = 4$ имеем:

$$P_4(x) = x^5 - \frac{16x^5 - 20x^3 + 5x}{2^4} = 1.25x^3 - 0.313x.$$

Таким образом получаем, что наилучшим равномерным приближением для x^5 на интервале $[1, -1]$ является многочлен третьей степени. На рис 2.2. приведены графики x^5 – сплошная линия и график наилучшего равномерного приближения $\varphi(x)$ – пунктирная линия.

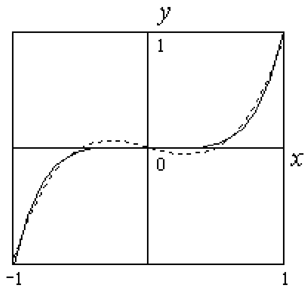

Рис. 2.2 – Графики функций

Сравним точность построенного многочлена наилучшего равномерного приближения $\varphi(x) = 1,25x^3 - 0,313x$ с многочленом Лагранжа 3-ей степени, построенного по чебышевским узлам (2.36) (см. п. 2.9). Для нашего случая этот многочлен будет иметь вид:

$$L_3(x) = x^3 - 0,125x\,.$$

На рис 2.3. приведен график ошибок аппроксимации

$$\varepsilon = x^5 - \varphi(x)$$

для многочлена наилучшего равномерного приближения $\varphi(x)$ (сплошная линия) и график ошибки аппроксимации многочленом Лагранжа

$$\varepsilon = x^5 - L_3(x)$$

(пунктирная линия). Как видно из графиков точность аппроксимации на интервале $[-1, 1]$ с использованием многочлена наилучшего равномерного приближения выше и величина максимальной ошибки (абсолютное отклонение) $\Delta = \dfrac{1}{16} = 0,0625$ в 2 раза меньше чем при аппроксимации многочленом Лагранжа (максимальная ошибка достигается на концах интервала и равна 0,125, см. рис. 2.3).

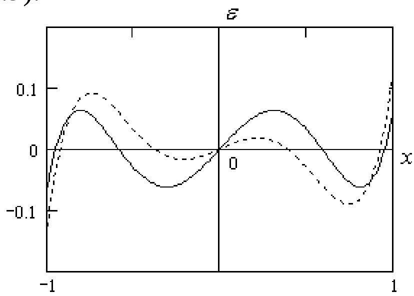

Рис. 2.3 – Графики ошибок аппроксимации

2.11. Экономизация степенных рядов

В некоторых задачах достаточно просто получить аппроксимацию функции с помощью ряда Тейлора вида:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i ,$$

сходящегося при $x \in [-1, 1]$. Тогда может быть применен следующий метод построения аппроксимирующей функции:

1) подбирается значение n, такое, чтобы многочлен

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i ,$$

аппроксимировал функцию $f(x)$ с погрешностью, не превышающую величину ε;

2) степень многочлена $P_n(x)$ понижается на единицу посредством замены x^n на наилучшее равномерное приближение $\varphi(x) = x^n - \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ степени $n-1$.

Выполнив эти два этапа, получим аппроксимирующий многочлен степени $n-1$:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n \varphi(x).$$

Погрешность аппроксимации функции $f(x)$ определится на интервале $[-1, 1]$ оценкой

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| f(x) - P_{n-1}(x) \right| \le \varepsilon + \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

Такой подход позволяет осуществить *экономизацию степенного ряда*, не снижая значительно точность аппроксимации. Если полученная оценка позволяет дальнейшую экономизацию степенного ряда, можно попытаться понизить степень аппроксимирующего многочлена еще на единицу.

Экономизацию степенного ряда можно осуществлять также с помощью замены аппроксимирующего многочлена $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ эквивалентным разложением по многочленам Чебышева $\sum_{i=0}^{n} d_i T_i(x)$. Для этого можно воспользоваться выражениями степеней x через многочлены Чебышева:

$$x^0 = 1 = T_0(x),\ x = T_1(x),\ x^2 = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x)),$$

$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x)),\ x^4 = \frac{1}{8}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)),$$

$$x^5 = \frac{1}{16}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)) \text{ и т.д.}$$

Отметим, для достижения одной и той же точности в отрезке разложения по многочленам Чебышева можно брать, как правило, меньшее число членов, чем в степенной аппроксимации.

2.12. Интерполирование с кратными узлами

Пусть на интервале $[a,b]$ располагаются s узлов интерполирования $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и пусть в этих узлах заданы не только значения функции $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{1,s}$, но и значения некоторых ее производных $y_k^{(j)} = f^{(j)}(x_k)$, $j = \overline{0,\ \alpha_k - 1}$. Такие узлы называются кратными узлами (α_k – кратность узла x_k, если $j = 0$ α_k при этом равно 1, то такой узел называется однократным). Будем предполагать, что сумма кратностей узлов $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k$ равна $n+1$. Аппроксимирующий многочлен $P_n(x)$ степени n, построенный на основе выполнения следующих условий

$$P_n^{(j)}(x_k) = y_k^{(j)},\ k = \overline{1,s},\ j = \overline{0,\ \alpha_k - 1}, \tag{2.43}$$

называется *интерполяционным многочленом Эрмита*. По определению считается, что $P_n^{(0)}(x_k) = P_n(x_k)$ и $y_k^{(0)} = y_k$.

Если задать многочлен Эрмита в виде

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \tag{2.44}$$

то неизвестные коэффициенты a_i $(i = \overline{0,n})$ можно определить из системы линейных уравнений:

$$P_n(x_1) = y_1,\ P_n'(x_1) = y_1', \ldots,\ P_n^{\alpha_1 - 1}(x) = y_1^{\alpha_1 - 1},$$

$$P_n(x_2) = y_2,\ P_n'(x_2) = y_2', \ldots,\ P_n^{\alpha_2 - 1}(x) = y_1^{\alpha_2 - 1},$$

$$\cdots$$

$$P_n(x_s) = y_s,\ P_n'(x_s) = y_s', \ldots,\ P_n^{\alpha_s - 1}(x) = y_1^{\alpha_s - 1}. \tag{2.45}$$

Система уравнений (2.45) состоит из $n+1$ уравнения и содержит $n+1$ неизвестный параметр.

Отметим, что можно доказать единственность и существование интерполяционного многочлена Эрмита.

Для определения остаточного члена многочлена Эрмита можно воспользоваться теоремой.

Теорема 2.3. Если $f(x)$ непрерывная и $n+1$ раз кратно дифференцируемая функция на интервале $[a,b]$, то существует некоторая точка $\xi \in [a, b]$, такая что остаточный член многочлена Эрмита равен:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} A_n(x), \qquad (2.46)$$

где $A_n(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}$, $\sum_{k=1}^{s}\alpha_k = n+1$.

Доказательство этой теоремы может быть выполнено по аналогии с доказательством теоремы 2.1.

2.13. Сплайн-функции

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена некоторая достаточно гладкая функция $y = f(x)$, которая задана таблично $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Узлы разбиения x_i делят отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … ,$[x_{n-1}, x_n]$.

Сплайном называется составная функция $P(x)$, которая вместе с производными нескольких порядков непрерывна на отрезке $[a,b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в отдельности является функцией:

$$P_i(x) = F(i, x_0, ..., x_n, y_0, ...y_n),\ i = \overline{1,n}. \qquad (2.47)$$

В частном случае, функции $P_i(x)$ могут быть алгебраическими многочленами:

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k^{(i)} (x - x_{i-1})^k, \quad i = \overline{0,n}, \tag{2.48}$$

где $\alpha_k^{(i)}$ – коэффициенты, определяемые для каждого частичного отрезка.

Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочлена называется *степенью сплайна*, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на $[a,b]$ производной – *дефектом сплайна*.

Среди существующих сплайн-функций наиболее широкое распространение получили сплайны 1-го порядка (линейные), 2-го порядка (параболические), 3-го порядка (кубические) и эрмитовы сплайны.

2.13.1. Сплайны 1-го порядка

В этом случае составная функция (сплайн) $P(x)$ состоит из линейных многочленов вида:

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}), \; x \in [x_{i-1}, x_i], \; i = \overline{1,n}. \tag{2.49}$$

Параметры сплайна a_i, b_i, $i = \overline{1,n}$ определятся из условия непрерывности $P(x)$ на $[a,b]$ и требования совпадения значений сплайна с функцией $f(x)$ в узловых точках:

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i), \; i = \overline{0,n}, \tag{2.50}$$

$$P_i(x_i) = y_i, \; i = \overline{0,n}. \tag{2.51}$$

Обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда для каждого из многочленов можно записать

$$P_i(x_i) = a_i + b_i h_i = y_i,$$

$$P_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, \; i = \overline{1,n},$$

и для определения коэффициентов a_i, b_i получим уравнения:

$$a_i = y_{i-1},\ i = \overline{1,n}, \tag{2.52}$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i},\ i = \overline{1,n}. \tag{2.53}$$

Пример 2.6. Исходные данные приведены в таблице

x_i	1	2,5	3,5	5,5	6
y_i	0,9108	0,7237	-0,2004	-0,5184	-0,0848

Линейный сплайн строится в виде (2.49). По формулам (2.52) и (2.53) определяем коэффициенты линейных многочленов:

i	1	2	3	4
a_i	0.9108	0.7237	-0.2004	-0.5184
b_i	-0.1247	-0.9241	-0.159	0.8671

На рис. 2.4 приведены исходные данные в виде точек, линейный сплайн (кусочно-линейная аппроксимация), а также для сравнения график исходной функции $f(x) = \sin(x) + 0{,}1 \cdot \log(1 + x)$.

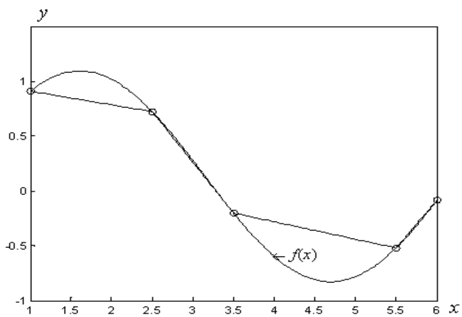

Рис. 2.4 – Интерполяция с помощью сплайна 1-го порядка

2.13.2. Сплайны 2-го порядка

Сплайн 2-го порядка $P(x)$ состоит из парабол. Многочлены $P_i(x)$ в этом случае имеют вид:

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2,$$
$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.54}$$

Для определения коэффициентов сплайна дополнительно к условиям (2.50), (2.51) потребуем непрерывности первой производной сплайна:

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i), \; i = \overline{1, n-1}. \tag{2.55}$$

Обозначив $h_i = x_i - x_{i-1}, \; i = \overline{1, n}$, и, учитывая, что

$$P_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}), \tag{2.56}$$

получим:

$$a_i = y_{i-1}, \tag{2.57}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = y_i, \tag{2.58}$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i. \tag{2.59}$$

Коэффициенты $a_i, \; i = \overline{1, n}$ определятся согласно (2.57). Перепишем (2.58) в виде:

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - h_i c_i, \; i = \overline{1, n}. \tag{2.60}$$

Запишем выражения для b_i и b_{i+1} в виде (2.60) и подставим их в (2.59). В результате получим

$$c_i h_i + c_{i+1} h_{i+1} = g_i, \; i = \overline{1, n-1}, \tag{2.61}$$

где

$$g_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{\left(y_i - y_{i-1}\right)}{h_i}, \; i = \overline{1, n-1}.$$

Уравнения (2.57), (2.60) и (2.61) образуют систему из $3n - 1$ уравнений для определения $3n$ коэффициентов сплайна. Недостающее уравнение получается из дополнительного условия, которое накладывается на значение производной сплайна в точке $x_n = b$:

$$P'(x_n) = 0. \tag{2.62}$$

Учитывая (2.56) из формулы (2.62) получим:

$$b_n + 2c_n h_n = 0. \tag{2.63}$$

Подставим в (2.63) выражение для b_n из (2.60). Тогда формулу (2.63) можно переписать в виде:

$$c_n h_n = g_n, \tag{2.64}$$

где

$$g_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{h_n}.$$

Тогда

$$c_n = \frac{g_n}{h_n} \tag{2.65}$$

и

$$c_i = \frac{g_i - c_{i+1} h_{i+1}}{h_i}, \; i = \overline{n-1, 1}. \tag{2.66}$$

Параметры параболического сплайна вычисляются в следующем порядке: сначала в обратном порядке вычисляются коэффициенты c_i, $i = \overline{n, 1}$ по (2.65), (2.66), затем b_i, $i = \overline{1, n}$ по (2.60) и a_i, $i = \overline{1, n}$, по (2.57).

Сплайн 2-го порядка может привести к численно неустойчивому процессу сплайн-интерполяции, что в свою очередь может привести к низкому качеству аппроксимации. Отметим, что ниже рассматриваются сплайны 3-го порядка, которые этим недостатком не обладают.

Пример 2.7. Для исходных данных, приведенных в примере 2.6, построим параболический сплайн. Сплайн 2-го порядка строится в виде (2.54). Коэффициенты параболических многочленов определяем следующим образом: сначала по (2.65) находим коэффициент c_4, затем по (2.66) вычисляем c_3 – c_1. Далее, пользуясь формулой (2.60) определяем коэффициенты

$b_1 - b_4$, после чего высчитываем по (2.57) a_i. В результате получаем следующие значения коэффициентов:

i	1	2	3	4
a_i	0,9108	0,7237	-0,2004	-0,5184
b_i	-0,4533	0,2039	-2,0521	1,7341
c_i	0,219	-1,128	0,9466	-1,7341

На рис. 2.5 приведены исходные данные в виде точек, и график параболического сплайна, а также для сравнения график исходной функции $f(x)$.

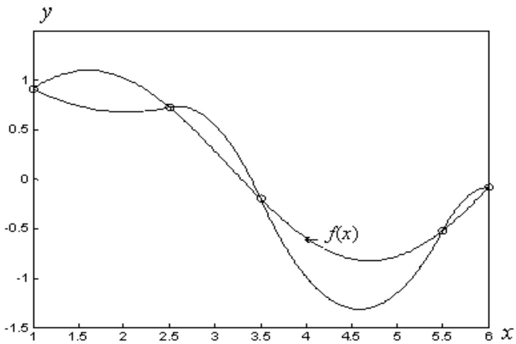

Рис. 2.5 – Интерполяция с помощью сплайна 2-го порядка

2.13.3. Кубический сплайн

Сплайн 3-го порядка (кубический сплайн) $P(x)$ состоит из многочленов вида:

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (2.67)$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}$$

Для определения параметров кубического сплайна дефекта 1 потребуем дополнительно к (2.50), (2.51), (2.55) выполнение условия непрерывности второй производной:

$$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i),\ i = \overline{1, n-1}. \qquad (2.68)$$

Первая и вторая производные отдельных многочленов сплайна соответственно равны:

$$P_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \qquad (2.69)$$

$$P_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \qquad (2.70)$$

Тогда, обозначив $h_i = x_i - x_{i-1}$, получим:

$$P_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (2.71)$$

$$P_i(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i,\ i = \overline{1, n}, \qquad (2.72)$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2,\ i = \overline{1, n-1}, \qquad (2.73)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i,\ i = \overline{1, n-1}. \qquad (2.74)$$

Последние два уравнения получены из (2.55) и (2.68). Уравнения (2.71)-(2.74) составляют систему из $4n - 2$ уравнений для определения $4n$ параметров сплайна. Для получения двух недостающих уравнений потребуем выполнения дополнительных условий в точках a и b:

$$P''(x_0) = 0, \qquad (2.75)$$

$$P''(x_n) = 0. \qquad (2.76)$$

Тогда из (2.75) следует

$$c_1 = 0, \qquad (2.77)$$

а из (2.75) получим:

$$c_{n+1} = c_n + 3d_n h_n = 0. \qquad (2.78)$$

Из уравнения (2.74) выразим d_i

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i},\ i = \overline{1, n}. \qquad (2.79)$$

Подставим (2.79) в (2.73), учитывая (2.71), получим

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(c_{i+1} + 2c_i)}{3},\ i = \overline{1, n}. \qquad (2.80)$$

Выражения для b_i, b_{i+1} и d_i подставим в (2.73), В результате получим:

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = g_{i+1}, \qquad (2.81)$$

где

$$g_{i+1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right),\ i = \overline{1, n-1}. \qquad (2.82)$$

Уравнения (2.81) образуют систему из $n-1$ уравнения относительно неизвестных $c_2, c_3, \dots, c_n$. Эта система в векторно-матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ \cdots \\ g_n \end{pmatrix}. \qquad (2.83)$$

В системе линейных алгебраических уравнений (2.83) матрица системы является трехдиагональной. Решение таких систем осуществляется *методом прогонки*, согласно которому решение представляют в виде:

$$c_{i+1} = \xi_{i+1}c_{i+2} + \eta_{i+1},\ i = \overline{n-1, 1}, \qquad (2.84)$$

где ξ_{i+1}, η_{i+1} – прогоночные коэффициенты. Чтобы получить выражения для этих коэффициентов, запишем формулы для определения c_{i+1} и c_i согласно (2.84) и, подставив их в (2.81), сравним полученное выражение с (2.84). При сравнении получим, что выражения для определения прогоночных коэффициентов ξ_{i+1}, η_{i+1} будут иметь вид:

$$\xi_{i+1} = \frac{-h_{i+1}}{h_i\xi_i + 2(h_i + h_{i+1})},$$
$$\eta_{i+1} = \frac{g_{i+1} - h_i\eta_i}{h_i\xi_i + 2(h_i + h_{i+1})}, \qquad i = \overline{1, n-1}. \qquad (2.85)$$

При этом, учитывая (2.77), полагают $\eta_1 = 0,\ \xi_1 = 0$.

Таким образом, порядок вычисления коэффициентов кубического сплайна следующий: сначала определяют коэффициенты c_i , $i=\overline{2,n}$, для чего необходимо, осуществляя прямой ход метода прогонки по формулам (2.85), найти значения η_{i+1}, ξ_{i+1}, $i=\overline{1,n-1}$, при $\eta_1=0$, $\xi_1=0$, а затем, выполнив обратную прогонку, считая $c_{n+1}=0$, по формуле (2.84), вычисляются $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2$. При этом, согласно (2.77), $c_1=0$. Остальные коэффициенты сплайна определяются по следующим формулам: a_i – (2.71), d_i – (2.79), b_i – (2.80), $i=\overline{1,n}$. Отметим, что преобладание в трехдиагональной матрице системы (2.83) диагональных элементов обеспечивает корректность и устойчивость метода прогонки.

Пример. 2.8. Для исходных данных, приведенных в примере 2.6, построим кубический сплайн. Сплайн строится в виде (2.67). Для интерполяции кубическим сплайном сначала согласно (2.85) вычисляются коэффициенты ξ_i и η_i , $i=\overline{1,\ 4}$, причем $\xi_1=\eta_1=0$, после чего обратным ходом по (2.84) рассчитываются коэффициенты c_2-c_4. Остальные неизвестные без особого труда можно вычислить по формулам (2.71), (2.79)-(2.80). Занесем полученные значения коэффициентов в таблицу и отобразим полученный кубический сплайн на одном графике с исходной функцией:

i	1	2	3	4
a_i	0,9108	0,7237	-0,2004	-0,5184
b_i	0,146	-0,6661	-0,8988	0,7030
c_i	0	-0,5414	0,3088	0,4921
d_i	-0,1203	0,2834	0,0306	-0,3281

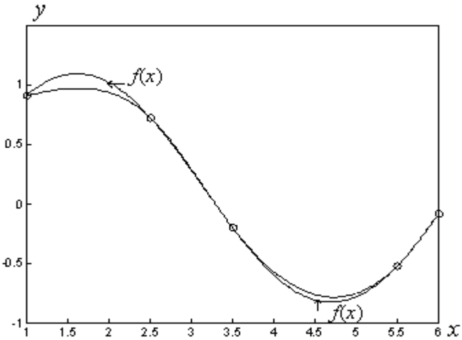

Рис. 2.6 – Интерполяция кубическим сплайном

2.13.4. Эрмитовы сплайны

Эрмитовы сплайны применяют в случае, когда в узловых точках кроме значений функции заданы и значения ее производных. Если число узлов велико, то применение многочленов Эрмита (см. п. 2.12) приводит к тому, что степень многочлена будет высокой. Применение в случае кратных узлов обычных сплайнов может не обеспечить согласование производных сплайна в узлах с заданными производными функции.

Рассмотрим задачу построения *кубического эрмитового сплайна*. В узловых точках x_j ($j=\overline{0,\ n}$) задаются значения:

$$f(x_j)=y_j\,,\ f'(x_j)=y'_j\,. \qquad (2.86)$$

На интервале $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$ определим многочлен $P_i(x)$ по аналогии с (2.67):

$$P_i(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3\,, \qquad (2.87)$$

где $P_i(x)$ – многочлен Эрмита, построенный по узлам x_{i-1} и x_i (каждый узел имеет кратность равную 2). Уравнения для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i найдем из интерполяционных условий:

$$P_i(x_{i-1})=y_{i-1}\,,\ P_i(x_i)=y_i\,,$$

$$P_i'(x_{i-1}) = y_{i-1}', \; P_i'(x_i) = y_i'. \qquad (2.88)$$

Тогда, учитывая что $h_i = x_i - x_{i-1}$, получим уравнения

$$a_i = y_{i-1}, \qquad (2.89)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \qquad (2.90)$$

$$b_i = y_{i-1}', \qquad (2.91)$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = y_i'. \qquad (2.92)$$

Подставив выражения a_i и b_i из (2.89) и (2.91) в (2.90) и (2.92), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_i и d_i:

$$c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} - y_{i-1}' h_i,$$

$$2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = y_i' - y_{i-1}'. \qquad (2.93)$$

Решение системы (2.93) имеет вид

$$c_i = \frac{1}{h_i^2}(3y_i - 3y_{i-1} - 2h_i y_{i-1}' - h_i y_i'), \qquad (2.94)$$

$$d_i = \frac{1}{h_i^3}(2y_{i-1} - 2y_i + h_i y_{i-1}' + h_i y_i'). \qquad (2.95)$$

Параметры эрмитова сплайна 3-го порядка вычисляются по формулам (2.89), (2.91), (2.94) и (2.95). Так как многочлен $P_i(x)$ для интервала $[x_{i-1}, x_i]$ строится независимо от остальных многочленов $P_j(x)$ ($j \neq i$), эрмитовы сплайны называются *локальными*.

Пример 2.9. Пусть исходные данные приведены в таблице

x_i	1	2,5	3,5	5,5	6
y_i	0,9108	0,7237	-0,2004	-0,5184	-0,0848
y_i'	0,5903	-0,7726	-0,9142	0,7241	0,9745

Выполнив расчеты параметров эрмитова сплайна по формулам (2.89), (2.91), (2.94) и (2.95) получим результаты, приведенные в следующей таблице:

i	1	2	3	4
a_i	0,9108	0,7237	-0,2004	-0,5184
b_i	0,5903	-0,7726	-0,9142	0,7241
c_i	-0,5215	-0,3129	0,3136	0,3578
d_i	0,0298	0,1614	0,0320	-0,1432

На рис. 2.7 приведены график эрмитова сплайна, а также для сравнения график исходной функции $f(x)$.

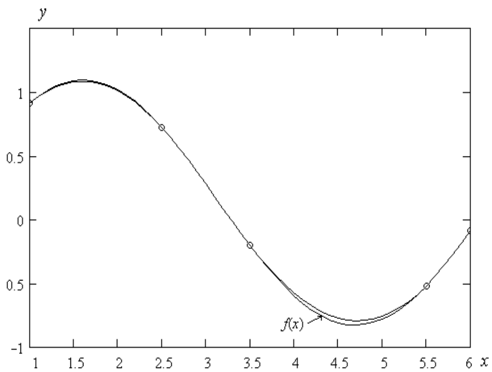

Рис. 2.7 – Интерполяция эрмитовым сплайном

Эрмитовы сплайны отличаются простотой вычислений и дают неплохие результаты аппроксимации. Если имеется необходимость, можно строить эрмитовы сплайны и других порядков, например, 2-го, 4-го и др.

2.14. Метод наименьших квадратов

В тех случаях, когда набор экпериментальных данных получен со значительными погрешностями, не имеет смысла использовать интерполирующие функции, такие как многочлен Лагранжа или сплайны, описанные выше. В этом случае лучшие результаты аппроксимации можно добиться, используя *метод наименьших квадратов* (МНК).

Пусть x_j – узлы исходной таблицы данных, а $f(x_j)$, $j=\overline{0,n}$ – значения экспериментальных данных или некоторой неизвестной функции в узловых точках. Введем непрерывную аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$. В узлах x_j функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ будут уже отличаться на величину ε_j

$$\varepsilon_j = \varphi(x_j) - f(x_j), \quad j=\overline{0,n}. \qquad (2.96)$$

Тогда сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ в узловых точках x_j, $j=\overline{0,n}$, запишется в виде:

$$S = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j^2 = \sum_{j=0}^{n} (\varphi(x_j) - f(x_j))^2. \qquad (2.97)$$

Метод построения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ из условия минимизации суммы квадратов отклонений S называется методом наименьших квадратов.

Аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ зададим в виде:

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x), \qquad (2.98)$$

где $\varphi_i(x)$, $i=\overline{0,m}$, $m \le n$ – линейно независимые *базисные функции*, $a_0,\ldots,a_m$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из условия минимума S, т. е. из условий равенства нулю частных производных S по $a_0,\ldots,a_m$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{n} (c_0\varphi_0(x_j) + \ldots + c_m\varphi_m(x_j) - f(x_j))\varphi_k(x_j) = 0, \qquad (2.99)$$

$$k=\overline{0,m}.$$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений вида $G \cdot a = b$ для определения коэффициентов a_k, $k=\overline{0,m}$. Эта система называется системой *нормальных уравнений*. Матрица системы имеет вид

$$G=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & \dots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & \dots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{pmatrix} \qquad (2.100)$$

и называется *матрицей Грама*.

Элементами матрицы Грама являются скалярные произведения базисных функций:

$$(\varphi_i,\varphi_k)=\sum_{j=0}^{n}\varphi_i(x_j)\varphi_k(x_j). \qquad (2.101)$$

Вектор свободных членов системы нормальных уравнений имеет вид:

$$b=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_2,f)\\ \dots\\ (\varphi_m,f)\end{pmatrix}, \qquad (2.102)$$

элементами этого вектора являются скалярные произведения

$$(\varphi_k,f)=\sum_{j=0}^{n}\varphi_k(x_j)\,f(x_j). \qquad (2.103)$$

Матрица Грамма G обладает следующими основными свойствами:

- матрица симметричная;

- матрица является положительно определенной, поэтому при решении системы нормальных уравнений методом исключения Гаусса можно отказаться от процедуры выбора главного элемента, а сразу брать в качестве ведущего диагональный элемент;

- определитель матрицы Грама отличен от нуля, если в качестве базиса выбраны линейно независимые функции $\varphi_k(x),\ k=\overline{0,m}$.

Выбор базисных функций зависит от свойств аппроксимируемой функции $f(x)$ таких, как периодичность, логарифмический или экспоненциальный характер, свойства симметрии, наличие асимптотики и т.д.

Рассмотрим частный случай, когда аппроксимирующая функция задана в виде алгебраического полинома степени m:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m . \qquad (2.104)$$

Базисные функции в этом случае следующие:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \ldots,\ \varphi_m(x) = x^m . \qquad (2.105)$$

Степень полинома m выбирают обычно меньше n. Аппроксимирующая кривая в этом случае не проходит через экспериментальные точки, т.е. экспериментальные данные «сглаживаются» с помощью функции $\varphi(x)$. Если взять $m = n$, то $\varphi(x)$ совпадает с многочленом Лагранжа, аппроксимирующая кривая пройдет через все экспериментальные точки и $S = 0$.

Матрица Грамма G системы нормальных уравнений и вектор свободных членов b для функции $\varphi(x)$ вида (2.104) записываются следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{j=0}^{n} x_j & \sum_{j=0}^{n} x_j^2 & \ldots & \sum_{j=0}^{n} x_j^m \\ \sum_{j=0}^{n} x_j & \sum_{j=0}^{n} x_j^2 & \sum_{j=0}^{n} x_j^3 & \ldots & \sum_{j=0}^{n} x_j^{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \sum_{j=0}^{n} x_j^m & \sum_{j=0}^{n} x_j^{m+1} & \sum_{j=0}^{n} x_j^{m+2} & \ldots & \sum_{j=0}^{n} x_j^{2m} \end{pmatrix}, \qquad (2.106)$$

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \\ \sum_{j=0}^{n} x_j f(x_j) \\ \sum_{j=0}^{n} x_j^{\,2} f(x_j) \\ \ldots \\ \sum_{j=0}^{n} x_j^{\,m} f(x_j) \end{pmatrix}. \qquad (2.107)$$

Пример 2.10. Исходные данные приведены в таблице:

x_i	-1,01	-0,42	0,14	0,52	0,79	1,23
y_i	-1,05	-0,45	0,52	0,51	0,81	0,39

Требуется построить аппроксимирующий многочлен 3-го порядка по методу наименьших квадратов. Сначала строятся матрица G и вектор b по формулам (2.106) и (2.107), затем, решив систему линейных алгебраических уравнений $Ga = b$, определяем коэффициенты многочлена, которые будут равны следующим: $a_0 = 0{,}189$, $a_1 = 1{,}267$, $a_2 = -0{,}390$, $a_3 = -0{,}412$. На рис 2.8 приведены график аппроксимирующего многочлена и исходные данные в виде точек. Как видно из графика исходные точки не лежат на аппроксимирующей кривой.

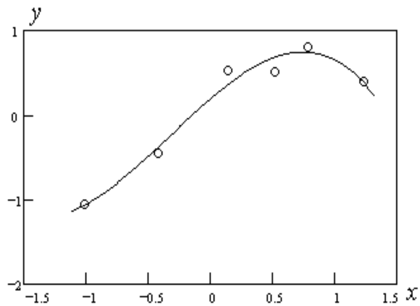

Рис. 2.8 – График аппроксимирующего многочлена

Лучшие по точности результаты при аппроксимации можно получить, если использовать в качестве базисных функций $\varphi_i(x)$ классические ортогональные полиномы Лежандра.

Полиномы называются ортогональными, если существует некоторый интервал $[a,b]$, на котором

$$\int_a^b p(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx = 0, \quad j \neq k, \qquad (2.108)$$

где $p(x)$ – весовая функция.

В случае большого количества узлов x_j на $[a,b]$ значения интегралов (2.108) будут близки к дискретным скалярным произведениям (2.101), так как интегрирование можно приближенно заменить суммированием. В этом случае недиагональные элементы матрицы Грама будут небольшими по абсолютной величине, что уменьшает погрешность решения системы нормальных уравнений.

Полиномы Лежандра на интервале $[-1, 1]$ являются ортогональными с весовой функцией $p(x)=1$. Они определяются по следующей рекуррентной формуле:

$$L_{k+1}(x)=\frac{1}{k+1}\big((2k+1)xL_k(x)+kL_{k-1}(x)\big), \quad (2.109)$$

где $L_0(x)=1$, $L_1(x)=x$.

Если метод наименьших квадратов с ортогональным базисом применяется для произвольного интервала $[x_0, x_n]$ ($x_0 \neq -1$ и $x_n \neq 1$), то с помощью линейного преобразования

$$z=2\frac{x-x_0}{x_n-x_0}-1 \quad (2.110)$$

исходный интервал переводится в интервал $[-1, 1]$.

2.15. Интерполирование при равноотстоящих узлах

2.15.1. Конечные разности

Будем предполагать, что заданы табличные значения функции $y_i = f(x_i)$, где $x_i = x_0 + ih,\ i=\overline{0, n}$ – равноотстоящие узлы, $h = x_{i+1} - x_i$ – шаг таблицы. Введем понятие конечной разности

$$\Delta^j y_i = \Delta^{j-1}y_{i+1} - \Delta^{j-1}y_i,\ j=1, 2, ..., \quad (2.111)$$

$$(\Delta^0 y_i = y_i,\ i=\overline{0, n}).$$

Исследуем влияние погрешности табличных значений y_i на погрешность конечных разностей. Пусть все y_i $(i=\overline{0,n})$ заданы с одинаковой абсолютной погрешностью $\varepsilon>0$. В силу формулы (2.111) конечная разность 1-го порядка $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ будет вычислена с погрешностью

$$2\varepsilon,$$

конечная разность 2-го порядка – с погрешностью

$$4\varepsilon,$$

и далее конечная разность *s*-го порядка вычисляется с погрешностью

$$2^s\varepsilon.$$

Если функция $f(x)$ гладкая, то разности $\Delta^j y_i$, $j=1,2,\ldots$ убывают с ростом j и для некоторого $j=k$ они незначительно отличаются между собой, а при $j=k+1$ разности практически равны нулю. Так как с ростом порядка конечных разностей растет их погрешность, то таблица разностей искажается. Запишем правило определения максимального порядка разностей, которые ведут себя правильно. Если

$$\max_i |\Delta^j y_i| \ge 2^j\varepsilon, \quad \text{и} \quad \max_i |\Delta^{j+1} y_i| < 2^{j+1}\varepsilon, \qquad (2.112)$$

то максимальный порядок разностей, которые ведут себя правильно, равен *j* (или максимальный порядок *правильных конечных разностей* равен *j*). Конечные разности $(j+1)$-го порядка уже меньше погрешности, поэтому их применение приводит к искажению результата.

В дальнейшем нам потребуются свойства разделенных разностей.

Свойство 1:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_i) = \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i}. \qquad (2.113)$$

Доказательство этого свойства можно выполнить достаточно просто методом математической индукции.

Свойство 2:

Если функция $f(x)$ имеет на интервале $[a, b]$ непрерывные производные порядка n и имеется таблица значений этой функции на этом интервале, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, для которой справедливо равенство

$$\Delta^n y_0 = h^n f^{(n)}(\xi). \tag{2.114}$$

Доказательство соотношения (2.114) следует из свойства 1 (формула 2.113) и формулы (2.28).

Замечание 2.1. Ранее было доказано, что разделенные разности являются симметричными функциями своих аргументов (см. п. 2.5, следствие 1), поэтому нижний индекс конечной разности в (2.113) определяется по минимальному номеру узлов, используемых для вычисления разделенной разности.

2.15.2. Интерполирование в начале и конце таблицы

Пусть нам дана таблица значений функции y_i для узлов $x_i = x_0 + ih \quad (i = \overline{0, n})$, необходимо вычислить значение интерполяционного многочлена в точке x, находящейся вблизи начала таблицы (т.е. вблизи точки x_0. Воспользуемся формулой Ньютона для неравноотстоящих узлов (2.24):

$$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \times \\ \times f(x_0, x_1, x_2) + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots \times \\ \times (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, ..., x_n). \tag{2.115}$$

Введем новую переменную $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, учитывая формулу (2.113), получим *1-ю интерполяционную формулу Ньютона* (для интерполирования вперед):

$$N_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{2.116}$$

Остаточный член для этой формулы получим из (2.12) и с учетом замены переменной:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (2.117)$$

Пусть точка x находится вблизи конца таблицы (вблизи узла x_n). Интерполяционные узлы будем привлекать в обратном порядке: $x_n, x_{n-1}, ..., x_0$. Тогда формула Ньютона для неравноотстоящих узлов примет вид

$$L_n(x) = f(x_n) + (x-x_n)f(x_n, x_{n-1}) + (x-x_n)(x-x_{n-1})\times$$
$$\times f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + (x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots\times$$
$$\times(x-x_1)f(x_n, x_{n-1}, ..., x_0). \qquad (2.118)$$

Введем переменную $t = \dfrac{x-x_n}{h}$ и учитывая формулу (2.113) и замечание 2.1 получим *2-ю интерполяционную формулу Ньютона* (для интерполирования назад)

$$\bar{N}_n(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3_{y_{n-3}} +$$
$$+ \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (2.119)$$

Остаточный член для этой формулы будет следующим

$$\bar{R}_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (2.120)$$

2.15.3. Формулы Гаусса

Пусть требуется вычислить значение интерполяционного многочлена в точке *x*, для которой ближайшим является узел x_k, расположенный в середине таблицы. Сначала будем предполагать, что $x > x_k$. В интерполяционную формулу Ньютона узлы будем привлекать в следующем порядке: x_k, x_{k+1}, x_{k-1}, $x_{k+2}, x_{k-2}, ...,$ x_{k+i}, x_{k-i} (каждый раз привлекается ближайший к точке x узел). Тогда формула Ньютона для интерполирования в точке x будет иметь вид

$$L_{2i}(x) = f(x_k) + (x - x_k) f(x_k, x_{k+1}) + (x - x_k)(x - x_{k+1}) \times$$
$$\times f(x_k, x_{k+1}, x_{k-1}) + (x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k-1}) \times$$
$$\times f(x_k, x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k+2}) + \cdots + (x - x_k)(x - x_{k+1}) \cdots \times$$
$$\times (x - x_{k+i}) f(x_k, x_{k+1}, ..., x_{k-i}). \qquad (2.121)$$

Учитывая формулу (2.113) и замечание 2.1, а также введя переменную $t = \dfrac{x - x_k}{h}$ из (2.121), получим *1-ю формулу Гаусса* (для интерполирования вперед):

$$G_{2i}(x_k + th) = y_k + \frac{t}{1!}\Delta y_k + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{k-1} + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!}\Delta^3 y_{k-1} +$$
$$+ \frac{t(t^2 - 1^2)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{k-2} + \cdots +$$
$$+ \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2)\cdots(t^2 - (i-1)^2)(t-i)}{(2i)!}\Delta^{2i} y_{k-i}. \qquad (2.122)$$

Остаточный член для 1-ой формулы Гаусса (2.122) имеет вид:

$$R_{2i}(x) = h^{2i+1}\frac{t(t^2 - 1^2)\cdots(t^2 - i^2)}{(2i+1)!} f^{(2i+1)}(\xi). \qquad (2.123)$$

Если 1-ая формула Гаусса является многочленом нечетной степени, то остаточный член будет следующим

$$R_{2i+1}(x) = h^{2i+2}\frac{t(t^2 - 1^2)\cdots(t^2 - i^2)(t - i - 1)}{(2i+2)!} f^{(2i+2)}(\xi). \qquad (2.124)$$

Вторая формула Гаусса получается при интерполировании в середине таблицы, в случае когда $x < x_k$ (узел x_k является ближайшим к точке x). При этом порядок подключения узлов в интерполяционную формулу выбирается следующий: x_k, $x_{k-1}, x_{k+1}, x_{k-2}, x_{k+2}, ..., x_{k-i}, x_{k+i}$ (каждый раз привлекается ближайший к точке x узел). Тогда поступая также как и в случае вывода 1-й формулы Гаусса, учитывая формулу (2.113), замечание 2.1, а также введя переменную $t = \dfrac{x - x_k}{h}$, из формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов

$$L_{2i}(x) = f(x_k) + (x - x_k) f(x_k, x_{k-1}) + (x - x_k)(x - x_{k-1}) \times$$
$$\times f(x_k, x_{k-1}, x_{k+1}) + (x - x_k)(x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \times$$
$$\times f(x_k, x_{k-1}, x_{k+1}, x_{k-2}) + \cdots + (x - x_k)(x - x_{k-1}) \cdots \times$$
$$\times (x - x_{k-i}) f(x_k, x_{k-1}, ..., x_{k-i}, x_{k+i})$$

получим *2-ю формулу Гаусса* (для интерполирования назад):

$$\bar{G}_{2i}(x_k + th) = y_k + \frac{t}{1!} \Delta y_{k-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{k-1} + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \Delta^3 y_{k-2} +$$
$$+ \frac{t(t^2 - 1^2)(t+2)}{4!} \Delta^4 y_{k-2} + \cdots +$$
$$+ \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \cdots (t^2 - (i-1)^2)(t+i)}{(2i)!} \Delta^{2i} y_{k-i}. \quad (2.125)$$

Остаточный член для 2-ой формулы Гаусса четной степени имеет вид (2.123), а для многочлена нечетной степени будет следующим:

$$\bar{R}_{2i+1}(x) = h^{2i+2} \frac{t(t^2 - 1^2) \cdots (t^2 - i^2)(t+i+1)}{(2i+2)!} f^{(2i+2)}(\xi). \quad (2.126)$$

2.15.4. Формула Стирлинга

Известно, что уменьшение степени аппроксимирующего многочлена без потери точности иногда можно достигнуть, образуя линейные комбинации интерполяционных многочленов. Простейшим из таких многочленов является *многочлен Стирлинга*. Этот многочлен является полусуммой 1-ой и 2-ой формул Гаусса:

$$S(x_k + th) = \frac{G(x_k + th) + \bar{G}(x_k + th)}{2}. \quad (2.127)$$

Учитывая выражения для формул Гаусса (2.122), (2.125), а также то, что многочлены Стирлинга рекомендуется использовать для нечетной степени относительно t, получим следующее выражение:

$$S(x_k+th)=y_k+\frac{t}{1!}\frac{(\Delta y_k+\Delta y_{k-1})}{2}+\frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{k-1}+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}\times$$
$$\times\frac{(\Delta^3 y_{k-1}+\Delta^3 y_{k-2})}{2}+\frac{t^2(t^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{k-2}+\cdots+$$
$$+\frac{t(t^2-1^2)\cdots(t^2-i^2)}{(2i+1)!}\frac{(\Delta^{2i+1}y_{k-i}+\Delta^{2i+1}y_{k-i-1})}{2}. \qquad (2.128)$$

Многочлен (2.128) называется формулой Стирлинга, ее используют для аппроксимации в середине таблицы при $|t|\le 0,25.$ Остаточный член для формулы Стирлинга равен полусумме остаточных членов (2.124), (2.126).

2.15.5. Формула Бесселя

Формула Бесселя также используется для аппроксимации в середине таблицы. Эта формула определяется из соотношения:

$$B(x_k+th)=\frac{G(x_k+th)+\bar{G}(x_{k+1}+t'h)}{2}, \qquad (2.129)$$

где $t=\dfrac{(x-x_k)}{h}$, $t'=\dfrac{(x-x_{k-1})}{h}$, т.е. $t'=t-1.$ Учитывая выражения для формул Гаусса (2.122), (2.125), а также то, что многочлены Бесселя рекомендуется использовать для четной степени относительно t, в силу формулы (2.129) получим следующее выражение

$$B(x_k+th)=\frac{y_k+y_{k+1}}{2}+\frac{(t-\frac{1}{2})}{1!}\Delta y_k+\frac{t(t-1)}{2!}\frac{(\Delta^2 y_{k-1}+\Delta^2 y_k)}{2}+$$
$$+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{k-1}+\frac{t(t^2-1^2)(t-2)}{4!}\frac{(\Delta^4 y_{k-2}+\Delta^4 y_{k-1})}{2}+\cdots$$

$$\cdots + \frac{t(t^2-1^2)\cdots(t^2-(i-1)^2)(t-i)}{(2i)!}\frac{(\Delta^{2i}y_{k-i}+\Delta^{2i}y_{k-i+1})}{2}. \quad (2.130)$$

Многочлен (2.131) называется формулой Бесселя, его используют для аппроксимации в середине таблицы при $0,25 \le t \le 0,75$. Остаточный член для формулы Бесселя равен полусумме остаточных членов соответствующих формул Гаусса и имеет вид:

$$R_{2i}(x) = h^{2i+1}\frac{(t-\frac{1}{2})t(t^2-1^2)\cdots(t^2-(i-1)^2)(t-i)}{(2i+1)!}f^{(2i+1)}(\xi). \quad (2.132)$$

2.15.6. Оценки погрешности метода и неустранимой погрешности

Если задано аналитическое выражение функции $f(x)$, которая аппроксимируется с помощью интерполяционного многочлена, то оценку погрешности метода можно получить по соответствующему остаточному члену. Например, учитывая выражение остаточного члена (2.117), погрешность метода для 1-ой формулы Ньютона имеет вид:

$$\Delta_M = h^{n+1}\frac{|t(t-1)\cdots(t-n)|}{(n+1)!}M_{n+1}, \quad (2.132)$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Если функция $f(x)$ неизвестна, то для оценки величины M_{n+1} можно воспользоваться формулой

$$M_{n+1} \approx \max_i \frac{|\Delta^{n+1}y_i|}{h^{n+1}}, \quad (2.133)$$

которая следует из второго свойства конечных разностей (2.114). Иногда в качестве грубой оценки погрешности метода используют модуль первого не равного нулю отбрасываемого слагаемого в интерполяционной формуле. Если табличные значения функции y_i заданы с одинаковой погрешностью $\varepsilon > 0$, то неустранимая погрешность для 1-ой формулы Ньютона равна

$$\Delta_{\text{н}} = \varepsilon + \frac{|t|}{1!}2\varepsilon \ + \frac{|t(t-1)|}{2!}2^2\varepsilon \ + \frac{|t(t-1)(t-2)|}{3!}2^3\varepsilon \ + \cdots. \tag{2.134}$$

Слагаемых в формуле (2.135) должно быть столько же, сколько в самой интерполяционной формуле.

Аналогично определяются погрешности и для 2-ой формулы Ньютона, формул Гаусса, Стирлинга и Бесселя.

Пример. 2.11. Пусть дана таблица значений функции при равноотстоящих узлах

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_i	1,1235	0,4325	0,5342	0,5441	0,2462	0,3345

Требуется вычислить значение функции, заданной таблично, в точке $x = 0,42$. Необходимо также оценить погрешность метода, неустранимую погрешность, полную погрешность, считая, что табличные значения функции заданы с верными знаками. Требуется также записать результат аппроксимации с верными знаками (в узком смысле).

Построим сначала таблицу конечных разностей

Таблица 2.3.

Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
-0,6910	0,7927	-0,8845	0,6685	0,2415
0,1017	-0,0918	-0,2160	0,9100	
0,0099	-0,3078	0,6940		
-0,2979	0,3862			
0,0883				

Так как точка x находится вблизи средины таблицы, воспользуемся формулами для аппроксимации в средине таблицы. Ближайшим к точке x является узел x_k при $k = 2$. Вычислим значение переменной (шаг $h = 0,2$) $t = \dfrac{x - x_k}{h} = \dfrac{0,42 - 0,4}{0,2} =$

$=0{,}1$. В силу того, что $\left|t\right| \le 0{,}25$, выбираем для аппроксимации формулу Стирлинга 3-ей степени:

$$S(x_k+th)=y_k+\frac{t}{1!}\frac{(\Delta y_k+\Delta y_{k-1})}{2}+\frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{k-1}+$$

$$+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{k-1}+\Delta^3 y_{k-2})}{2}.$$

Остаточный член определится как полусумма соответствующих остаточных членов 1-ой и 2-ой формул Гаусса:

$$R(x_k+th)=\frac{h^4 t^2(t^2-1^2)\,f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$

Тогда погрешность метода оценивается по формуле

$$\Delta_{\text{М}} \approx \frac{h^4\left|t^2(t^2-1^2)\right| M_4}{4!},$$

где

$$M_4=\max_{x\in[x_0,\,x_5]}\left|f^{(4)}(x)\right| \approx \max_i \frac{\left|\Delta^4 y_i\right|}{h^4}.$$

Вычислим неустранимую погрешность, обусловленную неточностью исходных данных. В нашем случае, погрешность табличных значений функции будет равна половине последнего правильного разряда $\varepsilon=0{,}00005$ (см. п. 1.3). По аналогии с (2.134), $\Delta_{\text{Н}}$ для многочлена Стирлинга определится по формуле

$$\Delta_{\text{Н}}=\varepsilon+\frac{|t|}{1!}2\varepsilon+\frac{t^2}{2!}2^2\varepsilon+\frac{|t(t^2-1)|}{3!}2^3\varepsilon.$$

Подставив значения, получим следующие результаты:

$$f(0{,}42)\approx S(0{,}42)=0{,}5342+0{,}1\frac{(0{,}0099+0{,}1017)}{2}+$$

$$+0{,}1^2\frac{-0{,}0918}{2!}+0{,}1(0{,}1^2-1^2)\frac{(-0{,}2160-0{,}8845)}{3!\cdot 2}=0{,}548400,$$

$$M_4\approx\frac{0{,}9100}{0{,}2^4}=568{,}7,$$

$$\Delta_{\text{М}} \approx \frac{0,2^4 \left|0,1^2(0,1^2 - 1^2)\right| 568,7}{4!} = 0,00038\,,$$

$$\Delta_{\text{Н}} = 0,00005\left(1 + 2\frac{|0,1|}{1!} + 2^2\frac{0,1^2}{2!} + 2^3\frac{|0,1(0,1^2-1)|}{3!}\right) = 0,000068\,,$$

$$\Delta_{\text{П}} = \Delta_{\text{М}} + \Delta_{\text{Н}} = 0,00045\,.$$

Тогда результат, записанный с верными десятичными разрядами, будет следующим: $f(0,42) \approx 0,548$.

2.16. Аппроксимация функций многих переменных

При решении задач обработки данных часто возникает задача аппроксимации функций многих переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. В частном случае для функции двух переменных $z = f(x, y)$, можно задать эту функцию в виде следующей таблицы:

Таблица 2.4.

	y_0	y_1	$\cdots$	y_m
x_0	z_{00}	z_{01}	$\cdots$	z_{0m}
x_1	z_{10}	z_{11}	$\cdots$	z_{1m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	z_{n0}	z_{1n}	$\cdots$	z_{nm}

Здесь в таблице $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ $(i = \overline{0,\ n} \quad j = \overline{0,\ m})$ и узлы x_i $(i = \overline{0,\ n})$ и y_j $(j = \overline{0,\ m})$ могут быть как неравноотстоящими так и равноотстоящими ($h_1 = x_{i+1} - x_i$, $h_2 = y_{j+1} - y_j$). Кроме того точки на плоскости могут быть расположены достаточно произвольно, но некоторые ограничения на расположение точек все таки должны выполняться (см. ниже), тогда их удобно обозначать следующим образом:

$$z_i = f(x_i, y_i) \quad (i = \overline{0,\ N})\,.$$

2.16.1. Построение интерполяционных многочленов

Рассмотрим задачу построения многочлена первой степени по двум переменным:

$$P_1(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y\,. \qquad (2.135)$$

Потребуем, чтобы значение многочлена и значения функции $f(x, y)$ совпадало в трех точках

$$z_i = f(x_i, y_i) \;\; (i = \overline{0,\,2}). \qquad (2.136)$$

Тогда значения коэффициентов a_{00}, a_{01}, a_{10} определятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$P_1(x_i, y_i) = a_{00} + a_{10}x_i + a_{01}y_i = z_i\,,$$

которая в векторно-матричном виде имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы существует и является единственным, если три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) не лежат на одной прямой (в этом случае определитель матрицы системы не равен нулю).

Многочлен второй степени для двух переменных имеет вид:

$$P_2(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2\,. \qquad (2.137)$$

Тогда, если заданы значения функции в шести точках

$$z_i = f(x_i, y_i) \;\; (i = \overline{0,\,5}), \qquad (2.138)$$

то можно сформировать систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02}. Эта система в векторно-матричном виде будет следующей:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}. \quad (2.139)$$

Решение системы (2.139) будет существовать и единственно, если 6 точек (x_i, y_i) ($i = \overline{0,\ 5}$) не лежат на кривой 2-го порядка.

По аналогии можно построить интерполяционный многочлен для двух переменных степени m

$$P_m(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \cdots + a_{m0}x^m + \cdots + a_{0m}y^m. \quad (2.140)$$

Число неизвестных коэффициентов в этом случае равно $(m+1)(m+2)/2$. Число узлов должно быть такое же. Если m велико, то для построения многочлена необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений высокого порядка. Если число узлов меньше чем $(m+1)(m+2)/2$, то часть коэффициентов приходится задавать произвольно, а это приведет к потере точности.

В случае, когда исходные данные даны в виде таблицы 2.4. можно вычислить значение интерполяционного многочлена степени ($n+m$) по *формуле Лагранжа* при этом узлы по переменным x и y могут быть неравноотстоящими:

$$L_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} z_{ij} \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq i}}^{n}\prod_{\substack{q=0 \\ q\neq j}}^{m} \frac{(x-x_i)(y-y_j)}{(x_p-x_i)(y_q-y_j)}. \quad (2.141)$$

Пользоваться этой формулой достаточно неудобно и поэтому она редко используется. Кроме того, возникают существенные трудности при оценке остаточного члена, так как в этом случае теорема Ролля уже не справедлива.

Можно также построить интерполяционные многочлены Ньютона. В частном случае, когда узлы в таблице 2.4 равноотстоящие и $n = 2$, $m = 2$, построим интерполяционный многочлен Ньютона 2-ой степени для двух переменных. Этот многочлен будет иметь вид:

$$N_2(x_0+th_1, y_0+\tau h_2) = z_{00} + t\Delta_x z_{00} + \tau\Delta_y z_{00} + \frac{t^2}{2}\Delta_{xx}^2 z_{00} +$$
$$+t\tau\Delta_{xy}^2 z_{00} + \frac{\tau^2}{2}\Delta_{yy}^2 z_{00}. \qquad (2.142)$$

Здесь в (2.142) $t=(x-x_0)/h_1$, $\tau=(y-y_0)/h_2$ и по аналогии с конечными разностями используются частные конечные разности первого и второго порядка:

$$\Delta_x z_{ij} = z_{i+1,j} - z_{ij},\ \Delta_y z_{ij} = z_{i,j+1} - z_{ij},$$
$$\Delta_{xx}^2 z_{ij} = \Delta_x(\Delta_x z_{ij}) = \Delta_x z_{i+1,j} - \Delta_x z_{ij} = z_{i+2,j} - 2z_{i+1,j} + z_{ij},$$
$$\Delta_{xy}^2 z_{ij} = \Delta_x(\Delta_y z_{ij}) = \Delta_x(z_{i,j+1} - z_{ij}) = (z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1}) - (z_{i+1,j} - z_{i,j}),$$
$$\Delta_{yy}^2 z_{ij} = \Delta_y(\Delta_y z_{ij}) = \Delta_y z_{i,j+1} - \Delta_y z_{ij} = z_{i,j+2} - 2z_{i,j+1} + z_{ij}.$$

2.16.2.Метод последовательного интерполирования

Метод *последовательного интерполирования* существенно упрощает решение задачи. Метод заключается в последовательном применении интерполяционных формул для функций одной переменной. Суть метода поясним на конкретном примере. Пусть в таблице 2.4 при $n=3$, $m=2$ требуется вычислить значение аппроксимирующей функции в точке с координатами x, y. Эта точка и узлы таблицы приведены на рис. 2.9

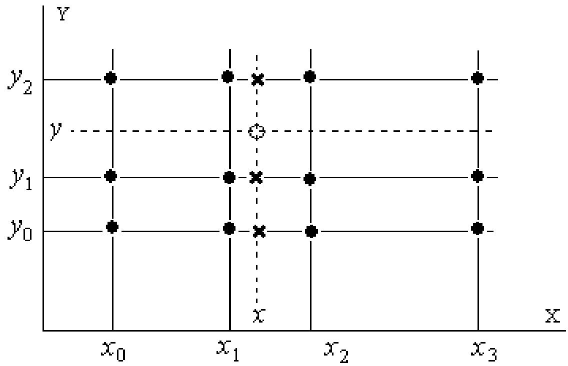

Рис. 2.9 – Расположение точек на плоскости

Применяя одномерную интерполяцию, например, многочлены Лагранжа, вычислим значения функции двух переменных в трех точках, которые на рис. 2.9 помечены крестиками. В результате получим три числа:

$$L_j(x) = \sum_{i=0}^{3} z_{ij} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}, \quad (j = \overline{0,\ 2}). \qquad (2.143)$$

Далее при фиксированном x вычисляется многочлен Лагранжа по трем узлам, который и даст значение, аппроксимирующее функцию двух переменных в точке с координатами x, y:

$$L(x, y) = \sum_{j=0}^{2} L_j(x) \frac{\Omega(y)}{(y - y_j)\Omega'(y_j)}. \qquad (2.144)$$

В (2.143) и (2.144)

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

$$\Omega(y) = (y - y_0)(y - y_1)(y - y_2).$$

Отметим, что метод последовательного интерполирования можно использовать, если исходная таблица имеет не полные данные, например, если в рассмотренной выше задаче отсутствует значение $z_{32} = f(x_3, y_2)$ (соответствует правому верхнему узлу на рис. 2.8), то это приведет лишь к тому, что $L_2(x)$ будет вычислен не по 4 узлам, как в формуле (2.143), а по 3 узлам.

2.16.3. Применение метода наименьших квадратов

Рассмотрим возможность применения метода наименьших квадратов к задаче аппроксимации функции двух переменных. Аппроксимирующую функцию будем задавать в виде:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x, y)\,, \qquad (2.145)$$

где $\varphi_i(x, y)$ $(i = \overline{1,\, m})$ заданные базисные функции. Точки на плоскости заданы в виде:

$$z_j = f(x_j, y_j) \quad (j = \overline{1,\, n})\,.$$

Вычислим среднеквадратическое отклонение

$$S = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j^2\,,$$

где

$$\varepsilon_j = (\varphi(x_j, y_j) - z_j)\,,$$

Коэффициенты a_i найдем из условия:

$$\min_{a_0, \ldots, a_m} S\,. \qquad (2.146)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \varphi(x_0, y_0) \\ \varphi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, y_n) \end{pmatrix} = X\, a\,, \qquad (2.147)$$

где матрица X и вектор a равны:

$$X=\begin{bmatrix}\varphi_0(x_0,y_0) & \cdots & \varphi_m(x_0,y_0)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi_0(x_n,y_n) & \cdots & \varphi_m(x_n,y_n)\end{bmatrix},\ a=\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}. \quad (2.148)$$

Вектор ошибок можно представить в виде

$$\varepsilon=\tilde{z}-z,$$

где $z=\left(z_0,z_1,...,z_n\right)^{\mathrm{T}}$. Учитывая (2.152), $\varepsilon=X\,a-z$, вычислим S:

$$S=\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon=(X\,a-z)^{\mathrm{T}}(X\,a-z)=(a^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}-z^{\mathrm{T}})(X\,a-z)=$$
$$=a^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}Xa-z^{\mathrm{T}}Xa-a^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}z+z^{\mathrm{T}}z=a^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}Xa-2z^{\mathrm{T}}Xa+z^{\mathrm{T}}z=$$
$$=trX^{\mathrm{T}}Xaa^{\mathrm{T}}-2trXaz^{\mathrm{T}}+z^{\mathrm{T}}z. \quad (2.149)$$

В (2.149) tr обозначает след матрицы (сумму диагональных элементов). Последнее соотношение в (2.149) получено в силу очевидного свойства для некоторых векторов x,y и матрицы B:

$$x^{\mathrm{T}}By=trByx^{\mathrm{T}}.$$

Найдем минимум (2.146) из условия:

$$\frac{dS}{da}=0. \quad (2.150)$$

При дифференцировании функции S (2.150) по вектору a воспользуемся следующими правилами дифференцирования следа от матрицы по векторному или матричному аргументу

$$\frac{dtrABC}{dB}=A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}},\ \frac{dtrAB^{\mathrm{T}}C}{dB}=CA. \quad (2.151)$$

В (2.151) A,B,C – некоторые векторы или матрицы, согласованные по размерности. В результате получим:

$$\frac{dS}{da}=2X^{\mathrm{T}}X\,a-2X^{\mathrm{T}}z. \quad (2.152)$$

В силу условия (2.150) из соотношения (2.152) получается уравнение

$$X^{\mathrm{T}}X\,a-X^{\mathrm{T}}z=0,$$

решение которого дает аналитическое выражение для вектора неизвестных параметров a:

$$a = (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} X^{\mathrm{T}} z . \tag{2.153}$$

В (2.153) $(X^{\mathrm{T}} X)$ – матрица Грама должна быть невырожденной.

Отметим, что метод наименьших квадратов может быть легко обобщен на случай аппроксимации функций с болшим количеством переменных. Основная трудность в этом методе заключается в выборе базисных функций. Однако в некоторых случаях базисные функции могут быть выбраны достаточно просто.

Пример. 2.12. Требуется построить по заданным данным

$$z_i = f(x_i, y_i) \quad (i = \overline{0, 5}),$$

представленным в таблице

Таблица 2.5.

i	x_i	y_i	z_i
0	47	40	25
1	46	26	21
2	50	35	24
3	46	31	22
4	41	28	20
5	55	32	25

аналитическое выражение производственной функции типа Кобба-Дугласа (используется в экономике в качестве модели):

$$z = f(x, y) = A x^{\alpha} y^{\beta} , \tag{2.154}$$

где A, α, β параметры, подлежащие определению. Прологарифмируем (2.154), в результате получим:

$$\ln(z) = \ln(A) + \alpha \ln(x) + \beta \ln(y) .$$

Тогда в качестве базисных функций естественно взять следующие:

$$\varphi_0(x, y) = 1 , \; \varphi_1(x, y) = \ln(x) , \; \varphi_2(x, y) = \ln(y) .$$

Матрица X и вектор z в данной задаче будут следующими:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \ln(47) & \ln(40) \\ 1 & \ln(46) & \ln(26) \\ 1 & \ln(50) & \ln(35) \\ 1 & \ln(46) & \ln(31) \\ 1 & \ln(41) & \ln(28) \\ 1 & \ln(55) & \ln(32) \end{bmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} \ln(25) \\ \ln(21) \\ \ln(24) \\ \ln(22) \\ \ln(20) \\ \ln(25) \end{pmatrix}.$$

Тогда, выполнив расчеты по формуле (2.153), найдем вектор a:

$$a = \begin{pmatrix} -0,355 \\ 0,572 \\ 0,369 \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем:

$$A = \exp(-0,355) = 0,701, \ \alpha = 0.572, \ \beta = 0,369.$$

На рис. 2.10 приведена поверхность производственной функции типа Кобба-Дугласа $0,701x^{0,572}y^{0,369}$, построенная в области изменения $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 50$.

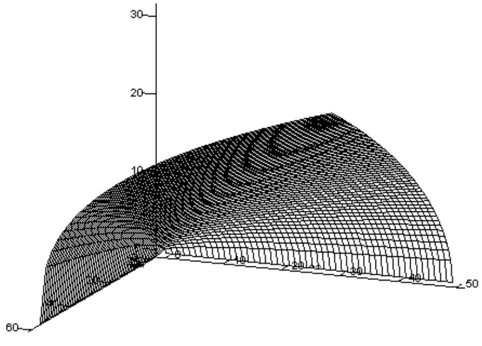

Рис. 2.10 – Поверхность функции Кобба-Дугласа

2.17. Контрольные вопросы

1. Будут ли отличаться интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, построенные для одной и той же таблицы исходных данных:

1) да;
2) нет;
3) иногда.

2. Укажите, как проходит график интерполяционного многочлена, построенный на интервале интерполирования:

1) обязательно должен проходить через все табличные точки;
2) может через некоторые точки не проходить;
3) как правило, не через одну точку не проходит.

3. Укажите, какому неравенству удовлетворяет правильная конечная разность $\Delta^j y$ j - го порядка, если ε - абсолютная погрешность табличного значения функции:

1) $\Delta^j y \le 2^{\varepsilon}$; 2) $\Delta^j y > 2^{j+1}\varepsilon$;

3) $\Delta^j y \le 2^j \varepsilon$; 4) $\Delta^j y < 2^{j+1}\varepsilon$.

4. Укажите, как определяется многочлен Чебышева степени n на интервале [-1 1]:

1) $\cos(n\arcsin(x))$; 2) $\cos(n\arccos(x))$;

3) $\sin(n\arcsin(x))$; 4) $\cos(n arctg(x))$.

5. Укажите, как определяется многочлен Лагранжа степени n ($\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$):

1) $L_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{f(x_j)(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}{(x - x_0)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}$;

2) $L_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{f(x_j)(x - x_0)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$;

3) $L_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{f(x_j)\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)}$.

6. Многочлены Лагранжа на всем интервале интерполирования имеют минимальную погрешность, если в качестве узлов используются корни:

1) Многочленов Эрмита;

2) Многочленов Чебышева;

3) Многочленов Лежандра.

7. Укажите выражение погрешности метода для многочлена Лагранжа степени n

($M_n = \max\limits_{x\in[a\ b]} |f^{(n)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$):

1) $\Delta_M = \dfrac{M_n}{n!} |\omega(x)|$;

2) $\Delta_M = \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} \omega(x)$;

3) $\Delta_M = \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|$.

8. Укажите правильные варианты использования многочленов Чебышева при построении интерполирующих функций:

1) в качестве базисных функций при построении аппроксимирующей функции;

2) используются для уменьшения неустранимой погрешности;

3) используются для уменьшения погрешности метода;

4) используются для уменьшения погрешности округления.

9. Укажите, как проходит график интерполяционного сплайна, построенный на интервале интерполирования:

1) обязательно должен проходить через все табличные точки;

2) может через некоторые точки не проходить;

3) как правило, не через одну точку не проходит.

10. Укажите правильный вариант определения степени сплайна:

1) Минимальная по всем частичным отрезкам степень многочлена;

2) Минимальный порядок непрерывной на всем интервале производной;

3) Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочлена;
4) Максимальный порядок непрерывной на всем интервале производной;
5) Сумма чисел, соответствующим пунктам 2 и 3;
6) Разность чисел, соответствующим пунктам 2 и 3;
7) Разность чисел, соответствующим пунктам 1 и 3;

11. Укажите правильный вариант определения дефекта сплайна:

1) Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочлена;
2) Минимальная по всем частичным отрезкам степень многочлена;
3) Максимальный порядок непрерывной на всем интервале производной;
4) Разность чисел, соответствующим пунктам 2 и 3;
5) Разность чисел, соответствующим пунктам 1 и 3;
6) Сумма чисел, соответствующим пунктам 2 и 3;
7) Минимальный порядок непрерывной на всем интервале производной.

12. Какими свойствами обладает матрица Грамма:

1) неотрицательно определена;
2) вырождена;
3) симметрическая;
4) положительно определена.

13. Укажите, как проходит график функции, построенной на основе метода наименьших квадратов:

1) обязательно должен проходить через все табличные точки;
2) может через некоторые точки не проходить;
3) как правило, не через одну точку не проходит.

14. Укажите, какую интерполяционную формулу можно использовать для аппроксимации функции заданной таблично в точке x при равноотстоящих узлах $x_0 = 0,3$, $x_1 = 0,8$, $x_2 = 1,3$, $x_3 = 1,8$, $x_4 = 2,3$, $x_5 = 2,8$ (ответ необходимо дать для следующих значений точки x: а) $0,34$;

б) $1{,}35$ **; в)** $2{,}72$ **; с)** $1{,}52$ **):**

1) 2-ая формула Гаусса;
2) формула Стирлинга;
3) 2-ая формула Ньютона;
4) 1-ая формула Ньютона;
5) формула Бесселя;
6) 1-ая формула Гаусса.

2.18. Задания к главе 2

Задание 2.1.

А) Решив систему линейных уравнений (2.5), построить аналитическое выражение многочлена Лагранжа.

Б) Найти приближенное значение функции $f(x)$ по таблице значений этой функции, используя формулу Лагранжа. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить неустранимую погрешность результата. Построить график многочлена Лагранжа с табличными значениями функции, отмеченными символом «*».

Варианты исходных данных приведены в п. 4.2.

Задание 2.2. Найти приближенное значение функции $f(x)$ по таблице значений этой функции, используя схему Эйткена. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить неустранимую погрешность результата. Построить график апрорксимирующей функции. Построить график изменения неустранимой погрешности.

Варианты исходных данных приведены в п. 4.2.

Задание 2.3. Найти приближенное значение функции $f(x)$ по таблице значений этой функции, используя интерполяционную формулу Ньютона. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить неустранимую погрешность результата и используя формулу (2.29) оценить погрешность метода.

Варианты исходных данных приведены в п. 4.2.

Задание 2.4. Найти приближенное значение функции $f(x)$ по таблице значений этой функции, используя многочлен 3-ей степени, построенный по методу наименьших квадратов. Построить график аппроксимирующего многочлена с табличными значениями функции, отмеченными символом «*».

Варианты исходных данных приведены в п. 4.2.

Задание 2.5.

А) Найти приближенное значение функции $f(x)$ по таблице значений этой функции, используя интерполяционные сплайны 1-го, 2-го. Построить графики сплайнов с табличными значениями функции, отмеченными символом «*».

Варианты исходных данных приведены в п. 4.2.

Б) Найти приближенное значение функции $f(x)$ по таблице значений этой функции, используя интерполяционные сплайны 3-го порядка и Эрмитовы сплайны 3-го порядка. Построить графики сплайнов с табличными значениями функции, отмеченными символом «*».

Варианты исходных данных приведены в п. 4.2.

Задание 2.6. Построить на интервале $[a, b]$ аналитическое выражение многочлена Лагранжа третьей степени $L_3(x)$ с минимальной погрешностью. Интерполируемая функция $f(x)$ задана на интервале $[a, b]$ (варианты для задания приведены в п. 4.3). Оценить погрешность метода $\Delta_{\text{М}}$. Сравнить $\Delta_{\text{М}}$ с $|\varepsilon_{\max}| = \max\limits_i |f(x_i) - L_3(x_i)|$, где $x_i = a + ih,$ $h = \frac{b-a}{N}$, $i = \overline{0, N}$. Варианты исходных данных приведены в п. 4.3.

Задание 2.7. Построить таблицу конечных разностей для функции заданной в виде таблицы на равномерной сетке $x_i = x_0 + ih,$ $i = \overline{0, 10}$, $x_0 = 1,$ $h = 0{,}1$. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, определить наивысший порядок правильных конечных разностей.

Варианты исходных данных приведены в п. 4.4.

Задание 2.8. Подобрать интерполяционные формулы и с помощью этих формул найти приближенное значение интерполируемой функции в точках x и $\overline{x}$. При построении интерполяционной формулы использовать только правильные конечные разности, но не выше 4-го порядка. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить погрешности $\Delta_{\text{М}}$, $\Delta_{\text{Н}}$ и $\Delta_{\text{П}}$. Результаты интерполирования записать с верными знаками.

Варианты исходных данных приведены в п. 4.4.

3. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Численное дифференцирование применяется, если непосредственное дифференцирование функции, заданной аналитически, затруднительно, а также, если требуется найти производную функции, заданной в виде таблицы. Численное дифференцирование позволяет определять такие важные характеристики как скорость и ускорение изменения величин. Например, в экономике оценка первой производной может быть использована для определения темпа изменения какого-либо экономического показателя. Численное дифференцирование широко используется при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Основная идея, используемая при численном дифференцировании, заключается в том, что функция, заданная таблично или аналитически, заменяется аппроксимирующей функцией

$$f(x) = \varphi(x) + R(x). \tag{3.1}$$

Здесь $\varphi(x)$ – аппроксимирующая функция, $R(x)$ – остаточный член. Вычислив производную порядка m

$$f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x) + R^{(m)}(x), \tag{3.2}$$

пренебрегая остаточным членом, получим формулу численного дифференцирования

$$f^{(m)}(x) \approx \varphi^{(m)}(x). \tag{3.3}$$

Отметим, что пользоваться формулой (3.3) можно при малых m.

Следует обратить внимание на неустойчивость в задаче вычисления производной. Действительно, при малых изменениях функции на малом интервале вблизи точки x, в которой оценивается производная, можно получить другую функцию с любым заданным значением производной в этой точке. Это замечание говорит о том, что при реализации операции численного дифференцирования необходимо контролировать результат, например, осуществлять расчеты повторно другим методом.

3.1. Численное дифференцирование при неравноотстоящих узлах

При расчетах значений производных, в случае неравноотстоящих узлов можно использовать формулу Лагранжа. Например, при вычислении первой производной в точке x, не совпадающей с узлами таблицы x_k, $k=\overline{0,\,n}$, получим формулу

$$f'(x) \approx L_n{}'(x) = \omega'(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} - \\ -\omega(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x-x_j)^2\omega'(x_j)}. \qquad (3.4)$$

Ошибка операции численного дифференцирования может быть определена по производной остаточного члена многочлена Лагранжа

$$R_n'(x) = \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\right)'_x = \\ = \frac{1}{(n+1)!}\left[\left(f^{(n+1)}(\xi)\right)'_x\omega(x) + f^{(n+1)}(\xi)\omega'(x)\right]. \qquad (3.5)$$

В (3.5) слагаемое $\left(f^{(n+1)}(\xi)\right)'_x$ присутствует по той причине, что точка ξ зависит от значения x.

Если же вычислению подлежит значение f' в узле x_j, то можно воспользоваться формулой:

$$f'(x_j) \approx L_n'(x_j) = \omega'(x_j)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_j-x_k)\omega'(x_k)} + \\ +\frac{1}{2}\frac{\omega''(x_j)}{\omega'(x_j)}f(x_j), \qquad (3.6)$$

где второе слагаемое получено из (3.4) с использованием правила Лопиталя. Оценка погрешности в этом случае упрощается, так как первое слагаемое в (3.5) обращается в ноль, и тогда ошибка будет равна

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)\omega'(x_j)}{(n+1)!}.$$

По аналоги можно получить формулы численного дифференцирования для производных более высоких степеней.

Пример 3.1. Выведем формулы численного дифференцирования, полученные на основе дифференцирования формулы Лагранжа для следующей таблицы

x_i	0	0,5	1,0
y_i	1,5	1,1	1,7

Построим сначала многочлен по двум узлам x_0 и x_1:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_1)y_0}{(x_0-x_1)} + \frac{(x-x_0)y_1}{(x_1-x_0)} = \frac{1}{h}((x-x_0)y_1-(x-x_1)y_0),$$

где $h = x_1 - x_0$.

Остаточный член имеет вид

$$R_1(x) = \frac{f'(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1).$$

Продифференцировав эти формулы, получим:

$$L_1'(x) = \frac{y_1-y_0}{h} = -0,8. \quad (3.7)$$

Вычислим производную остаточного члена для узла x_0, учитывая формулу (3.6):

$$R_1'(0) = -\frac{hf''(\xi)}{2!}. \quad (3.8)$$

Формула (3.7) дает выражение для 1-ой производной и имеет первый порядок точности.

Построим многочлен Лагранжа по трем узлам и его производную:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)y_0}{2h^2}+\frac{(x-x_0)(x-x_2)y_1}{-h^2}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)y_2}{2h^2},$$

$$L_1'(x)=\frac{(2x-x_1-x_2)y_0}{2h^2}+\frac{(2x-x_0-x_2)y_1}{-h^2}+\frac{(2x-x_0-x_1)y_2}{2h^2}. \quad (3.9)$$

Вычислим значения первой производной по формуле (3.9) и остаточные члены по формуле (3.6) в узловых точках:

$$L_1'(0)=\frac{(-3y_0+4y_1-y_2)}{2h}=-1{,}8,\ R_1'(0)=\frac{h^2 f^{(3)}(\xi)}{3},$$

$$L_1'(0{,}5)=\frac{(y_2-y_0)}{2h}=0{,}2,\ R_1'(0{,}5)=-\frac{h^2 f^{(3)}(\xi)}{6},$$

$$L_1'(1)=\frac{(y_0-4y_1+3y_2)}{2h}=2{,}2,\ R_1'(1)=\frac{h^2 f^{(3)}(\xi)}{3}.$$

Итак, вычислив значения первой производной по трем узлам, получаем формулы с точность 2-го порядка. Увеличив число узлов на единицу, порядок точности формул для вычисления 1-ой производной также увеличится на единицу. То есть порядок точности формул для производных первого порядка на единицу меньше числа узлов. Отметим, что для вычисления $L_1'(0{,}5)$ потребовались значения функции в двух точках, при этом порядок точности такой же, как для трех точек. Причиной этого является то, что $L_1'(0{,}5)$ вычисляется по формуле центральных разностей.

В случае численного дифференцирования при неравноотстоящих узлах можно воспользоваться также формулой Ньютона (2.24). Тогда, представив многочлен Ньютона в виде

$$P_n(x)=f(x_0)+\alpha_0 f(x_0,x_1)+\alpha_0\alpha_1 f(x_0,x_1,x_2)+\cdots+$$
$$+\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1} f(x_0,x_1,...,x_n), \quad (3.10)$$

где $\alpha_i=(x-x_i)$, получим:

$$f'(x)\approx P_n'(x)=f(x_0,x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)f(x_0,x_1,x_2)+$$
$$+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)f(x_0,x_1,x_2,x_3)+\cdots. \quad (3.11)$$

Если первая производная в (3.11) оценивается по первому слагаемому, то она имеет первый порядок точности, если по первым двум слагаемым, то ее порядок точности будет равен 2 и т.д.

По аналогии можно вычислить и другие производные, например, численно оценить производную 2-го порядка можно по формуле

$$f''(x) \approx P_n''(x) = 2!(f(x_0, x_1, x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) \times \times f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \cdots) . \qquad (3.12)$$

Пример 3.2. Таблица значений функции имеет вид:

x_i	0,1	1,1	1,4	1,7
y_i	2,235	1,347	1,125	1,016

Требуется найти аналитическое выражение для оценки второй производной функции. Таблица разделенных разностей для заданной функции имеет вид (см. п. 2.5):

Таблица 3.1.

x_i	$f(x_i)$	Разделенные разности 1-го порядка	Разделенные разности 2-го порядка	Разделенные разности 3-го порядка
0,1	2,235	-8,800	6,055	-0,036
1,1	1,347	-2,220	6,004	
1,4	1,125	0,182		
1,7	1,016			

Тогда выполнив расчеты по формуле (3.12) получим:

$$f''(x) \approx 2(6,055 - 0,036((x - 0,1) + (x - 1,1) + (x - 1,4))) = = 12,297 - 0,216x .$$

Остаточный член для этой формулы можно вычислить, продифференцировав формулу (3.5) по x.

3.2. Численное дифференцирование при равноотстоящих узлах

В этом случае в качестве аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ выбирается многочлен в зависимости от положения точки x и значения переменной t, которая осуществляет связь с переменной x. В качестве интерполирующей функции можно выбрать один из интерполяционных многочленов, описанных в разделе 2.14.

Пусть точка x, в которой необходимо выполнить операцию численного дифференцирования находится в средине таблицы и для $t = \dfrac{x - x_k}{h}$ справедливо $|t| \le 0,25$. Выберем формулу Стирлинга:

$$f(x_k + th) \approx S(x_k + th) = y_k + \frac{t}{1!}\frac{(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}{2} + t^2 \Delta^2 y_{k-1} +$$

$$+ \frac{t(t^2 - 1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{k-1} + \Delta^3 y_{k-2})}{2} + \cdots \qquad (3.13)$$

Дифференцируя по t левую и правую части равенства (3.13), учитывая связь между t и x, получим:

$$f'_x(x_k + th) \approx \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2h} + \frac{t\Delta^2 y_{k-1}}{h} +$$

$$+ \frac{(3t^2 - 1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{k-2} + \Delta^3 y_{k-1})}{2h} + \cdots. \qquad (3.14)$$

Для второй производной имеем:

$$f''_{xx}(x_k + th) \approx \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{h^2} + \frac{t(\Delta^3 y_{k-1} + \Delta^3 y_{k-2})}{2h^2} + \cdots. \qquad (3.15)$$

Рассмотрим задачу вычисления первой производной по формуле (3.14), в которой будут учитываться только первых два слагаемых. Тогда для частного случая дифференцирования в точке x_k (в этом случае $t=0$) получим:

$$f_x'(x_k)=\frac{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}}{2h}+R_3'(x_k), \tag{3.16}$$

где

$$R_3'(x_k)=-\frac{f^{(3)}(\xi)h^2}{3!}. \tag{3.17}$$

Формула (3.17) получена в результате дифференцирования остаточного члена формулы Стирлинга и вычисления его в точке $t=0$. В силу (3.17) погрешность метода численного дифференцирования имеет вид:

$$\Delta_{\text{М}}=\frac{M_3h^2}{3!},$$

где $M_3=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|$. Погрешность метода с уменьшением шага уменьшается. Расчетная формула вычисления первой производной в точке x_k будет следующей:

$$f_x'(x_k)\approx\frac{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}}{2h}=\frac{y_{k+1}-y_k+y_k-y_{k-1}}{2h}=$$

$$=\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}. \tag{3.18}$$

Пусть все табличные значения функции y_j заданы с одинаковой погрешностью $\varepsilon>0$, тогда можно оценить неустранимую погрешность, возникающую из-за неточности исходных данных следующим образом:

$$\Delta_{\text{Н}}=\frac{2\varepsilon}{2h}=\frac{\varepsilon}{h}. \tag{3.19}$$

Из (3.19) видно, что неустранимая погрешность с уменьшением шага возрастает. Если посмотреть на график полной погрешности (рис. 3.1)

$$\Delta_{\text{П}}=\Delta_{\text{М}}+\Delta_{\text{Н}}=\frac{M_3h^2}{3!}+\frac{\varepsilon}{h}, \tag{3.20}$$

то можно сделать вывод, что существует оптимальный шаг $h_{\text{опт}}$, обеспечивающий минимум полной погрешности.

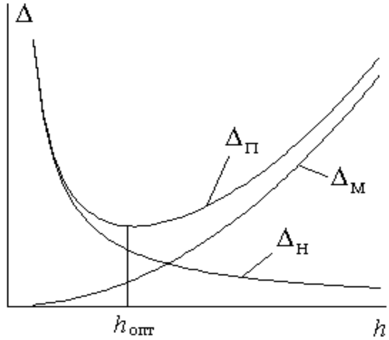

Рис. 3.1 – Графики погрешностей

Найдем оптимальный шаг, из условия $(\Delta_{\text{П}})'_h = 0$

$$(\Delta_{\text{П}})'_h = \frac{hM_3}{3} - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0,$$

и окончательно получаем

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}. \qquad (3.21)$$

Отметим, что величину M_3 можно оценить по формуле

$$M_3 \approx \max_j \frac{\left|\Delta^3 y_j\right|}{h^3}. \qquad (3.22)$$

Пример. 3.3. Требуется вычислить значение первой производной функции, которая задана в виде следующей таблице:

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	6,246	5,357	4,634	4,036	3,539	3,122

в точке $x = 1,4$. Необходимо также оценить погрешность метода, неустранимую погрешность, полную погрешность, оптимальный шаг таблицы, считая, что табличные значения функции заданы с верными знаками.

При выполнении расчетов будем использовать конечные разности, приведенные в таблице

Таблица 3.2.

Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
-0,889	0,166	-0,041	0,017	-0,014
-0,723	0,125	-0,024	0,003	
-0,598	0,101	-0,021		
-0,497	0,080			
-0,417				

В этом случае для аппроксимации функции можно выбрать формулу Стирлинга при $x_k = 1,4$, где $k = 2$. Оценивать производную будем по первому слагаемому от производной формулы Стирлинга. В нашем примере $h = 0,2,\quad t = 0$, погрешность табличного значения функции равна $\varepsilon = 0,0005$. Тогда в соответствии с формулами (3.18)-(3.22) получим следующие результаты:

$$f_x'(1,4) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = \frac{4,036 - 5,357}{2 \cdot 0,2} = -3.3025,$$

$$\Delta_{\text{Н}} = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{0,0005}{0,2} = 0,0025,$$

$$M_3 \approx \max_j \frac{\left|\Delta^3 y_j\right|}{h^3} = \frac{0,41}{0,2^3} = 5,125,$$

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{M_3 h^2}{3!} = \frac{5,125 \cdot 0,2^2}{6} = 0,0312,$$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,0005}{5,125}} = 0,066,$$

$$\Delta_{\text{П}} = \Delta_{\text{М}} + \Delta_{\text{Н}} = 0,0367.$$

Расчеты производной первого порядка показали, что производная вычисляется с погрешностью $0,0367$. При этом минимальное значение полной погрешности может быть достигнуто для таблицы с шагом $h_{\text{опт}} = 0,066$.

Пусть точка x, в которой необходимо выполнить операцию численного дифференцирования находится вблизи начала таблицы. Тогда выберем формулу 1-ю формулу Ньютона :

$$f(x_0 + th) \approx N_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 +$$

$$+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots, \quad (3.23)$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Дифференцируя (3.23) по t получим:

$$f'_x(x_0 + th) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(2t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}(3t^2 - 6t + 2) +$$

$$+\frac{\Delta^4 y_0}{4!}(4t^3 - 18t^2 + 22t - 6) + \cdots. \quad (3.24)$$

Вычислим значение первой производной по первым двум слагаемым формулы (3.24), оценим полную погрешность

$$f'_x(x_0 + th) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(2t-1)), \quad (3.25)$$

$$\Delta_{\text{Н}} = \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{4\varepsilon}{2h}|2t-1|,$$

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{hM_3}{3!}\left|3t^2 - 6t + 2\right|,$$

$$\Delta_{\text{П}} = \Delta_{\text{Н}} + \Delta_{\text{М}}.$$

Определим оптимальный шаг таблицы для случая, когда производная вычисляется в точке x_0. Тогда учитывая, что $t = 0$, получим из условия минимума полной погрешности $(\Delta_{\text{П}})'_h = 0$, которая в нашем случае равна:

$$\Delta_{\Pi} = \frac{M_3 h^2}{3} + \frac{4\varepsilon}{h}$$

выражение для $h_{\text{опт}}$:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M_3}}\,.$$

Формула (3.25) имеет второй порядок точности, если производную вычислять только по первому слагаемому формулы (3.24), то формула будет иметь первый порядок точности. Минимизируя для этого случая полную погрешность $\Delta_{\Pi} = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$, можно найти значение $h_{\text{опт}} = \sqrt[2]{\frac{4\varepsilon}{M_2}}$.

По аналогии с первой производной, можно вычислить производные более высокого порядка:

$$f''(x_0 + th) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (t-1) + \frac{\Delta^4 y_0}{12}(6t^2 - 18t + 11) + \cdots),$$

$$f'''(x_0 + th) \approx \frac{1}{h^3}(\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0 \frac{(2t-3)}{2} + \cdots).$$

При вычислении производных в точке x_0 $(t = 0)$, формулы приобретают простой вид:

$$f'_x(x_0) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots),$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots),$$

$$f'''(x_0) \approx \frac{1}{h^3}(\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \cdots).$$

Если точка x находится вблизи конца таблицы, то для аппроксимации выбирается 2-ая формула Ньютона:

$$f(x_n + th) \approx \bar{N}_n(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} +$$

$$+ \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \cdots. \quad (3.26)$$

Тогда производная оценивается по формуле:

$$f'_x(x_n+th)\approx\frac{1}{h}(\Delta y_{n-1}+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}(2t+1)+\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!}(3t^2+6t+2)+$$

$$+\frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4!}(4t^3+18t^2+22t+6)+\cdots. \qquad (3.27)$$

Оценим погрешности $\Delta_{\text{Н}}$, $\Delta_{\text{М}}$ и $h_{\text{опт}}$ для случая, когда первая производная оценивается по первым двум слагаемым. В результате получим:

$$f'_x(x_n+th)\approx\frac{1}{h}(\Delta y_{n-1}+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}(2t+1)), \qquad (3.28)$$

$$\Delta_{\text{Н}}=\frac{2\varepsilon}{h}+\frac{4\varepsilon}{2h}\left|2t+1\right|,$$

$$\Delta_{\text{М}}=\frac{hM_3}{3!}\left|3t^2+6t+2\right|,$$

$$h_{\text{опт}}=\sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M_3}}.$$

Формула (3.28) имеет второй порядок точности.

Формулы для производных более высокого порядка имеют вид:

$$f''(x_n+th)\approx\frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{n-2}+\Delta^3 y_{n-3}(t+1)+\frac{\Delta^4 y_{n-4}}{12}(6t^2+18t+11)+\cdots),$$

$$f'''(x_n+th)\approx\frac{1}{h^3}(\Delta^3 y_{n-3}+\Delta^4 y_{n-4}\frac{(2t+3)}{2}+\cdots).$$

Отметим, что одним из способов уменьшения погрешности численного дифференцирования, является выбор оптимального шага табулирования функции. Другой прием уменьшения погрешности заключается в том, что стачала табличные значения функции, сглаживаются и только затем осуществляется численное дифференцирование. Сглаживание данных можно осуществить с помощью методов скользящего среднего, экспоненциального сглаживания и др.

3.3. Оценка приближений численного дифференцирования по правилу Рунге

Пусть требуется оценить погрешность приближения производной некоторого порядка l, вычисленной в точке x. Обозначим эту производную $f^{(l)}(x)$. Будем также предполагать, что метод вычисления производной имеет порядок точности m

$$R(x) = \rho(x)h^m. \qquad (3.29)$$

Найдем $\rho(x)$, используя два приближенных значения производной, вычисленных с шагом h_1 и h_2. Обозначим эти значения $f^{(l)}{}_{x,h_1}$ и $f^{(l)}{}_{x,h_2}$. Тогда с точность до $O(h^{m+1})$ справедливы следующие приближенные соотношения

$$f^{(l)}(x,h_1) \approx f^{(l)}{}_{x,h_1} + \rho(x)h_1{}^m, \qquad (3.30)$$

$$f^{(l)}(x,h_2) \approx f^{(l)}{}_{x,h_2} + \rho(x)h_2{}^m. \qquad (3.31)$$

Приравняв выражения (3.30) и (3.31), получим выражение для $\rho(x)$:

$$\rho(x) = \frac{f^{(l)}{}_{x,h_1} - f^{(l)}{}_{x,h_2}}{h_2^m - h_1^m}.$$

Тогда погрешность вычисления производной в точке x с шагом h определится по формуле:

$$R(x,h) \approx \frac{f^{(l)}{}_{x,h_1} - f^{(l)}{}_{x,h_2}}{h_2^m - h_1^m} h^m. \qquad (3.32)$$

Полученный результат можно использовать для определения шага таблицы с равноотстоящими узлами, который обеспечивает минимум погрешности метода. Из уравнения

$$\varepsilon_{\text{T}} \approx \rho(x) h^m ,$$

где ε_{T} – желаемая точность вычисления производной, находим шаг таблицы

$$h \approx \sqrt[m]{\frac{\varepsilon_{\text{T}}}{|\rho(x)|}} .$$

Используя формулу (3.30), можно также на единицу увеличить порядок точности вычисления производной :

$$f^{(l)}(x,h_1) \approx f^{(l)}{}_{x,h_1} + \rho(x) h_1^{\,m} + O(h^{m+1}) =$$

$$= f^{(l)}{}_{x,h_1} + \frac{f^{(l)}{}_{x,h_1} - f^{(l)}{}_{x,h_2}}{h_2^m - h_1^m} h^m + O(h^{m+1}) . \qquad (3.33)$$

Формула (3.33) позволяет по результатам двух вычислений производной с порядком аппроксимации m найти значение производной с повышенным порядком точности равным $m+1$.

Пример 3.4. Пусть первая производная вычисляется по двум формулам

$$f'(x,h) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h) ,$$

$$f'(x,2h) = \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h) ,$$

имеющим первый порядок точности. В соответствии с (3.33) построим новую формулу при $h_1 = h$, $h_2 = 2h$

$$f'(x) = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{\dfrac{y_1 - y_0}{h} - \dfrac{y_2 - y_0}{2h}}{(2h)^1 - h^1} h^1 + O(h^2) =$$

$$= \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2), \qquad (3.34)$$

которая будет иметь второй порядок точности. Отметим, что формула (3.34) была получена ранее (см. пример 3.1) методом дифференцирования интерполяционной формулы Лагранжа.

3.4. Метод квадратурных формул

Пусть известны значения функции $f(x_i)$ в узловых точках x_i, $i = \overline{0, n}$. В разделе 3.1 задача численного дифференцирования решалась посредством дифференцирования интерполяционных формул. Однако существует другой подход, который основан на использовании квадратурных формул. *Квадратурная формула* вычисления производной k-го порядка имеет вид:

$$f^{(k)}(x) \approx \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i). \qquad (3.35)$$

Коэффициенты C_i выбираются таким образом, чтобы формула (3.35) была точной для любой $f(x)$, являющейся многочленом степени не выше m. Тогда говорят, что квадратурная формула (3.35) имеет порядок алгебраической точности равный m.

Любой многочлен степени m записывается в виде:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j , \qquad (3.36)$$

где a_j – произвольные вещественные числа. Потребуем, чтобы соотношение (3.35) при условии (3.36) обращалось в равенство

$$\left\{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j\right\}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} C_i \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right). \qquad (3.37)$$

Равенство (3.37) должно выполняться для любого многочлена степени m. Для этого достаточно, чтобы коэффициенты при a_j в левой и правой части (3.37) были одинаковы. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_i:

$$\sum_{i=0}^{n} C_i x_i^j = j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k}, \ j = \overline{0, m}. \qquad (3.38)$$

При $m = n$ число уравнений в (3.38) и число неизвестных будет совпадать, матрица системы будет матрицей Вандермонда, а значит невырожденной. Решив систему (3.38), можно по квадратурной формуле вычислить производную функции k-го порядка. Для вычисления производной в другой точке, необходимо пересчитать коэффициенты C_i из системы (3.38) и повторить расчеты по формуле (3.35).

Отметим, что метод квадратурных формул нашел применение для численного дифференцирования функций многих переменных. Численное дифференцирование функций многих переменных можно также реализовать, используя аналитические формулы многомерной аппроксимации, приведенные в п. 2.16.

3.5. Контрольные вопросы

1. Какой порядок точности у формулы $f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$, оценивающей производную первого порядка:
1) 1-й порядок;
2) 2-й порядок;
3) 3-й порядок.

2. Какой порядок точности у формулы $f'(x_1) \approx \frac{y_2 - y_0}{2h}$, оценивающей производную первого порядка:
1) 1-й порядок;
2) 2-й порядок;
3) 3-й порядок.

3. Какой порядок точности у формулы $f'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$, оценивающей производную первого порядка:
1) 1-й порядок;
2) 2-й порядок;
3) 3-й порядок;
4) n-й порядок.

4. Какой порядок точности у формулы $f''(x_k) \approx \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{h^2}$, оценивающей производную второго порядка:
1) 1-й порядок;
2) 2-й порядок;
3) 3-й порядок;
4) 4-й порядок.

5. Какой порядок точности у формулы $f''(x_n + th) \approx$ $\approx \frac{\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3}(t+1)}{h^2}$, оценивающей производную второго порядка:

1) 1-й порядок;
2) 2-й порядок;
3) 3-й порядок;
4) 4-й порядок;
5) n -й порядок.

6. Укажите, как зависит порядок точности формулы, оценивающей производную от количества табличных значений функции, входящих в формулу:
1) не зависит;
2) с ростом количества табличных значений порядок точности увеличивается;
3) с уменьшением количества табличных значений порядок точности увеличивается.

7. Укажите, как неустранимая погрешность численного дифференцирования зависит от величины шага таблицы:
1) не зависит;
2) с увеличением шага погрешность уменьшается;
3) с уменьшением шага погрешность уменьшается;
4) с увеличением шага погрешность сначала уменьшается, затем увеличивается.

8. Укажите, как полная погрешность численного дифференцирования зависит от величины шага таблицы:
1) не зависит;
2) с увеличением шага погрешность уменьшается;
3) с уменьшением шага погрешность уменьшается;
4) с увеличением шага погрешность сначала уменьшается, затем увеличивается.

9. Принцип Рунге позволяет:
1) увеличить порядок точности вычисления функции;
2) увеличить порядок точности вычисления производной;
3) вычислять значение функции в точке.

10. Принцип Рунге позволяет :
1) Оценить погрешность численного дифференцирования;
2) вычислить значение функции в точке;
3) оценить порядок точности интерполяционной формулы.

11. Принцип Рунге позволяет :
1) оценить порядок точности интерполяционной формулы;

2) увеличить порядок точности вычисления функции;
3) Оценить шаг таблицы функции, обесечивающий желаемую погрешность численного дифференцирования.

12. Укажите, как связано количество узлов таблицы $(n+1)$ с порядком многочлена m, для которого квадратурная формула вычисления производных точна:

1) такой зависимости нет;
2) $m=n$;
3) $m=n+1$;
4) $m=n-1$;
5) $m-1=n+1$.

3.6. Задания к главе 3

Задание 3.1. Для функции заданной в виде таблицы на равномерной сетке $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0, 10}$, $x_0 = 1,\ h = 0{,}1$ оценить значение первой производной в точках $1{,}0$, $1{,}5$ и $2{,}0$. Определить погрешности считая, что табличные значения заданы с верными знаками $\Delta_{\text{М}}$, $\Delta_{\text{Н}}$, $\Delta_{\text{П}}$ и $h_{\text{опт}}$.

Варианты исходных данных приведены в п. 4.4.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРИАНТЫ К ЗАДАНИЯМ

4.1. Варианты к заданиям 1.1

1. а) x=1,2571, $\Delta x = 0{,}1\ 10^{-2}$,
б) x=0,007751, $\Delta x = 0{,}62\ 10^{-5}$,
в) x=17,392, n=4,
г) $z = e^{-x}/e^{y}$,

2. а) x=21,757, $\Delta x = 0{,}44\ 10^{-2}$,
б) x=0,2887, $\Delta x = 0{,}6\ 10^{-3}$,
в) x=-3,7879, n=2,
г) $z = \sin(x)\ln(y)$;

3. а) x=0,2567, $\Delta x = 0{,}1\ 10^{-1}$,
б) x=0,0027, $\Delta x = 0{,}62\ 10^{-2}$,
в) x=18715,32, n=5,
г) $z = \sin(x) + e^{x}\cos(y)$,

4. а) x=0,00058, $\Delta x = 0{,}47\ 10^{-3}$,
б) x=27,2546, $\Delta x = 0{,}61\ 10^{-2}$,
в) x=571,27, n=4,
г) $z = x^{3}\ln(y)$;

5. а) x=2,70508, $\Delta x = 0{,}3\ 10^{-3}$,
б) x=0,008701, $\Delta x = 0{,}57\ 10^{-5}$,
в) x=2,0104, n=3,
г) $z = y\cos(x^{3})$,

6. а) x=7,00768, $\Delta x = 0{,}65\ 10^{-3}$,
б) x=67,26457, $\Delta x = 0{,}11\ 10^{-4}$,
в) x=2,1587, n=4,
г) $z = ye^{-\sin(x)}$;

7. а) x=0,00968, $\Delta x = 0{,}41\ 10^{-2}$,
б) x=2,1471, $\Delta x = 0{,}72\ 10^{-3}$,
в) x=622,338, n=5,
г) $z = e^{-x}\cos(2y)$,

8. а) x=0,00515, $\Delta x = 0{,}12\ 10^{-3}$,
б) x=0,5871, $\Delta x = 0{,}74\ 10^{-4}$,
в) x=237,881, n=5,
г) $z = \cos(x)\ln(y)$;

9. а) x=0,98344, $\Delta x = 0{,}45\ 10^{-4}$,
б) x=68,7711, $\Delta x = 0{,}59\ 10^{-3}$,
в) x=21,72001, n=4,
г) $z = \sin^{2}(y)/\cos(x)$,

10. а) x=6,0087, $\Delta x = 0{,}2\ 10^{-2}$,
б) x=-3,1122, $\Delta x = 0{,}47\ 10^{-3}$,
в) x=2,2271, n=3,
г) $z = x^{3}(y + \cos(y))$;

11. а) x=7,1034, $\Delta x = 0{,}62\ 10^{-3}$,
б) x=0,00771, $\Delta x = 0{,}35\ 10^{-2}$,

12. а) x=4,2011, $\Delta x = 0{,}66\ 10^{-3}$,
б) x=0,0722, $\Delta x = 0{,}12\ 10^{-2}$,

в) x=-0,00178651, n=3,

г) $z = {(x+1)}/{\cos(y^2)}$,

в) x=0,0000527, n=2,

г) $z = {(x-3)}/{(y^2+1)}$;

13. а) x=1,2571, $\Delta_x = 0{,}1\ 10^{-2}$,

б) x=0,007751, $\Delta_x = 0{,}62\ 10^{-5}$,

в) x=17,392, n=4,

г) $z = {\ln(x)}/{\sin^2(y)}$

14. а) x=21,757, $\Delta_x = 0{,}44\ 10^{-2}$,

б) x=0,2887, $\Delta_x = 0{,}6\ 10^{-3}$,

в) x=-3,7879, n=5,

г) $z = e^{(x)} + \cos^2(y)$,

15. а) x=0,3457, $\Delta_x = 0{,}12\ 10^{-3}$,

б) x=0,5327, $\Delta_x = 0{,}87\ 10^{-3}$,

в) x=7568,2, n=4,

г) $z = {\cos(y)}/{(x^2+1)}$,

16. а) x=0,000712, $\Delta_x = 0{,}24\ 10^{-3}$,

б) x=0,78378, $\Delta_x = 0{,}1\ 10^{-4}$,

в) x=107,9871, n=6,

г) $z = \cos^2(x) + \sin(y)$,

17. а) x=2,74, $\Delta_x = 0{,}49\ 10^{-3}$,

б) x=0,007128, $\Delta_x = 0{,}42\ 10^{-4}$,

в) x=127,512, n=5,

г) $z = \cos(y^2) + x^3$,

18. а) x=0,1757, $\Delta_x = 0{,}68\ 10^{-3}$,

б) x=81,5819, $\Delta_x = 0{,}15\ 10^{-4}$,

в) x=0,12719, n=4,

г) $z = y\,e^{-\cos(x)}$,

19. а) x=6,0051, $\Delta_x = 0{,}28\ 10^{-2}$,

б) x=2,7111, $\Delta_x = 0{,}42\ 10^{-2}$,

в) x=2,1556, n=4,

г) $z = y^2\,e^{-\sin(x)}$,

20. а) x=0,2553, $\Delta_x = 0{,}82\ 10^{-3}$,

б) x=0,0892, $\Delta_x = 0{,}41\ 10^{-4}$,

в) x=3,5761, n=3,

г) $z = \sin(y) + ye^{-x}$,

21. а) x=2,3714, $\Delta_x = 0{,}15\ 10^{-2}$,

б) x=0,22165, $\Delta_x = 0{,}77\ 10^{-4}$,

в) x=0,02001, n=3,

г) $z = y\ln(\cos(x))$,

22. а) x=0,007556, $\Delta_x = 0{,}27\ 10^{-4}$,

б) x=37,5621, $\Delta_x = 0{,}92\ 10^{-3}$,

в) x=12,1686, n=4,

г) $z = 2ye^{x} + \cos(y)$,

23. а) x=1,3091, $\Delta_x = 0{,}456\ 10^{-2}$,

б) x=0,00271, $\Delta_x = 0{,}52\ 10^{-4}$,

24. а) x=1,07156, $\Delta_x = 0{,}38\ 10^{-4}$,

б) x=29,3056, $\Delta_x = 0{,}72\ 10^{-4}$, в) x=124,58, n=4,

г) $z = \cos(x)\ln(y)$,

в) x=856,216, n=5,

г) $z = \sin(x)\cos(2y)$.

4.2. Варианты к заданиям 2.1-2.5

1. $x_0 = 0{,}35$ $y_0 = 1{,}419$
$x_1 = 0{,}48$ $y_1 = 1{,}616$
$x_2 = 0{,}97$ $y_2 = 2{,}637$
$x_3 = 1{,}08$ $y_3 = 2{,}944$
$x_4 = 1{,}18$ $y_4 = 3{,}254$
$x_5 = 1{,}35$ $y_5 = 4{,}119$
$x = 0{,}58$;

2. $x_0 = 0{,}32$ $y_0 = 1{,}377$
$x_1 = 0{,}73$ $y_1 = 2{,}075$
$x_2 = 0{,}97$ $y_2 = 2{,}637$
$x_3 = 1{,}13$ $y_3 = 3{,}095$
$x_4 = 1{,}52$ $y_4 = 4{,}572$
$x_5 = 1{,}59$ $y_5 = 4{,}872$
$x_6 = 2{,}02$ $y_6 = 7{,}538$
$x = 0{,}92$;

3. $x_0 = 0{,}32$ $y_0 = 1{,}377$
$x_1 = 0{,}49$ $y_1 = 1{,}619$
$x_2 = 0{,}98$ $y_2 = 2{,}638$
$x_3 = 1{,}11$ $y_3 = 3{,}034$
$x_4 = 1{,}25$ $y_4 = 3{,}490$
$x_5 = 1{,}53$ $y_5 = 4{,}618$
$x = 1{,}04$;

4. $x_0 = 0{,}09$ $y_0 = 1{,}094$
$x_1 = 0{,}41$ $y_1 = 1{,}506$
$x_2 = 0{,}83$ $y_2 = 2{,}293$
$x_3 = 1{,}06$ $y_3 = 2{,}886$
$x_4 = 1{,}22$ $y_4 = 3{,}387$
$x_5 = 1{,}61$ $y_5 = 5{,}002$
$x_6 = 1{,}69$ $y_6 = 5{,}228$
$x = 0{,}75$;

5. $x_0 = 0{,}17$ $y_0 = 1{,}185$
$x_1 = 0{,}64$ $y_1 = 1{,}896$
$x_2 = 0{,}78$ $y_2 = 2{,}181$
$x_3 = 0{,}89$ $y_3 = 2{,}435$
$x_4 = 1{,}14$ $y_4 = 3{,}126$
$x_5 = 1{,}50$ $y_5 = 4{,}481$
$x = 0{,}85$;

6. $x_0 = 0{,}38$ $y_0 = 1{,}462$
$x_1 = 0{,}49$ $y_1 = 1{,}632$
$x_2 = 0{,}99$ $y_2 = 2{,}691$
$x_3 = 1{,}09$ $y_3 = 2{,}974$
$x_4 = 1{,}19$ $y_4 = 3{,}288$
$x_5 = 1{,}39$ $y_5 = 4{,}072$
$x = 0{,}89$;

7. $x_0 = 0{,}14$ $y_0 = 1{,}150$
$x_1 = 0{,}28$ $y_1 = 1{,}323$
$x_2 = 0{,}57$ $y_2 = 1{,}768$
$x_3 = 1{,}00$ $y_3 = 2{,}718$
$x_4 = 1{,}22$ $y_4 = 3{,}387$
$x_5 = 1{,}35$ $y_5 = 4{,}109$
$x = 0{,}80$;

8. $x_0 = 0{,}38$ $y_0 = 1{,}462$
$x_1 = 0{,}40$ $y_1 = 1{,}491$
$x_2 = 0{,}81$ $y_2 = 2{,}224$
$x_3 = 1{,}25$ $y_3 = 3{,}490$
$x_4 = 1{,}59$ $y_4 = 4{,}903$
$x_5 = 1{,}86$ $y_5 = 6{,}423$
$x = 1{,}12$;

9. $x_0 = 0{,}18$ $y_0 = 1{,}197$
$x_1 = 0{,}65$ $y_1 = 1{,}915$
$x_2 = 0{,}80$ $y_2 = 2{,}225$
$x_3 = 0{,}92$ $y_3 = 2{,}509$
$x_4 = 1{,}20$ $y_4 = 3{,}320$

10. $x_0 = 0{,}40$ $y_0 = 1{,}491$
$x_1 = 0{,}66$ $y_1 = 1{,}934$
$x_2 = 0{,}83$ $y_2 = 2{,}293$
$x_3 = 1{,}27$ $y_3 = 3{,}560$
$x_4 = 1{,}37$ $y_4 = 3{,}935$

$x_5 = 1{,}59 \quad y_5 = 4{,}903$

$x = 1{,}04$;

$x_5 = 1{,}46 \quad y_5 = 4{,}172$
$x_6 = 1{,}54 \quad y_6 = 4{,}664$

$x = 1{,}01$;

11. $x_0 = 0{,}05 \quad y_0 = 1{,}051$
$x_1 = 0{,}38 \quad y_1 = 1{,}462$
$x_2 = 0{,}77 \quad y_2 = 2{,}159$
$x_3 = 0{,}98 \quad y_3 = 2{,}664$
$x_4 = 1{,}08 \quad y_4 = 2{,}944$
$x_5 = 1{,}18 \quad y_5 = 3{,}619$
$x = 0{,}83$;

12. $x_0 = 0{,}41 \quad y_0 = 1{,}506$
$x_1 = 0{,}71 \quad y_1 = 2{,}033$
$x_2 = 0{,}93 \quad y_2 = 2{,}534$
$x_3 = 0{,}96 \quad y_3 = 2{,}611$
$x_4 = 1{,}21 \quad y_4 = 3{,}353$
$x_5 = 1{,}48 \quad y_5 = 4{,}392$
$x = 1{,}03$;

13. $x_0 = 0{,}48 \quad y_0 = 1{,}616$
$x_1 = 0{,}55 \quad y_1 = 1{,}733$
$x_2 = 0{,}60 \quad y_2 = 1{,}822$
$x_3 = 0{,}72 \quad y_3 = 2{,}054$
$x_4 = 0{,}90 \quad y_4 = 2{,}459$
$x_5 = 1{,}20 \quad y_5 = 3{,}320$
$x_6 = 1{,}67 \quad y_6 = 5{,}312$
$x = 0{,}59$;

14. $x_0 = 0{,}07 \quad y_0 = 1{,}072$
$x_1 = 0{,}44 \quad y_1 = 1{,}552$
$x_2 = 0{,}89 \quad y_2 = 2{,}435$
$x_3 = 1{,}20 \quad y_3 = 3{,}320$
$x_4 = 1{,}47 \quad y_4 = 4{,}349$
$x_5 = 1{,}59 \quad y_5 = 4{,}852$

$x = 0{,}99$;

15. $x_0 = 0{,}08 \quad y_0 = 1{,}083$
$x_1 = 0{,}31 \quad y_1 = 1{,}363$
$x_2 = 0{,}62 \quad y_2 = 1{,}858$
$x_3 = 0{,}69 \quad y_3 = 1{,}949$
$x_4 = 1{,}00 \quad y_4 = 2{,}718$
$x_5 = 1{,}39 \quad y_5 = 4{,}014$

$x = 0{,}46$;

16. $x_0 = 0{,}11 \quad y_0 = 1{,}116$
$x_1 = 0{,}52 \quad y_1 = 1{,}682$
$x_2 = 0{,}59 \quad y_2 = 7{,}789$
$x_3 = 0{,}98 \quad y_3 = 2{,}664$
$x_4 = 1{,}44 \quad y_4 = 4{,}220$
$x_5 = 1{,}84 \quad y_5 = 6{,}296$
$x_6 = 2{,}19 \quad y_6 = 8{,}935$
$x = 0{,}91$;

17. $x_0 = 0{,}29 \quad y_0 = 1{,}336$
$x_1 = 0{,}40 \quad y_1 = 1{,}494$
$x_2 = 0{,}81 \quad y_2 = 2{,}247$
$x_3 = 0{,}83 \quad y_3 = 2{,}293$
$x_4 = 1{,}27 \quad y_4 = 3{,}560$
$x_5 = 1{,}72 \quad y_5 = 5{,}584$
$x_6 = 2{,}11 \quad y_6 = 8{,}248$
$x = 0{,}34$;

18. $x_0 = 0{,}16 \quad y_0 = 1{,}173$
$x_1 = 0{,}20 \quad y_1 = 1{,}221$
$x_2 = 0{,}41 \quad y_2 = 1{,}506$
$x_3 = 0{,}65 \quad y_3 = 1{,}915$
$x_4 = 1{,}09 \quad y_4 = 2{,}974$
$x_5 = 1{,}19 \quad y_5 = 3{,}172$

$x = 0{,}23$;

19. $x_0 = 0{,}29$ $y_0 = 1{,}347$
$x_1 = 0{,}62$ $y_1 = 1{,}858$
$x_2 = 0{,}74$ $y_2 = 2{,}095$
$x_3 = 1{,}19$ $y_3 = 3{,}286$
$x_4 = 1{,}26$ $y_4 = 3{,}525$
$x_5 = 1{,}39$ $y_5 = 4{,}009$
$x = 1{,}02$;

20. $x_0 = 0{,}35$ $y_0 = 1{,}419$
$x_1 = 0{,}71$ $y_1 = 2{,}033$
$x_2 = 0{,}93$ $y_2 = 2{,}534$
$x_3 = 1{,}01$ $y_3 = 2{,}745$
$x_4 = 1{,}31$ $y_4 = 3{,}706$
$x_5 = 1{,}69$ $y_5 = 5{,}419$
$x = 0{,}89$;

21. $x_0 = 0{,}34$ $y_0 = 1{,}404$
$x_1 = 0{,}49$ $y_1 = 1{,}632$
$x_2 = 0{,}99$ $y_2 = 2{,}691$
$x_3 = 1{,}15$ $y_3 = 3{,}158$
$x_4 = 1{,}31$ $y_4 = 3{,}706$
$x_5 = 1{,}62$ $y_5 = 5{,}053$
$x = 0{,}91$;

22. $x_0 = 0{,}11$ $y_0 = 1{,}118$
$x_1 = 0{,}55$ $y_1 = 1{,}733$
$x_2 = 0{,}60$ $y_2 = 1{,}822$
$x_3 = 1{,}08$ $y_3 = 2{,}944$
$x_4 = 1{,}12$ $y_4 = 3{,}064$
$x_5 = 1{,}15$ $y_5 = 3{,}158$
$x = 0{,}72$;

23. $x_0 = 0{,}06$ $y_0 = 1{,}061$
$x_1 = 0{,}29$ $y_1 = 1{,}336$
$x_2 = 0{,}58$ $y_2 = 1{,}786$
$x_3 = 0{,}81$ $y_3 = 2{,}644$
$x_4 = 0{,}90$ $y_4 = 2{,}459$
$x_5 = 1{,}22$ $y_5 = 3{,}387$
$x = 0{,}48$;

24. $x_0 = 0{,}35$ $y_0 = 1{,}433$
$x_1 = 0{,}75$ $y_1 = 2{,}117$
$x_2 = 1{,}01$ $y_2 = 2{,}745$
$x_3 = 1{,}15$ $y_3 = 3{,}158$
$x_4 = 1{,}55$ $y_4 = 4{,}711$
$x_5 = 1{,}69$ $y_5 = 4{,}972$
$x = 0{,}91$.

4.3. Варианты к заданиям 2.6

1. $\cos(x) + \frac{x^4}{20}$, $x \in [0{,}3 \quad 1{,}2]$;

2. $\sin(x) + \frac{x^4}{15}$, $x \in [0{,}1 \quad 1{,}2]$;

3. $\sin(x) + \cos(x) + e^{-x}$, $x \in [0{,}4 \quad 1{,}3]$;

4. $x\cos(x)$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}85]$;

5. $x^2\cos(x)$, $x \in [0{,}2 \quad 0{,}9]$;

6. $x\sin(x)$, $x \in [0{,}4 \quad 1{,}3]$;

7. $x^2\sin(x)$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}9]$;

8. $\sin(2x) + \frac{x^4}{12}$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}88]$;

9. $x\sin(2x)$, $x \in [0{,}2 \quad 1{,}1]$;

10. $\cos(2x)+\frac{x^4}{20}$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}75]$;

11. $e^x\cos(x)$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}9]$;

12. $e^{-x}\sin(x)$, $x \in [0{,}15 \quad 0{,}87]$;

13. $e^{-x}\cos(2x)$, $x \in [0{,}2 \quad 1{,}25]$;

14. $e^{-x}\cos(x)+\sin(x)$, $x \in [0{,}25 \quad 1{,}25]$;

15. $e^x\cos(3x)$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}78]$;

16. $xe^x-3\cos(x)$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}88]$;

17. x^2e^x, $x \in [0{,}2 \quad 0{,}75]$;

18. $\cos(2x)+\frac{x^5}{100}$, $x \in [0{,}05 \quad 0{,}85]$;

19. $\sin(x)+e^x\cos(x)$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}83]$;

20. $x^2\ln(x)$, $x \in [0{,}2 \quad 0{,}98]$;

21. $\sin(x)\ln(x)$, $x \in [0{,}3 \quad 1{,}17]$;

22. $\frac{1}{4}x^3e^{-x}+1$, $x \in [0{,}15 \quad 0{,}96]$;

23. $\frac{1}{8}x^3\cos(2x)+2$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}77]$;

24. $e^{-x}\sin(x)$, $x \in [0{,}1 \quad 0{,}95]$.

4.4. Варианты к заданиям 2.7-2.8, 3.1

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
$y_0 = 0{,}322$	$y_0 = 6{,}850$	$y_0 = -0{,}417$	$y_0 = 24{,}901$	$y_0 = 0{,}070$
$y_1 = 0{,}284$	$y_1 = 5{,}539$	$y_1 = -0{,}751$	$y_1 = 26{,}244$	$y_1 = -0{,}134$
$y_2 = 0{,}241$	$y_2 = 4{,}601$	$y_2 = -0{,}966$	$y_2 = 27{,}541$	$y_2 = -0{,}343$
$y_3 = 0{,}193$	$y_3 = 3{,}902$	$y_3 = -0{,}972$	$y_3 = 28{,}790$	$y_3 = -0{,}544$
$y_4 = 0{,}135$	$y_4 = 3{,}363$	$y_4 = -0{,}713$	$y_4 = 29{,}992$	$y_4 = -0{,}724$
$y_5 = 0{,}063$	$y_5 = 2{,}937$	$y_5 = -0{,}211$	$y_5 = 31{,}144$	$y_5 = -0{,}870$
$y_6 = -0{,}031$	$y_6 = 2{,}594$	$y_6 = 0{,}396$	$y_6 = 32{,}251$	$y_6 = -0{,}966$
$y_7 = -0{,}164$	$y_7 = 2{,}313$	$y_7 = 0{,}876$	$y_7 = 33{,}313$	$y_7 = -1{,}000$
$y_8 = -0{,}369$	$y_8 = 2{,}079$	$y_8 = 0{,}980$	$y_8 = 34{,}334$	$y_8 = -0{,}962$
$y_9 = -0{,}741$	$y_9 = 1{,}882$	$y_9 = 0{,}592$	$y_9 = 35{,}320$	$y_9 = -0{,}846$
$y_{10} = -1{,}664$	$y_{10} = 1{,}715$	$y_{10} = -0{,}146$	$y_{10} = 36{,}275$	$y_{10} = -0{,}664$

$x = 0,98$	$x = 1,02$	$x = 2,01$	$x = 1,05$	$x = 0,96$
$\overline{x} = 1,56$;	$\overline{x} = 1,67$;	$\overline{x} = 1,42$;	$\overline{x} = 1,53$;	$\overline{x} = 1,45$;

6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
$y_0 = 0,614$	$y_0 = -2,186$	$y_0 = 5,430$	$y_0 = 0,794$	$y_0 = 21,779$
$y_1 = 0,614$	$y_1 = -1,710$	$y_1 = 5,815$	$y_1 = 0,773$	$y_1 = 25,505$
$y_2 = 0,640$	$y_2 = -1,734$	$y_2 = 6,211$	$y_2 = 0,723$	$y_2 = 29,577$
$y_3 = 0,685$	$y_3 = -1,120$	$y_3 = 6,620$	$y_3 = 0,662$	$y_3 = 34,017$
$y_4 = 0,741$	$y_4 = -0,917$	$y_4 = 7,051$	$y_4 = 0,600$	$y_4 = 38,852$
$y_5 = 0,801$	$y_5 = -0,748$	$y_5 = 7,509$	$y_5 = 0,543$	$y_5 = 44,109$
$y_6 = 0,856$	$y_6 = -0,602$	$y_6 = 8,001$	$y_6 = 0,494$	$y_6 = 49,822$
$y_7 = 0,902$	$y_7 = -0,473$	$y_7 = 8,535$	$y_7 = 0,450$	$y_7 = 56,027$
$y_8 = 0,936$	$y_8 = -0,356$	$y_8 = 9,119$	$y_8 = 0,412$	$y_8 = 62,768$
$y_9 = 0,956$	$y_9 = -0,247$	$y_9 = 9,762$	$y_9 = 0,380$	$y_9 = 70,091$
$y_{10} = 0,970$	$y_{10} = -0,143$	$y_{10} = 10,475$	$y_{10} = 0,351$	$y_{10} = 78,052$
$x = 1,01$	$x = 2,03$	$x = 1,06$	$x = 1,05$	$x = 1,07$
$\overline{x} = 1,62$;	$\overline{x} = 1,47$;	$\overline{x} = 1,66$;	$\overline{x} = 1,49$;	$\overline{x} = 1,46$;

11.	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
$y_0 = 10,824$	$y_0 = 4,860$	$y_0 = 1,257$	$y_0 = 3,981$	$y_0 = 6,492$
$y_1 = 10,431$	$y_1 = 4,462$	$y_1 = 1,524$	$y_1 = 3,837$	$y_1 = 6,879$
$y_2 = 9,918$	$y_2 = 3,906$	$y_2 = 1,728$	$y_2 = 3,648$	$y_2 = 7,340$
$y_3 = 9,310$	$y_3 = 3,169$	$y_3 = 1,849$	$y_3 = 3,424$	$y_3 = 7,889$
$y_4 = 8,631$	$y_4 = 2,222$	$y_4 = 1,867$	$y_4 = 3,175$	$y_4 = 8,547$
$y_5 = 7,911$	$y_5 = 1,027$	$y_5 = 1,768$	$y_5 = 2,910$	$y_5 = 9,339$
$y_6 = 7,173$	$y_6 = -0,475$	$y_6 = 1,547$	$y_6 = 2,638$	$y_6 = 10,300$
$y_7 = 6,442$	$y_7 = -2,363$	$y_7 = 1,215$	$y_7 = 2,369$	$y_7 = 11,479$
$y_8 = 5,735$	$y_8 = -4,755$	$y_8 = 0,798$	$y_8 = 2,109$	$y_8 = 12,939$
$y_9 = 5,068$	$y_9 = -7,829$	$y_9 = 0,339$	$y_9 = 1,864$	$y_9 = 14,777$
$y_{10} = 4,451$	$y_{10} = -11,87$	$y_{10} = -0,104$	$y_{10} = 1,637$	$y_{10} = 17,127$
$x = 1,95$	$x = 1,04$	$x = 1,02$	$x = 1,0$	$x = 1,92$
$\overline{x} = 1,56$;	$\overline{x} = 1,52$;	$\overline{x} = 1,61$;	$\overline{x} = 1,49$;	$\overline{x} = 1,46$;

16.	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**
$y_0 = 0,649$	$y_0 = 1,449$	$y_0 = 1,000$	$y_0 = 7,237$	$y_0 = 5,215$
$y_1 = 0,757$	$y_1 = 1,161$	$y_1 = 1,215$	$y_1 = 7,436$	$y_1 = 5,658$
$y_2 = 0,881$	$y_2 = 0,805$	$y_2 = 1,465$	$y_2 = 7,725$	$y_2 = 6,105$
$y_3 = 1,027$	$y_3 = 0,396$	$y_3 = 1,754$	$y_3 = 8,123$	$y_3 = 6,560$
$y_4 = 1,197$	$y_4 = -0,045$	$y_4 = 2,088$	$y_4 = 8,654$	$y_4 = 7,025$
$y_5 = 1,401$	$y_5 = -0,488$	$y_5 = 2,473$	$y_5 = 9,361$	$y_5 = 7,504$

$y_6 = 1{,}648$	$y_6 = -0{,}894$	$y_6 = 2{,}915$	$y_6 = 10{,}305$	$y_6 = 8{,}000$
$y_7 = 1{,}951$	$y_7 = -1{,}225$	$y_7 = 3{,}423$	$y_7 = 11{,}589$	$y_7 = 8{,}517$
$y_8 = 2{,}329$	$y_8 = -1{,}438$	$y_8 = 4{,}005$	$y_8 = 13{,}393$	$y_8 = 9{,}059$
$y_9 = 2{,}807$	$y_9 = -1{,}505$	$y_9 = 4{,}673$	$y_9 = 16{,}051$	$y_9 = 9{,}631$
$y_{10} = 3{,}425$	$y_{10} = -1{,}411$	$y_{10} = 5{,}436$	$y_{10} = 20{,}277$	$y_{10} = 10{,}237$
$x = 2{,}05$	$x = 1{,}05$	$x = 2{,}01$	$x = 1{,}99$	$x = 1{,}06$
$\bar{x} = 1{,}44$;	$\bar{x} = 1{,}65$;	$\bar{x} = 1{,}52$;	$\bar{x} = 1{,}43$;	$\bar{x} = 1{,}46$;

21.	***22.***	***23.***	***24.***	***25.***
$y_0 = 0{,}150$	$y_0 = 5{,}463$	$y_0 = 2{,}426$	$y_0 = 8{,}631$	$y_0 = 0{,}909$
$y_1 = 0{,}202$	$y_1 = 6{,}131$	$y_1 = 2{,}798$	$y_1 = 7{,}312$	$y_1 = 0{,}660$
$y_2 = 0{,}273$	$y_2 = 6{,}841$	$y_2 = 3{,}188$	$y_2 = 6{,}236$	$y_2 = 0{,}258$
$y_3 = 0{,}373$	$y_3 = 7{,}602$	$y_3 = 3{,}597$	$y_3 = 5{,}357$	$y_3 = -0{,}237$
$y_4 = 0{,}510$	$y_4 = 8{,}422$	$y_4 = 4{,}026$	$y_4 = 4{,}634$	$y_4 = -0{,}703$
$y_5 = 0{,}697$	$y_5 = 9{,}315$	$y_5 = 4{,}476$	$y_5 = 4{,}036$	$y_5 = -0{,}978$
$y_6 = 0{,}955$	$y_6 = 10{,}296$	$y_6 = 4{,}952$	$y_6 = 3{,}539$	$y_6 = -0{,}919$
$y_7 = 1{,}308$	$y_7 = 11{,}383$	$y_7 = 5{,}457$	$y_7 = 3{,}122$	$y_7 = -0{,}483$
$y_8 = 1{,}792$	$y_8 = 12{,}601$	$y_8 = 5{,}998$	$y_8 = 2{,}771$	$y_8 = 0{,}195$
$y_9 = 2{,}460$	$y_9 = 13{,}983$	$y_9 = 6{,}581$	$y_9 = 2{,}473$	$y_9 = 0{,}805$
$y_{10} = 3{,}393$	$y_{10} = 15{,}574$	$y_{10} = 7{,}215$	$y_{10} = 2{,}219$	$y_{10} = 0{,}989$
$x = 1{,}01$	$x = 1{,}08$	$x = 1{,}97$	$x = 1{,}04$	$x = 1{,}03$
$\bar{x} = 1{,}59$;	$\bar{x} = 1{,}51$;	$\bar{x} = 1{,}62$;	$\bar{x} = 1{,}48$;	$\bar{x} = 1{,}49$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. 1. − М.: Наука, 1976. − 304 с.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Интерполирование и интегрирование. − Минск: Наука и техника, 1983. − 287 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. − М.: Наука, 1989. − 536 с.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы. − М.: Лань, 2009. − 288 с.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. − М.: Изд-во МГУ, 2006. − 600 с.
6. Волков Е.А. Численные методы. − М.:Лань, 2008. − 256 с.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. − М.: Наука, 1978. − 512 с.

8. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. − М.:Лань, 2009. − 368 с.
9. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. − М.: Наука, 1980. − 252 с.
10. Смагин В.И., Решетникова Г.Н. Численные методы. Аппроксимация, дифференцирование, интегрирование. Учебное пособие. − Изд-во ТГУ, 2008. − 184 с.
11. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / 3-е издание, стереотипное. − М.: Высшая школа, 2009. − 840 с