Министерство высшего образования и науки РФ

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники

Кафедра экономической математики, информатики и статистики

Вычислительная математика

В.И.Смагин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

по дисциплине «Вычислительная математика» и руководство
по выполнению лабораторных и практических работ

Томск – 2018

Аннотация

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы студентов по дисциплине «Вычислительная математика» для бакалавров, обучающихся на кафедре ЭМИС. Предлагаемые рекомендации к практическим и лабораторным работам реализуются с использованием пакета прикладных программ Scilab.

Оглавление

1. ТЕМА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ: «ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ»

Задание:

Для функции заданной в виде таблицы на равномерной сетке $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0, 10}$, $x_0 = 1,\ \ h = 0{,}1$, оценить значение первой производной в точке $1{,}5$. Определить погрешности считая, что табличные значения заданы с верными знаками $\Delta_{\text{М}}$, $\Delta_{\text{Н}}$, $\Delta_{\text{П}}$ и $h_{\text{опт}}$. Варианты исходных данных приведены в приложении.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Изучить методы численного дифференцирования для равномерной сетки узлов.

Форма отчета:

Опрос, проверка расчетов.

Цель работы:

Дать студентам практические навыки численного дифференцирования функций, заданных в виде таблицы по равномерной сетке. Самостоятельное изучение методов численного дифференцирования.

Указания к выполнению. Рекомендуется изучить основные определения и методы численного дифференцирования»

Указания к выполнению. Так как точка x, в которой необходимо выполнить операцию численного дифференцирования находится в средине таблицы и для $t = \dfrac{x - x_k}{h}$ справедливо $|t| \le 0,25$. Тогда выберем формулу Стирлинга:

$$f(x_k + th) \approx S(x_k + th) = y_k + \frac{t}{1!}\frac{(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}{2} + t^2\Delta^2 y_{k-1} + \\ + \frac{t(t^2-1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{k-1} + \Delta^3 y_{k-2})}{2} + \cdots \qquad (1)$$

Дифференцируя по t левую и правую части равенства (1), учитывая связь между t и x, получим:

$$f'_x(x_k+th) \approx \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2h} + \frac{t\Delta^2 y_{k-1}}{h} +$$

$$+\frac{(3t^2-1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{k-2} + \Delta^3 y_{k-1})}{2h} + \cdots . \qquad (2)$$

Рассмотрим задачу вычисления первой производной по формуле (2), в которой будут учитываться только первых два слагаемых. Тогда для частного случая дифференцирования в точке x_k (в нашем случае $t = 0$) получим:

$$f'_x(x_k) = \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2h} + R_3'(x_k),$$

где

$$R_3'(x_k) = -\frac{f^{(3)}(\xi)h^2}{3!}. \qquad (3)$$

Формула (3) получена в результате дифференцирования остаточного члена формулы Стирлинга и вычисления его в точке $t = 0$. В силу (3) погрешность метода численного дифференцирования имеет вид:

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{M_3 h^2}{3!},$$

где $M_3 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|$. Погрешность метода с уменьшением шага уменьшается. Расчетная формула вычисления первой производной в точке x_k будет следующей:

$$f'_x(x_k) \approx \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2h} = \frac{y_{k+1} - y_k + y_k - y_{k-1}}{2h} =$$

$$= \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}. \qquad (4)$$

2. ТЕМА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ: «ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ»

Задание:

Вычислить $I = \int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-5}$ методами:

1) левых прямоугольников;
2) средних прямоугольников;
3) правых прямоугольников;

4) трапеций;

5) Симпсона.

Процесс вычисления интеграла организовать без пересчета значений подынтегральной функции в узлах и при использовании метода Рунге. Вывести значение интеграла и количество узлов, которое потребовалось для вычисления значения интеграла с заданной точностью. Варианты исходных данных приведены в приложении.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Изучить методы численного интегрирования.

Форма отчета:

Опрос, проверка расчетов.

Цель работы:

Дать студентам практические навыки численного интегрирования. Самостоятельное изучение методов численного интегрирования.

Указания к выполнению. Рекомендуется изучить основные определения и методы численного интегрирования»

\Указания к выполнению.

Рассмотрим основные формулы, позволяющие реализовать численное интегрирование с помощью простейших формул Ньютона-Котеса.

1. *Формула левых прямоугольников*

В качестве узла квадратурного правила выбирается левый конец интервала $[a,b]$, т.е. точка a. Тогда квадратурная формула называется формулой левых прямоугольников и записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + R_{0,лев.}(f), \qquad (5)$$

где

$$R_{0,лев.}(f) = \int_a^b (x-a)f'(\xi)dx$$

и ξ − некоторая точка интервала $[a,b]$.

Формула (5) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(a)$.

В силу теоремы о среднем, так как множитель $(x-a)$ не меняет знак на $[a,b]$ и $f'(x)$ предполагается непрерывной на $[a,b]$, существует точка $\eta \in [a,b]$, такая, что

$$R_{0,лев.}(f) = f'(\eta)\int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta).$$

Разделим отрезок $[a,b]$ на m отрезков длиной $h = \dfrac{b-a}{m}$ и к каждому отрезку применим формулу левых прямоугольников. Тогда

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx \approx hf(a+kh),\ R_{0,лев.}^{(k)}(f) = \frac{h^2}{2} f'(\eta_k),\ \ \eta_k \in [a+kh, a+(k+1)h],$$

$$k = \overline{0, m-1}.$$

Просуммировав результаты по всем отрезкам, получим обобщенную формулу левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}\left(f_0 + f_1 + \ldots + f_{m-1}\right), \qquad (6)$$

где $f_k = f(a+kh),\ k = \overline{0, m-1}$. При этом погрешности также суммируются, то есть

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} R_{0,лев.}^{(k)}(f) = \frac{(b-a)^2}{2m^2}\sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k).$$

В силу предположения о непрерывности $f'(x)$ на $[a,b]$ и согласно теореме о среднем, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k) = f'(\xi).$$

Тогда погрешность обобщенной формулы левых прямоугольников примет вид

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = \frac{(b-a)^2}{2m} f'(\xi).$$

2. *Формула правых прямоугольников*

В качестве узла квадратурного правила выбирается правый конец интервала $[a,b]$, т.е. точка b. Тогда квадратурная формула называется формулой правых прямоугольников и записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) + R_{0,пр.}(f), \qquad (7)$$

где

$$R_{0,пр.}(f) = \int_a^b (x-b)f'(\xi)dx = -\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta).$$

Формула (7) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(b)$.

Разделив отрезок $[a,b]$ на m отрезков длиной $h = \dfrac{b-a}{m}$, применив к каждому отрезку формулу правых прямоугольников и просуммировав результаты, получим обобщенную формулу правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}\left(f_1 + f_2 + \ldots + f_m\right). \qquad (8)$$

Погрешность формулы (8) запишется в виде

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^2}{2m}f'(\xi).$$

3. *Формула средних прямоугольников*

В качестве узла квадратурного правила выбирается средняя точка интервала $[a,b]$, то есть точка $\dfrac{a+b}{2}$. Тогда квадратурная формула называется формулой средних прямоугольников и имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_{0,ср.}(f). \qquad (9)$$

Формула (9) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Так как середина интервала $[a,b]$ является узлом квадратурной формулы, то эта формула будет точной для всех многочленов первой степени. Тогда функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = P_1(x) + r(x),$$

где $P_1(x)$ − многочлен Тейлора первой степени, удовлетворяющий условиям

$$P_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad P_1'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Остаточный член при кратном интерполировании в предположении, что $f(x)$ имеет непрерывные производные второго порядка, имеет вид

$$r(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

где ξ − некоторая точка интервала $[a,b]$. Тогда

$$R_{0,ср.}(f) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)dx\,.$$

Так как множитель $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 0$ и $f''(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, согласно теореме о среднем, существует такая точка $\eta \in [a,b]$, что

$$R_{0,ср.}(f) = \frac{1}{2} f''(\eta)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)\,.$$

Разделим отрезок $[a,b]$ на m частей длиной $h = \frac{b-a}{m}$ и к каждому отрезку применим формулу средних прямоугольников (7). Тогда

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx \approx hf\left(a + \tfrac{2k+1}{2}h\right)$$

$$R_{0,ср.}^{(k)}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\eta_k),\ \eta_k \in [a+kh, a+(k+1)h],$$

$$k = \overline{0, m-1}\,.$$

Просуммировав результаты по всем отрезкам, получим обобщенную формулу средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{m}\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\ldots+f\left(a+\frac{(2m-1)h}{2}\right)\right]. \quad (10)$$

Погрешность формулы (10) можно записать, просуммировав $R_{0,ср.}^{(k)}(f)$ по всем отрезкам, то есть

$$R_{0,ср.}^{(об.)}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} R_{0,ср.}^{(k)}(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^3}\sum_{k=0}^{m-1} f''(\eta_k).$$

Согласно теореме о среднем и в предположении о непрерывности $f''(x)$ на $[a,b]$, погрешность обобщенной формулы средних прямоугольников запишется в виде

$$R_{0,ср.}^{(об.)}(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\xi). \quad (11)$$

4. *Квадратурная формула трапеций*

Для формулы трапеций $B_0^1 = B_1^1 = \frac{1}{2}$. Два равноотстоящих узла на $[a,b]$ образуют точки a и b. Формула трапеций и выражение для погрешности имеют вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)], \quad (12)$$

$$R_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta).$$

Последнее выражение для $R_1(f)$ получается в предположении, что $f''(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и произведение $(x-a)(x-b)$ не меняет знак на $[a,b]$.

Геометрически формула (12) означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$, заменяется площадью трапеции с основанием $(b-a)$ и высотой $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Разделив отрезок $[a,b]$ на m частей, применив к каждой части формулу трапеций и просуммировав результаты, получим обобщенную формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2m}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{m-1}) + f_m] \ . \quad (13)$$

Погрешность обобщенной формулы трапеций имеет вид

$$R_1^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi) \ .$$

5. *Квадратурная формула Симпсона (парабол)*

В этом случае $B_0^2 = B_2^2 = \frac{1}{6}$, $B_1^2 = \frac{4}{6}$. Три равноотстоящих узла на $[a,b]$ образуют точки $a, \dfrac{a+b}{2}, b$. Квадратурная формула Симпсона имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \quad (14)$$

Геометрически формула (14) означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$, заменяется площадью, ограниченной параболой, построенной на $[a,b]$ по трем точкам $a, \dfrac{a+b}{2}, b$.

Так как средняя точка интервала $[a,b]$ является узлом квадратурного правила, то формула (14) является точной для многочленов третьей степени. Для нахождения погрешности квадратурной формулы Симпсона построим многочлен Эрмита третьей степени $P_3(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$P_3(a) = f(a),$$
$$P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \ P_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
$$P_3(b) = f(b).$$

Остаточный член многочлена Эрмита $P_3(x)$ имеет вид:

$$r_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b).$$

Тогда остаточный член квадратурного правила Симпсона можно вычислить следующим образом:

$$R_2(f) = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx.$$

Так как множитель $(x-a)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$ не меняет знак на $[a,b]$ и, в предположении о непрерывности $f^{(4)}(x)$ на $[a,b]$, существует точка $\eta \in [a,b]$ такая, что

$$R_2(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta).$$

Разделим отрезок $[a,b]$ на четное число m частей длиной $h = \dfrac{b-a}{m}$ и к сдвоенному отрезку $[a+(k-1)h, a+(k+1)h]$ применим формулу (23). Тогда

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}\right].$$

Просуммировав результаты по всем сдвоенным отрезкам на $[a,b]$, получим обобщенную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3m}[f_0 + f_m +$$

$$+2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{m-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{m-1})],$$

погрешность которой можно представить в виде

$$R_2^{(об.)}(f) = -\frac{1}{90}h^5\left[f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_3) + \ldots + f^{(4)}(\eta_{m-1})\right],$$

где $\eta_k \in [a+(k-1)h, a+(k+1)h]$, $k = \overline{1, m-1}$.

Ввиду предположения о непрерывности $f^{(4)}(x)$ на $[a,b]$, и, согласно теореме о среднем, существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\frac{2}{m}\left[f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_3)+\ldots+f^{(4)}(\eta_{m-1})\right]=f^{(4)}(\xi).$$

Тогда выражение для погрешности квадратурной формулы Симпсона примет вид

$$R_2^{(об.)}(f)=-\frac{(b-a)^5}{180m^4}f^{(4)}(\xi).$$

3. ТЕМА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ: «МЕТОД ГАУССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Задание:

С помощью метода Гаусса найти решение системы линейных уравнений $Ax=b$. Варианты значений матриц A и вектора b приведены в приложении.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Изучить методы численного решения линейных уравнений.

Форма отчета:

Опрос, проверка расчетов.

Цель работы:

Дать студентам практические навыки численного решения линейных алгебраических уравнений. Самостоятельное изучение методов численного решения линейных уравнений.

Указания к выполнению. Рекомендуется изучить методы численного решения линейных алгебраических уравнений»

Указания к выполнению. Рассмотрим основные формулы, позволяющие реализовать численное решение системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса (метод исключения неизвестных). Этот метод осуществляет приведение исходной системы к эквивалентной системе с правой треугольной матрицей (схема единственного деления) или с диагональной матрицей (схема оптимального исключения). При этом не требуется заранее определять, имеет или нет решение данная система.

Рассмотрим схему единственного деления. Систему $Ax=b$ представим в виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{15}$$

Будем считать выбор порядка преобразования, в котором исключаются неизвестные, произвольным. Выберем какое-либо уравнение и неизвестное в этом уравнении. Единственное условие, которое должно быть выполнено при этом выборе, состоит в том, что коэффициент при выбранном неизвестном должен быть отличным от нуля. Переставляя, если необходимо, уравнения и меняя местами неизвестные, можно считать, что выбрано первое уравнение, неизвестное x_1, и при этом $a_{11} \neq 0$. Разделив выбранное уравнение на a_{11}, приведем его к виду:

$$x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = q_1, \tag{16}$$

где

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \; j = \overline{2, n}, \; q_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Исключим x_1 из остальных уравнений системы. Для этого умножим (16) последовательно на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ и вычтем из второго, третьего и т.д. последнего уравнения системы. Преобразованные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} a_{22.1}x_2 + a_{23.1}x_3 + \ldots + a_{2n.1}x_n &= b_{2.1}, \\ &\ldots \\ a_{n2.1}x_2 + a_{n3.1}x_3 + \ldots + a_{nn.1}x_n &= b_{n.1}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $a_{ij.1} = a_{ij} - b_{1j}a_{i1}, \; i, j = \overline{2, n}, \; b_{i.1} = b_i - a_{i1}q_1$.

К полученной системе применим такое же преобразование, т.е. выберем уравнение и неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, приведем этот коэффициент к единице, исключим неизвестное из прочих уравнений и так до тех пор, пока такие преобразования возможны.

В результате придем к одной из двух ситуаций.

1. После n шагов преобразований получим систему вида:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n &= q_1, \\ x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n &= q_2, \\ &\ldots \\ x_n &= q_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Решение полученной системы осуществляется снизу вверх следующим образом:

$$x_n = q_n,$$
$$x_i = q_i - \sum_{j=n}^{i-1} b_{ij} x_j, \;\; i = \overline{n-1,1}. \qquad (19)$$

2. После шага преобразований $m < n$ система приняла вид:

$$\begin{gathered} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n = q_1, \\ x_m + b_{m\ m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{m\ n}x_n = q_m, \\ 0 = b_{m+1.n}, \\ \ldots \\ 0 = b_{m.n}. \end{gathered} \qquad (19)$$

Тогда, если среди элементов $b_{m+1.n},\ldots,b_{m.n}$ есть отличные от нуля, то система (19) не имеет решения, если все, $b_{j.m} = 0$, $j = \overline{m+1,n}$, то система имеет бесчисленное множество решений (неизвестные $x_{m+1},\ldots,x_n$ могут принимать любые значения, а $x_1,\ldots,x_m$ выражаются через них).

Приведение системы к виду (19) называется прямым ходом метода Гаусса, а нахождение ее решения – обратным. Заметим, что на каждом шаге прямого хода метода Гаусса выбирается уравнение и неизвестное, подлежащие исключению из прочих уравнений. Это равносильно выбору коэффициента для очередного шага преобразований. Этот коэффициент называется ведущим и он должен быть отличным от нуля. Во избежание большой потери точности рекомендуется осуществлять такую перестановку уравнений, чтобы ведущий коэффициент являлся либо максимальным по модулю коэффициентом во всей системе, либо максимальным по модулю коэффициентом в выбранном уравнении. Такая процедура называется методом Гаусса с выбором главного элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смагин В.И. Matlab и система Simulink. Изд-во ТУСУР, 2006. 123 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов М.: Высшая школа, 2009. 848 с.
3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Лань, 2009. 368 с.
4. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. М.: Высшая школа, 1998.
5. Смагин В.И., Решетникова Г.Н. Численные методы (аппроксимация, дифференцирование и интегрирование). Изд-во Том. ун-та, Томск, 2008. 184 с.
6. Воеводин В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. Учебник для вузов. М.: Изд-во МГУ, 2010. 168 с.
7. Горлач Б.А., Шахов В.Г. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация, Лань, 2016. 292 с.
[Электронный ресурс]. - http://e.lanbook.com/view/book/74673/
8. Киреев В.И. Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Лань, 2015. 448 с.
[Электронный ресурс]. - http://e.lanbook.com/view/book/65043