**Министерство образования и науки Российской Федерации**
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации

# ТЕОРИЯ ИГР

Методические указания к лабораторным занятиям и организации
самостоятельной работы
для студентов направления 080500.62
«Бизнес-информатика»
(уровень бакалавриата)

**2018**

**Салмина Нина Юрьевна**
Теория игр: Методические указания к лабораторным работам и организации самостоятельной работы для студентов направления «Бизнес-информатика» (уровень бакалавриата) / Н.Ю.Салмина. – Томск, 2018. – 48 с.

# Оглавление

# 1 Введение

Цель дисциплины – формирование у студентов профессиональных знаний и практических навыков по решению задач принятия решений в условиях противодействия, а также по решению задач кооперативного принятия решений; разработке и созданию игровых моделей с целью исследования сложных систем, решению экономических задач.

Для успешного освоения дисциплины необходимы знания по следующим разделам высшей математики: алгебра и геометрия, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика, дискретная математика, исследование операций.

В результате изучения дисциплины «Теория игр» студент должен уметь применять игровые модели в задачах принятия решений в условиях противодействия, кооперативного принятия решений; строить игровые модели; находить и интерпретировать решения с помощью построенных моделей. Студент должен иметь навыки использования различных методов математического моделирования сложных систем.

Изучение дисциплины включает в себя: теоретический раздел (изучение теоретического материала); практический раздел (выполнение лабораторных и контрольных работ); итоговый контроль результата изучения дисциплины. Данное пособие содержит в себе методические указания и варианты заданий для лабораторных работ, а также методически указания к выполнению самостоятельной работы.

# 2 Методические указания к проведению лабораторных работ

## 2.1 Лабораторная работа «Решение антагонистических игр в матричной форме»

**Цель работы**

Изучение различных форм представления игр. Получение навыков представления игр в нормальной форме. Проведение анализа различных игровых ситуаций.

Изучение моделей принятия решений в конфликтных ситуациях для антагонистических игр в нормальной форме и решения их различными методами: аналитическим, итерационным и методом линейного программирования.

**Рекомендации по подготовке к работе**

В данной лабораторной работе рассматривается представление и решение антагонистических игр.

В качестве инструментального средства для выполнения лабораторной работы используется автоматизированная система «Антагонистические игры» (файл Ant_games.exe).

Первоначально, до работы с системой, необходимо представить игру в нормальной форме. Для этого внимательно прочитайте описание игры, определите количество чистых стратегий для каждого игрока. Помните, что любая чистая стратегия – это правило, определяющее поведение игрока от начала до конца игры. Особенно внимательно определяйте стратегии в многоходовых играх. Попытайтесь сначала описать поведение игрока на качественном, словесном уровне. К стратегии игрока относятся только те действия, которые совершает сам игрок. Эти действия должны определяться однозначно: игрок всегда может выбрать ту или иную стратегию и придерживаться ее до конца игры. Он не может предсказать только последствия своих действий (в совокупности с действиями других игроков или случая), но свое поведение в той или иной ситуации он определяет до начала игры.

Для дальнейшего представления игры, например, построения платежной матрицы, старайтесь сразу записывать стратегии в компактной и удобной для интерпретации форме.

*Например*, пусть сначала игрок должен назвать число 1 или 2. На втором своем шаге он должен выбрать одно из двух чисел 3 или 4. Тогда у него получается четыре чистых стратегии, которые можно обозначить следующим образом: {13, 14, 23, 24}.

Если в игре присутствует случай (бросание монеты, выбор числа с какой-то вероятностью и т.д.), то выигрыши игроков обычно представляют в виде средних значений (с учетом вероятностей наступления различных событий). Если результатом игры является просто выигрыш или проигрыш игрока, то с учетом случайности наступления событий значениями функций выигрышей являются вероятности выигрыша/проигрыша игроков.

Иногда, если есть затруднения построения сразу нормальной формы игры, многоходовые игры можно сначала представить в позиционной форме, а затем перейти к нормальной.

После того, как стратегии определены, строится платежная матрица игры. После этого матрица вводится через опцию меню «Ввод данных». Если выигрыши первого игрока можно записать в виде функции выигрыша (либо функция выигрыша сразу определена в варианте), то платежная матрица вводится формулой.

*При вводе формулы нужно помнить следующее:*

1) обязательно введите выражение “F(x)=”, либо просто не стирайте его с экрана. Примечание: не вводите “F(x,y)=”! Конечно, функция зависит от двух аргументов (стратегий первого и второго игроков) но в шаблоне распознавателя формул левая часть уравнения выглядит именно так, как она записана на экране по умолчанию;

2) все правое выражение заключается в скобки, все символы вводятся большими буквами; умножение обозначается через символ ‘*’, деление – через символ ‘/’, возведение в степень – через символ ‘^’, например, формула $(-1)^{x+y}(x+y)$ должна быть введена следующим образом:

F(x)=((-1)^(X+Y)*(X+Y))

3) под название встроенных функций отводится четыре позиции. Если функция обозначается тремя буквами, то четвертая позиция определяется пробелом, например:

F(x)=(SIN (X+Y))

4) обращайте особое внимание на расстановку скобок в сложных функциях: скобки определяют приоритеты операций по стандартной схеме приоритетов.

Введенные вами данные можно запомнить в файл. При необходимости, записанные ранее в файл данные можно считать из файла.

Введенная вами платежная матрица может быть при необходимости сокращена, если вы воспользуетесь пунктом меню «Сокращение матрицы».

***Внимание!*** Если вы сокращаете матрицу, обратите внимание на то, какие именно столбцы и строки будут сокращены. В окончательном варианте представления решения оптимальные стратегии должны быть даны для исходной (несокращенной матрицы)!

Пункт меню «Методы» позволит вам выбрать нужный метод для решения поставленной задачи. Решение может быть произведено одним из трех методов: аналитическим, итерационным, методом линейного программирования (симплекс-метод).

*Аналитический метод.* Для решения задачи данным методом платежная матрица должна иметь размерность 2х2. В случае, когда размерность матрицы больше, чем два на два, система предупреждает о некорректном вводе данных.

*Итерационный метод.* Для решения задачи методом итераций пользователь должен ввести либо точность вычисления, либо количество итераций. Для игр с плохой сходимостью при высокой точности может потребоваться очень большое количество итераций. Система предупреждает, что идет процесс расчета и предлагает немного подождать. При решении игры методом итераций необходимо:

1) определить требуемую точность вычислений и решить задачу методом итераций;
2) исследовать игру на сходимость: получить решение для разного количества итераций (например, для 50, 500, 1000, 5000 …) и посмотреть, насколько изменяются результаты решения при различном количестве итераций: насколько быстро сходится игра.

После окончания работы метода итераций вы можете посмотреть результаты на экране, и/или записать данные в файл. В системе полную информацию с результатами решений можно посмотреть также, выбрав опцию меню «Результаты/Результат итерационного».

*Метод линейного программирования (симплекс-метод).* При выборе опции меню «Методы/Симплекс» ваша задача будет решаться двухэтапным симплекс-методом. После окончания работы метода на экран выдается сообщение об успешном завершении вычислений. Результаты расчетов по симплекс-методу вы можете посмотреть на экране, а также записать в файл. В системе полную информацию также можно посмотреть, выбрав опцию меню «Результат/Результат симплекс».

***Внимание!*** Окончательное решение симплекс-метода содержит оптимальные планы, а не оптимальные стратегии игроков. Чтобы получить окончательное решение необходимо:

1) из окончательной симплекс-таблицы выбрать оптимальные стратегии игроков. Здесь задача решается для второго игрока,

поэтому оптимальный план первого игрока определяется по дополнительным переменным из строки целевой функции, а оптимальный план второго игрока определяется по значениям основных переменных в базисе. Будьте внимательны! При выборе значений основных переменных обращайте внимание на базис, который определяет порядок их расположения в таблице. Если какая-либо основная переменная в базисе отсутствует, значит ее значение равно нулю;

2) определить цену игры, как обратное значение целевой функции (-Z);
3) перейти от оптимальных планов к оптимальным стратегиям. Для этого необходимо умножить эти планы на цену игры;
4) откорректировать при необходимости цену игры: в связи с тем, что для решения игры симплекс-методом, исходная матрица делается положительной, то и цена игры выдается увеличенной на соответствующее число. В результатах решения указывается число, на которое была увеличена цена игры.

После проведения расчетов всеми указанными методами необходимо провести сравнительный анализ результатов. Прежде всего, определите, одинаковы ли оптимальные стратегии, полученные симплекс-методом и методом итераций. Различие между полученными стратегиями может быть:

а) незначительное, вызванное тем, что итерационный метод выдает решение лишь с какой-то точностью;

б) принципиальное, когда два метода дают абсолютно разные оптимальные стратегии.

Проанализируйте, какая ситуация сложилась в вашем случае. Если два решения принципиально различны, то ответьте на вопрос: какое из полученных решений удобнее применять на практике. Какое из решений лучше с точки зрения каждого игрока? Обоснуйте ваши рекомендации.

**Пример выполнения работы**

***а) пример представление игры в нормальной форме (присутствует случай).***

Дана антагонистическая игра (дуэль). Игроки продвигаются навстречу друг другу на 5 шагов. После каждого сделанного шага игрок может выстрелить или нет, но во время игры он может выстрелить только один раз. Считается, что вероятность того, что игрок попадает в своего противника, если выстрелит, продвинувшись на $k$ шагов, равна

$k/n \quad (k \le n)$.

Здесь стратегия игрока *1* (*2*) заключается в принятии решения стрелять на $i$-м ($j$-м) шаге. Пусть $i < j$ и игрок *1* принимает решение стрелять на $i$-м шаге, а игрок *2* – на $j$-м шаге. Тогда выигрыш $a_{ij}$ игрока *1* определяется формулой

$$a_{ij} = \frac{i}{5} - \left(1 - \frac{i}{5}\right)\frac{j}{5} = \frac{n(i-j)+ij}{n^2}.$$

Таким образом, выигрыш $a_{ij}$ – это разность вероятностей поражения противника и собственной гибели в дуэли. В случае $i > j$ первым стреляет игрок *2* и $a_{ij} = -a_{ji}$. Если же $i = j$, то полагаем $a_{ij} = 0$. Тогда платежная матрица игры примет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3/25 & -7/25 & -11/25 & -15/25 \\ 3/25 & 0 & 1/25 & -2/25 & -5/25 \\ 7/25 & -1/25 & 0 & 7/25 & 5/25 \\ 11/25 & 2/25 & -7/25 & 0 & 15/25 \\ 15/25 & 5/25 & -5/25 & -15/25 & 0 \end{bmatrix}$$

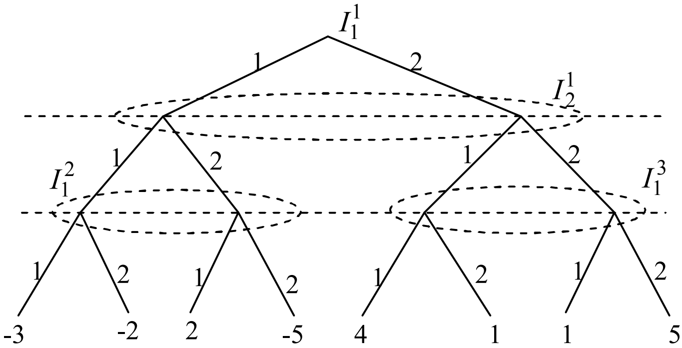
***б) пример представление игры в позиционной форме и переход к нормальной форме.***

Дана антагонистическая игра. Игрок *1* на первом ходу выбирает число из множества $\{1,2\}$. Второй ход делает игрок *2*. Не зная хода игрока *1*, он выбирает число из множества $\{1,2\}$. Третий ход опять делает игрок *1*, не зная хода игрока *2*, но помня свой выбор на первом ходу, он выбирает число из множества $\{1,2\}$. На этом игра прекращается, и игрок *1* получает выигрыш, который определен следующей функцией:

$$J(1,1,1) = -3, \quad J(1,1,2) = -2, \quad J(1,2,1) = 2, \quad J(1,2,2) = -5,$$

$$J(2,1,1) = 4, \quad J(2,1,2) = 1, \quad J(2,2,1) = 1, \quad J(2,2,2) = 5.$$

Данная игра может быть представлена следующим графом (игрок *1* имеет здесь три информационных множества, игрок *2* – одно):




Определим чистые стратегии игроков. Первый игрок имеет три информационных множества, содержащих по 2 альтернативы – 8 чистых стратегий. Второй игрок имеет одно информационное множество с двумя альтернативами – получаем 2 чистые стратегии.

Представим чистые стратегии игроков в виде двух таблиц (для 1-го и 2-го игроков). При описании чистой стратегии для каждого информационного множества игрока определяется альтернатива, которую он должен выбрать на данном ходу. Для 1-го игрока сразу сократим количество чистых стратегий, учитывая тот факт, что, выбрав на 1-м ходу единицу, он никак не попадет в третье информационное множество, а выбрав двойку, он не попадет во второе информационное множество.

| | $I_1'$ | $I_1^2$ | $I_1^3$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 1 | 1 | - |
| $\alpha_2$ | 1 | 2 | - |
| $\alpha_3$ | 2 | - | 1 |
| $\alpha_4$ | 2 | - | 2 |

| | $I_2^1$ |
|---|---|
| $\beta_1$ | 1 |
| $\beta_2$ | 2 |

Строим платежную матрицу игры:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $\alpha_1$ | -3 | 2 |
| $\alpha_2$ | -2 | -5 |
| $\alpha_3$ | 4 | 1 |
| $\alpha_4$ | 1 | 5 |

***в) пример выполнения работы с решением.***

*Постановка задачи.*

У каждого из игроков по две монеты, достоинством 1 рубль и 2 рубля. Оба одновременно выкладывают по одной из них на стол. Если достоинство монет совпадает, то выложенные деньги забирает первый игрок, если нет – то второй.

*Построение модели.*

Построим модель в нормальной (матричной) форме. Обозначим стратегии:

a1 – первый игрок выложил 1 рубль;

a2 – первый игрок выложил 2 рубля;

b1 – второй игрок выложил 1 рубль;

b2 – второй игрок выложил 2 рубля.

Если полезность исхода считать равной величине выигрыша (а это может быть и не так, может быть кому-то нравится сам процесс игры, а выигрыш его не волнует), то матрицы полезности будут равны:

A=$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$, B=$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Принимая во внимание, что мы рассматриваем антагонистическую игру, в которой выигрыш первого игрока является проигрышем второго, в качестве платежной матрицы выбираем матрицу полезности первого игрока.

Смешанные стратегии определяются здесь как $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$. Цена игры определяется по формуле:

$$V = \sum_{i,j} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j \ .$$

Решая задачу итеративным методом, нам необходимо вычислить эмпирические смешанные стратегии игроков и цену игры:

$$S_1 = (p_1, ..., p_m), \quad S_2 = (g_1, ..., g_n),$$

где $S_i$ – эмпирическая смешанная стратегия $i$-го игрока;

$p_i, g_j$ – относительная частота применения $i$-го и $j$-го хода, соответственно, первого и второго игроков.

$$V = (v_н + v_в)/2,$$

где $v_н$ – минимально накопленный выигрыш, разделенный на число партий;

$v_в$ – максимально накопленный выигрыш, разделенный на число партий.

Решая задачу аналитическим методом, получим:

$$X = (0.667, 0.333), \quad Y = (0.500, 0.500), \quad V = 0.000 .$$

Решая задачу итеративным методом (число итераций 100), получим: $S_1 = (0.670, 0.330), \quad S_2 = (0.500, 0.500), \quad V = 0.000$ .

Решая задачу симплекс-методом, получаем следующие оптимальные планы игроков и значение целевой функции:

$$U^* = (0.333, 0.167), \quad W^* = (0.25, 0.25), \quad -Z = 0.5 ,$$

Кроме этого, указывается, что цена игры увеличена на 2, $V^* = 2$ .

Переходим к смешанным стратегиям игроков:

$$X = (0.667, 0.333), \quad Y = (0.5, 0.5), \quad V = V^* - 2 = 0 .$$

Все три метода дают одинаковое единственное решение.

### Порядок проведения работы

1. Необходимо представить описанную игру в нормальной форме: описать чистые стратегии игроков и записать платежную матрицу.
2. Решить игру методом линейного программирования.
3. Решить игру методом итераций. Первоначально попытаться решить игру, определяя точность расчета. После этого необходимо исследовать игру на сходимость, задавая различное количество итераций. Решение определить при максимально достигаемой точности.
4. Если это возможно, решить игру аналитическим методом.
5. Сравнить результаты, полученные после вычисления всеми тремя методами. Если различные методы привели к разным решениям, то необходимо проанализировать полученную ситуацию, дать рекомендации по возможности применения полученных решений.

### Варианты заданий

#### Вариант 1

В эту игру играют два человека, каждый из них показывает один, два или три пальца и одновременно называет число пальцев, которое, по его мнению покажет противник. Если один из игроков указывает правильно, то он выигрывает сумму, равную сумме пальцев, показанных им и его противником. Если угадывают оба игрока, или не угадывает ни один из них, то никто ничего не получает.

**Вариант 2**

Антагонистическая игра происходит следующим образом:

ход 1: игрок 1 выбирает одно из двух чисел 1, 2;

ход 2: бросается монета и, если выпадает герб, второму игроку сообщается о выборе первого игрока;

ход 3: игрок 2 выбирает одно из двух чисел 3, 4;

ход 4: с вероятностями 0.4, 0.2, 0.4 выбирается одно из трех чисел 1, 2, 3.

Числа, выбранные в первом, третьем и четвертом ходах, складываются и полученная сумма уплачивается вторым игроком первому, если она четная, и первым игроком - второму игроку, если она нечетная.

**Вариант 3**

Два игрока имеют по две белых и по две красных фишки. Оба выкладывают на стол произвольное количество фишек (или ни одной). Функция выигрыша первого игрока (проигрыш другого) определяется по количеству выложенных белых и красных фишек:

$$J(x, y) = (-1)^{(x_1 + y_1)}(x_2 + y_2),$$

где $x_1$, $y_1$ – количество белых фишек выложенных, соответственно, первым и вторым игроками;

$x_2$, $y_2$ – количество красных фишек выложенных, соответственно, первым и вторым игроками.

**Вариант 4**

Антагонистическая игра происходит за четыре хода:

1-й ход - первый игрок выбирает число из {1, 2, 3} (X1);

2-й ход - второй игрок выбирает число из {1, 2, 3} (X2);

3-й ход - первый игрок выбирает из оставшихся двух чисел (X3),

4-й ход - второй игрок выбирает из оставшихся двух чисел (X4).

Оба игрока не обладают информацией о выборах противника.

Функция выигрыша первого игрока:

J = (-1)^(X1+X2) * ((X1+X2)-(X3+X4))

**Вариант 5**

Две девочки прячут по выбору 0, 1 или 2 конфеты. Каждая из них пытается угадать общее число конфет, спрятанных ими, причем угадывают они одновременно. Угадавшая правильно получает от другой одну конфету. Если обе угадали, или не угадал никто, то считается ничья.

Будем считать, что девочки достаточно умны, чтобы не выбирать заведомо проигрышный вариант. Например, если первая девочка спрятала 1 конфету, то она никак не скажет, что вместе они спрятали 0 конфет, зная, что уже получается не меньше единицы.

**Вариант 6**

Бросается монета. Игрок 1, не зная, выпала ли монета гербом или решкой, выбирает одну из сторон монеты. Игрок 2, не зная исхода бросания монеты, но зная выбор игрока 1, выбирает одну из сторон монеты. Выигрыши игрока 1 в каждой ситуации следующие (игра антагонистическая):

J(Г, Г, Г)=-2, J(Р, Г, Г)=6, J(Г, Г, Р)=-1, J(Р, Г, Р)=2,
J(Г, Р, Г)=3, J(Р, Р, Г)=2, J(Г, Р, Р)=-4, J(Р, Р, Р)=6.

**Вариант 7**

Полковник Блотто и его противник пытаются занять две позиции, распределив надлежащим образом свои силы. Все полки должны быть выставлены на позиции, причем может быть ситуация, когда на одной позиции выставлены все полки, а на другой – ни одного. Полковник имеет 4 полка, а его противник – три полка. Если на позиции у полковника Блотто полков больше, чем у его противника, то он получает все полки противника на этой позиции. Если на данной позиции у полковника меньше полков, то он теряет полки на этой позиции. Общий выигрыш равен сумме приобретенных/потерянных полков на обеих позициях.

**Вариант 8**

Дана антагонистическая игра между игроками А и В, в которой А – один человек, а В – команда из двух человек В1 и В2. Эти три человека изолированы друг от друга в отдельных комнатах и во время игры не могут общаться между собой. В начале игры судья входит в комнату, в которой находится А и предлагает ему выбрать одно из чисел {1, 2, 3, 4}. Затем судья обходит В1 и В2 и предлагает им выбрать по числу из множества {1, 2, 3}. Никто из игроков не знает, какое число назвали другие (в том числе и игроки из одной команды). Если сумма всех выбранных чисел оказывается четной, выигрывает игрок А. Если сумма нечетная - выигрывает команда В. Сумма выигрыша определяется суммой выбранных чисел.

**Вариант 9**

Два игрока одновременно называют по одному целому числу из диапазона [1,6]. Если разница между двумя названными числами оказывается четной, выигрывает первый игрок, если нечетной – выигрывает второй. Если игроки назвали одинаковые числа – ничья. Величина выигрыша при этом определяется по формуле:

$$J(x, y) = x + y + x \cdot y\ ,$$

где $x, y$ – числа, названные первым и вторым игроками, соответственно.

**Вариант 10**

Двум мальчикам подарили по две конфеты – шоколадной и карамели. Они решили сыграть в следующую игру. Каждый из них прячет по одной конфете, а потом пытается угадать, какую конфету спрятал противник. Если оба угадали, или оба не угадали, то каждый остается при своих (ничья). Если угадал только один из них, то он получает от противника спрятанную тем конфету. Мальчики оценивают конфеты следующим образом: шоколадная – 5 единиц, карамель – 1 единицу (оба предпочитают шоколад).

**Вариант 11**

Игрок 1 имеет две, а игрок 2 - три фишки. Первым ходит игрок 1, откладывая произвольное количество фишек. Вторым ходит случай, в результате которого с вероятностью 0.7откладывается одна фишка и с вероятностью 0.3 - ни одной. Третьим ходит игрок 2, откладывая произвольное количество фишек. Ни одна сторона не знает о выборе остальных. Если в результате количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок 1, в противном случае фишки выигрывает игрок 2. Построить развернутую форму игры.

**Вариант 12**

Игроки 1 и 2 выбирают по числу из множества {1, 2, 3, 4, 5}, не зная, что выбирает другой. Игрок 1 выигрывает, если сумма выбранных чисел четная, и проигрывает игроку 2, если сумма нечетная. При этом сумма выигрыша определяется по формуле:

$$J(x, y) = (x + y)/10\ ,$$

где $x, y$ – числа, выбранные, соответственно, 1-м и 2-м игроками.

**Вариант 13**

Два игрока имеют на руках по 5 карт: шестерку, семерку, даму, короля и туза. «Стоимость» дамы – 3 очка, короля – 4 очка, туза – 1 очко. Шестерка и семерка стоят по номиналу. По старшинству карты располагаются следующим образом: 6 < 7 < Д < К < Т, но при этом Т < 6 (старшинство «по кругу»). Игроки одновременно выкладывают на стол по одной карте. Выигрывает тот, у кого карта старше, причем выигрыш определяется суммой очков выложенных карт. Если оба игрока выложили на стол карты одинакового номинала, то никто из них ничего не выигрывает.

**Вариант 14**

Дана следующая антагонистическая игра: из чисел 1, 2, 3, 4 случайно (равновероятно) выбирается какое-нибудь одно, и двум игрокам предлагается указать нижнюю границу для выбранного числа. Игроки не знают, какое случайное число выбрано, и не знают о выборе противника. Если угадал лишь один из игроков, то он получает единицу от противника. Если угадали оба, то выигрывает тот, чья нижняя граница строго больше, причем его выигрыш равен разности между указанными нижними границами. Во всех остальных случаях никто из игроков не получает ничего.

**Вариант 15**

1) Играют два игрока. Первый игрок выбирает одно из чисел – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Второй игрок пытается угадать, какое из чисел выбрал первый игрок. Если второй угадывает, то он получает от первого 10 очков, если нет – то второй игрок платит первому разницу между выбранным и названным числами (абсолютную).

## 2.2 Лабораторная работа «Решение вогнуто-выпуклых игр»

**Цель работы**

Изучение бесконечных антагонистических игр. Получение практических навыков решения игр на единичном квадрате, в частности, вогнуто-выпуклых игр.

**Рекомендации по подготовке к работе**

Играми на единичном квадрате являются бесконечные антагонистические игры, в которых оба игрока имеют континуум чистых стратегий. В зависимости от вида функции выигрыша игра может быть вогнутой, выпуклой или вогнуто-выпуклой.

Решение игры на единичном квадрате начинается с определения типа игры: относится ли игра к вогнуто-выпуклым или просто вогнутым/выпуклым играм. Тип игры определяется по вторым производным функции выигрыша.

Помните, что игра является вогнутой, только если функция выигрыша вогнута на множестве стратегий первого игрока. Игра является выпуклой, только если функция выигрыша выпукла на множестве стратегий второго игрока.

После того, как определен тип игры, в соответствии с типом выбирается критерий, по которому будет находиться решение.

В данной лабораторной работе рассматриваются вогнуто-выпуклые игры. Для такого типа игр работают (и могут быть применены) оба критерия (минимаксный и максиминный). Для решения игры может быть выбран любой критерий, причем оба критерия должны привести к одному и тому же решению.

*Совет:* проанализируйте первые производные функции выигрыша, так как именно по ним определяется максимум и минимум. Первоначально можно взять тот критерий, по которому проще находить решение. Выбирайте минимаксный критерий, если проще выразить $x$ через $y$ (в производной по $x$); если проще выражается по производной $y$ через $x$, то выбирайте максиминный критерий. Чтобы быть уверенным в правильности результата, необходимо для вогнуто-выпуклых игр найти оба решения (по обоим критериям). Если все верно, решения должны совпасть.

**Пример выполнения работы**

Дана игра на единичном квадрате:

$$\Gamma = < [0,1],[-3,3],-3x^2 + y^2 - 5xy > .$$

Определим вогнутость/выпуклость игры. Для этого найдем вторые производные функции выигрыша:

$J'_x = -6x - 5y$ , $J''_{xx} = -6 < 0$ – игра вогнута.

$J'_y = 2y - 5x$ , $J''_{yy} = 2 > 0$ – игра выпукла.

Для решения вогнуто-выпуклой игры мы можем выбрать любой из критериев. Первоначально выбираем максиминный критерий:

$$v = \max_x \min_y J(x, y) .$$

Сначала ищем минимум по $y$, для этого приравниваем первую производную функции выигрыша по $y$ нулю и выражаем $y$ через $x$:

$$J'_y = 2y - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2.5x$$

Подставим полученное выражение в нашу функцию выигрыша, получаем:

$$-3x^2+(2.5x)^2-5x(2.5x)=3.25x^2-12.5x^2=-9.25x^2$$

Полученная функция имеет максимум по $x$ в точке 0 (функция убывает по $x$ и достигает максимального значения при минимальном значении аргумента).

Тогда получаем следующие оптимальные стратегии игроков и цену игры:

$$x^*=0,\ y^*=0,\ v=0.$$

Проверим правильность полученного решения, используя теперь минимаксный критерий:

$$v=\min_y \max_x J(x,y).$$

Максимум по $x$ находим через первую производную функции выигрыша по $x$:

$$J'_x=-6x-5y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{5}{6}y.$$

Подставим полученное выражение в нашу функцию выигрыша, получаем:

$$-3\left(-\frac{5}{6}y\right)^2+y^2-5\left(-\frac{5}{6}y\right)y=-\frac{25}{12}y^2+y^2+\frac{25}{6}y^2=\frac{37}{12}y^2.$$

Данная функция возрастает по абсолютному значению $y$ и достигает минимума в точке 0 (такой же результат можно получить приравняв первую производную нулю). Таким образом, получаем:

$$x^*=0,\ y^*=0,\ v=0.$$

Оба решения совпали, значит мы верно определили оптимальные стратегии игроков и цену игры.

**Порядок проведения работы**

1. Дана вогнуто-выпуклая игра. Найти решение игры.
2. Решение находить через оба критерия: минимаксный и максиминный.
3. Сравнить оба решения. Если оба варианта совпадают, то решение найдено верно.
4. В качестве решения должно быть представлено: две оптимальные чистые стратегии игроков и цена игры.

**Варианты заданий**

| № варианта | Вогнуто-выпуклая игра |
|---|---|
| 1 | $\Gamma = < [0,1],[0,3], y^3 - 2x^2 + 2x - xy >$ |
| 2 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], -x^2 + 4y^2 - 3xy + 2x >$ |
| 3 | $\Gamma = < [0,2],[0,3], -x^3 + y^2 + 3xy - y >$ |
| 4 | $\Gamma = < [0,1],[0,2], -4y + 3xy - x^2 + y^2 >$ |
| 5 | $\Gamma = < [1,2],[0,1], y^2 - 4x^2 - 5y + 4xy >$ |
| 6 | $\Gamma = < [2,4],[0,1], -x^3 - 2xy + x^2 + 4y^2 >$ |
| 7 | $\Gamma = < [0,1],[0,2], 2xy - 5x^2 + 4y^2 - 3y >$ |
| 8 | $\Gamma = < [-1,1],[-1,1], 3xy - x^2 + 2y^2 - 2y >$ |
| 9 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], -xy - 5x^2 + y^2 + 5x >$ |
| 10 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], -3xy + y^2 - 2x^2 + 2y >$ |
| 11 | $\Gamma = < [0,1],[0,2], -xy - x^2 + 5y^2 + 3x - 2y >$ |
| 12 | $\Gamma = < [0,2],[0,2], 2xy - 3x - 2y - x^2 + 2y^2 >$ |
| 13 | $\Gamma = < [-2,0],[0,1], 5x - 2xy - x^2 + y^2 >$ |
| 14 | $\Gamma = < [0,1],[-1,1], 2y^2 - 2x^2 - 5xy + 3x >$ |
| 15 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], y^3 - 2xy - x^2 + 4x >$ |
| 16 | $\Gamma = < [-2,2],[-2,2], -3x - 3y + 5xy - x^2 + 2y^2 >$ |
| 17 | $\Gamma = < [0,1],[-2,2], -3x^2 + y^2 - xy + 4x >$ |
| 18 | $\Gamma = < [-2,2],[0,1], -2x^2 + 3y^2 + 2xy - 3y >$ |
| 19 | $\Gamma = < [0,2],[0,2], x + y - 2xy - x^2 + 2y^2 >$ |
| 20 | $\Gamma = < [-1,0],[-1,0], -x^2 + y^2 - xy + 4x >$ |

## 2.3 Лабораторная работа «Решение вогнутых и выпуклых игр»

**Цель работы**

Изучение бесконечных антагонистических игр. Получение практических навыков решения игр на единичном квадрате следующих типов: вогнутых, выпуклых игр.

**Рекомендации по подготовке к работе**

Играми на единичном квадрате являются бесконечные антагонистические игры, в которых оба игрока имеют континуум чистых стратегий. В зависимости от вида функции выигрыша игра может быть вогнутой, выпуклой или вогнуто-выпуклой.

Решение игры на единичном квадрате начинается с определения типа игры: относится ли игра к вогнуто-выпуклым или просто вогнутым/выпуклым играм. Тип игры определяется по вторым производным функции выигрыша.

Помните, что игра является вогнутой, только если функция выигрыша вогнута на множестве стратегий первого игрока. Игра является выпуклой, только если функция выигрыша выпукла на множестве стратегий второго игрока.

После того, как определен тип игры, в соответствии с типом выбирается критерий, по которому будет находиться решение.

В данной лабораторной работе рассматривается решение вогнутых и выпуклых игр. Сначала необходимо определить, к какому типу относится игра, заданная в вашем варианте. Внимательно выбирайте критерий для решения! Для этих типов игр может применяться только один из двух указанных критериев, в зависимости от типа. Теперь решение в чистых стратегиях обязательно существует только для первого или второго игрока. Для второго/первого игрока в общем случае решение существует в смешанных стратегиях, хотя в частном случае может получиться и решение в чистых стратегиях.

Задания подобраны таким образом, что если игра выпукла, то функция выигрыша выпукла и по первому игроку, и, наоборот, если игра вогнута, то функция выигрыша вогнута и по второму игроку. В этих случаях для игрока, у которого решение находится в смешанных стратегиях, максимум/минимум достигается либо на одном, либо на другом граничном значении множества чистых стратегий.

***Внимание!*** При нахождении цены игры и оптимальной чистой стратегии первого/второго игрока в вогнутой/выпуклой игре не ищите пересечение функций в граничных точках второго/первого игрока! На заданном отрезке множества чистых стратегий функции могут и не пересекаться. Более того, функции могут пересекаться внутри указанного отрезка, но точка пересечения может не являться искомым решением. При поиске решения мы ищем максимум среди всех минимумов (или минимум среди всех максимумов для выпуклой игры). Для удобства нахождения решения постройте график двух функций на множестве допустимых стратегий.

Если множество существенных стратегий содержит только одну стратегию, то соответствующий игрок вместо смешанной будет иметь чистую стратегию.

Проверяйте полученный результат! Для проверки можно подставить полученные оптимальные стратегии в функцию выигрыша – должны получиться цена игры.

**Пример выполнения работы**

Дана игра на единичном квадрате:

$$\Gamma =< [0,1],[0,3],-3x^2 - y^2 + 5xy > .$$

Определим вогнутость/выпуклость игры. Для этого найдем вторые производные функции выигрыша:

$J'_x = -6x + 5y$, $J''_{xx} = -6 < 0$ – игра вогнута.

$J'_y = -2y + 5x$, $J''_{yy} = -2 < 0$ – игра не выпукла.

Для решения вогнутой игры выбираем максиминный критерий:

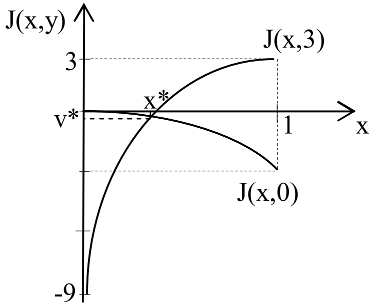
$$v = \max_x \min_y J(x, y) .$$

Сначала ищем минимум по $y$: так как функция выигрыша вогнута по $y$, то минимум достигается на какой-то из границ множества допустимых стратегий: либо при $y = 0$, либо при $y = 3$.

Рассмотрим соответствующие функции:

$$J(x,0) = -3x^2 , \quad J(x,3) = -3x^2 - 9 + 15x .$$

Для нахождения максимума среди всех минимумов построим график указанных двух функций:




Из графика видно, что максимум из всех минимумов здесь находится в точке пересечения двух функций, тогда оптимальная чистая стратегия первого игрока и цена игры:

$$-3x^2 = -3x^2 - 9 + 15x \quad \Rightarrow \quad x^* = 9/15 = 0.6, \quad v^* = -1.08 .$$

Найдем существенные стратегии второго игрока:

$$-3\cdot(0.6)^2 - y^2 + 5\cdot 0.6\cdot y = -1.08 - y^2 + 3y = -1.08 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 3$$

Находим значения первых производных:

$$J_x'(x^*, y_1) = -6\cdot 0.6 + 5\cdot 0 = -3.6 ,\ J_x'(x^*, y_2) = -3.6 + 5\cdot 3 = 11.4 .$$

Теперь находим вероятности, решая уравнение:

$$-3.6\cdot\alpha + 11.4(1-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.76 .$$

Теперь мы можем записать полученное решение:

$$x^* = 0.6, \quad v^* = -1.08, \quad Q^* = (0.76\big|_{y=0}, 0.24\big|_{y=3})$$

**Порядок проведения работы**

1. Дана игра на единичном квадрате. Необходимо определить, является ли игра вогнутой или выпуклой.

2. Выбрать критерий для нахождения решения в соответствии с типом игры.

3. Найти решение игры. В качестве решения должно быть представлено: оптимальная чистая стратегия первого игрока (игра вогнута) либо второго игрока (игра выпукла), оптимальная смешанная либо чистая стратегия для второго или первого игрока, соответственно, и цена игры.

**Варианты заданий**

| № варианта | Игра на единичном квадрате |
|---|---|
| 1 | $\Gamma = < [2,4],[0,1], x^3 - xy - x^2 + 5y^2 >$ |
| 2 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], -xy + 5x^2 + y^2 >$ |
| 3 | $\Gamma = < [-1,1],[-1,1], 3xy - x^2 - 2y^2 >$ |
| 4 | $\Gamma = < [0,1],[0,3], xy - 5x^2 - 5y^2 >$ |
| 5 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], 3xy - y^2 - 2x^2 >$ |
| 6 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], y^3 - 2xy + x^2 + 0.5x >$ |
| 7 | $\Gamma = < [-2,1],[-1,1], 3xy - x^2 - 3y^2 >$ |
| 8 | $\Gamma = < [0,1],[0,2], -xy + x^2 + 5y^2 >$ |
| 9 | $\Gamma = < [0,2],[0,2], 2xy - x + y - x^2 - 2y^2 >$ |
| 10 | $\Gamma = < [-2,0],[0,1], 5x - 2xy + x^2 + y^2 >$ |
| 11 | $\Gamma = < [0,1],[-1,1], 2y^2 + 2x^2 - 5xy >$ |
| 12 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x >$ |
| 13 | $\Gamma = < [0,2],[0,3], -x^3 - y^2 + 2xy + 3y >$ |
| 14 | $\Gamma = < [0,1],[-1,1], x^3 + y^2 - 5x + 2xy >$ |
| 15 | $\Gamma = < [0,4],[0,1], 2xy + 2y^2 - 5x + x^2 >$ |
| 16 | $\Gamma = < [1,2],[-1,1], -x^2 - 4y^2 + 3xy + 2x >$ |
| 17 | $\Gamma = < [0,1],[0,2], 4y + 3xy - x^2 - y^2 >$ |
| 18 | $\Gamma = < [1,2],[0,1], y^2 + 4x^2 - 5y - 4xy >$ |
| 19 | $\Gamma = < [0,1],[0,3], y^3 + 2x^2 - 2x - xy >$ |
| 20 | $\Gamma = < [0,1],[0,1], 3xy - y^3 - x^3 >$ |

## 2.4 Лабораторная работа «Некооперативные игры»

**Цель работы**

Изучение способов представления и методов решения некооперативных игр.

**Рекомендации по подготовке к работе**

В лабораторной работе рассматриваются некооперативные игры двух лиц. В некооперативных играх, в отличие от антагонистических, интересы игроков не прямо противоположны, они могут пересекаться, частично совпадать. Здесь игроки одновременно могут быть в выигрыше или проигрыше. В связи с этим для каждого игрока должна быть определена своя функция выигрыша. При участии в игре только двух игроков функции выигрыша могут быть заданы в виде матриц.

Для построения матриц выигрышей сначала определите чистые стратегии игроков, а затем уже записывайте матрицы.

В качестве решения вы должны определить оптимальные стратегии игроков и их гарантированные выигрыши. Кроме того, необходимо найти точку status quo.

В связи с тем, что равновесная ситуация (точка Нэша) не всегда определяется однозначно, а кроме того, существуют сложности с ее нахождением, примем в качестве принципа оптимальности защитные стратегии игроков. Для нахождения защитных стратегий и гарантированных выигрышей игроков воспользуйтесь автоматизированной системой Ant_games.exe, рассмотренной в первой лабораторной работе. Можно воспользоваться только симплекс-методом: он дает точное решение, в отличие от итеративного, и может быть использован для матриц любой размерности, в отличие от аналитического.

***Внимание!*** Система Ant_games.exe рассчитана на решение антагонистических игр. Поэтому здесь стратегии максимизирующего игрока (для которого элементы матрицы являются выигрышами) всегда расположены по строкам. Учитывайте это при построении матрицы выигрыша для второго игрока. В результате решения игры по каждой матрице мы получаем по две оптимальные стратегии. Нам же в результате необходимы только две из них. Внимательно определяйте, какую из двух оптимальных стратегий по каждой матрице вам необходимо выбрать.

Цены двух игр являются гарантированными выигрышами игроков. Не забывайте корректировать цены, если в матрицах выигрышей присутствуют отрицательные элементы.

Принимая во внимание, что при использовании защитных стратегий обоими игроками, выигрыши игроков могут увеличиться по сравнению с гарантированным выигрышем, необходимо определить точку status quo. Для двух игроков эта точка представляет собой вектор из двух элементов, значения которых соответствуют выигрышам игроков, если они оба применяют свои защитные стратегии.

По результатам всех проведенных вычислений необходимо провести анализ полученного решения.

**Пример выполнения работы**

Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут остаться дома и смотреть по телевизору футбольный матч, а могут пойти в театр. Причем муж больше заинтересован остаться дома, и от этого он получает удовлетворение, равное 3, а жена – 1. При посещении театра они получают, соответственно, 2 и 3. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по –1. Будем считать, что никакой сговор между ними невозможен.

Так как это игра 2-х лиц, то мы можем представить ее в матричной форме, задав две матрицы выигрыша:

$$J_м = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad J_{ж} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для нахождения решения воспользуемся симплекс-методом. Решая задачу по первой матрице (выигрыш мужа), получаем следующие оптимальные планы игроков и значение целевой функции:

$$U^* = (0.25, 0.333), \quad W^* = (0.25, 0.333), \quad -Z = 0.5833.$$

Кроме этого, указывается, что цена игры увеличена на 1, $V^* = 1.7143$.

Нас интересует оптимальный план только первого игрока (мужа) и его гарантированный выигрыш, получаем:

$$X = (0.429, 0.571), \quad V = V^* - 1 = 0.7143.$$

Для того, чтобы найти оптимальную стратегию жены, воспользуемся тем же симплекс-методом. Так как в системе все методы предназначены для нахождения решения в антагонистических играх, то стратегии максимизирующего игрока (для которого элементы матрицы являются выигрышами) всегда расположены по строкам. транспонируем матрицу выигрыша жены (в нашем случае получим такую же) и находим оптимальные планы:

$$U^* = (0.5, 0.25), \quad W^* = (0.5, 0.25), \quad -Z = 0.75.$$

При этом цена игры увеличена на 1, $V^* = 1.33333$.

Нас опять интересует план только первого игрока (стратегии жены расположены по строкам) и его гарантированный выигрыш:

$$Y = (2/3, 1/3), \quad U = V^* - 1 = 0.3333.$$

Для окончательного решения нам необходимо найти точку status quo и сравнить ее с гарантированными выигрышами игроков.

$$v = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot J_м(x_i, y_j) = 0.715,$$

$$u = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot J_{ж}(x_i, y_j) = 0.333.$$

Мы получили оптимальные стратегии игроков $X = (0.429, 0.571)$, $Y = (2/3, 1/3)$, используя которые они получат (точка status quo): $(u, v) = (0.715, 0.3333)$.

В данном случае точка status quo совпала с гарантированными выигрышами игроков (различие по первому игроку, судя по всему, вызвано погрешностями вычислений).

**Порядок проведения работы**

1. В каждом варианте описана некооперативная игра двух лиц. Необходимо представить игру в нормальной форме: описать чистые стратегии игроков и записать матрицы выигрышей для каждого из игроков.

2. Решить игру: для этого с помощью метода линейного программирования необходимо найти гарантированные выигрыши для каждого игрока и защитные стратегии.

3. Найти точку status quo.

4. Сравнить гарантированные выигрыши игроков и точку status quo. Ответить на вопрос, увеличились ли выигрыши игроков в точке status quo по сравнению с гарантированными выигрышами.

5. В качестве решения представить две оптимальные стратегии и точку status quo.

**Варианты заданий**

**Вариант 1**

Два человека пытаются купить на аукционе одну вещь, за которую они могут предложить 2, 4, 6 или 8 долларов. Позже эту вещь можно продать за 14 долларов и получить соответствующую прибыль. оба устанавливают свою цену тайно друг от друга, при этом каждый из них должен внести аванс в половину от назначенной суммы. Если кто-то назвал цену выше другого, то он получает вещь, доплатив назначенную сумму. Второму при этом возвращается аванс (т.е. он остается при своих начальных условиях). Если же оба назвали одинаковую сумму, то выплаченные авансы отчисляются в пользу аукциона, а вещь с продажи в этот день снимается (игроки могут попытать судьбу в другой день).

**Вариант 2**

Дети и родители решают, где им провести выходной день: они могут поехать за город на природу, пойти в луна-парк, или съездить в гости к бабушке. Дети и родители принимают решение независимо друг от друга. Дети больше всего хотели бы сходить в луна-парк (5 ед.), чуть меньше – побывать у бабушки (4 ед.) и еще меньше - съездить на природу (3 ед.). Родители же, напротив, больше всего хотели бы побывать на природе (5 ед.), меньше – побывать у бабушки (4 ед.) и меньше – в луна-парке (2 ед.). Если дети и родители не договорятся, то выходной будет испорчен, все останутся дома, и полезности такого исхода будут для детей – -1 ед., а для взрослых – 0 ед.

**Вариант 3**

Два военных союзника проводят операцию по захвату вражеской территории. Каждый из союзников может выставить 1, 2, 3 или 4 полка. В зависимости от количества выставленных полков союзник несет потери 0.1, 0.2, 0.2 и 0.3, соответственно. При этом прибыль от военной операции составляет $i/N$, где $i$ – количество выставленных игроком полков, а $N$ – общее количество полков, выставленных от обоих союзников.

**Вариант 4**

Два мальчика играли в комнате и разбили вазу. Родители хотят узнать, кто из них это сделал. Каждый из мальчиков может: 1) ничего не сказать, 2) признаться, что это сделал он, 3) указать на приятеля. Если оба укажут на себя (признаются), то их ждет самое мягкое наказание – лишение сладкого на 1 день (т.к. родители не смогут определить, кто же это сделал на самом деле). Если оба ничего не скажут, то их лишат сладкого на 3 дня. Если признается только один из них, то независимо от поведения другого (промолчит он или укажет на приятеля), виновного ждет наказание в 5 дней. Самое тяжелое наказание их ждет, если они покажут друг на друга – 7 дней.

Как вести себя детям, если их спрашивают о случившемся по отдельности.

**Вариант 5**

Некий продукт производится двумя производителями. производственные возможности конкурентов ограничены тремя состояниями: 10 тыс. единиц продукта в месяц, 15 тыс. и 20 тыс. При этом рыночная цена продукта определяется общим объемом его производства:

| Общий объем производства (тыс.ед.) | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| Стоимость (тыс.ед.) | 3 | 2.5 | 2 | 1.5 | 1 |

Найти наилучшие варианты поведения для предпринимателей.

**Вариант 6**

Два лица, подозреваемые в преступлении, арестованы и заключены в отдельные камеры. Оба они могут сознаться в содеянном или нет. Если они оба не сознаются, то судья, сформулировав соответствующим образом обвинение, присудит каждому из них по два года. Если оба сознаются, то наказание будет 3 года. Если признается только один из них, то признавшийся получает 3 месяца, а не признавшийся – 8 лет. Как вести себя заключенным?

**Вариант 7**

Два знакомых решают провести совместно торговую операцию. Каждый из них может выделить сумму в 100, 200 или 300 тыс. рублей. Причем доля его прибыли прямо пропорциональна доле его денег в общей сумме. Закупочная стоимость продукта – 1 тыс.руб./штука. Но продажная стоимость товара зависит от объема партии:

| Всего куплено товара (штук) | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|
| Продажная стоимость (тыс.руб.) | 3 | 2.5 | 2 | 1.6 | 1.2 |

Как должен поступить каждый из них, чтобы максимизировать свою прибыль?

**Вариант 8**

Два предпринимателя для совместного дела должны выделить суммы в 1, 2, 3 или 4 млн. долларов. При этом чистая прибыль для каждого из них составит:

$$J(i,j)=\begin{cases}10\cdot j/N, & i>j\\ 10\cdot i/N, & i\le j\end{cases},$$

где $N=i+j$, а $i, j$ – количество миллионов, выделенных 1-м и 2-м предпринимателями, соответственно.

**Вариант 9**

Муж с женой решают, где им провести отпуск: они могут поехать к родителям мужа, к родителям жены или пойти в турпоход. Жена больше всего хочет поехать к своим родителям (3 ед.), меньше – к родителям мужа (2 ед.) и еще меньше – идти в турпоход (1 ед.). Муж, напротив, предпочел бы турпоход (3 ед.), и ему все равно к каким родителям ехать (1 ед.). При этом, если они не договорятся и проведут отпуск отдельно, то оба не получат никакого удовольствия (0 ед.).

**Вариант 10**

Некий продукт производится двумя производителями. производственные возможности 1-го конкурента ограничены тремя состояниями: 10 тыс. Единиц продукта в месяц, 15 тыс. и 20 тыс., а второго – четырьмя состояниями – 15, 20, 25 и 30 тыс. ед. продукта/месяц. При этом рыночная цена продукта определяется общим объемом его производства:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Общий объем производства (тыс.ед.) | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| Стоимость (тыс.ед.) | 3 | 2.4 | 2 | 1.6 | 1.2 | 1 |

## 2.5 Лабораторная работа «Классические кооперативные игры»

**Цель работы**

Изучение способов представления классических кооперативных игр, переходов от одной формы представления к другой; изучение методов решения указанных игр по различным критериям оптимальности с проведением сравнительного анализа полученных решений.

**Рекомендации по подготовке к работе**

В данной лабораторной работе рассматривается классическая кооперативная игра трех лиц в нормальной форме. Необходимо найти решение игры. В качестве решения будем рассматривать: С-ядро игры, вектор Шепли, $N$ -ядро игры.

Для упрощения многих расчетов и проверки правильности выполнения задания используйте программу «Принятие кооперативных решений» (файл «Коопер_игры.exe»)

Для нахождения решения прежде всего необходимо перейти от нормальной формы игры к форме характеристической функции.

Для определения характеристических функций коалиций необходимо решить 6 антагонистических игр. Характеристическая функция коалиции $V(S)$ определяется как цена антагонистической игры, где в качестве первого (максимизирующего) игрока выступает коалиция $S$, а в качестве второго (минимизирующего) игрока выступает коалиция $N / S$. Здесь множество чистых стратегий коалиции $S$ – это множество всех совместных чистых стратегий игроков данной коалиции. Причем элементами платежной матрицы являются суммарные выигрыши игроков из коалиции $S$.

Характеристическая функция максимальной коалиции $N$ определяется как максимальное значение функции выигрыша всех трех игроков, определенной на множестве всех возможных стратегий.

Программа позволяет либо ввести характеристическую функцию игры (если вы определили ее самостоятельно), либо рассчитать в программе.

Для расчета характеристической функции вы должны задать количество стратегий для каждого игрока и запомнить размерность. После этого вы должны ввести числовые значения стратегий игроков. Затем вы вводите формулу для расчета характеристической функции какой-либо коалиции (правила записи формулы такие же, как и в Лабораторной работе «Решение антагонистических игр в матричной форме»). В правой стороне окна есть помощь по вводу формул.

***Внимание!!!*** Формулы для двойных и тройной коалиций вы должны получить сами путем сложения функций выигрышей тех игроков, которые входят в рассматриваемую коалицию!

После определения формулы вы должны определить коалиции: в левом поле указывается коалиция, для которой определяется характеристическая функция, в правом – коалиция из оставшихся игроков. Затем вы нажимаете кнопку «Рассчитать» и получаете платежную матрицу, а в нижней строке появляется значение характеристической функции соответствующей коалиции.

Для получения характеристической функции игры вы должны повторить процесс ввода формулы, коалиций и расчета.

***Когда вся нижняя строка будет заполнена (определена вся характеристическая функция игры), необходимо нажать кнопку «Записать», и только после этого выходить из данного окна и переходить к следующим этапам выполнения работы.***

После представления игры в форме характеристической функции необходимо определить С-ядро игры (если оно существует).

При выборе меню «С-ядро» открывается окно для определения С-ядра. Сначала вам необходимо перейти к новым переменным (отражающим прибыль от кооперации) – для этого задайте новые ограничения и нажмите кнопку ***«Рисовать».***

Если новые ограничения введены верно, будет нарисовано C-ядро игры, в противном случае система выдает сообщение об ошибке. Графическое изображение C-ядра поможет вам в определении количества точек (вершин с-ядра), а также в их расположении на симплекс-треугольнике.

После этого вы должны определить и ввести координаты нарисованного многоугольника. При вводе координат вершины можно вводить в любой последовательности. Если координаты введены правильно, то после нажатия кнопки «Проверить» будет выдано следующее окно. Здесь вы должны перейти к исходным переменным (проделать обратные преобразования) и записать окончательный вариант C-ядра.

После проверки правильности определения решения необходимо проверить игру на выпуклость и определить N-ядро игры.

Если игра не выпукла, то необходимо указать ВСЕ не выполняющиеся условия (по увеличению маргинальных вкладов игрока) для ВСЕХ игроков. Вводите не выполняющиеся ограничения до тех пор, пока программа не перестанет предлагать ввести еще не указанные не выполняющиеся условия.

N-ядро игры определяется как центр C-ядра: для его определения просто сложите значение каждой координаты по всем точкам и разделите на количество точек. ***Внимание!!!*** Если какое-то ограничение проходит через вершину симплекс-треугольника, то эта точка (вершина) должна учитываться в N-ядре 2 раза!

Кроме указанных решений необходимо найти вектор Шепли.

После нахождения всех решений необходимо найти вектора эксцессов для вектора Шепли и N-ядра.

После проведения всех необходимых вычислений и нахождения всех решений нажмите кнопку «Все выполнено» - вам будет выдан итоговый отчет, включающий все найденные вами решения.

После нахождения всех решений сравните и проанализируйте результаты. Дайте рекомендации по их дальнейшему применению. Выберите решение, лучшее с вашей точки зрения, обоснуйте.

**Пример выполнения работы**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$x = (0, 2, 5), \quad y = (1, 3), \quad z = (1, 2, 4)\ ,$$

$$J_1 = x^2 - 2xz + zy,\; J_2 = -y^2 - 2xy + xz + 5,\; J_3 = z^2 - zy + xy$$

Чтобы перейти от нормальной формы игры к форме игры в виде характеристической функции необходимо решить 6 антагонистических игр.

$V(\{x\})$ находится как цена антагонистической игры, где $x$ играет против коалиции $\{y, z\}$, а функция выигрыша равна $J_1$ и будет введена следующим образом: (X*X-2*(X*Z)+Z*Y). После нажатия кнопки «Рассчитать» выдается платежная матрица и в нижней строке появляется значение характеристической функции игрока X: $V_x = 2.5$

$V(\{y\})$ находится из антагонистической игры $y$ против $\{x, z\}$.

$V$(y)=1.

$V(\{z\})$ находится из антагонистической игры $z$ против $\{x, y\}$.

$V$(z)=4.

$V(\{xy\})$ находится из антагонистической игры $\{xy\}$ против $z$.

Функция выигрыша равна $J_1 + J_2$ и будет введена следующим образом: (X*X+Y*Y-X*Z+Z*Y-2*(X*Y)+5).

$V$(xy)=17

$V(\{xz\})$ находится из антагонистической игры $\{xz\}$ против $y$.

$V$(xz)=21

$V(\{yz\})$ находится из антагонистической игры $\{yz\}$ против $x$.

$V$(yz)=18

$V(\{xyz\})$ находится как максимум функции

$$J_1 + J_2 + J_3 = x^2 + y^2 + z^2 - xz - xy + 5.$$

и равен 30. Таким образом, характеристическая функция игры:

$$V_x = 2.5; V_y = 1; V_z = 4; V_{xy} = 17; V_{xz} = 21; V_{yz} = 18; V_{xyz} = 30.$$

Переходим к определению С-ядра игры.

Переход к новым переменным даст следующие ограничения:

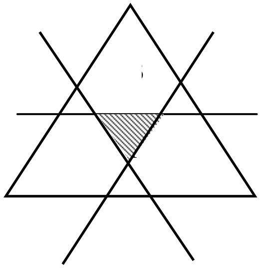
$$a + b + c = 22.5$$

$$a + b \geq 13.5$$

$$a + c \geq 14.5$$

$$b + c \geq 13.$$

Здесь ядро игры является треугольником и на графике отобразиться следующий рисунок:



Определим координаты вершин треугольника. Вершина 1 является пересечением прямых $a+c=14.5$ и $a+b=13.5$. Получаем систему уравнений

$$a+b+c=22.5$$

$$a+b=13.5$$

$$a+c=14.5.$$

Отсюда $a=5.5, b=8, c=9$.

Вершина 2 является пересечением прямых $b+c=13$ и $a+b=13.5$. Решая систему уравнений получаем точку (9.5; 4; 9).

Вершина 3 является пересечением прямых $b+c=13$ и $a+c=14.5$. Решая систему уравнений получаем точку (9.5; 8; 5).

Переходим к переменным $x, y, z$ и получаем С-ядро игры, которое описывается тремя граничными точками:

(8, 9, 13),

(12, 5, 13),

(12, 9, 9).

Проверим выпуклость игры по первому игроку.

$$V_x - V(\{0\}) \le \begin{bmatrix} V_{xy} - V_y \\ V_{xz} - V_z \end{bmatrix} \le V_{xyz} - V_{yz} \quad \rightarrow \quad 2.5 < \begin{bmatrix} 17-1 \\ 21-4 \end{bmatrix} < 30-18$$

— условие не выполняется (17–1=16>30–18=12), следовательно, игра не выпукла.

Проверяем выпуклость по второму игроку:

$$V_y - V(\{0\}) \le \begin{bmatrix} V_{xy} - V_x \\ V_{yz} - V_z \end{bmatrix} \le V_{xyz} - V_{xz} \quad \rightarrow \quad 1 < \begin{bmatrix} 17 - 2.5 \\ 18 - 4 \end{bmatrix} < 30 - 21$$

– не выполняется условие (17-2.5=14.5 > 30-21=9).

Проверяем выпуклость по третьему игроку:

$$V_z - V(\{0\}) \le \begin{bmatrix} V_{xz} - V_x \\ V_{yz} - V_y \end{bmatrix} \le V_{xyz} - V_{xy} \quad \rightarrow \quad 4 < \begin{bmatrix} 21 - 2.5 \\ 18 - 1 \end{bmatrix} < 30 - 17$$

– не выполняются условия (21-2.5=18.5 > 30-17=13 и 18-1=17 >30-17=13).

Определим N-ядро игры, как центр с-ядра:

$$x: \quad \frac{1}{3}(8+12+12) = 10\frac{2}{3};$$

$$y: \quad \frac{1}{3}(9+5+9) = 7\frac{2}{3};$$

$$z: \quad \frac{1}{3}(13+13+9) = 11\frac{2}{3}.$$

Теперь вычислим вектор Шепли:

$$\sigma_x = \frac{1}{3}(2.5-0) + \frac{1}{6}\left((17-1)+(21-4)\right) + \frac{1}{3}(30-18) = 10\frac{1}{3};$$

$$\sigma_y = \frac{1}{3}(1-0) + \frac{1}{6}\left((17-2.5)+(18-4)\right) + \frac{1}{3}(30-21) = 8\frac{1}{12};$$

$$\sigma_z = \frac{1}{3}(4-0) + \frac{1}{6}\left((21-2.5)+(18-1)\right) + \frac{1}{3}(30-17) = 11\frac{7}{12}.$$

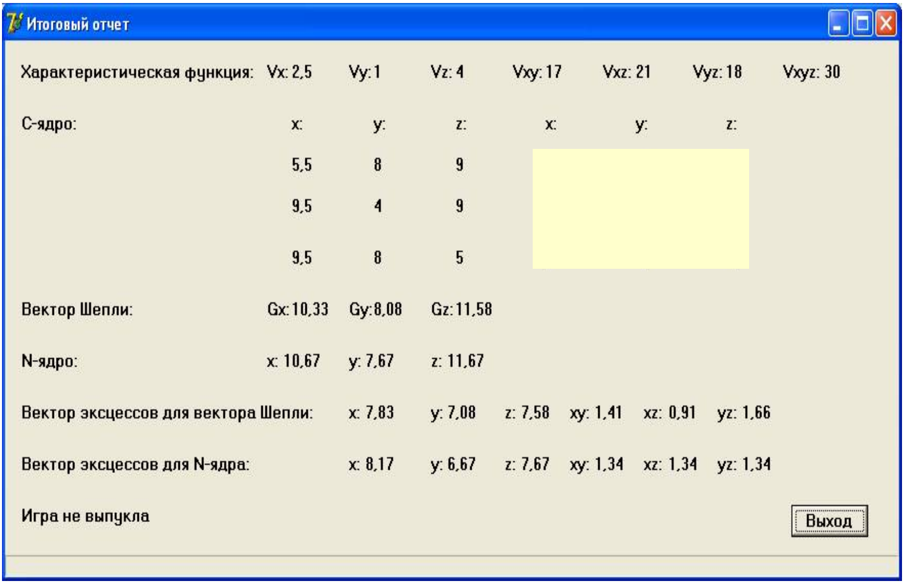
***Примечание:*** числа можно вводить, округляя до второго знака после запятой. Так, вектор Шепли будет выглядеть: (10.33, 8.08, 11.58)

Переходим к расчету векторов эксцессов.

Вектор эксцессов для вектора Шепли: (7.83, 7.08, 7.58, 1.41, 0.91, 1.66)

Вектор эксцессов для N-ядра: (8.17, 6.67, 7.67, 1.34, 1.34, 1.34)

После нажатия кнопки «Все выполнено», получаем:




***Выводы по работе:*** из полученных двух решений можно предложить в качестве окончательного решения N-ядро. Можно объяснить наш выбор тем, что для двух игроков (X и Z) N-ядро предлагает хоть немного, но все же большую величину выигрыша. И если поставить выбор решения на госование, то большинством голосов будет выбрано именно N-ядро.

**Порядок проведения работы**

1. Дана игра трех лиц в нормальной форме. Необходимо перейти к форме игры в виде характеристической функции.
2. Определить, имеет ли игра С-ядро. Если имеет, то найти С-ядро игры.
3. Проверить, является ли игра выпуклой.
4. Найти вектор Шепли.

5. Найти N-ядро игры.
6. Определить вектора эксцессов для найденных решений
7. Сравнить все полученные решения. Указать наилучшее решение с Вашей точки зрения.

**Варианты заданий**

**Вариант 1**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X=(0,4),\ Y=(1,3),\ Z=(0,2,4),$

$J_1=2ZX-ZY,\ J_2=X+Y+Z,\ J_3=2ZX-ZY$ .

**Вариант 2**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X=(0,4),\ Y=(1,2,3),\ Z=(1,3,5),$

$J_1=3X-4Y+ZX,\ J_2=XY-ZX+ZY,\ J_3=2Z-XY+XZ$

.

**Вариант 3**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X=(1,2), Y=(1,2), Z=(2,3)$ ,

$J_1=J_2=J_3=2\cdot(-1)^{X+Y}\cdot(X+Y)+3Z$ .

**Вариант 4**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X=(1,3,5), Y=(1,4), Z=(1,6)$ ,

$J_1=XY+Z-XZ, J_2=YZ+X-XY, J_3=XZ+Y-YZ$ .

**Вариант 5**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X=(0,2,5), Y=(1,4), Z=(1,2,4)$ ,

$J_1=X^2-XZ+ZY, J_2=Y^2-XY+2YZ+3, J_3=Z^2-ZY+2XY$

**Вариант 6**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X=(1,5), Y=(2,4,6), Z=(1,2,3)$ ,

$J_1=XYZ-YZ+Y-Z, J_2=XYZ-XZ+X-Z,$

$J_3 = XYZ - XY + X - Y$ .

**Вариант 7**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X = (1,4), Y = (0,5), Z = (2,3)$ ,

$J_1 = (-1)^{X+Z}(X + Y + Z) + X, J_1 = (-1)^{X+Y}(X + Y + Z) + Y,$

$J_3 = (-1)^{Y+Z}(X + Y + Z) + Z$ .

**Вариант 8**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X = (0,1,3), Y = (2,4), Z = (1,3,5)$ ,

$J_1 = 2(X + Y) - XZ, J_2 = 6Y - X - YZ, J_3 = 4(X + Z) - YZ$ .

**Вариант 9**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X = (0,1,4), Y = (0,5), Z = (2,4)$ ,

$J_1 = (-1)^{X+Z}(X + Y) + 2X, J_2 = (-1)^{X+Y}(Y + Z) + 3Y$ ,

$J_3 = XYZ - XY$ .

**Вариант 10**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X = (1,2,3), Y = (0,1,2), Z = (1,2,3)$ ,

$J_1 = (-1)^{Y+X}(Y + X) + 2Z, J_2 = (-1)^{Y+Z}(Y + Z) + 2X$ ,

$J_3 = (-1)^{X+Z}(X + Z) + 2Y$ .

**Вариант 11**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$X = (0, 4),\ Y = (1, 2, 3),\ Z = (2, 6)$,

$J_1 = 4X - 2YX + ZX,\quad J_2 = (-1)^{X+Y}(XY - 2Z)$,

$J_3 = (-1)^{X+Y}(-YX) + 2ZY$ .

**Вариант 12**
Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:
$X=(0,2,5),\ Y=(1,3),\ Z=(1,2,4),$
$J_1 = X^2 - 2XZ + ZY,\quad J_2 = Y^2 - 2XY + XZ + 5,$
$J_3 = Z^2 - ZY + XY.$

**Вариант 13**
Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:
$X=(1,2,3),\ Y=(1,2),\ Z=(0,2),$
$J_1 = 2X - Y + Z,\quad J_2 = 2Y + Z,\quad J_3 = X - Y + 3Z.$

**Вариант 14**
Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:
$X=(0,3),\ Y=(2,4),\ Z=(0,2),$
$J_1 = (-1)^{Y+X}(Y+X)+2Z, J_2 = (-1)^{Y+Z}(Y+Z)+2X,$
$J_3 = (-1)^{X+Z}(X+Z)+2Y.$

**Вариант 15**
Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:
$X=(0,4),\ Y=(1,2,3),\ Z=(1,3,5),$
$J_1 = 3X - YX + ZX,\quad J_2 = XY - ZX + ZY,$
$J_3 = 2Z - XY + XZ$

**Вариант 16**
Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:
$X=(2,3,4),\ Y=(0,5),\ Z=(1,2,3),$
$J_1 = 3X - XY + Y,\quad J_2 = 3Y - YZ + Z,\quad J_3 = 3Z - ZX + X.$

**Вариант 17**
Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:
$X=(0,4),\ Y=(1,2,3),\ Z=(2,4,6),$
$J_1 = 4X - 2YX + ZX,\quad J_2 = XY - ZX + ZY,$
$J_3 = 2Z - 3XY + XZ.$

**Вариант 18**

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,1,3),\ Y = (0,2,4),\ Z = (1,3,5),$$

$$J_1 = 2(X+Y) + XZ, \quad J_2 = 6Y - X - YZ,$$

$$J_3 = 4(X+Y) - YZ + XZ.$$

## 2.6 Лабораторная работа «Игры с распределением затрат»

**Цель работы**

Изучение механизмов коллективного принятия решений, связанных с распределением затрат на производство неделимого коллективного продукта; изучение способов нахождения решений в данных задачах по различным критериям оптимальности с проведением сравнительного анализа полученных решений.

**Рекомендации по подготовке к работе**

В данной лабораторной работе рассматриваются основные методы решения задач с распределением затрат на производство неделимого общественного продукта. В качестве возможных решений рассматриваются: подушный, пропорциональный и уровневый налоги, а также вектор Шепли и N-ядро. Для каждого из этих решений определяются вектор затрат и вектор прибыли.

*Подушный налог* предлагает делить затраты поровну между агентами, но при этом затраты не должны превышать возможные доходы агентов от использования общественного продукта.

*Уровневый налог*, напротив, предлагает поровну делить между агентами кооперативную прибыль (разность между суммарными доходами агентов и стоимостью коллективного объекта). На прибыль также налагаются ограничения: для каждого агента индивидуальная прибыль не должна превышать его дохода.

Помните, что для каждого агента сумма его затрат и его прибыли должна равняться его личным доходам. Таким образом, если мы определили вектор затрат, то вектор прибыли определяется как разность вектора доходов и вектора затрат. Аналогично, если первоначально мы определяем вектор прибыли, то вектор затрат находим из разности вектора доходов и вектора прибыли.

При определении *вектора Шепли* выбирайте наиболее удобную траекторию нахождения решения: если стоимость объекта велика (превышает половину общих доходов), то проще и быстрее находить вектор

Шепли по прибыли; если стоимость объекта низка, то проще находить решение по затратам. Если вам сложно находить вектор Шепли по интерпретации (затраты – сборщик налогов, прибыль – банк), то его всегда можно найти традиционным способом. Для этого необходимо построить характеристическую функцию игры по формуле $v(S)=\left[\sum_{i\in S} b_i - c\right]^+$, после чего вектор Шепли рассчитывается обычным способом по формуле, приведенной в определении вектора.

При нахождении *N-ядра* прежде всего необходимо определить ситуацию с затратами: велики они или нет. Если стоимость коллективного объекта превышает половину общих доходов, то N-ядро, так же как и уровневый налог, предлагает поровну разделить прибыль. Но! В отличие от уровневого налога ограничения на прибыль здесь более жесткие: в N-ядре каждый агент не должен получить прибыль больше, чем половина его индивидуального дохода. Если стоимость коллективного объекта меньше половины общих доходов, то N-ядро, так же как и подушный налог, предлагает поровну разделить затраты. В этом случае затраты также не могут превышать половину индивидуальных доходов агентов.

*Совет:* для удобства нахождения N-ядра запишите вспомогательный вектор, элементами которого будут являться половины доходов агентов.

*Внимание!* Проверяйте каждое найденное решение: элементы любого найденного вектора затрат (прибыли) в сумме должны равняться стоимости коллективного объекта (прибыли от эксплуатации этого объекта). Если заданное условие не выполняется, ищите ошибку в решении! Для вектора Шепли находите решение в простых дробях: если при проверке равенство не будет выполняться, то это точно ошибка в нахождении решения (при переходе к десятичным числам возможна еще ошибка округления).

После нахождения всех решений, сведите их в таблицу:

| | **Вектор прибыли** | **Вектор затрат** |
|---|---|---|
| Подушный налог | | |
| Пропорциональный налог | | |
| Уровневый налог | | |
| Вектор Шепли | | |
| N-ядро | | |

**Пример выполнения работы**

Имеется пять агентов, для которых известно, что от использования коллективного объекта они могут получить доходы, соответственно, 8, 10, 12, 20 и 32. Необходимо определить, каким образом должны быть распределены затраты между агентами, если стоимость коллективного объекта равна 32.

Найдем различные варианты распределения затрат.

*Подушный налог* предлагает нам поровну поделить затраты между агентами. Получаем: $\frac{32}{5} = 6.4$ .

Тогда вектор затрат будет $x = (6.4,\ 6.4,\ 6.4,\ 6.4,\ 6.4)$,

Вектор прибыли: $y = (1.6,\ 3.6,\ 5.6,\ 13.6,\ 25.6)$.

*Пропорциональный налог* определяет затраты пропорционально доходам агентов: $x_i = c \cdot \frac{b_i}{\sum_j b_j}$.

Тогда вектор затрат: $x = (3.122,\ 3.9,\ 4.683,\ 7.805,\ 12.488)$.

Вектор прибыли: $y = (4.878,\ 6.1,\ 7.317,\ 12.195,\ 19.512)$.

*Уровневый налог* предлагает равномерно распределять между агентами прибыль. В нашем случае суммарные доходы агентов равны 82, соответственно, прибыль равна $e = 82 - 32 = 50$ .

Если мы попытаемся распределить прибыль поровну $\frac{50}{5} = 10$, то первые два агента получат прибыль, превышающую их доходы. Это недопустимо, поэтому установим их прибыль равной доходам: $y_1 = 8$, $y_2 = 10$ . У нас еще остается $50 - 18 = 32$ единицы прибыли, которую попытаемся равномерно распределить между оставшимися тремя агентами: $\frac{32}{3} = 10.667$ .

Получаем вектор прибыли: $y = (8, 10, 10.667, 10.667, 10.667)$.

Тогда вектор затрат: $x = (0,\ 0,\ 1.333,\ 9.333,\ 21.333)$.

*Вектор Шепли* в данном случае проще находить через затраты:

$$x_1 = \frac{1}{5} \cdot 8 + \frac{1}{20}(8 + 8 + 8) + \frac{1}{30}(8 + 2) = \frac{94}{30},$$

$$x_2 = \frac{1}{5} \cdot 10 + \frac{1}{20}(10+10+10) + \frac{1}{30}(10+4) = \frac{119}{30},$$

$$x_3 = \frac{1}{5} \cdot 12 + \frac{1}{20}(12+12+12) + \frac{1}{30}(12+4+2) = \frac{144}{30},$$

$$x_4 = \frac{1}{5} \cdot 20 + \frac{1}{20}(20+20+20) + \frac{1}{30}(14+12+10) + \frac{1}{20} \cdot 2 = \frac{249}{30},$$

$$x_5 = \frac{1}{5} \cdot 32 + \frac{1}{20}(24+22+20+12) + \frac{1}{30}(14+12+4+10+2) + \frac{1}{20} \cdot 2 = \frac{354}{30}.$$

Полученный вектор Шепли по затратам:

$$x = \left( \frac{94}{30}, \frac{119}{30}, \frac{144}{30}, \frac{249}{30}, \frac{354}{30} \right).$$

Тогда вектор Шепли по прибыли: $y = \left( \frac{146}{30}, \frac{181}{30}, \frac{216}{30}, \frac{351}{30}, \frac{606}{30} \right)$.

Для нахождения *N-ядра* определим прежде всего ситуацию: в нашем случае затраты составляют меньше половины доходов, поэтому будем распределять поровну затраты, но при этом они не должны превышать половину доходов каждого игрока. При распределении затрат поровну получаем: $\frac{32}{5} = 6.4$. Первый агент не должен платить больше половины своего дохода, поэтому $x_1 = 4$. Оставшиеся 28 единиц затрат попытаемся снова поделить поровну между агентами: $\frac{28}{4} = 7$ – эта величина превышает половину доходов второго и третьего агентов, поэтому устанавливаем $x_2 = 5,\ x_3 = 6$.

Осталось распределить $32 - 4 - 5 - 6 = 17$ единиц затрат. поделим их поровну между оставшимися двумя агентами: $\frac{17}{2} = 8.5$.

Получаем вектор затрат: $x = (4, 5, 6, 8.5, 8.5)$.

Тогда вектор прибыли будет: $y = (4, 5, 6, 11.5, 23.5)$.

**Порядок проведения работы**

Рассматривается модель распределения затрат с пятью агентами. Известны доходы агентов $b_i$ от использования коллективного объекта. Даны два варианта стоимости коллективного объекта $c$. Для каждого варианта необходимо определить (по затратам и по прибыли):

1) подушный налог;
2) пропорциональный налог;
3) уровневый налог;
4) вектор Шепли;
5) N-ядро.

Сравнить и проанализировать полученные результаты. Ответьте на вопрос: какое распределение затрат, с Вашей точки зрения, наиболее справедливо.

**Варианты заданий**

| № варианта | Доходы агентов | | | | | Стоимость коллективного объекта $c$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | а) | б) |
| 1 | 12 | 14 | 20 | 24 | 40 | 40 | 68 |
| 2 | 5 | 8 | 8 | 25 | 28 | 28 | 42 |
| 3 | 10 | 14 | 30 | 34 | 50 | 54 | 75 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 12 | 14 | 21 | 36 |
| 5 | 20 | 22 | 24 | 30 | 34 | 42 | 86 |
| 6 | 6 | 8 | 16 | 24 | 34 | 40 | 54 |
| 7 | 2 | 6 | 12 | 22 | 46 | 30 | 56 |
| 8 | 10 | 14 | 28 | 35 | 42 | 84 | 100 |
| 9 | 12 | 24 | 46 | 50 | 54 | 76 | 120 |
| 10 | 5 | 15 | 25 | 40 | 45 | 54 | 95 |
| 11 | 11 | 21 | 30 | 38 | 45 | 101 | 130 |
| 12 | 7 | 9 | 16 | 35 | 45 | 65 | 95 |
| 13 | 4 | 12 | 16 | 34 | 46 | 52 | 84 |
| 14 | 20 | 24 | 34 | 36 | 68 | 88 | 146 |
| 15 | 4 | 16 | 34 | 36 | 54 | 44 | 96 |

| № варианта | Доходы агентов | | | | | Стоимость коллективного объекта $c$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | а) | б) |
| 16 | 5 | 12 | 15 | 35 | 45 | 56 | 85 |
| 17 | 6 | 14 | 24 | 26 | 42 | 42 | 94 |
| 18 | 14 | 16 | 34 | 36 | 44 | 70 | 100 |
| 19 | 4 | 8 | 14 | 22 | 24 | 20 | 42 |
| 20 | 2 | 5 | 5 | 12 | 16 | 12 | 32 |

# 3 Методические указания для организации самостоятельной работы

## 3.1 Общие положения

Цель самостоятельной работы по дисциплине – проработка лекционного материала, самостоятельное изучение некоторых разделов курса, подготовка к лабораторным работам, тестам и контрольным работам.

Самостоятельная работа студента по дисциплине «Теория игр» включает следующие виды его активности:

1. проработка лекционного материала;
2. изучение тем теоретической части дисциплины, вынесенных для самостоятельной проработки;
3. подготовка к лабораторным работам;
4. подготовка к контрольным работам;
5. подготовка к экзамену.

## 3.2 Проработка лекционного материала

При проработке лекционного материала необходимо:

а) отработать прослушанную лекцию (прочитать конспект, прочитать учебное пособие и сопоставить записи с конспектом, просмотреть слайды) и восполнить пробелы, если они имелись (например, если вы что-то не поняли или не успели записать);

б) перед каждой последующей лекцией прочитать предыдущую, дабы не тратилось много времени на восстановление контекста изучения дисциплины при продолжающейся теме.

Данный вид деятельности ориентирован как на закрепление материала, так и на подготовку к контрольным работам.

Решение любой игры начинается с ее представления. Игра может быть представлена в одной из двух форм: развернутой (позиционной) или нормальной. Для игр двух лиц нормальная форма игры может принимать вид матричной. У каждой формы представления есть вои достоинства и недостатки. Необходимо представлять, в каких случаях лучше использовать нормальную форму игры, а для каких целей лучше подходит позиционная форма.

При построении игры в позиционной форме особое внимание уделите информационным множествам: без указания информационных множеств игра не представлена! Исключение составляют игры с полной информацией: так как в этих играх каждая вершина представляет отдельное информационное множество, то здесь нет необходимости указывать рассматриваемые множества.

Для удобства, сначала строятся множества очередностей и ходы (альтернативы) игроков. Информационные множества помечаются в самом конце построения. Если вы затрудняетесь с указанием информационных множеств, проведите рассуждения – что игрок знает, а что нет. Если игрок различает две ситуации, то они должны принадлежать разным информационным множествам. Если игрок не различает два состояния игры, то эти состояния относятся к одному информационному множеству. Для самопроверки: из всех вершин, принадлежащих одному информационному множеству должно исходить одинаковое количество альтернатив.

Для каждого класса игр вы должны знать, что является решением игры, какой принцип оптимальности лежит в основе решения и как находить указанное решение (существующие методы).

Для антагонистических игр решением является пара уравновешенных стратегий и цена игры. Это означает, что при использовании любого метода, в качестве результата выступают две оптимальные стратегии и цена игры. Для удобства, перед нахождением решения всегда пытайтесь сначала сократить платежную матрицу. Помните, что при окончательной записи оптимальных смешанных стратегий, размерность векторов должна соответствовать размерности первоначальной матрицы: на месте вычеркнутых стратегий ставятся нули. Самопроверка: цена игры не может превышать значение максимального элемента матрицы и не может быть меньше значения минимального элемента. В итеративном методе окончательным результатом является не построенная таблица, а также две оптимальные стратегии и цена игры. При решении игры методом линейного программирования не забывайте при записи окончательного решения откорректировать цену игры, если вы проводили преобразования матрицы в положительную.

Если антагонистическая игра имеет решение в чистых стратегиях, необходимо приводить все решения (перечислить все имеющиеся седловые точки). Именно поэтому перед сокращением матрицы проверьте, не имеет ли игра решения в чистых стратегиях. Если игра имеет решение только в чистых стратегиях достаточно одного решения.

При решении игр на единичном квадрате прежде всего необходимо определить тип игры: вогнутая, выпуклая или вогнуто-выпуклая. После этого выбирается критерий, по которому будет находиться решение. Для вогнуто-выпуклых игр можно брать как минимаксный, так и максиминный критерий. Здесь при выборе исходите из удобства и простоты нахождения решения (по виду первых производных). Для вогнутых/выпуклых игр критерий строго определен. Здесь неверно выбранный критерий приведет к неверному результату.

Помните, что в выпуклой (вогнутой) игре второй (первый) игрок обязательно имеет решение в чистых стратегиях. В общем случае его противник имеет решение в смешанных стратегиях, но может получиться и чистая (все равно она является частным случаем смешанной стратегии).

В некооперативных играх обычно в качестве решения принимается точка Нэша (равновесная ситуация). К сожалению, в случае множественности решений (при существовании нескольких точек Нэша) возникает затруднение с выбором конкретного решения из-за их несовместимости. Кроме того, поиск равновесных ситуаций значительно затруднен по сравнению с нахождением защитных стратегий. Поэтому предлагается в качестве решения рассматривать защитные стратегии. Для их поиска можно использовать любые методы, используемые для нахождения решения в антагонистических играх. Помните, что теперь у обоих игроков матрицы выигрышей, а значит и для второго игрока оптимальная стратегия ищется по максиминному, а не по минимаксному критерию. В качестве цены игры теперь выступает не одно число, а вектор, показывающий выигрыш каждого игрока: теперь оба игрока могут быть в выигрыше, либо оба могут быть в проигрыше.

Для решения кооперативной игры прежде всего необходимо представить игру в форме характеристической функции. В качестве решения здесь может выступать с-ядро, вектор Шепли, N-ядро. Если игра не имеет с-ядра, то в качестве решения выступает либо вектор Шепли, либо N-ядро. С-ядро – это выпуклый многоугольник, для определения которого необходимо указать координаты его вершин. Не забывайте при записи решения возвращаться к первоначальным переменным. Для самопроверки: в любом дележе, принадлежащем с-ядру каждый игрок и каждая коалиция должны получать не меньше, чем они могут заработать сами по себе. Кроме того, каждый найденный вами вектор (с-ядро) является дележом, а значит сумма его элементов должна равняться выигрышу максимальной коалиции. Проверяйте окончательный результат!

В выпуклых играх вектор Шепли, так же как и N-ядро, является центром с-ядра. Значит в выпуклой игре эти два решения должны совпадать.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Чем отличается нормальная форма игры от позиционной?
2. Что такое смешанная стратегия?
3. Что является решением антагонистической игры?
4. Что такое платежная матрица?
5. Всегда ли антагонистическая игра имеет решение?
6. В чем разница между кооперативными и некооперативными играми?
7. Поясните смысл характеристической функции игры.
8. Что является решением кооперативной игры с нетрансферабельными дележами?
9. Опишите достоинства и недостатки вектора Шепли и N-ядра.

## 3.3 Самостоятельное изучение тем теоретической части курса

### 3.3.1 Кооперативные игры: оптимальность по Парето, арбитражная схема Нэша.

Если игра задана в нормальной форме, а не в форме характеристической функции, то в качестве решения могут находиться оптимальные стратегии игроков, а не оптимальные дележи.

Оптимальность по Парето является единственно бесспорным критерием оптимальности и зачастую принимается в качестве решения (здесь на доминирование по Парето проверяются вектора средних выигрышей игроков, с учетом возможного применения совместных смешанных стратегий). При этом возникают две проблемы:

- множество оптимальных по Парето решений может быть достаточно большим, в этом случае для определения единственного решения может быть применена арбитражная схема Нэша;
- после того, как найдено решение в виде вектора выигрышей, необходимо перейти к оптимальным стратегиям: в общем случае количество оптимальных совместных стратегий может быть бесконечное множество.

### 3.3.2 Кооперативные игры в условиях коалиционного разбиения.

Обратить внимание на понятие коалиционная структура, на отличие игр в условиях коалиционного разбиения от просто кооперативных игр.

Игры в форме функции разбиения: рассмотреть понятие дележа, что является решением данного класса игр.

Игры с заданным правилом образования коалиций: рассмотреть понятие конфигурации, пси-устойчивой конфигурации.

Игры угроз и контругроз: рассмотреть понятия индивидуально рациональной конфигурации и коалиционно рациональной конфигурации, понятие партнера коалиции. Чем отличается угроза от контругрозы.

## 4 Рекомендуемая литература

1. Салмина Н.Ю. Теория игр: учеб. пособие. – Томск: ТУСУР, ФДО, 2012. – 107 с. – http://fdo.tusur.ru/study/library/
2. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие. – СПб.: ЛАНЬ, 2010. – 448 с. (Гриф) – URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=540