МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭМИС

_________________ И. Г. Боровской

«___» ____________________ 2018 г.

М.Г. Носова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы студентов

2018

Носова М. Г. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы студентов – Томск: Изд-во ТУСУР, 2018. – 26 с.

Учебно-методическое пособие содержит необходимые теоретические сведения и формулы, решения типовых задач, а также задачи для практических занятий и самостоятельной работы студентов.

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.

Все события, происходящие вокруг нас, можно разделить на две группы – детерминированные и случайные. Детерминированные события характеризуются тем, что при данном комплексе условий они либо всегда наступают, либо никогда не наступают.

Случайным событием называется такое событие, которое при данном комплексе условий может как наступить, так и не наступить, и наступит оно или нет - предсказать невозможно.

Достоверное событие Ω – событие, которое всегда происходит при проведении опыта, **невозможное событие** $\varnothing$ – событие, которое в результате опыта произойти не может.

Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C.

Над событиями можно провести операции:

1. Следование событий,
2. Произведение событий,
3. Сумма событий,
4. Вычитание событий.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A\cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A\cdot B$, $A\cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что оба события A и B происходят вместе.

Противоположным к событию A называется такое событие A, которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k (k=1, 2,..., n) образуют **полную группу**, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

Классическое определение вероятности: вероятность события определяется по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

где n – число элементарных равновозможных исходов данного опыта, m – число равновозможных исходов, приводящих к появлению события. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Задача 1. Пусть событие A состоит в том, что при бросании игрального кубика выпало число 2. Найти вероятность этого события.

Решение. В данной задаче n=6, так как достоверное событие состоит из 6 элементарных событий. Вероятность события A находится так $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$, так как событию благоприятствует 1 элементарное событие.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область случайным образом бросается точка *T*, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки *T*. Тогда за вероятность попадания точки *T* в область *A* принимается отношение

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}, \tag{2}$$

где *S(A)* и *S*(Ω) – геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей *A* и Ω соответственно.

Задача 2. В квадрате со стороной α наудачу выбирается точка. Найти вероятность того, что выбранная точка окажется внутри вписанного круга.

Решение. Пусть событие *A* состоит в том, что выбранная точка оказалась во вписанном круге. При этом достоверному событию соответствует квадрат с площадью α^2, событию *A* – круг площади $\pi(\alpha/2)^2=\pi\alpha^2/4$. Поэтому вероятность события А находится так:

$$P(A)=\frac{\pi\alpha^2/4}{\alpha^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Элементы комбинаторики

При вычислении вероятностей случайных событий часто используется раздел элементарной математики – комбинаторика.

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Сочетаниями из n элементов по m называют комбинации, состоящие ровно из n элементов и отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Число сочетаний обозначается через C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3}$$

Задача 3. Среди кандидатов в студенческий совет факультета три первокурсника, пять второкурсников и семь студентов третьего курса. Из этого состава наугад выбирают пять человек. Найти вероятность того, что все первокурсники попадут в совет.

Решение. Число способов выбрать пять человек из 3+5+7=15 равно числу сочетаний из 15 по 5:

$$C_{15}^5=\frac{15!}{5!(15-5)!}=3003.$$

Выбрать трех первокурсников из трех можно одним способом. Оставшихся двух членов совета можно выбрать C_{12}^2:

$$C_{12}^2=\frac{12!}{2!(12-2)!}=66.$$

Искомая вероятность p=66/3003=2/91.

Теорема сложения

Если A и B – несовместные события, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{4}$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{5}$$

Теорема умножения

Событие A называется независимым от события B, если возможность наступления события A не зависит от того, произошло событие B или нет. В противном случае события являются зависимыми. Условной вероятностью события B при наличии A называется величина

$$P(B / A) = P(A \cdot B) / P(A). \tag{6}$$

Вероятность произведения (пересечения, совмещения) двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого.

$$P(A \cdot B) = P(B / A)P(A) = P(A / B)P(B). \tag{7}$$

Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть H_1, H_2,..,H_n – полная группа попарно несовместных событий, A – некоторое случайное событие.

Будем полагать, что известны следующие вероятности:

а) $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$ – так называемые априорные вероятности событий H_i,

б) $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, …, $P(A/H_n)$ – условные вероятности события A при условии, что наступили события H_i.

Требуется найти безусловную (полную) вероятность $P(A)$ случайного события A.

Такой ситуации иногда дают следующую интерпретацию. События H_1, H_2,..,H_n называют гипотезами относительно тех условий, при которых может наступить (или не наступить) событие A, при этом полагают известными вероятности реализаций этих условий, то есть – вероятности $P(H_i)$, а также считаются известными вероятности наступления события А в условиях гипотезы H_i, то есть – условные вероятности $P(A/H_i)$. Ставится задача определения безусловной (полной) вероятности $P(A)$ случайного события A:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(A / H_i)P(H_i). \tag{8}$$

Это равенство и носит название **формулы полной вероятности**.

Задача 4. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго – 0,5, третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно.

Решение. Введем полную группу гипотез:

H_1 = (Зерно первого сорта),

H_2 = (Зерно второго сорта),
H_3 = (Зерно третьего сорта).

По условию известны вероятности $P(H_1)$=0,4, $P(H_2)$=0,5, $P(H_3)$=0,1.

Введем событие A=(Зерно взойдет). По условию известны априорные вероятности: $P(A/H_1)$=0,8, $P(A/H_2)$=0,5, $P(A/H_3)$=0,3.

Тогда вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A \mid H1)P(H1) + P(A \mid H2)P(H2) + P(A \mid H3)P(H3) =$$
$$= 0,4 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,6.$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть известно, что в результате опыта наступило событие A. Как изменится в этой ситуации вероятность гипотез H_i, то есть какова апостериорная вероятность $P(H_i/A)$ гипотезы H_i, при условии, что наступило событие A? Очевидно, что

$$P(H_i / A) = \frac{P(A / H_i)P(H_i)}{\sum_{k=0}^{n} P(A / H_k)P(H_k)}. \qquad (9)$$

Это равенство и носит название **формулы Байеса**.

Задача 5. Два стрелка подбрасывают монетку и выбирают, кто из них стреляет по мишени (одной пулей). Первый стрелок попадает по мишени с вероятностью 1, второй стрелок – с вероятностью 0,00001.

Решение. Можно сделать два предположения об эксперименте:

H_1 = {стреляет 1-й стрелок},

H_2 = {стреляет 2-й стрелок }.

Априорные вероятности этих гипотез одинаковы: $P(H_1) = P(H_2) = ½$.

Рассмотрим событие A = {пуля попала в мишень}. Известно, что $P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2)$ = 0,00001.

Поэтому вероятность пуле попасть в мишень $P(A)$ = ½·1 + ½·0,00001. Предположим, что событие A произошло. Какова теперь апостериорная вероятность каждой из гипотез H_i? Очевидно, что первая из этих гипотез много вероятнее второй (а именно, в 100000 раз). Действительно,

$$P(H_1 / A) = \frac{1/2 \cdot 1}{1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0,00001} = \frac{1}{1 + 0,00001}.$$

Схема Бернулли

Схема Бернулли заключается в следующем. Проводится серия из n опытов.

Предполагается, что выполнены условия:

а) опыты независимы, то есть исход одного опыта не влияет на исход другого опыта,
б) в каждом опыте может наступить (или не наступить) некоторое случайное событие *A*, но вероятность $P(A)=p$ этого события одна и та же в каждом опыте.

Требуется найти вероятность $P_n(m)$ того, что в серии из n опытов со бытие *A* наступит ровно m раз.

Теорема (об опытах). В схеме Бернулли вероятность $P_n(m)$ определяется равенством

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \quad (10)$$

Задача 6: Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена три раза.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами n=4 (количество выстрелов, независимых испытаний), p=0,7 (вероятность попадания в цель при одном выстреле, испытании). Будем использовать формулу Бернулли. Получаем:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^1 = 0,4116.$$

Задания для самостоятельной работы студентов

1. Банковский сейф имеет кодовый замок, состоящий из шести дисков с восьмью буквами на каждом. Сейф открывается при наборе единственной комбинации букв. Злоумышленник пытается открыть сейф, причем на проверку одной кодовой комбинации у него уходит 10 секунд. Какова вероятность того, что злоумышленник успеет открыть сейф, если в его распоряжении 1 час?

2. В партии из десяти деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу изделий 2 стандартных.

3. Сколько будет произведено рукопожатий при встрече 15 мужчин?

4. У девушки имеется 2 шляпки и 3 сумочки. Сколько вариантов пары шляпка-сумочка может выбрать девушка?

5. В квадрате со стороной α наудачу выбирается точка. Найти вероятность того, что выбранная точка окажется внутри вписанного равнобедренного треугольника.

6. Двое договорились встретиться в условном месте в промежуток времени от 15 часов до 15 часов 30 минут. Определить вероятность того, что время ожидания одним другого не будет превышать 5 минут, если момент появления любого из них в указанный промежуток времени равновозможен.

7. Первая партия деталей содержит 65% изделий, изготовленных по пятому классу точности, а вторая партия 85%. Из этих партий случайным образом берут по одной детали и из них наугад выбирают одну. Найти вероятность того, что взятая деталь изготовлена по пятому классу точности.

8. Имеется пять пробирок, в двух из которых находится кислота, а в трех – щелочь. Случайным образом в одну из пробирок опускают лакмусовую бумажку. Определить вероятность ее окраски в синий цвет, если содержимое одной из пробирок наугад заменили водой.

9. В одном альбоме из 100 марок 45 марок погашены. В другом альбоме, содержащем такое же число марок, погашенных нет. Из первого альбома во второй переложена марка. Какова вероятность того, что извлеченная наугад марка из второго альбома окажется непогашенной?

10. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета, б) 4 билета?

11. Среди 15 лампочек 4 стандартные. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.

12. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0.4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более 3 раз?

13. Три стрелка стреляют в одну мишень, при этом известно, что вероятность попадания с одного выстрела равна: 0,9 – у первого, 0,8 – у второго и 0,7 – у третьего. Найти вероятность появления в мишени хотя бы одной пробоины в результате одновременного выстрела всех трех стрелков.

14. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% – продукция первого предприятия, 30% – продукция второго предприятия, 50% – продукция третьего предприятия, далее, 10 % продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии – 5 % и на третьем – 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

15. Всхожесть семян данного сорта растения оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдут не менее четырех?

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Под случайной величиной понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение, причем, заранее, до опыта, неизвестно, какое именно. Обозначения случайной величины: X, Y, значения случайной величины: x, y.

Случайные величины могут быть **дискретными** или **непрерывными**, а область возможных исходов может быть представлена конечным множеством, счетным или бесконечным.

Закон распределения случайной величины – любое правило, устанавливающее соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в верхней строке которой перечислены все возможные значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_n$, а в нижней – вероятности их появления $p_1, p_2, \dots, p_n$,
где $p_i=P\{X=x_i\}$, $\sum_i p_i = 1$ – условие нормировки.

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде многоугольника распределения – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции x: $F(x)=P\{X < x\}$.

Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений.

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке, обозначаемая $f(x)$. График плотности распределения называется кривой распределения.

Задача 7. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий после двух выстрелов и найти $F(x)$.

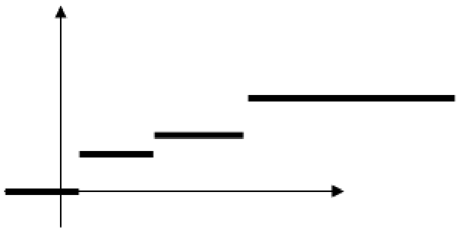
Решение. Очевидно, что X может принимать три значения: 0, 1 и 2. Их вероятности легко могут быть найдены. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Найдем *F(x)*. Для дискретной случайной величины значение *F(x)* в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x \le 0 \\ 0{,}12, \ \ 0 < x \le 1 \\ 0{,}12 + 0{,}46 = 0{,}58, \ \ 1 < x \le 2 \\ 0{,}58 + 0{,}42 = 1, \ \ x > 2 \end{cases}$$

Соответственно график функции распределения имеет ступенчатый вид:



Задача 8. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,8. Построить ряд распределения числа попаданий.

Решение. Случайная величина *X* (число попаданий в цель) может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятность принятия величиной *X* этих значений, используя формулу Бернулли:

$$P\{X=0\} = (1-p)^5 = 0,2^5 = 0,00032$$

$$P\{X=1\} = C_5^1 p(1-p)^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 = 0,0064$$

$$P\{X=2\} = C_5^2 p^2(1-p)^3 = 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512$$

$$P\{X=3\} = C_5^3 p^3(1-p)^3 = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,2048$$

$$P\{X=4\} = C_5^4 p^4(1-p) = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,4096$$

$$P\{X=5\} = p^5 = 0,8^5 = 0,32768$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Задача 9. Случайная величина *X* распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти константу *c*, функцию распределения *F(x)*.

Решение. Константу *c* вычислим исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\cdot\cos x dx = c\sin x\,|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2c = 1.$$

Откуда c=0,5.

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности.

$$x < -\pi/2 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0,$$

$$-\pi/2 \le x \le \pi/2 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{x} \frac{\cos y}{2}dy = \frac{\sin x}{2}\,|_{-\pi/2}^{x} = \frac{1+\sin x}{2},$$

$$x > \pi/2 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos y}{2}dy + \int_{\pi/2}^{x} 0dy = 1.$$

окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ (1+\sin x)/2, & |x| \le \pi/2. \\ 1, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Задача 10. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{2}, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 0', & x \le 2 \\ \left(\dfrac{x-2}{2}\right)', & 2 < x \le 4 \\ 1', & x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}5, & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Числовые характеристики случайных величин

Одна из основных характеристик случайных величин – **математическое ожидание** для дискретной и непрерывной случайной величины соответственно:

$$MX = \begin{cases} \sum_i x_i p_i, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \end{cases} \qquad (11)$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение.

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины. Расчетные формулы для дискретной и непрерывной случайной величины соответственно:

$$DX = \begin{cases} \sum_i (x_i - MX)^2 p_i, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx. \end{cases} \tag{12}$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется характеристика

$$\sigma_x = \sqrt{DX}. \tag{13}$$

Задача 11. Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при броске пяти игральных костей.

Решение. Найдем математическое ожидание числа очков, выпавших при броске одной кости:

$$MX = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Тому же числу равно математическое ожидание числа очков, выпавших на любой кости. Следовательно, $MX = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Задания для самостоятельной работы студентов

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

2. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных.

3. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано 3 выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

5. Найти дисперсию дискретной случайной величины – числа появлений события в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления событий в каждом испытании равна 0,3.

6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ sin2x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

7. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины *X*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1, \\ x - \frac{1}{2}, 1 < x \le 2, \\ 0, x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

8. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале (0,1), вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание величины *X*.

9. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = x/2$ в интервале (0, 2), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины *X*.

10. Случайная величина *X* в интервале (0,5) задана плотностью распределения $f(x)= 2/25\cdot x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию *X*.

11. Ознакомиться со следующим материалом: Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное.

12. Ознакомиться со следующим материалом: Неравенство Чебышева. Закон больших чисел и его следствие.

13. Ознакомиться со следующим материалом: Центральная предельная теорема Ляпунова.

14. Ознакомиться со следующим материалом: Примеры практических вероятностно – статистических задач с данными распределениями.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Случайные процессы являются удобной математической моделью функций времени, значения которых случайные величины. Например: число звонков, поступающих в единицу времени на телефонную станцию, являясь случайной величиной, зависит от времени суток, расход электроэнергии в единицу времени – тоже функция времени со случайными значениями, координаты броуновской частицы меняются со временем и принимают случайные значения. То есть можно сказать, что **случайный процесс** – это однопараметрическое семейство случайных величин, зависящих от значений параметра, имеющего смысл времени.

Однородные цепи Маркова

Пусть E_1, E_2,…, E_r – множество возможных состояний некоторой физической системы. В любой момент времени система может находиться только в одном состоянии. С течением времени система переходит случайным образом из одного состояния в другое.

Для описания эволюции этой системы рассмотрим последовательность дискретных случайных величин ξ_1, ξ_2,…, ξ_n,.. Индекс «n» соответствует моменту времени, т.е. если в момент времени n система находилась в положении E_j, то считают, что $\xi_n=j$. Таким образом, последовательность $\{\xi_n\}$состоит из номеров состояний системы.

Последовательность $\{\xi_n\}$ образует **цепь Маркова**, если для любого n и для любых k_0, k_1,… k_{n-2}

$$P(\xi_n = j|\xi_0 = k_0, \xi_1 = k_1, \dots, \xi_{n-2} = k_{n-2}, \xi_{n-1} = i) = P(\xi_n = j|\xi_{n-1} = i). \quad (14)$$

Цепь Маркова называется **однородной**, если вероятность перехода не зависит от номера шага, а зависит только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход.

Вероятности перехода записывают в виде матрицы

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix}.$$

Матрица называется матрицей вероятностей перехода однородной цепи Маркова за один шаг. Состояния цепи Маркова полностью определяются матрицей состояний и вектором начальных состояний.

Задача 12. Погода на некотором острове через длительные периоды времени становится или дождливой (Д), или сухой (С). Вероятности ежедневных изменений заданы матрицей

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \text{Д} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Д} & C \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

а) Если в среду погода дождливая, то какова вероятность, что она будет дождливой в ближайшую пятницу?

б) Если в среду ожидается дождливая погода с вероятностью 0,3, то какова вероятность, что она будет дождливой и в ближайшую пятницу?

Решение. Сначала вычислим матрицу перехода за 2 шага, так как между средой и пятницей как раз два перехода. Для этого необходимо исходную матрицу возвести в квадрат. Имеем

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{bmatrix}.$$

а) В качестве вектора начальных состояний рассмотрим a=(1 0). Здесь первая координата вектора означает, что в среду будет дождь. Для определения погоды в пятницу надо умножить вектор-строку на а на P^2.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}^2 = (1 \quad 0) \cdot \begin{bmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{bmatrix} = (0{,}61 \quad 0{,}39).$$

Таким образом, вероятность дождя в пятницу равна 0,61.

б) В данном случае рассмотрим а=(0,3 0,7). Умножая вектор начальных состояний на P^2 будем иметь

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}^2 = (0{,}3 \quad 0{,}7) \cdot \begin{bmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{bmatrix} = (0{,}547 \quad 0{,}453).$$

Т.е. вероятность дождя в пятницу равна 0,547.

Задания для самостоятельной работы студентов

1. В учениях участвуют два корабля, которые одновременно производят выстрелы друг в друга через равные промежутки времени. При каждом обмене выстрелами корабль A поражает корабль В с вероятностью ½, а корабль В поражает корабль A с вероятностью 3/8. Предполагается, что при любом попадании корабль выходит из строя. Рассматриваются результаты серии выстрелов. Найти матрицу вероятностей перехода, если состояниями цепи являются комбинации кораблей, оставшихся в строю: E_1 – оба корабля в строю, E_2 – в строю корабль A, E_3 – в строю корабль B, E_4 – оба корабля поражены.

2. В любой данный день человек здоров или болен. Если человек здоров сегодня, то вероятность того, что он будет здоров и завтра оценивается в 98 %. Если человек сегодня болен, то завтра он будет здоров лишь в 30 % случаев. Описать последовательность состояний здоровья как Марковскую цепь. Определить: а) вероятность того, что человек выздоровеет завтра, послезавтра и на третий день, если сегодня он болен, б) ожидаемое число дней, в течение которых больной на сегодняшний день человек остается больным.

3. Ознакомиться со следующим материалом: Цепи Маркова с конечным числом состояний и непрерывным временем.

4. Ознакомиться со следующим материалом: Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов.

5. Ознакомиться со следующим материалом: Теория массового обслуживания: основные модели.

6. Ознакомиться со следующим материалом: Свойства пуассоновского потока.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Математическая статистика – раздел прикладной математики, занимающийся методами и правилами обработки статистических данных. Математическую статистику можно рассматривать как прикладную теорию вероятностей. Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении статистических данных – результатах наблюдений. В математической статистике рассматриваются две основные задачи.

Первая задача состоит в том, чтобы указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате поставленных экспериментов. Вторая задача состоит в разработке методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. К ним относятся:

• оценка неизвестной вероятности события, оценка параметров распределения, вид которого не известен, оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин,
• проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или величине параметров распределения, вид которого не известен.

В основе задач, решаемых методами математической статистики, лежит необходимость изучения совокупности однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака.

Совокупность всех объектов, подчиненных данному признаку, называется **генеральной совокупностью**. На практике, как правило, обследование всех объектов генеральной совокупности не производится в силу излишней трудоемкости такого процесса. Обычно из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов – **выборку,** которые и подвергают изучению.

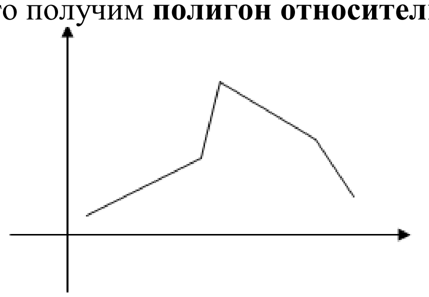
Выборочной совокупностью (или просто выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов. Объемом совокупности – выборочной или генеральной – называют число объектов этой совокупности.

Для того чтобы по данным выборки достаточно уверенно характеризовать всю генеральную совокупность, необходимо, чтобы отобранные элементы правильно ее представляли. Выборка, достаточно хорошо описывающая всю генеральную совокупность, называется **репрезентативной**.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 – n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n,$ где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины x_1, x_2,…, $x_к$ называют **вариантами**, а n_1, n_2,…, $n_к$ – **частотами**. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим **относительные частоты** $w_i = \frac{n_i}{n}$. Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют **вариационным** рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – **статистическим рядом**:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – **полигон частот**: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные n_i, а относительные w_i частоты, то получим **полигон относительных частот:**



Задача 13. При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 0, 5, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 1. Составим вариационный ряд: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h, а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Составленная по этим результатам таблица называется группированным статистическим рядом:

Номера интервалов	1	2	…	k
Границы интервалов	(a, $a + h$)	($a + h$, $a + 2h$)	…	($b – h$, b)
Сумма частот вариант, попавших в интервал	n_1	n_2	…	n_k

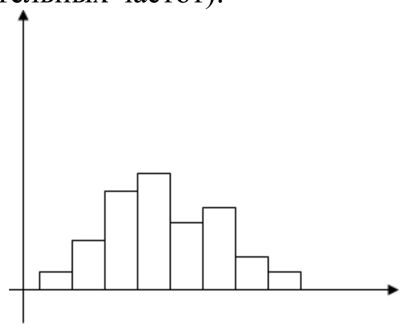
Выборочной (эмпирической) функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Таким образом,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \tag{15}$$

где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения, найденной опытным путем, функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют теоретической функцией распределения. $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ – его относительную частоту. При достаточно больших n, как следует из теоремы Бернулли, $F^*(x)$ стремится по вероятности к $F(x)$.

Для непрерывного признака графической иллюстрацией служит **гистограмма**, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высотами – отрезки длиной n_i/h (гистограмма частот) или w_i/h (гистограмма относительных частот):



Одна из задач математической статистики: по имеющейся выборке оценить значения числовых характеристик исследуемой случайной величины.

Выборочным средним называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} \tag{16}$$

где x_i – варианты, n_i – частоты.

Выборочное среднее служит для оценки математического ожидания исследуемой случайной величины. В дальнейшем будет рассмотрен вопрос, насколько точной является такая оценка.

Выборочной дисперсией называется

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{n}, \tag{17}$$

а **выборочным средним квадратическим отклонением** –

$$\sigma = \sqrt{s^2}. \tag{18}$$

Оценки начальных и центральных моментов (так называемые эмпирические моменты) определяются аналогично соответствующим теоретическим моментам.

Задача 14. Найдем числовые характеристики выборки, заданной статистическим рядом

x_i	2	5	7	8
n_i	3	8	7	2

Решение.

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 3 + 5\cdot 8 + 7\cdot 7 + 8\cdot 2}{20} = 5,55,$$

$$s^2 = \frac{4\cdot 3 + 25\cdot 8 + 49\cdot 7 + 64\cdot 2}{20} - 5,55^2 = 3,3475,$$

$$\sigma_B = \sqrt{3,3475} = 1,83.$$

Получив статистические оценки параметров распределения (выборочное среднее, выборочную дисперсию и т.д.), нужно убедиться, что они в достаточной степени служат приближением соответствующих характеристик генеральной совокупности. Основными требованиями к статистическим характеристикам являются несмещенность, состоятельность, эффективность.

Способы построения оценок

Метод наибольшего правдоподобия

Пусть X – дискретная случайная величина, которая в результате п испытаний приняла значения x_1, x_2, …, x_n. Предположим, что нам известен закон распределения этой величины, определяемый параметром Θ, но неизвестно численное значение этого параметра. Найдем его точечную оценку.

Пусть $p(x_i,\Theta)$ – вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i. Назовем **функцией правдоподобия** дискретной случайной величины X функцию аргумента Θ, определяемую по формуле:

$$L\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) = p(x_1,\Theta)p(x_2,\Theta)\ldots p(x_n,\Theta).$$

Тогда в качестве точечной оценки параметра Θ принимают такое его значение $\Theta^* = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Оценку Θ* называют **оценкой** наибольшего **правдоподобия**.

Поскольку функции L и lnL достигают максимума при одном и том же значении Θ, удобнее искать максимум lnL – **логарифмической функции** правдоподобия. Для этого нужно:

1. найти производную $\frac{d\ln L}{d\Theta}$,

2. приравнять ее нулю (получим так называемое **уравнение правдоподобия**) и найти критическую точку,

3. найти вторую производную $\frac{d^2\ln L}{d\Theta^2}$, если она отрицательна в критической точке, то это – точка максимума.

Достоинства метода наибольшего правдоподобия: полученные оценки состоятельны (хотя могут быть смещенными), распределены асимптотически нормально при больших значениях n и имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками, если для оцениваемого параметра Θ существует эффективная оценка Θ*, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение Θ*, метод наиболее полно использует данные выборки и поэтому особенно полезен в случае малых выборок. **Недостаток** метода наибольшего правдоподобия: сложность вычислений.

Для непрерывной случайной величины с известным видом плотности распределения *f(x)* и неизвестным параметром Θ функция правдоподобия имеет вид:

$$L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) = f(x_1,\Theta)f(x_2,\Theta)\ldots f(x_n,\Theta). \qquad (19)$$

Оценка наибольшего правдоподобия неизвестного параметра проводится так же, как для дискретной случайной величины.

Метод моментов

Метод моментов основан на том, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответственно начальных и центральных теоретических моментов, поэтому можно приравнять теоретические моменты соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Если задан вид плотности распределения *f(x,Θ)*, определяемой одним неизвестным параметром Θ, то для оценки этого параметра достаточно иметь одно уравнение. Например, можно приравнять начальные моменты первого порядка:

$$\overline{x} = MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf\,(x,\Theta)dx = \phi(\Theta) \qquad (20)$$

получив тем самым уравнение для определения Θ. Его решение Θ* будет точечной оценкой параметра, которая является функцией от выборочного среднего и, следовательно, и от вариант выборки:

$$\Theta = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (21)$$

Если известный вид плотности распределения $f(x,\Theta_1,\Theta_2)$ определяется двумя неизвестными параметрами Θ_1 и Θ_2, то требуется составить два уравнения, например

$$\nu_1 = M_1, \mu_2 = m_2.$$

Отсюда $\begin{cases} MX = \overline{x} \\ DX = s^2 \end{cases}$ – система двух уравнений с двумя неизвестными Θ_1 и Θ_2. Ее решениями будут точечные оценки Θ_1* и Θ_2* – функции вариант выборки:

$$\Theta_1 = \psi_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\Theta_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Статистическая проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называют гипотезу о виде неизвестного распределения генеральной совокупности или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Задача 15. Пусть H_0 заключается в том, что математическое ожидание генеральной совокупности $a = 3$. Тогда возможные варианты H_1: а) $a \neq 3$, б) $a > 3$, в) $a < 3$.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение, сложной – гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В результате проверки правильности выдвинутой нулевой гипотезы (такая проверка называется статистической, так как производится с применением методов математической статистики) возможны **ошибки двух видов**: ошибка первого рода, состоящая в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза, и ошибка второго рода, заключающаяся в том, что будет принята неверная гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости α.

Основной прием проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины, имеющей известный закон распределения.

Статистическим критерием называется случайная величина K с известным законом распределения, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Критической областью называют область значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, областью принятия гипотезы – область значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Итак, процесс проверки гипотезы состоит из следующих этапов:

1. выбирается статистический критерий K,

2. вычисляется его наблюдаемое значение $K_{набл}$ по имеющейся выборке,

3. поскольку закон распределения K известен, определяется (по известному уровню значимости α) критическое значение $k_{кр}$, разделяющее критическую область и область принятия гипотезы (например, если $p(K>k_{кр}) = \alpha$, то справа от $k_{кр}$ располагается критическая область, а слева – область принятия гипотезы),

4. если вычисленное значение $K_{набл}$ попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается, если в критическую область – нулевая гипотеза отвергается.

Различают разные виды критических областей:

- правостороннюю критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$),

- левостороннюю критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$),

- двустороннюю критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$ ($k_2 > k_1$).

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что верна конкурирующая гипотеза.

Если обозначить вероятность ошибки второго рода (принятия неправильной нулевой гипотезы) β, то мощность критерия равна $1 - \beta$. Следовательно, чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода. Поэтому после выбора уровня значимости следует строить критическую область так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Существуют критерии для проверки гипотезы о вероятности события, критерии для проверки гипотезы о математическом ожидании, критерии для проверки гипотезы о сравнении двух дисперсий, критерии для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины.

Задания для самостоятельной работы студентов

1. Записать вариационный ряд и статистическое распределение элементов выборки 5, 0, 3, 7, 0, 10, 5, 0, 5, 2, 10, 2, 0, 7, 2, 0, 4, 7, 7, 4 – из числа рабочих дней в году, пропущенных по болезни сотрудниками компании.

2. Время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50-ти обследованных предприятий общественного питания в часах:

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
60	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	56	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

Найти размах выборки, частоту и длину интервалов, а также составить таблицу частот (записать группированное статистическое распределение). Первый интервал 14–23.

3. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Найти распределение относительных частот.

4. Построить полигон частот и полигон относительных частот по данным статистического ряда:

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
n_i	1	2	4	3
w_i	0,1	0,2	0,4	0,3

5. Построить гистограмму частот по группированной выборке:

x_i	2–5	5–8	8–11	11–14
n_i	9	12	24	6

6. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 10, 12, 16, 18, 21. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня, б) выборочную дисперсии ошибок прибора.

7. В 225 независимых опытах событие A появилось 78 раз. В контрольной серии из 64 независимых опытов было зарегистрировано 12 появлений события. Можно ли считать, что вероятность события A одинакова в обеих сериях опытов при уровне значимости b = 0,04?

8. Были исследованы 200 изготовленных деталей на отклонение истинного размера от расчетного. Сгруппированные данные исследований приведены в виде статистического ряда:

Границы отклонений (в микронах)	(–20;–10)	(–10;0)	(0;10)	(10;20)	(20;30)
Число деталей с данной величиной отклонения	19	42	71	56	12

Требуется по данному статистическому ряду построить гистограмму. По виду гистограммы выдвинуть гипотезу о типе закона распределения отклонений. Подобрать параметры закона распределения (равные их оценкам на основе опытных данных). Построить на том же графике функцию плотности вероятности, соответствующую выдвинутой гипотезе. С помощью критерия согласия проверить согласуется ли выдвинутая гипотеза с опытными данными. Уровень значимости взять, например, равным 0,05.

9. Данные о сдаче экзамена 246 студентами сгруппированы в зависимости от места окончания студентом средней школы.

Оценка	Москвичи	Ближнее Подмосковье	Иногородние	n_{*j}
Отлично	16	11	19	46
Хорошо	21	21	26	68
Удовл.	35	38	19	92
Неудовл.	13	10	17	40
n_{i*}	85	80	81	246

Можно ли по этим данным заключить, что успеваемость студентов практически не зависит от места получения ими среднего образования? (Уровень значимости взять, например, равным 0,05).

10. Найти оценку параметра показательного закона распределения по методу моментов.

11. Пусть имеется простейший поток событий неизвестной интенсивности λ. Для оценки параметра λ проведено наблюдение потока и зарегистрированы X_1, $X_2,\ldots X_n$ — длительности n последовательных интервалов времени между моментами наступления событий. Найти оценку для λ по методу максимального правдоподобия.

12. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при } x<0,\\ x^2/a^2 \quad \text{при } x\in[0,a],\\ 1 \quad \text{при } x>a,\end{cases}$$

где $a > 0$ неизвестный параметр. Пусть X_1, X_2,…X_n – результаты n независимых наблюдений случайной величины X. Требуется найти оценку максимального правдоподобия для параметра а и найти оценку для MX.

13. Ознакомиться со следующим материалом: Доверительный интервал и доверительная вероятность.

14. Ознакомиться со следующим материалом: Метод наименьших квадратов.

15. Ознакомиться со следующим материалом: Элементы корреляционного анализа.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов / Владимир Ефимович Гмурман. – 10-е изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2004. – 478[2] с. (наличие в библиотеке ТУСУР – 33 экз.)

2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для вузов / Е. С. Вентцель. – 10-е изд., стереотип. – М.: Academia, 2005. (наличие в библиотеке ТУСУР – 228 экз.)

Дополнительная литература

1. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 6-е изд., стереотип. – М.: Академия, 2005. – 439 с. (наличие в библиотеке ТУСУР – 99 экз.)

2. Емельянов Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – Санкт-Петербург: Лань, 2007. – 336 с. [Электронный ресурс]. – https://e.lanbook.com/book/141, дата обращения: 10.05.2018.