ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра экономической математики, информатики и статистики (ЭМИС)

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания к практическим занятиям

Составители: С.И. Колесникова

Я.В. Костелей

Томск 2018

АННОТАЦИЯ

В пособии подробно излагаются принципы моделирования и определения основных показателей эффективности различных типов систем массового обслуживания (СМО): с отказом и с ожиданием, системы с ограниченной очередью, замкнутых систем. Приводятся модели непрерывных и дискретных случайных величин для имитации функционирования СМО. Даются формализованные постановки задач для практических объектов из различных прикладных областей.

Содержание

Введение

Теория массового обслуживания (ТМО) составляет один из разделов теории вероятностей. В ТМО рассматриваются вероятностные задачи и их математические модели.

Вероятностная математическая модель учитывает влияние случайных факторов на поведение объекта (системы, процесса) и, следовательно, оценивает будущее с позиций вероятности тех или иных событий.

Здесь рассматриваются только марковские случайные процессы, в которых для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

В теории массового обслуживания рассматриваются не только марковские системы массового обслуживания, но математический аппарат для их описания сложный.

Различают процессы с дискретным состоянием, в которых возможные состояния S_1, S_2, … можно заранее определить, и переход системы из состояния в состояние происходит «скачком», практически мгновенно; и процессы с непрерывным временем, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны и могут произойти в любой момент.

Далее рассматриваются только процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ 1: Математические основы теории массового обслуживания.

Практическое задание 1. Пуассоновский поток

Теория

Система массового обслуживания включает следующие элементы:

- источник требований;
- входящий поток требований;
- очередь;
- обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания);
- выходящий поток требований.

Под потоком событий в теории вероятностей понимается последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Примерами могут служить: поток вызовов на телефонной станции; поток включений приборов в бытовой электросети; поток заказных писем, поступающих в почтовое отделение; поток сбоев (неисправностей) электронной вычислительной машины; поток выстрелов, направляемых на цель во время обстрела, и т. п. События, образующие поток, в общем случае могут быть различными, но здесь мы будем рассматривать лишь поток однородных событий, различающихся только моментами появления. Такой поток можно изобразить как последовательность точек$t_1, t_2, \dots, t_k$, ...на числовой оси (0), соответствующих моментам появления событий.

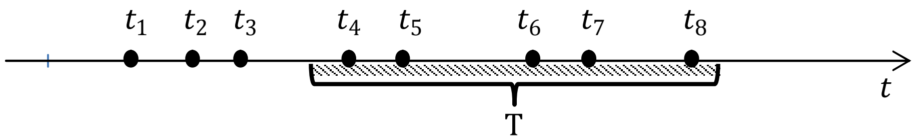

Рисунок 1.1 - Поток событий

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах, но представляет интерес как предельный случай. Типичным для системы массового обслуживания является случайный поток заявок.

Мы рассмотрим потоки событий, обладающие некоторыми особенно простыми свойствами. Для этого введем ряд определений.

1. Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной Т (0) зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси Otрасположен этот участок.

2. Поток событий называется потоком без последействия, если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

3. Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Если поток событий обладает всеми тремя свойствами (т. е. стационарен, ординарен и не имеет последействия), то он называется *простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком*. Название «пуассоновский» связано с тем, что при соблюдении условий 1-3 число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона.

Пусть в СМО требования поступают в случайные моменты времени $t_i = 0, t_1, t_2, \dots , t_k$, ..., так что$u_k = t_k - t_{k-1}$ (k ≥ 1) – интервалы между поступлениями и, кроме того,

$$t_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k \tag{2.1}$$

Предположим, что случайные величины $u_1, u_2, \dots , u_k$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ:

$$\text{P}\{u_k < t\} = 1 - e^{-\lambda t} \tag{2.2}$$

Другими словами, входной поток требований в систему является простейшим.

Пусть ν(t) - число требований, поступивших в СМО в интервале времени (0, t). Тогда справедлива формула

$$\text{P}\{\upsilon(\text{t}) = \text{k}\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{2.3}$$

означающая, что если длительности промежутков между поступлениями в систему последовательных требований имеют показательный закон, то случайное число требований, поступивших за время t, имеет распределение Пуассона с параметром λ, а процесс ν(t) является однородным пуассоновским процессом.

Имеет место и обратное: если число требований ν(t), поступивших за время t, является процессом Пуассона с интенсивностью λ, то длительности интервалов u_k независимы и имеют одинаковое показательное распределение с параметром λ.

Цель. Смоделировать поток, в котором длительность промежутков времени между поступлениями заявок имеет показательный закон с параметром λ, проверить гипотезу о «пуассоновости» полученного потока СМО.

Входные значения: промежуток наблюдения $[T_1, T_2]$, параметр λ.

Значения могут быть выбраны в зависимости от номера студента в списке группы I, где$T_1 = I$, $T_2 = I + 100$, $\lambda = \frac{I+8}{I+24}$.

Алгоритм решения задачи

1. Сгенерируем случайное вещественное число ξ_iв диапазоне (0;1). Приведем это число в показательное распределение с помощью формулы:

$$U_i = -\frac{\ln(\xi_i)}{\lambda}, \quad (2.4)$$

т.к. $\xi_i = 1 - e^{-\lambda t}$; где t – промежуток времени, и в нашем случае равный U_i(интервал между поступлениями требований).

По формуле (2.1)получаем

$$t_i = T_1 + \sum_{j=0}^{i} U_j \quad (2.5)$$

Генерируем массив значений U_i и t_i, пока $t_i \leq T_2$.Полученный массив – модель пуассоновского потока.

Необходимо сгенерироватьK=50 потоков.

Полученный набор потоков можно изобразить графически в соответствии со следующим рисунком (рисунок 1.2):

Рисунок 1.2 Модель пуассоновского потока

2. Разбиваем интервал [T_1;T_2] на 25 одинаковых промежутков, равных$\Delta t = \frac{T_2 - T_1}{25}$. Формируем таблицу следующего вида.

Таблица 1.1 – Сводная таблица модели

	$(T_1, T_1+\Delta t)$	$(T_1+\Delta t, T_1+2*\Delta t)$		$(T_1+24*\Delta t, T_1+25*\Delta t)$
Номер промежутка	*1*	*2*	…	*25*
Итер. 1	$X_1^{(1)}$	$X_1^{(2)}$	…	$X_1^{(25)}$
Итер. 2	$X_2^{(1)}$	$X_2^{(2)}$	..	$X_2^{(25)}$
….	..	..	..	..
Итер.K	$X_K^{(1)}$	..	..	$X_k^{(25)}$

Здесь $X_j^{(i)}$ – количество t_i в полученном массиве, попавших в промежуток $(T_1+(i-1*\Delta t, T_1+i*\Delta t)$ в потоке j.

3. Из двумерного массива $X_j^{(i)}$ выбрать УНИКАЛЬНЫЕ значения $X_j^{(i)}$ и поместить в массивη_l, где $l=\overline{1,L}$, L-количество уникальных значений $X_j^{(i)}$ в η_lили длина массива η_L.. Составить следующую таблицу.

Таблица 1.2 – Сводная таблица модели

Параметр	Уникальные значения			
	1	2	….	L
η_l	η_1	η_2	…..	η_L
n_l	n_1	n_2	….	n_L
$\eta_l * n_l$	$\eta_1 * n_1$	$\eta_2 * n_2$	….	$\eta_L * n_L$
$n_l^{\text{теоритическое}}$формула0	$n_1^{\text{теоритическое}}$	$n_2^{\text{теоритическое}}$	….	$n_L^{\text{теоритическое}}$
$\frac{(\mathbf{nl}-\mathbf{nl}\text{теоритическое})^2}{\mathbf{nl}\text{теоритическое}}$				

Здесь n_l - количество уникальных значений η_l в массиве $X_j^{(i)}$.

$$\eta_l^{\text{теоретическое}} = \hat{p} \cdot N$$

$$\hat{p} = \frac{(\widehat{\lambda} * \Delta t)^{\eta l}}{\eta l!} * e^{-\hat{\lambda} * \Delta t}$$

$$N = \sum_{l=1}^{L} n_l$$

$$\hat{\lambda} * \Delta t = M\eta = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L} \eta l * nl \tag{2.6}$$

4. Вычислить значение $\chi^2_{\text{практическое}}$:

$$\chi^2_{\text{практическое}} \sum_{l=1}^{L} \frac{(n_l - n_l^{\text{теорит}})^2}{n_l^{\text{теорит}}} \tag{2.7}$$

5. Вычислить значение квантиля хи-квадрат$\chi^2_{\varepsilon, n^{\text{крит.}}}$

Распределение Пирсона χ^2 (хи - квадрат) – распределение случайной величины $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$, где случайные величины X_i независимы и имеют одно и тоже распределение N(0,1). При этом число слагаемых, т.е. n, называется «числом степеней свободы» распределения хи – квадрат.

Распределение хи-квадрат используют при оценивании дисперсии (с помощью доверительного интервала), при проверке гипотез согласия, однородности, независимости, прежде всего для качественных (категоризованных) переменных, принимающих конечное число значений, и во многих других задачах статистического анализа данных.

Квантиль хи-квадрат$\chi^2_{\varepsilon,n}$ — это число (величина хи-квадрат), при котором функция распределения хи-квадрат равна заданной (затребованной) вероятности ε.Равенство функции распределения хи-квадрат вероятности ε означает, что с вероятностью ε будут наблюдаться значения хи-квадрат, не большие, чем найденный (определенный согласно функции распределения) квантиль хи-квадрат. Таким образом, найти квантиль означает разграничить распределения хи-квадрат согласно заданной вероятности ε.

Для нашей задачи уровень значимости ε (вероятность наблюдаемого значения быть случайным отклонением) равен 0,05, а число степеней свободы равно числу карманов с вычетом единицы и числа параметров распознавания (n=25-1-1=23).Значение $\chi^2_{\varepsilon,n\text{крит}}$можно найти в приложении 1, а также получить с помощью функции ХИ2ОБР в табличном редакторе MSExcel.

Если $\chi^2_{\text{практическое}} < \chi^2_{\varepsilon,n\ \text{критическое}}$, то гипотеза о «пуассоновости» потока не отвергается.

6. Сделать вывод о подтверждении или об опровержении гипотезы.

Практическое задание 2. Суммарный пуассоновский поток

Теория

Основным свойством пуассоновского потока, обусловливающим его широкое применение при моделировании, является аддитивность: результирующий поток суммы пуассоновских потоков тоже является пуассоновским с суммарной интенсивностью:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \tag{2.8}$$

где n – число пуассоновских потоков, участвующих в суммировании,

λ_i– интенсивность i-ого потока.

Предположим, что имеется два точечных процесса и результирующий процесс формируется наложением (суммированием) этих процессов, то результирующий поток соответствует потоку, изображенному на следующем рисунке:

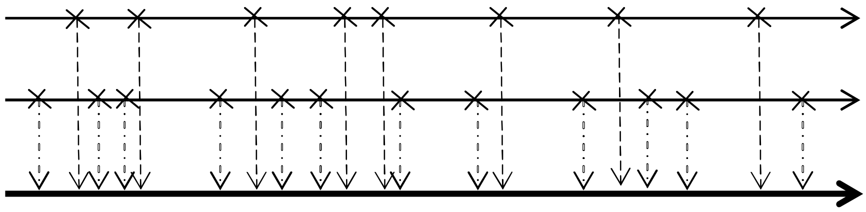

Рисунок 1.3 Суммарный поток

Цель. Проверить гипотезу о свойстве аддитивности пуассоновского потока.

Входные значения: промежуток наблюдения $[T_1, T_2]$, параметр λ.

Значения могут быть выбраны в зависимости от номера студента в списке группы I, где $T_1 = I,\ T_2 = I + 100,\ \lambda_1 = \frac{I+9}{I+24}.,\ \lambda_2 = \frac{I+13}{I+24}.$

Алгоритм решения

1. Используя реализацию решения первой лабораторной работы, произведем пункты 1-6 первой лабораторной работы для потока с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Данный поток назовем $X(t)_{теор}$.
2. Выполним пункт 1 первой лабораторной работы для потоков $X_1(t)$ с интенсивностью λ_1 и $X_2(t)$ с интенсивностью λ_2. Получим поток $X(t)_{практ} = X_1(t) + X_2(t)$, путем объединения массивов t_i для каждой выборки двух потоков, как это изображено на рисунке 2.1. Произведем пункты 2-6первой лабораторной работы для полученного потока.
3. Произведем расчет параметров для каждого из потоков ($X(t)_{практ}$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X(t)_{теор}$):

– математическое ожидание (формулы (2.9)-(2.11)).

$$M\eta = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L} \eta l * nl \tag{2.9}$$

$$N = \sum_{l=1}^{L} \text{nl} \tag{2.10}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{M\eta}{\Delta t} \tag{2.11}$$

– дисперсию (формула (2.12)).

$$D\eta = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L}(\eta\text{l} - M\eta)^2 * \text{nl} \tag{2.12}$$

4. Сравним полученные значения:

– $\hat{\lambda}$ и λ для каждого потока;

– $\hat{\lambda}$ потока $X(t)_{теор}$, $\hat{\lambda}$ потока $X(t)_{практ}$ и $\hat{\lambda}$, полученного сложением $\hat{\lambda}_1$ потока X1(t) и $\hat{\lambda}_2$ потока X2(t).

– сравнить математическое ожидание и дисперсию потоков.

5. Проверим однородность выборок $X(t)_{теор}$ и $X(t)_{практ}$, или проверим, относятся ли они к общей генеральной совокупности.

> В статистической терминологии постановка задачи такова: имеются две выборки $x_1, x_2,...,x_m$ и $y_1, y_2,...,y_n$ (т. е. наборы из m и n действительных чисел), требуется проверить их однородность. Можно переформулировать задачу: требуется проверить, есть ли различие между выборками. Если различия нет, то для дальнейшего изучения часто выборки объединяют.
>
> Например, в маркетинге важно выделить сегменты потребительского рынка. Если установлена однородность двух выборок, то возможно объединение сегментов, из которых они взяты, в один. В дальнейшем это позволит осуществлять по отношению к ним одинаковую маркетинговую политику (проводить одни и те же рекламные мероприятия и т.п.). Если же установлено различие, то поведение потребителей в двух сегментах различно, объединять эти сегменты нельзя, и могут понадобиться различные маркетинговые стратегии, своя для каждого из этих сегментов.

Один из методов - критерий Стьюдента, который заключается в следующем:

Пусть есть выборка X ($x_1, x_2 \ldots x_n$) и выборкаY ($y_1, y_2 \ldots y_m$) (в нашем случае m и n равно размеру L соответствующей выборки, взятой из первой лабораторной работы). Найдем математическое ожиданиеMX и MY и дисперсиюDX и DY. Определим статистику Стьюдента t по формуле (2.13).

$$t = \frac{MX - MY}{\sqrt{(m-1)*DY + (n-1)*DX}} * \sqrt{\frac{m*n*(m+n-2)}{m+n}} \tag{2.13}$$

По заданному уровню значимости (пусть равно 0.01) и числу степеней свободы $(m+n-2)$ из таблиц распределения Стьюдента находят критическое значение $t_{кр}$. Если $|t|>t_{кр}$, то гипотезу однородности (отсутствия различия) отклоняют, если же $|t|\le t_{кр}$, то принимают. Значение $t_{кр}$ можно найти в приложении 2, а также получить с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР в табличном редакторе MSExcel.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ 2: Классические модели систем массового обслуживания

Практическое задание 3. Одноканальная СМО с отказами

Теория

Простейшей одноканальной моделью с вероятностным входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. Рассмотрим простейшую задачу в теории массового обслуживания – задачу о функционировании одноканальной СМО с отказами.

Пусть система имеет всего один канал обслуживания (s=1) и на нее поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему.

Обслуживание заявки продолжается за время обслуживания $t_{\text{обсл}}$, следовательно «поток обслуживания» простейший с интенсивностью μ. Граф состояний такой системы выглядит следующим образом:

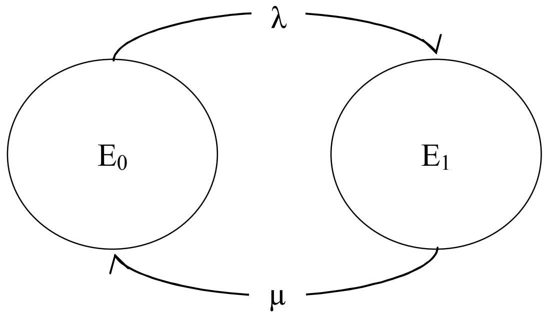

Рисунок 2.1 Граф состояний СМО < μ | μ | 1 | 0 >

Поток заявок и обслуживания простейшие, т.е. обладающие свойствами стационарности (среднее число событий, воздействующих на систему, в течение единицы времени, остается постоянным), ординарности (вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событий пренебрежимо мала) и отсутствия последействия (для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени).

Система имеет два состояния: E_0 - канал свободен и E_1 - канал занят. Обозначим вероятности состояний:$P_0(t)$ - вероятность состоянияE_0, $P_1(t)$ - вероятность состоянияE_1. Составим систему уравнений Колмогороваи по условию стационарности приравняем производные нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_0(t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} P_1(t) = -\mu P_0(t) + \mu P_1(t) = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

По условию нормировки$P_0(t) + P_1(t) = 1$ решение системы следующее (см.(2.3)):

$$P_0(t) = \frac{\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \qquad (2.2)$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) \qquad (2.3)$$

Для 1-канальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы q:

$$q = P_0(t) \qquad (2.4)$$

По истечении большого интервала времени (при $t \to \infty$) достигается стационарный режим:

$$q = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \qquad (2.5)$$

Абсолютная пропускная способность (А) - среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени:

$$A = \lambda P_0(t) = \lambda q \qquad (2.6)$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния E_1:

$$P_{\text{отк}} = P_1(t) = 1 - P_0(t) \qquad (2.7)$$

Данная величина может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Цель. Исследование одноканальной СМО с отказами и ее свойства стационарности.

Входные значения: параметр λ из первой лабораторной работы, время обслуживания $t_{\text{обсл}}$.

Значения могут быть выбраны в зависимости от номера студента в списке группы N, $t_{\text{обсл}} = \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}Nl$, где l=0,3 для N-нечетное и l=0,4 для N-четное.

Алгоритм решения

1. Определим интенсивность выходного потока по формуле (2.8).

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} \qquad (2.8)$$

2. Построим следующую таблицу, получая значения $P_0(t)$ и $P_1(t)$ по формулам (2.2) и (2.3), пока не выполниться условие $|\mathrm{P}_0(\mathrm{t}_n) - \mathrm{P}_0(\mathrm{t}_{n-1})| \le \varepsilon$ и $|\mathrm{P}_1(\mathrm{t}_n) - \mathrm{P}_1(\mathrm{t}_{n-1})| \le \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$.

Таблица 2.1 – Сводная таблица результатов

t	$P_0(t)$	$P_1(t)$
$t_1=0$	(2.2)	(2.3)
$t_2 = t_1 + \Delta t$, где $\Delta t = 0{,}1$		
…..		
$t_n = t_{n-1} + \Delta t$		

Сравните полученные конечные значения $P_0(t)$ и значение $P_0(t)$, полученное по формуле (2.5). Сделайте выводы.

Практическое задание 4. Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью

Теория

Рассмотрим теперь одноканальную СМО с ожиданием. Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание поток имеет интенсивность λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок). Длительность обслуживания — случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Рассмотрим систему с ограниченной очередью. Предположим, что независимо оттого, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более N-требований (заявок), из которых одна обслуживается, а (N-1) ожидают в очереди длиной m (m=N-1).

Клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены обслуживаться в другом месте и такие заявки теряются. Наконец, источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Граф состояний такой системы выглядит следующим образом:

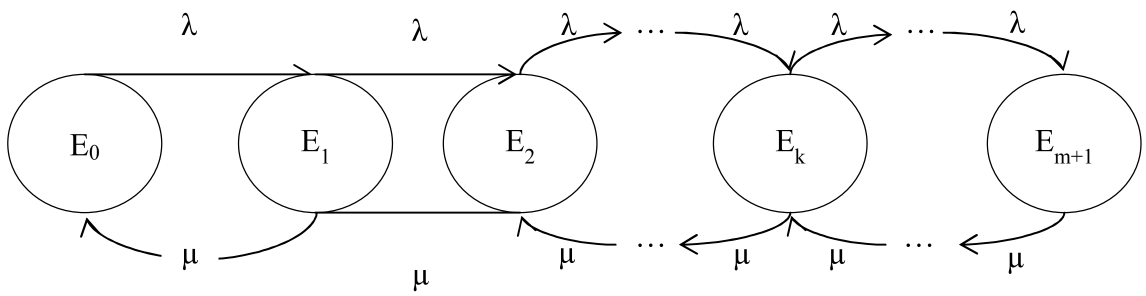

Рисунок 2.2 Граф состояний СМО < μ | μ | 1 | m>

Обозначим P_k - вероятность того, что в системе находится k заявок, т.е. система находится в состоянии E_k.

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}\rho^n \\ P_k = \dfrac{1}{m+2}, \text{при } \rho = 1 \end{cases}, \text{при } \rho \neq 1 \qquad (2.9)$$

Параметр ρ - приведенная интенсивность потока, и он находится по формуле (2.10).

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (2.10)$$

Тогда вероятность того, что канал обслуживания свободен и в системе нет ни одного, клиента высчитывается по формуле

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \qquad (2.11)$$

По формуле (2.9) можно высчитать вероятность отказа, т.е. вероятность того, что канал занят и вся очередь наполнена:

$$P_{\text{отк}} = \begin{cases} P_{m+1} = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}\rho^{m+1} \\ P_{m+1} = \dfrac{1}{m+2}, \text{при } \rho = 1 \end{cases}, \text{при } \rho \neq 1 \qquad (2.12)$$

Относительная пропускная способность системыqбудетявляться противоположным событием событию «отказа заявки на обслуживание», и высчитывается по формуле.

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = \begin{cases} 1 - P_{m+1} = 1 - \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}\rho^{m+1} & \text{, при } \rho \neq 1 \\ 1 - P_{m+1} = 1 - \dfrac{1}{m+2}\text{, при } \rho = 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

Абсолютная пропускная способность (A) - среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени:

$$A = \lambda q \tag{2.14}$$

Среднее число находящихся в очереди заявок:

$$\hat{\vartheta} = \begin{cases} \rho^2 \dfrac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}\rho^{m+1} & \text{, при } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m*(m+1)}{2(m+2)}\text{, при } \rho = 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$\varpi = \frac{\bar{\vartheta}}{\lambda} \tag{2.16}$$

Цель. Исследование одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной очередью.

Входные значения: параметр λ из первой лабораторной работы, время обслуживания $t_{\text{обсл}}$.

Значения могут быть выбраны в зависимости от номера студента в списке группы N, $t_{\text{обсл}} = \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}Nl$, где l=0,1,3 для N-нечетное и l=0,2,4 для N-четное.

Алгоритм решения

1. Построить следующую таблицу, используя формулы указанные в таблице.

Таблица 2.2 – Сводная таблица результатов

m	l	$t_{обсл}$	ρ	$P_{отк.теор}$	A	q	ϑ	ω	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$P_{обсл}$	$P_{отказ.прак.}$
1	l_1	$t_{обсл}(l_1)$	(2.10)	(2.12)	(2.14)	(2.13)	(2.15)	(2.16)	(1’)	(2’)	(3’)	(4’)
1	l_2	$t_{обсл}(l_2)$										
1	l_3	$t_{обсл}(l_3)$										
2	l_1	$t_{обсл}(l_1)$										
2	l_2	$t_{обсл}(l_2)$										
2	l_3	$t_{обсл}(l_3)$										
3	l_1	$t_{обсл}(l_1)$										
3	l_2	$t_{обсл}(l_2)$										
3	l_3	$t_{обсл}(l_3)$										

2. Для расчета 1’-2’ необходимо смоделировать два пуассоновских потока с интенсивностью λ и $\mu = \frac{1}{t_{обсл}}$, как это делалось в лабораторной работе №2, и вычитать соответствующие значения $\hat{\lambda}$ по формуле (2.11).

3. Для расчета 3'-4' необходимо провести следующее моделирование. Для каждого потока из 50 смоделированных в пункте 2потоков с интенсивностью λ и каждого соответствующего значения m_i и $t_{обсл}(l_j)$ построить график, содержащий следующие оси:

a) входящие в СМО заявки, представленные массивом t_i, который берется из соответствующего потока;

b) время вхождения заявки в очередь;

c) время отправления заявки на выполнение;

d) время выхода выполненной заявки из СМО;

e) время выхода заявки с отказом.

Данный график можно представить следующим образом:

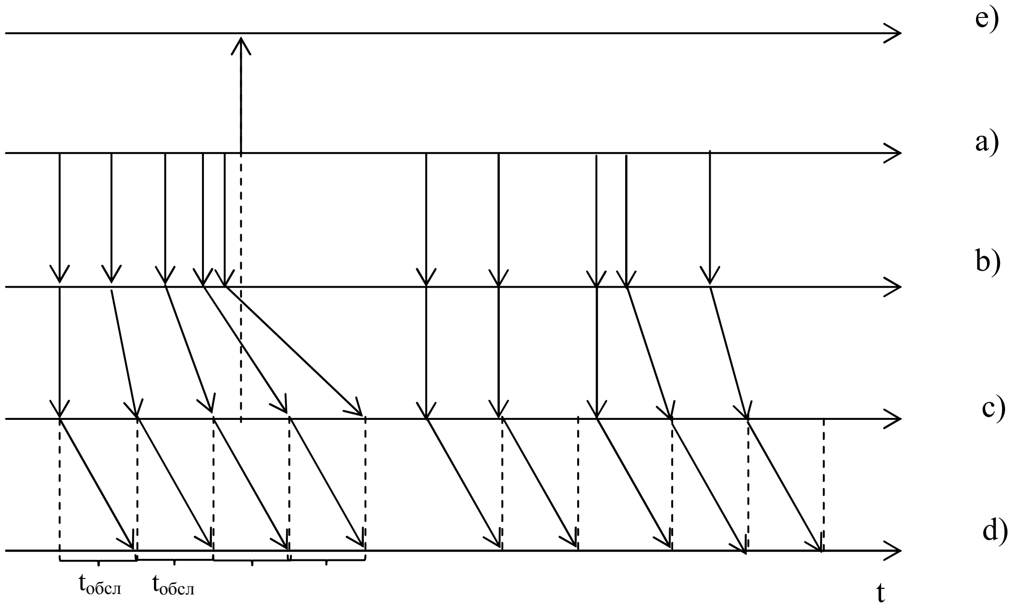

Рисунок 2.3 Моделирование работы СМО с длиной очереди m=2 и временем обслуживания $t_{обсл}$

По результатам моделирования необходимо посчитать вероятность событий «заявка обслужена» и «заявка получила отказ от обслуживания»,полученную в результате испытаний по формуле (2.17). Изобразить работу модели графически в соответствии с рисунком 2.3.

$$P(A) = \frac{N_A}{N_n} \quad (2.17)$$

где $P(A)$- вероятность наступления события А;

N_A- число благоприятных А событий при испытаниях;

N_n – общее число испытаний.

Возможный алгоритм моделирования работы СМО представлен в приложении 3.

4. Рисуем график функций$P_{отк.модельн.}(t_{обсл})$ и $P_{обсл.теорит.}(t_{обсл})$ для каждогоm_i, где по абрисе будет 3 отметки $t_{обсл}(l_1)$, $t_{обсл}(l_1)$, $t_{обсл}(l_1)$, а по ординате значения $P_{отк.модельн.}$ и $P_{обсл.теорит.}(t_{обсл})$ для каждогоm_i (всего 6 кривых).

5. Создаем таблицу для решения оптимизационной задачи.

Таблица 2.3 – Сводная таблица результатов

				Доход на ед.времени			Расход на ед. временни				Прибыль
ρ	$P_{отказа}$	λ	$t_{обсл}$	Доход от заявки	Число обсл. заявок	Общ. доход	Расходы на 1 прибор	Расходы на содерж.места в очереди	Число мест в очереди	Общ расход	
			$t_{обсл1}$	S_1^+=100	A	= A * S_1^+	$S_{приб}^-$ =10	S_1^-=1	m_1	=m* S_1^-+ $S_{приб}^-$	=(*1)-(*2)
			$t_{обсл2}$			(*1)			m_1	(*2)	
			$t_{обсл3}$						m_1		
			$t_{обсл1}$						m_2		
			$t_{обсл2}$						m_2		
			$t_{обсл3}$						m_2		
			$t_{обсл1}$						m_3		
			$t_{обсл2}$						m_3		
			$t_{обсл3}$						m_3		

6. В результате полученной в пункте 5 таблицы нарисовать график зависимости прибыли от числа мест в очереди. Сделать выводы.

Практическое задание 5. Многоканальная СМО с отказами

Теория

Рассмотрим многоканальную СМО с отказами. Система массового обслуживания имеет S каналов. Входящий поток заявок на обслуживание имеет интенсивность λ. Заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ на обслуживание.

Граф состояний такой системы выглядит следующим образом:

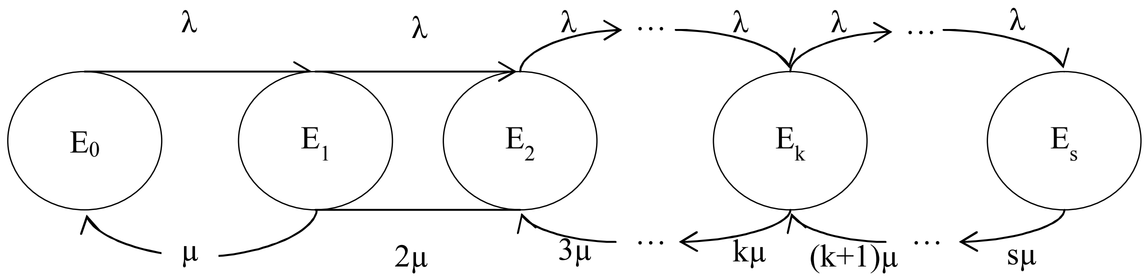

Рисунок 2.4 Граф состояний СМО < μ | μ | S | 0>

Слева направо переходит один и тот же поток – входящий поток с интенсивностью λ. Если занято k-каналов и приходит новая заявка, система переходит в состояние E_{k+1}.

Справа налево поток из состоянияE_k с интенсивностьюkμ переходит в состояние E_{k-1}.

Пользуясь общими правилами можно составить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_0(t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}P_1(t) = -(\lambda+\mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t) = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial}{\partial t}P_k(t) = -(\lambda+k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t) = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial}{\partial t}P_s(t) = -\lambda P_s(t) + s\mu P_{s-1}(t) = 0 \end{cases} \qquad (2.18)$$

Параметр ρ - приведенная интенсивность потока, и он находится по формуле (2.19).

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (2.19)$$

Решив систему (2.18) и подставив (2.19), получим формулу (2.20).

$$P_k(t) = \frac{\rho^k}{k!}P_0(t) \qquad (2.20)$$

По условию нормировки $\sum_{k=0}^{s} P_k(t) = 1$получим формулу (2.21).

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1} \qquad (2.21)$$

Заявка получает отказ, если все Sканалов заняты, тогда вероятность отказа – это вероятность состояния E_S:

$$P_{\text{отк}} = P_s(t) = \frac{\rho^s}{s!}P_0(t) \qquad (2.22)$$

Вероятность q того, что заявка будет принята к обслуживанию, дополняет $P_{\text{отк}}$ до единицы:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} \tag{2.23}$$

Абсолютная пропускная способность (А) - среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени:

$$A = \lambda q \tag{2.24}$$

Среднее число занятых каналов будет находиться по формуле (2.25).

$$\bar{z} = \rho(1 - P_s) \tag{2.25}$$

Цель. Решить оптимизационную задачу на примере СМО < μ | μ | S | 0>.

Входные значения: параметр λ, время обслуживания $t_{\text{обсл}}$из четвертой лабораторной работы.

Значения необходимо выбрать такие, чтобы $\frac{\rho}{s} < 1$.

Задача. Определить оптимальное число контролёров ОТК, которые производят проверку выпускаемого оборудования. Если контролера нет на месте, оборудование отправляется без проверки. На каждое оборудование, не прошедшее проверку, накладывается штраф. На содержание одного рабочего места необходимо 500$/год. Заработная плата контролёра ОТК составляет 7500$/год. Контролёр получает зарплату по времени, а не по факту выработки. Штраф за отказ от обслуживания составляет 4$ за один отказ. Годовой фонд времени составляет 6000 часов. Размерность интенсивностей входного и выходного потоков шт/час.

Алгоритм решения

1. Формула для расчета затрат:

$$I(s) = E_n C_1 + C_2 M_1 + C_3(S - M_1) + C_4 T P_s \lambda \tag{2.26}$$

где $I(s)$ – затраты на работу s-каналов;
E_n - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);
C_1 - затраты на рабочее место (500$/год);
C_2 - затраты на заработную плату контролёра ОТК (7500$/год);
C_3 – затраты на простой контролёра ОТК (7500$/год);
C_4 – затраты на отказ от обслуживания (4$/шт.);
M_1 – среднее число занятых каналов ($\bar{z}$);
T –годовой фонд рабочего времени (6000 часов);

2. Табулировать функцию (2.26) при $S = \overline{1,10}$;

3. Построить график зависимости затрат от числа обслуживающих каналов, и найти оптимальное число обслуживающих каналов для данной задачи.

Не забывайте проверять условие существования стационарного режима для текущей итерации.

Практическое задание 6. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Теория

Пусть дана система, имеющая S каналов обслуживания, на которые поступает простейший поток требований интенсивностью λ. Пусть поток обслуживания также простейший и имеет интенсивность μ(для одного канала). Очередь на обслуживание не ограничена.

Граф состояний такой системы выглядит следующим образом:

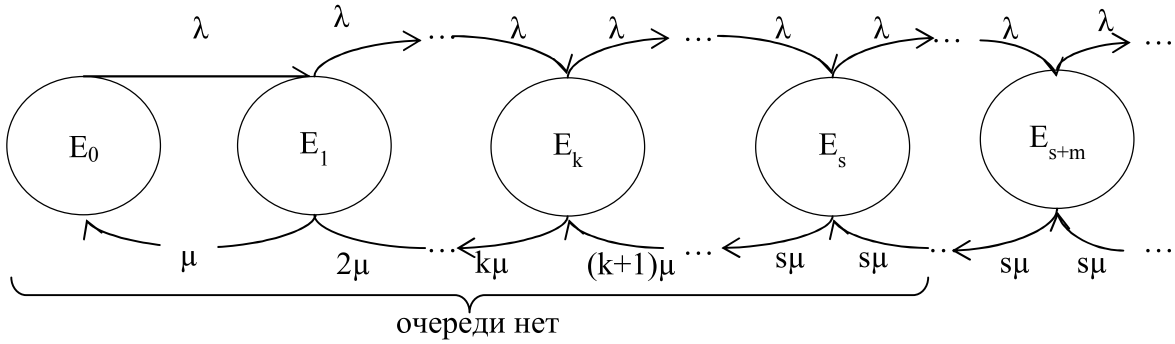

Рисунок 2.5 Граф состояний СМО < μ | μ | S | ∞>

Интенсивность потока обслуживаний меняется в зависимости от состояния системы: kμпри переходе из состояния E_kв состояние E_{k-1}, так как может освободиться любой из k-каналов; после того, как все каналы заняты обслуживанием, интенсивность потока обслуживаний остается равной sμ, при поступлении в систему следующих заявок.

Составив уравнения Колмогорова, прировняв их нулю, решив данную систему и преобразовав решения с помощью условия нормировки и формул геометрической прогрессии, получим формулы (2.27)-(2.28).

$$P_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}\rho^k P_0, 1 \le k \le S \\ \frac{1}{S!\,S^{k-s}}\rho^k P_0, S < k \le s+m \end{cases} \tag{2.27}$$

$$P_0 = (\sum_{i=0}^{S}\frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{s+1}}{s! * (s-\rho)})^{-1} \tag{2.28}$$

По формуле (2.27)можно высчитать вероятность ожидания, т.е. вероятность того, что заявка попадет в очередь:

$$P_{\text{ожидания}} = P_0 * \frac{\rho^s}{S!} * \frac{1}{1-\frac{\rho}{s}} \tag{2.29}$$

Среднее число занятых каналов будет находиться по формуле (2.30).

$$\bar{z} = \rho \tag{2.30}$$

Среднее число находящихся в очереди заявок:

$$\bar{v} = \frac{\rho^{S+1}}{s * s!}P_0 * (1-\frac{\rho}{s})^{-2} \tag{2.31}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$\varpi = \frac{\bar{\vartheta}}{\lambda} \qquad (2.32)$$

Среднее число заявок в СМО:

$$\bar{n} = \bar{\upsilon} + \bar{z} \qquad (2.33)$$

Среднеевремя пребывания заявки в СМО:

$$\bar{u} = \frac{\bar{\upsilon}}{\lambda} \qquad (2.34)$$

Цель. Решить оптимизационную задачу на примере СМО < μ | μ | S | ∞>.

Входные значения: параметр λ=0,5 барж/сутки, μ=0,5 барж/сутки.

Задача. Определить оптимальное число причалов промышленного речного порта, принимающих биржи с сыпучим материалом. Поток поступающих бирж простейший с интенсивностью 0,5 барж/сутки. Время разгрузки баржи имеет показательный закон с параметром 0,5 барж/сутки. Цена оборудования одного причала 100000$. Текущие затраты на содержание одного причала 400$/сутки при его использовании и 200$/сутки при его простое. Затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки, составляет 1000$/сутки, если время ожидания меньше 2 суток, и 1600$/сутки, если время ожидания больше 2 суток.

Алгоритм решения

1. Формула для расчета затрат:

$$I(S) = E_n C_1 S + C_2 M_2 + C_3(S - M_2) + C_4 M_1 T \qquad (2.35)$$

где $I(s)$ – затраты на работу порта;
E_n - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);
C_1 - цена оборудования одного причала(100000$);
C_2 - текущие затраты на содержание причала (400$/сутки);
C_3 – текущие затраты на содержание причала в простое(200$/сутки);
C_4 – затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки;
M_1 – средняя длина очереди ($\hat{\vartheta}$);
M_2 –среднее число занятых приборов ($\bar{z}$);
T –годовой фонд рабочего времени (365 суток).

$$C_4 = C'_4 * P\{\beta < \beta_0\} + C''_4 * P\{\beta > \beta_0\} \qquad (2.36)$$

где C'_4 - затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки менее β_0(1000$/сут.);
C''_4 - затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки более β_0(1600$/сутки);
β – время ожиданиябаржой разгрузки;
β_0 – время ожидания, после которого стоимость содержания баржи в ожидании увеличивается (2 суток).

Вероятность ожидания менее t суток высчитывается по формуле (2.37).

$$\mathrm{P}\{\beta < t\} = 1 - P_{\text{ожидания}} * e^{-(S*\mu-\lambda)t} \qquad (2.37)$$

Событие «баржа ожидает более tсуток» является противоположным событием событию «баржа ожидает менее tсуток».

2. Табулировать функцию (2.36) при $S = \overline{1,10}$;

3. Построить график зависимости затрат от числа обслуживающих каналов, и найти оптимальное число обслуживающих каналов$S_{\text{опт}}$для данной задачи.

4. Табулировать функцию (2.36)при $\beta_0=\overline{1,10}$, зафиксировав в данной формуле $S = S_{\text{опт}}$.

5. Построить график зависимости затрат от времени ожидания, после которого накладывается штраф на содержания баржи в ожидании.

6. Табулировать функцию (2.36) при C_4' $=\overline{1000,1600}$ с произвольным шагом, зафиксировав в данной формуле $S = S_{\text{опт}}$ и $\beta_0 = 2$ сут. Построить график данной зависимости.

7. Табулировать функцию (2.36) при C_4'' $=\overline{1600,3000}$с произвольным шагом, зафиксировав в данной формуле $S = S_{\text{опт}}$, $\beta_0 = 2$ сут. и $C_4' = 1000\$$. Построить график данной зависимости.

Не забывайте проверять условие существования стационарного режима для текущей итерациии единицы измерения.

Практическое задание 7. Многоканальная СМО с ограниченной очередью

Теория

Рассмотрим S-канальную СМО с ожиданием, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания μ (для одного канала), число мест в очереди m.Заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты и очередь заполнена, получает отказ на обслуживание.

Граф состояний такой системы выглядит следующим образом:

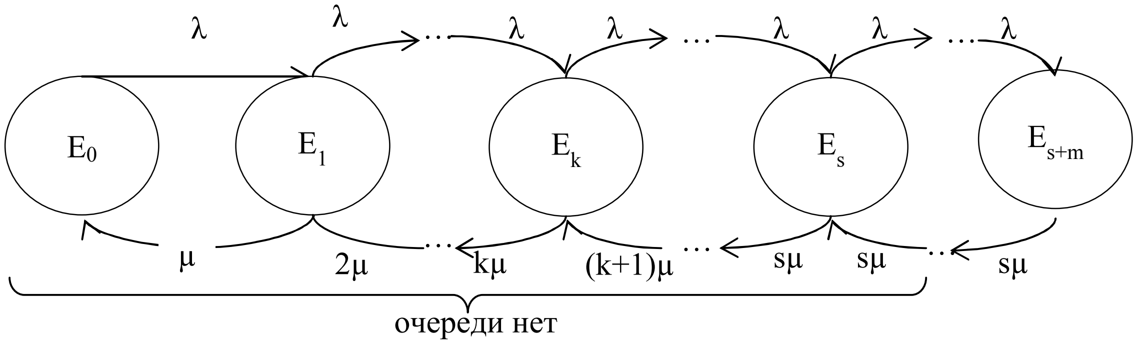

Рисунок 2.6 Граф состояний СМО < μ | μ | S | m>

Составив уравнения Колмогорова, прировняв их нулю, решив данную систему и преобразовав решения с помощью условия нормировки и формул геометрической прогрессии, получим формулы (2.38)-(2.39).

$$P_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}\rho^k P_0, 1 \le k \le S \\ \frac{1}{S!\,S^{k-s}}\rho^k P_0, S < k \le s+m \end{cases} \quad (2.38)$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{S-1}\frac{1}{k!}\rho^k + \frac{1}{S!}\rho^S * \frac{1-(\frac{\lambda}{s\mu})^{m+1}}{1-\frac{\lambda}{s\mu}}\right]^{-1} \quad (2.39)$$

По формуле (2.38) можно высчитать вероятность отказа, т.е. вероятность того, что все каналы заняты и вся очередь наполнена:

$$P_{\text{отк}} = P_{s+m} = \frac{1}{S!\,S^m}\rho^{s+m}P_0 \quad (2.40)$$

Относительная пропускная способность системыq будет являться противоположным событием событию «отказа заявки на обслуживание», и высчитывается по формуле.

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_{s+m} = 1 - \frac{1}{S!\,S^m}\rho^{s+m}P_0 \quad (2.41)$$

Абсолютная пропускная способность (А) - среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени:

$$A = \lambda q \quad (2.42)$$

Среднее число занятых каналов будет находиться по формуле (2.43).

$$\bar{z} = \rho(1 - P_s) \tag{2.43}$$

Среднее число находящихся в очереди заявок:

$$\hat{\vartheta} = P_s * \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{-1} * \left[1 - (m+1)\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2 + m\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{m+1}\right] \tag{2.44}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$\varpi = \frac{\bar{\vartheta}}{\lambda} \tag{2.45}$$

Среднее число приборов свободных от работы:

$$M_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{S-k}{k!} \rho^k P_0 \tag{2.46}$$

Цель. Решить оптимизационную задачу на примере СМО < μ | μ | S | m>.

Входные значения: параметр λ=10шт/сутки, μ=2шт/сутки.

Задача. отделе нагрева металла в цехе крупной плавки часть работ происходит в режиме «копильника»: если слиток застает все печи занятыми, то он помещается в «копильник», где ему обеспечивается нужная температура. Если все печи и «копильники» заняты - он отправляется на склад. Но при этом для того, чтобы его заново разогреть, потребуются дополнительные растраты в размере 100$ на его разогрев. Поступающий поток простейший с λ=10шт/сутки. Интенсивность нагрева слитков перед ковкой (распределение показательное) μ=2шт/сутки. В цехе имеется 10 печей, из которых часть должна быть для плавки, а часть для «копильника». Цена одной печи -100000$. Текущие затраты 50$ в сутки на обслуживание одной печи. Затраты на простой печи 30$ сутки.Затраты на содержание слитков в «копильнике» 60$ сутки на один слиток. Фонд времени в году 6000 часов. Найти оптимальное количество «копильников»(m) и печей для плавки(s).

Алгоритм решения

1. Формула для расчета затрат:

$$\begin{gathered} I(s) = E_n * C_1 * S + C_2 * (S - M_2) * T + C_3 * M_2 * T \\ + C_5 * T * \lambda * P_{s+m} + C_4 * M_1 * T \end{gathered} \tag{2.47}$$

где $I(s)$ – затраты на работу системы;
E_n - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);
C_1 - цена одной печи (100000$);
C_2 - текущие затраты на содержание одной печи (50$/сутки);
C_3 – текущие затраты на содержание одной печи в простое(30$/сутки);
C_4 – затраты на содержание слитка в «копильнике»(60$/сутки шт.);
C_5 – затраты на разогрев отосланных на склад слитков (100$/сутки шт.);
M_1 – средняя длина очереди ($\hat{\vartheta}$);

M_2 –среднее число приборов свободных от работы;
T –годовой фонд рабочего времени (6000 часов).

1. Табулировать функцию (2.47) при $S = \overline{1,9}$ (m=10-S);

2. Построить график зависимости затрат от числа обслуживающих каналов, и найти оптимальное число обслуживающих каналов для данной задачи.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ 3: Сети систем массового обслуживания

Практическое задание 8: Сети систем массового обслуживания 1

Пусть матрица переходных вероятностей $P=||p_{ij}||$, сети СМО имеет вид:

$$|P_{ji}| = \begin{array}{cccc|c} S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & S_4 \\ P_{34} & P_{33} & P_{32} & P_{31} & S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & S_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & S_1 \end{array}$$

Записать систему уравнений для интенсивностей потоков $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, где через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ обозначены суммарные интенсивности потоков на входе i-й СМО, а через λ_4 интенсивность потока запросов от СМО 4.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_3 P_{31}; \\ \lambda_2 &= \lambda_3 P_{32}; \\ \lambda_3 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 P_{33} + \lambda_4. \end{aligned}\right\}$$

Указание к решению. Пример задания сети СМО:

1) N=3;
2) K_1=1; K_2=1; K_3=2;
3)

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

4) $I_1 = 1$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$;
5) $\overline{T}_{обс1} = 0{,}07$; $\overline{T}_{обс2} = 0{,}06$; $\overline{T}_{обс3} = 0{,}35$.

Рисунок 3.1. Граф задания сети СМО

Практическое задание 9: Сети систем массового обслуживания 2

Технологическая система (участок) S состоит из двух станков, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Перечислить возможные состояния системы, интерпретировать геометрической схемой – графом состояний.

Указание к решению. S_0 - оба станка исправны; S_1 - первый станок ремонтируется, второй исправен; S_2 - второй станок ремонтируется, первый исправен; S_3 - оба станка ремонтируются.

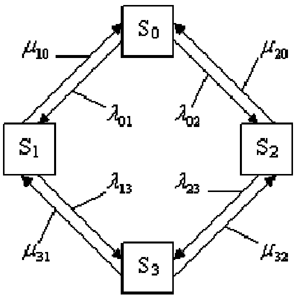

Рисунок 3.1. Граф состояний системы

Не забывайте проверять а) условие существования стационарного режима для текущей итерации; б) согласованность единиц измерения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений квантилей $\chi^2_{\varepsilon,n}$

n\ε	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	0,1485	0,2750	0,4549	0,7083	1,0742	1,6424	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,4463	0,7133	1,0217	1,3863	1,8326	2,4079	3,2189	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,0052	1,4237	1,8692	2,3660	2,9462	3,6649	4,6416	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	1,6488	2,1947	2,7528	3,3567	4,0446	4,8784	5,9886	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	2,3425	2,9999	3,6555	4,3515	5,1319	6,0644	7,2893	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	3,0701	3,8276	4,5702	5,3481	6,2108	7,2311	8,5581	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	3,8223	4,6713	5,4932	6,3458	7,2832	8,3834	9,8032	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	4,5936	5,5274	6,4226	7,3441	8,3505	9,5245	11,0301	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	5,3801	6,3933	7,3570	8,3428	9,4136	10,6564	12,2421	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	6,1791	7,2672	8,2955	9,3418	10,4732	11,7807	13,4420	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	6,9887	8,1479	9,2373	10,3410	11,5298	12,8987	14,6314	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	7,8073	9,0343	10,1820	11,3403	12,5838	14,0111	15,8120	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	8,6339	9,9257	11,1291	12,3398	13,6356	15,1187	16,9848	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	9,4673	10,8215	12,0785	13,3393	14,6853	16,2221	18,1508	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	10,3070	11,7212	13,0297	14,3389	15,7332	17,3217	19,3107	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	11,1521	12,6243	13,9827	15,3385	16,7795	18,4179	20,4651	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	12,0023	13,5307	14,9373	16,3382	17,8244	19,5110	21,6146	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	12,8570	14,4399	15,8932	17,3379	18,8679	20,6014	22,7595	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	13,7158	15,3517	16,8504	18,3377	19,9102	21,6891	23,9004	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	14,5784	16,2659	17,8088	19,3374	20,9514	22,7745	25,0375	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	15,4446	17,1823	18,7683	20,3372	21,9915	23,8578	26,1711	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	16,3140	18,1007	19,7288	21,3370	23,0307	24,9390	27,3015	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	17,1865	19,0211	20,6902	22,3369	24,0689	26,0184	28,4288	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	18,0618	19,9432	21,6525	23,3367	25,1063	27,0960	29,5533	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	18,9398	20,8670	22,6156	24,3366	26,1430	28,1719	30,6752	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141
26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	19,8202	21,7924	23,5794	25,3365	27,1789	29,2463	31,7946	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	20,7030	22,7192	24,5440	26,3363	28,2141	30,3193	32,9117	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	21,5880	23,6475	25,5093	27,3362	29,2486	31,3909	34,0266	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	22,4751	24,5770	26,4751	28,3361	30,2825	32,4612	35,1394	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	23,3641	25,5078	27,4416	29,3360	31,3159	33,5302	36,2502	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922
31	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336	24,2551	26,4397	28,4087	30,3359	32,3486	34,5981	37,3591	41,4217	44,9853	48,2319	52,1914
32	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706	25,1478	27,3728	29,3763	31,3359	33,3809	35,6649	38,4663	42,5847	46,1943	49,4804	53,4858

Продолжение таблицы значений квантилей $\chi^2_{\varepsilon,n}$

33	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102	26,0422	28,3069	30,3444	32,3358	34,4126	36,7307	39,5718	43,7452	47,3999	50,7251	54,7755
34	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523	26,9383	29,2421	31,3130	33,3357	35,4438	37,7954	40,6756	44,9032	48,6024	51,9660	56,0609
35	18,5089	20,5694	22,4650	24,7967	27,8359	30,1782	32,2821	34,3356	36,4746	38,8591	41,7780	46,0588	49,8018	53,2033	57,3421
36	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433	28,7350	31,1152	33,2517	35,3356	37,5049	39,9220	42,8788	47,2122	50,9985	54,4373	58,6192
37	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921	29,6355	32,0532	34,2216	36,3355	38,5348	40,9839	43,9782	48,3634	52,1923	55,6680	59,8925
38	20,6914	22,8785	24,8839	27,3430	30,5373	32,9919	35,1920	37,3355	39,5643	42,0451	45,0763	49,5126	53,3835	56,8955	61,1621
39	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958	31,4405	33,9315	36,1628	38,3354	40,5935	43,1053	46,1730	50,6598	54,5722	58,1201	62,4281
40	22,1643	24,4330	26,5093	29,0505	32,3450	34,8719	37,1340	39,3353	41,6222	44,1649	47,2685	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907
41	22,9056	25,2145	27,3256	29,9071	33,2506	35,8131	38,1055	40,3353	42,6506	45,2236	48,3628	52,9485	56,9424	60,5606	64,9501
42	23,6501	25,9987	28,1440	30,7654	34,1574	36,7550	39,0774	41,3352	43,6786	46,2817	49,4560	54,0902	58,1240	61,7768	66,2062
43	24,3976	26,7854	28,9647	31,6255	35,0653	37,6975	40,0496	42,3352	44,7063	47,3390	50,5480	55,2302	59,3035	62,9904	67,4593
44	25,1480	27,5746	29,7875	32,4871	35,9743	38,6408	41,0222	43,3352	45,7336	48,3957	51,6389	56,3685	60,4809	64,2015	68,7095
45	25,9013	28,3662	30,6123	33,3504	36,8844	39,5847	41,9950	44,3351	46,7607	49,4517	52,7288	57,5053	61,6562	65,4102	69,9568
46	26,6572	29,1601	31,4390	34,2152	37,7955	40,5292	42,9682	45,3351	47,7874	50,5071	53,8177	58,6405	62,8296	66,6165	71,2014
47	27,4158	29,9562	32,2676	35,0814	38,7075	41,4744	43,9417	46,3350	48,8139	51,5619	54,9056	59,7743	64,0011	67,8206	72,4433
48	28,1770	30,7545	33,0981	35,9491	39,6205	42,4201	44,9154	47,3350	49,8401	52,6161	55,9926	60,9066	65,1708	69,0226	73,6826
49	28,9406	31,5549	33,9303	36,8182	40,5344	43,3664	45,8895	48,3350	50,8660	53,6697	57,0786	62,0375	66,3386	70,2224	74,9195
50	29,7067	32,3574	34,7643	37,6886	41,4492	44,3133	46,8638	49,3349	51,8916	54,7228	58,1638	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений $t_{\text{критич.}}$

n/ε	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
∞	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Алгоритм решения задачи моделирования работы СМО

```
/// <summary>
        /// классзаявка
        /// </summary>
        class Item
{
            //индекс
publicintindex;
            //иеезначение
public double value;

            public Item(int i, double v)
            {
                index = i;
                value = v;
            }
        }
        /// <summary>
/// функция, моделирующая выполнение и отклонение заявок
/// </summary>
        /// <param name="T">потокзаявок</param>
/// <param name="b">число мест в очереди</param>
        /// <param name="tb">время обслуживания</param>
        /// <param name="QTask">возвращаемый поток выполн.заявок</param>
/// <param name="queue">очередь</param>
        /// <param name="WorkF">выполн.заявки</param>
        /// <param name="leaveTask">отклоненныезаявки</param>
        void Work(List<double> T, int b, double tb, out List<Item> QTask,out Queue<Item> queue,out List<Item> WorkF, out List<Item> leaveTask )
        {
            QTask = null; queue = null; WorkF = null; leaveTask = null;
            if (T == null) return;
            if (T.Count == 0) return;
            QTask = new List<Item>();//обработказаявки
            queue = new Queue<Item>();// очередь
            WorkF = new List<Item>(); //выполненныеивышедшиезаявки
            leaveTask = new List<Item>();//отклоненныезаявки
//первая зааявка сразу уходит на выполнение
WorkF.Add(new Item(0, T[0] + tb));
            QTask.Add(new Item(0, T[0]));
            for (int i = 1; i < T.Count; i++)
{
                //берем время вхождения  текущей заявки в СМО
                //если  есть заявка, которая выполняется до ее прихода, выполняем ее
while (WorkF[WorkF.Count - 1].value <= T[i])
{
                    //проверяем, есть ли заявка в очереди
                    if (queue.Count != 0)
                    {
                        //забираем ее
                        Item buff = queue.Dequeue();
                        //добавляем в массив на выполнение
                        //причем задаем время ее завершения
WorkF.Add(new Item(buff.index,
//если заявка давно висит в очереди
buff.value < WorkF[WorkF.Count - 1].value ?
//она выполняется сразу после предыдущей заявки
WorkF[WorkF.Count - 1].value + tb :
//если она только пришла, а очередь пустовала,
                          //то она выполняется после своего прихода
buff.value + tb));

                    }
                    else break;
}
                //если в очереди есть места, сразу добавляем в нее заявку
if (queue.Count < b)
                {
                    queue.Enqueue(new Item(i, T[i]));
                    QTask.Add(new Item(i, T[i]));
                }
                else
                {
                    //иначезаявкаотклоняется
                    leaveTask.Add(new Item(i, T[i]));
}
            }
            //когда прошли по всем заявкам, а в очереди еще что-то осталось, завершаем и их
while (queue.Count != 0)
            {
                Item buff = queue.Dequeue();
                WorkF.Add(new Item(buff.index,
                    buff.value < WorkF[WorkF.Count - 1].value ?
                    WorkF[WorkF.Count - 1].value + tb :
buff.value +tb));

            }
        }
```

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салмина Н.Ю. Моделирование систем: Учебное пособие для вузов. - Томск: ТУСУР, 2002. – 197 с.
2. Шевченко Н. Ю. Моделирование систем: Учебное пособие, МОРФ; ТУСУР; Каф. АОИ. - Томск: ТМЦДО, 2002. - 176 с
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1987.
4. Тихоненко О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: Учебное пособие для вузов. - Минск: "Технопринт", 2003. – 326 с.
5. Мицель А. А., Грибанова Е. Б. Имитационное моделирование экономических процессов: учебное пособие. - Томск: ТМЦДО, 2005.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Высш.шк., 2000, 480 с.
7. Т.Л.Саати. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: Пер. с англ. /Под. ред. И.Н. Коваленко, изд-ие 2. М., 1971.
8. Д.Кениг, Д.Штойян. Методы теории массового обслуживания: Пер. с нем. /Под. ред. Г.П.Климова. М., 1981.
9. Г.И.Ивченко, В.А.Каштанов, И.Н.Коваленко. Теория массового обслуживания. М., 1982.
10. Двуреченский А., Ососков Г.А. О предельных свойствах обобщенной системы массового обслуживания с бесконечным числом каналов. Изв.АН СССР, Техн.киберн., 1985, №4, с.60-64.

Электронные учебники

11. http://www.resolventa.ru/metod/student/servtheory.htm
12. http://portal.tpu.ru/SHARED/l/LASUKOV/ms/Tab1/g5.pdf
13. https://lib.tusur.ru/