ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра экономической математики, информатики и статистики (ЭМИС)

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания к самостоятельной работе студентов

Составитель: С.И. Колесникова

Томск 2018

АННОТАЦИЯ

В пособии излагаются указания к определению основных показателей эффективности различных типов систем массового обслуживания (СМО): с отказом и с ожиданием, системы с ограниченной очередью, замкнутых систем. Даны формулировки тем и задач для индивидуальной работы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания (ТМО) составляет один из разделов теории вероятностей. В ТМО рассматриваются вероятностные задачи и их математические модели.

Основные направления в тематике самостоятельной работы студентов в данном пособии следующие.

1. Статистическое моделирование простых пуассоновских СМО в неустановившемся и в установившемся режимах.
2. Имитационное моделирование работы экспоненциальных СМО.
3. Расчет показателей эффективности всех основных типов экспоненциальных СМО.
4. Решение задач на оптимизацию экспоненциальных СМО согласно экономическим показателям эффективности.

РЕКОМЕНДАЦИИ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Таблица 1.1 Условия самостоятельной работы и требований к ее защите

Наименование раздела для СРС (работы)	**Аннотация (выходные требования, Цель работы)**	**Рекомендуемый план выполнения работы (Ход работы. Справочные сведения. Задание)**
1 Математические основы теории массового обслуживания.	В работе необходимо исследовать указанную СМО. Разработать программу, реализующую алгоритм расчета показателей эффективности СМО.	1. Основные понятия и определения простейших потоков. 2. Составление графа состояний СМО. 3. Составление уравнений Колмогорова для определения основных характеристик многоканальных СМО. 4. Расчет основных характеристик СМО. 5. Примеры СМО. Справочные сведения: [1-16], конспект лекций.
2 Классические модели систем массового обслуживания	В работе необходимо исследовать указанную СМО. Разработать программу, реализующую алгоритм расчета показателей эффективности СМО.	1. Основные понятия и определения теории систем массового обслуживания. 2. Методы определения основных характеристик многоканальных СМО. 3. Алгоритм определения основных характеристик многоканальных СМО. 4. Разработка программного обеспечения. 5. Примеры применения программ. Справочные сведения: [1-16], конспект лекций.
3 Сети систем массового обслуживания	В работе необходимо исследовать указанную СМО. Разработать программу, реализующую алгоритм расчета показателей эффективности СМО.	1. Основные понятия и определения теории систем массового обслуживания. 2. Методы определения основных характеристик многофазных СМО. 3. Алгоритм определения основных характеристик многофазных СМО. 4. Разработка программного обеспечения. 5. Примеры применения программ. Справочные сведения: [1-16], конспект лекций

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ 1: Математические основы теории массового обслуживания

ПРИМЕРЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ 1.1-1.5

ЗАДАЧА 1.1

Зал в парикмахерской рассчитан на 5 мест. Поток пользователей простейший. Среднее число клиентов, посещающих зал за сутки, равно 40. Время работы одного мастера, затраченное на одного клиента распределено по показательному закону и составляет в среднем 20 минут. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что клиент застанет всех мастеров занятыми; среднее число клиентов в зале; среднее число клиентов в очереди; среднее время ожидания свободного мастера; среднее время пребывания клиентов в зале.

ЗАДАЧА 1.2.

В двухканальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром $\lambda=5$ заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Методом Монте-Карло найти среднее число обслуженных заявок за время 4 мин. Указание: провести три испытания.

ЗАДАЧА 1.3

Зал в аэропорту рассчитан на 150 мест. Поток пассажиров простейший. Среднее число пассажиров, посещающих зал за сутки, равно 2540. Время занятости одного места распределено по показательному закону и составляет в среднем 40 минут. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пассажир застанет все места занятыми; среднее число пассажиров в зале; среднее число пассажиров в очереди; среднее время ожидания свободного места; среднее время пребывания пассажиров в зале.

ЗАДАЧА 1.4.

В двухканальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром $\lambda=10$ заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Методом Монте-Карло найти среднее число обслуженных заявок за время 8 мин. Указание: провести три испытания.

ЗАДАЧА 1.5.

В двухканальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром $\lambda=15$ заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1,5 мин. Методом Монте-Карло найти среднее число обслуженных заявок за время 10 мин. Указание: провести три испытания.

ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И УКАЗАНИЙ К ИХ РЕШЕНИЯМ по разделу 1

ЗАДАЧА 1.6. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ

В двухканальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром λ=5 заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти среднее число обслуженных заявок за время 4 мин.

Для решения этих задач используется раздел ТМО «Статистическое моделирование систем», метод Монте-Карло.

Указания к решению. Результаты статистического моделирования работы заданной СМО рекомендуется изображать с помощью временных диаграмм. Введем следующие обозначения для временных осей:

I-входящий поток заявок, здесь t_i-моменты поступления заявок;

T_i-интервалы времени между двумя последовательными заявками. Очевидно, что $t_i = t_{i-1}+T_i$.

К1-первый канал обслуживания;

К2-второй канал обслуживания; здесь жирные линии на временной оси обозначают интервалы занятости канала. Если оба канала свободны, то заявка становится под обслуживание в канал К1, в случае его занятости заявка обслуживается каналом К2.

Если заняты оба канала, то заявка покидает СМО необслуженной.

О-1-выходящий поток обслуженных заявок.

О-2-выходящий поток потерянных заявок за счет отказов СМО (случай занятости обоих каналов).

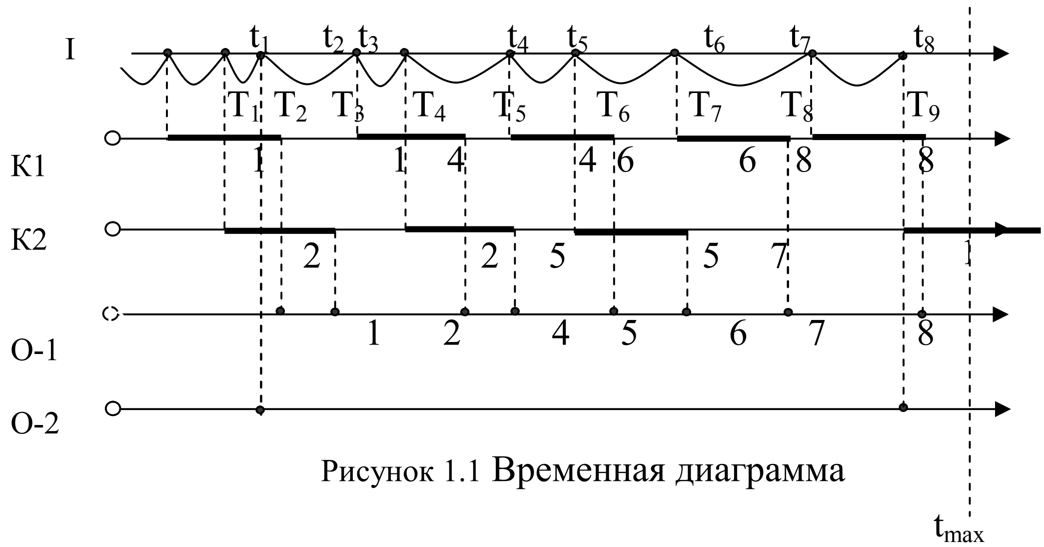

Рисунок 1.1 Временная диаграмма

Статистические испытания продолжаются в течение временного интервала [0; t_{max}]. Очевидно, что любое превышение времени t_{max} влечет за собой сброс заявки в выходящий поток О-2. Так на рис. 1.1 заявка №10, пришедшая в систему в момент

t_{10}, не успевает обслужиться до момента t_{max}, так как $t_{10}+T_{обсл.}>t_{max}$. Следовательно, она не принимается свободным каналом К1 на обслуживание и сбрасывается в О-2, получая отказ.

Из временных диаграмм видно, что необходимо научиться моделировать интервалы T_i. Применим метод обратных функций. Поскольку случайная величина T_i распределена по показательному закону с параметром λ=5, то плотность распределения имеет вид $f(\tau)=5e^{-5\tau}$. Тогда значение $F(T_i)$ функции распределения вероятностей определяется интегралом

$$F(T_i)=\int_0^{T_i} f(\tau)d\tau = 5\int_0^{T_i} e^{-5\tau}d\tau = 5\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-5\tau}\Big|_0^{T_i} = 1-e^{-5T_i} .$$

Известно, что область значений функции распределения $F(T)$ есть отрезок [0; 1]. Выбираем из таблицы случайных чисел число r_i^* и определяем T_i из равенства $1-e^{-5Ti}=r_i^*$, откуда $e^{-5Ti}=1-r_i^*$. Однако, если $r_i^*\in[0;1]$, то $(1-r_i^*)\in[0;1]$. Поэтому можно сразу получать из таблицы случайных чисел реализации $r_i=1-r_i^*$.

Следовательно, $e^{-5Ti}=r_i$, или $-5T_i=lnr_i$, откуда $T_i=-\frac{1}{5}\ln r_i$.

Результаты вычислений заносят в таблицу.

Таблица 1.2 ИСПЫТАНИЕ №1

№ я-вки i	Сл. число r_i	$-ln\ r_i$	$-\frac{1}{5}ln\ r_i$ T_i	Момент поступ-ления заявки $t_i=t_{i-1}+T_i$	Момент окончания обслужив. t_i+0,50		Счетчик заявок	
					К1	К2	Обсл.	Потер
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	0,10	2,30	0,46	0,46	0,96		1	
2.	0,09	2,41	0,48	0,94		1,44	1	
3.	0,73	0,31	0,06	1,00	1,50		1	
4.	0,25	1,39	0,28	1,28				1
5.	0,33	1,11	0,22	1,50	2,00		1	
6.	0,76	0,27	0,05	1,55		2,05	1	
7.	0,52	0,65	0,13	1,68				1
8.	0,01	4,61	0,92	2,60	3,10		1	
9.	0,35	1,05	0,21	2,81		3,31	1	
10.	0,86	0,15	0,03	2,84				1
11.	0,34	1,08	0,22	3,06				1
12.	067	0,40	0,08	3,14	3,64		1	
13.	0,35	1,05	0,21	3,35		3,85	1	
14.	0,48	0,73	0,15	3,50				1
15.	0,76	0,27	0,05	3,55				1
16.	0,37	0,99	0,20	3,75	4,25	STOP		
						$\sum$	9	

Для проведения испытания №1 были взяты случайные числа из приложения 2, начиная с первого числа первой строки. Далее выборка осуществлялась по строкам. Проведем еще два испытания.

Обратите внимание на выборку случайных чисел из таблицы приложения 2, если в испытании №1 последнее случайное число для заявки №16 было 0,37 (первое случайное число во второй строке), то испытание №2 начинается со следующего за ним случайного числа 0,54. Испытание №2 содержит последним случайное число 0,53 (пятое число в третьей строке). Следовательно, третье испытание начнется с числа 0,19. Вообще в пределах одной серии испытаний случайные числа из таблицы выбираются без пропусков и вставок по определенному порядку, например, по строкам.

Таблица 1.3 ИСПЫТАНИЕ №2

№ заявки i	Сл. число r_i	$-ln\ r_i$	$-\frac{1}{5} ln\ r_i$ T_i	Момент поступления заявки $t_i=t_{i-1}+T_i$	Момент окончания обслужив. $t_i+0{,}50$		Счетчик заявок	
					К1	К2	Обсл.	Потер
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	0,54	062	0,12	0,12	0,62		1	
2.	0,20	1,61	0,32	0,44		0,94	1	
3.	0,48	0,73	0,15	0,59				1
4.	0,05	3,00	0,60	1,19	1,69		1	
5.	0,64	0,45	0,09	1,28		1,78	1	
6.	0,89	0,12	0,02	1,30				1
7.	0,47	0,76	0,15	1,45				1
8.	0,42	0,87	0,17	1,62				1
9.	0,96	0,04	0,01	1,63				1
10.	0,24	1,43	0,29	1,92	2,42		1	
11.	0,80	0,22	0,04	1,96		2,46	1	
12.	0,52	0,65	0,13	2,09				1
13.	0,40	0,92	0,18	2,27				1
14.	0,37	0,99	0,20	2,47	2,97		1	
15.	0,08	2,53	0,51	2,98	3,48		1	
16.	0,42	0,87	0,17	3,15		3,65	1	
17.	0,26	1,35	0,27	3,42				1
18.	0,89	0,12	0,02	3,44				1
19.	0,53	0,63	0,13	3,57	4,07	STOP		
						$\sum$	9	

Задача 1.7. Цех по изготовлению деталей

Имеется цех, состоящий из трех одинаковых станков. В систему поступают для обработки детали в среднем через 0.6 часа. Среднее время изготовления одной детали 0.7 час. Если при поступлении заявки на изготовление детали все станки заняты, то деталь направляется на другой участок таких же станков. Построить граф состояний системы. Найти вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО.

Сколько в среднем в этой системе обрабатывается деталей (сколько процентов направляемых деталей), при этом, сколько деталей направляется для обработки на другие участки? Сколько в среднем в этой системе в среднем работает станков?

Указания к решению.

$$\lambda = \frac{1}{\overline{t_3}} = \frac{1}{0{,}5} = 2,$$

т.е. в среднем две заявки на обработку деталей в час.

$$\mu = \frac{1}{\overline{t_{OБ}}} = \frac{1}{0{,}6} \cong 1{,}67.$$

Граф состояний системы представлен на рис.1.1.

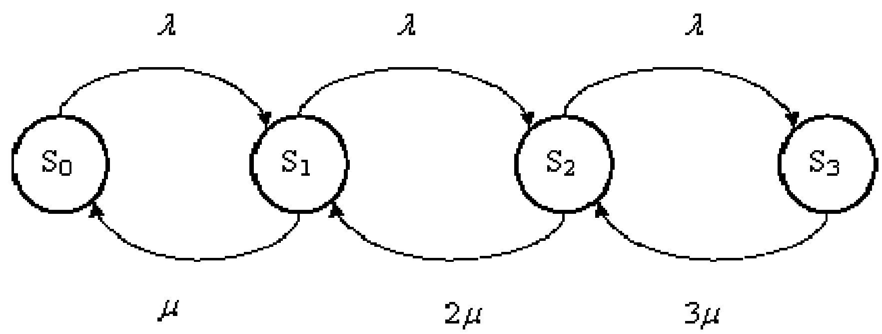

Рис.1.1.Граф состояний для рассматриваемого примера

Возможные состояния системы:

S_0 – в СМО (на участке) нет ни одной заявки;

S_1 – в СМО (на участке) одна заявка;

S_2 – в СМО (на участке) две заявки;

S_3 – в СМО (на участке) три заявки (заняты все три станка).

Вероятность того, что все станки свободны:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2x3\mu^3}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{2}{1{,}67} + \frac{2^2}{2x1{,}67^2} + \frac{2^3}{2x3x1{,}67^3}\right)^{-1} = \frac{1}{3{,}21} \cong 0{,}31.$$

Вероятность того, что один станок занят:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{2}{1{,}67} 0{,}31 \cong 0{,}37.$$

Вероятность того, что два станка заняты:

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 = \frac{2^2}{2 \cdot 1{,}67^2} 0{,}31 \cong 0{,}22.$$

Вероятность того, что все три станка заняты:

$$p_3 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0 = \frac{2^3}{2 \cdot 3 \cdot 1{,}67^3} 0{,}31 \cong 0{,}09.$$

$$A = \lambda\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}\right] = 2\left[1 - \left(\frac{2}{1{,}67}\right)^3 \frac{0{,}31}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right] \cong 1{,}82 \, дет/ч.$$

$$Q = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!} = 1 - \left(\frac{2}{1{,}67}\right)^3 \frac{0{,}31}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cong 0{,}91; P_{отк} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!} = 1 - Q \cong 0{,}09.$$

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}\right] = \frac{2}{1{,}67} 0{,}91 \cong 1{,}09.$$

Таким образом, в среднем в этой системе обрабатывается 1,82 дет/ч (примерно 91 % направляемых деталей), при этом примерно 9 % деталей направляется для обработки на другие участки. Одновременно в среднем работает в основном один станок ($\bar{k} = 1{,}09$). Но из–за случайных характеристик потока заявок иногда работают одновременно все три станка ($p_3 = 0{,}09$), отсюда 9 % отказов.

Задача 1.8. Оптимальное число каналов, обеспечивающее минимум затрат на систему.

1) Определить оптимальное число каналов, обеспечивающее минимум затрат на систему, при условии достижения требуемого уровня ее безотказной работы (например, $P_{отк} \leq 0.03$ (3%)).
2) Предложите способ для определения оптимального числа каналов, обеспечивающее максимум прибыли от эксплуатации СМО в единицу времени.
3) Определить оптимальное число каналов, обеспечивающее минимум затрат на систему, при условии достижения требуемого уровня ее безотказной работы.

   Пусть $\frac{\lambda}{\mu} = 1, P_{отк} \leq 0{,}03 (т.е. \leq 3\%)$. Целевая функция (затраты на СМО) запишется: $y = cn \to \min$, где $c - const$. Найти: $n_{опт}$.

   Указания к решению.

$$P_{отк} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}; \quad \frac{\lambda}{\mu} = 1 \Rightarrow P_{отк} = \frac{p_0}{n!}$$

$$P_{отк} \leq 0{,}03 \Rightarrow \frac{p_0}{n!} \leq 0{,}03, \text{ или } \frac{n!}{p_0} \geq 33.$$

По другому можно записать:

$$n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \geq 33.$$

Последнее равенство начинает выполняться при $n_{опт} = 4$, так как

$$n = 1 \rightarrow 1\left(1+\frac{1}{1}\right) = 2 < 33;\; n = 2 \rightarrow 1\cdot 2\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}\right) = 5 < 33;$$

$$n = 3 \rightarrow 1\cdot 2\cdot 3\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right) = 16 < 33;$$

$$n = 4 \rightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right) \cong 65 > 33.$$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ 2: Классические модели систем массового обслуживания

ПРИМЕРЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ 2.1-2.5

Задание 2.1. Два рабочих обслуживают 6 станков. Станок требует наладки в среднем каждые полчаса. Наладка занимает у рабочего в среднем 10 мин.

Все потоки событий – простейшие.

Определить характеристики СМО: среднее число занятых рабочих; абсолютную пропускную способность; среднее число неисправных станков.

Установить, улучшатся ли характеристики СМО, если рабочие будут налаживать станки совместно, тратя вдвоем на наладку одного станка в среднем 5 мин.

Задание 2.2. В двухканальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром λ=5 заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти среднее число обслуженных заявок за время 4 мин. Построить граф состояний системы. Найти вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО.

Задание 2.3. Железнодорожная касса имеет 2 окошка, в каждом из которых продаются билеты в 2 пункта: Ленинград и Киев. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Ленинград и Киев одинаковы по интенсивности, которая равна 0,45 пассажиров/мин. Среднее время обслуживания пассажира (продажи ему билета) – 2мин.

Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Ленинград, а во второй - только в Киев. Считая все потоки событий простейшими, проверить разумность этого предложения.

Задание 2.4. Механическая мастерская завода с тремя постами выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, -пуассоновский и имеет интенсивность 1 = 2.5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно 0.5 сут. Другой мастерской на заводе нет, очередь перед мастерской может расти практически неограниченно. Требуется вычислить следующие предельные значения вероятностных характеристик системы:

вероятности состояний системы;

среднее число заявок в очереди на обслуживание;

среднее число находящихся в системе заявок;

среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди;

среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.

Задание 2.5. В 4-х канальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром λ=10 заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти среднее число обслуженных заявок за время 8 мин.

ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И УКАЗАНИЙ К ИХ РЕШЕНИЯМ по разделу 2

Задание 2.6. Интернет-кафе

Зал в интернет-кафе имеет 7 мест. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих кафе за сутки, равно 100. Время работы одного пользователя на одном месте распределено по показательному закону и составляет в среднем 40 минут. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пользователь застанет все места занятыми; среднее число пользователей в зале; среднее число пользователей в очереди; среднее время ожидания свободного места; среднее время пребывания пользователя в интернет-кафе.

Задание 2.7. Автоматизированная система управления для продажи железнодорожных билетов

Автоматизированная система управления АСУ продажей железнодорожных билетов состоит из двух параллельно работающих ЭВМ. При выходе из строя одной ЭВМ АСУ продолжает нормально функционировать за счет работы другой ЭВМ. Поток отказов каждой ЭВМ простейший. Среднее время безотказной работы одной ЭВМ равно 10 суткам. При выходе из строя отказавшую ЭВМ начинают ремонтировать. Время ремонта ЭВМ распределено по показательному закону и в среднем составляет двое суток. В начальный момент обе ЭВМ исправны. Найти среднюю производительность АСУ, если при исправности хотя бы одной ЭВМ ее производительность равна 100%, а при отказе обеих ЭВМ продажа билетов производится вручную, обеспечивая 30% общей производительности АСУ.

Задание 2.8. Механическая мастерская завода

Механическая мастерская завода с тремя постами выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, - пуассоновский и имеет интенсивность 1 = 2.5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно 0.5 сут.

1) Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь перед мастерской может расти практически неограниченно. Требуется вычислить следующие предельные значения вероятностных характеристик системы:

вероятности состояний системы;

среднее число заявок в очереди на обслуживание;

среднее число находящихся в системе заявок;

среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди;

среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.

2) Найти необходимые характеристики мастерской завода в предположении,

что длина очереди составляет 4 места. Интенсивность поступления заявок 2,5 механизма в сутки = 5/48 механизма в час, а среднее время ремонта одного механизма составляет 0,5 сутки = 12 часов.

Задание 2.9. Технологический участок из трех станков

Имеется технологическая система (участок), состоящая из трех одинаковых станков. В систему поступают для обработки детали в среднем через 0,5 часа. Среднее время изготовления одной детали 0.6 час. Если при поступлении заявки на изготовление детали все станки заняты, то деталь направляется на другой участок таких же станков. Построить граф состояний системы. Найти вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО.

Сколько в среднем в этой системе обрабатывается деталей (сколько процентов направляемых деталей), при этом, сколько деталей направляется для обработки на другие участки? Сколько в среднем в этой системе в среднем работает станков?

Задание 2.10. Оптимальное число контролёров ОТК

Задача. Определить оптимальное число контролёров ОТК, которые производят проверку выпускаемого оборудования. Если контролера нет на месте, оборудование отправляется без проверки. На каждое оборудование, не прошедшее проверку, накладывается штраф. На содержание одного рабочего места необходимо 500\$/год. Заработная плата контролёра ОТК составляет 7500\$/год. Контролёр получает зарплату по времени, а не по факту выработки. Штраф за отказ от обслуживания составляет 4\$ за один отказ. Годовой фонд времени составляет 6000 часов. Размерность интенсивностей входного и выходного потоков шт/час.

Пример алгоритма оптимизации

1. Формула для расчета затрат:

$$I(s) = E_n C_1 + C_2 M_1 + C_3 (S - M_1) + C_4 T P_s \lambda \qquad (2.1)$$

где $I(s)$ – затраты на работу s-каналов;
E_n - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15\$/год);
C_1 - затраты на рабочее место (500\$/год);
C_2 - затраты на заработную плату контролёра ОТК (7500\$/год);
C_3 – затраты на простой контролёра ОТК (7500\$/год);
C_4 – затраты на отказ от обслуживания (4\$/шт.);
M_1 – среднее число занятых каналов ($\bar{z}$);
T –годовой фонд рабочего времени (6000 часов);

2. Табулировать функцию **Ошибка! Источник ссылки не найден.** при $S = \overline{1,10}$;

3. Построить график зависимости затрат от числа обслуживающих каналов, и найти оптимальное число обслуживающих каналов для данной задачи.

Задание 2.11. Число причалов промышленного речного порта

Задача. Определить оптимальное число причалов промышленного речного порта, принимающих биржи с сыпучим материалом. Поток поступающих бирж простейший с интенсивностью 0,5 барж/сутки. Время разгрузки баржи имеет показательный закон с параметром 0,5 барж/сутки. Цена оборудования одного причала 100000$. Текущие затраты на содержание одного причала 400$/сутки при его использовании и 200$/сутки при его простое. Затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки, составляет 1000$/сутки, если время ожидания меньше 2 суток, и 1600$/сутки, если время ожидания больше 2 суток.

Пример алгоритма оптимизации

1. Формула для расчета затрат:

$$I(S) = E_n C_1 S + C_2 M_2 + C_3 (S - M_2) + C_4 M_1 T \qquad (2.2)$$

где $I(s)$ – затраты на работу порта;

E_n - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);

C_1 - цена оборудования одного причала(100000$);

C_2 - текущие затраты на содержание причала (400$/сутки);

C_3 – текущие затраты на содержание причала в простое(200$/сутки);

C_4 – затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки;

M_1 – средняя длина очереди ($\hat{\vartheta}$);

M_2 –среднее число занятых приборов ($\bar{z}$);

T –годовой фонд рабочего времени (365 суток).

$$C_4 = C'_4 * P\{\beta < \beta_0\} + C''_4 * P\{\beta > \beta_0\} \qquad (2.3)$$

где C'_4 - затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки менее β_0(1000$/сут.);

C''_4 - затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки более β_0(1600$/сутки);

β – время ожиданиябаржой разгрузки;

β_0 – время ожидания, после которого стоимость содержания баржи в ожидании увеличивается (2 суток).

Вероятность ожидания менее t суток высчитывается по формуле **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

$$\mathrm{P}\{\beta < t\} = 1 - P_{\text{ожидания}} * e^{-(S*\mu-\lambda)t} \qquad (2.4)$$

Событие «баржа ожидает более tсуток» является противоположным событием событию «баржа ожидает менее tсуток».

2. Табулировать функцию **Ошибка! Источник ссылки не найден.** при $S = \overline{1,10}$;

3. Построить график зависимости затрат от числа обслуживающих каналов, и найти оптимальное число обслуживающих каналов$S_{\text{опт}}$для данной задачи.

4. Табулировать функцию **Ошибка! Источник ссылки не найден.**при $\beta_0=\overline{1,10}$, зафиксировав в данной формуле $S = S_{\text{опт}}$.

5. Построить график зависимости затрат от времени ожидания, после которого накладывается штраф на содержания баржи в ожидании.

6. Табулировать функцию **Ошибка! Источник ссылки не найден.** при $C_4' = \overline{1000,1600}$ с произвольным шагом, зафиксировав в данной формуле $S = S_{\text{опт}}$ и $\beta_0 = 2$ сут. Построить график данной зависимости.

7. Табулировать функцию **Ошибка! Источник ссылки не найден.** при $C_4'' = \overline{1600,3000}$с произвольным шагом, зафиксировав в данной формуле $S = S_{\text{опт}}$, $\beta_0 = 2$ сут. и $C_4' = 1000\$$. Построить график данной зависимости.

Не забывайте проверять условие существования стационарного режима для текущей итерации и согласованность единиц измерения.

Задание 2.12. Цех крупной плавки

Задача. отделе нагрева металла в цехе крупной плавки часть работ происходит в режиме «копильника»: если слиток застает все печи занятыми, то он помещается в «копильник», где ему обеспечивается нужная температура. Если все печи и «копильники» заняты - он отправляется на склад. Но при этом для того, чтобы его заново разогреть, потребуются дополнительные растраты в размере 100$ на его разогрев. Поступающий поток простейший с λ=10шт/сутки. Интенсивность нагрева слитков перед ковкой (распределение показательное) μ=2шт/сутки. В цехе имеется 10 печей, из которых часть должна быть для плавки, а часть для «копильника». Цена одной печи -100000$. Текущие затраты 50$ в сутки на обслуживание одной печи. Затраты на простой печи 30$ сутки.Затраты на содержание слитков в «копильнике» 60$ сутки на один слиток. Фонд времени в году 6000 часов. Найти оптимальное количество «копильников»(m) и печей для плавки(s).

Пример алгоритма оптимизации

1. Формула для расчета затрат:

$$I(s) = E_n * C_1 * S + C_2 * (S - M_2) * T + C_3 * M_2 * T \\ + C_5 * T * \lambda * P_{s+m} + C_4 * M_1 * T \qquad (2.5)$$

где $I(s)$ – затраты на работу системы;
E_n - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);
C_1 - цена одной печи (100000$);
C_2 - текущие затраты на содержание одной печи (50$/сутки);
C_3 – текущие затраты на содержание одной печи в простое(30$/сутки);
C_4 – затраты на содержание слитка в «копильнике»(60$/сутки шт.);
C_5 – затраты на разогрев отосланных на склад слитков (100$/сутки шт.);
M_1 – средняя длина очереди ($\hat{\vartheta}$);
M_2 –среднее число приборов свободных от работы;
T –годовой фонд рабочего времени (6000 часов).

2. Табулировать функцию 0 при $S = \overline{1,9}$ (m=10-S);

3. Построить график зависимости затрат от числа обслуживающих каналов, и найти оптимальное число обслуживающих каналов для данной задачи.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ 3: Сети систем массового обслуживания

ПРИМЕРЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ 3.1-3.3

Задание 3.1. Задана матрица

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{Vmatrix}$$

вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из i-го состояния в j-ое за один шаг (i, j=1, 2). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент t=0 определяется вектором $\vec{q}$ =(0,1; 0,9). Найти:

1) матрицу P_2 перехода цепи из состояния i в состояние j за два шага;
2) распределение вероятностей по состояниям в момент t=2;
3) вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет P_2;
4) стационарное распределение.

Задание 3.2. Задана матрица

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{Vmatrix}$$

вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из i-го состояния в j-ое за один шаг (i, j=1, 2). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент t=0 определяется вектором $\vec{q}$ =(0,2; 0,8). Найти:

1) матрицу P_2 перехода цепи из состояния i в состояние j за два шага;
2) распределение вероятностей по состояниям в момент t=2;
3) вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет P_2;
4) стационарное распределение.

Задание 3.3. Задана матрица

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{Vmatrix}$$

вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из i-го состояния в j-ое за один шаг (i, j=1, 2). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент t=0 определяется вектором $\vec{q}$ =(0,8; 0,2). Найти:

1) матрицу P_2 перехода цепи из состояния i в состояние j за два шага;
2) распределение вероятностей по состояниям в момент t=2;
3) вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет P_2;
4) стационарное распределение.

ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И УКАЗАНИЙ К ИХ РЕШЕНИЯМ по разделу 3

Задание 3.4. Марковская стационарная цепь с конечным числом состояний

Для решения задач 3.1-3.3 следует изучить раздел «Марковские цепи с конечным числом состояний и дискретным временем».

Пусть $P_1 = \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix}$

Указания к решению. Для дискретной цепи Маркова в случае ее однородности справедливо соотношение

$$P_n = P_1^n \qquad (3.1)$$

где P_1 – матрица переходных вероятностей за один шаг;

P_n - матрица переходных вероятностей за n шагов;

1. Найдем матрицу P_2 перехода за два шага

$$P_2 = P_1^2 = \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{Vmatrix}$$

Пусть распределение вероятностей по состояниям на *S*-ом шаге определяется вектором

$$\vec{p}(s) = \left(p_1(s),\, p_2(s), \ldots, p_k(s)\right),\ 0 \le p_j(s) \le 1, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i(s) = 1.$$

Зная матрицу P_n перехода за n шагов, можно определить распределение вероятностей по состояниям на *(S+n)* –ом шаге

$$\vec{p}(s+n) = \vec{p}(s) \cdot P_n. \qquad (3.2)$$

2. Найдем распределение вероятностей по состояниям системы в момент *t*=2. Положим в (5) *S*=0 и *n*=2. Тогда $\vec{p}(0) = \vec{q} = (0,1;\, 0,9)$. Получим

$$\vec{p}(2) = \vec{q} \cdot P_2 = (0,1;\, 0,9) \cdot \begin{Vmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{Vmatrix} = (0,331 \quad 0,669).$$

3. Найдем распределение вероятностей по состояниям системы в момент *t*=1. Положим в (3.2) *s*=0 и *n*=1, тогда

$$\vec{p}(1) = \vec{q} \cdot P_1 = (0,1;\, 0,9) \cdot \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix} = (0,31; \quad 0,69).$$

Откуда видно, что вероятность того, что в момент *t*=1 состоянием цепи будет A_2 ,равна $p_2(1)$=0,69.

Распределение вероятностей по состояниям называется стационарным, если оно не меняется от шага к шагу, то есть

$$\vec{p}(s) = \vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k), \quad p_j = const, \quad j = 1, \ldots, k$$

Тогда из соотношения (3.2) при *n*=1 получим $\vec{p}(s) = \vec{p}; \quad \vec{p}(s+1) = \vec{p}; \quad P_n = P_1,$ или

$$\vec{p} = \vec{p} \cdot P_1, \quad 0 \le p_j \le 1, \quad j = 1, \ldots, k, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = 1. \qquad (3.3)$$

4. Найдем стационарное распределение. Так как k =2 имеем $\vec{p}$ =(p_1; p_2). Запишем систему линейных уравнений (3.3) в координатной форме

$$\begin{cases} p_1 = 0,4p_1 + 0,3p_2, \\ p_2 = 0,6p_1 + 0,7p_2, \end{cases} \qquad p_1 + p_2 = 1.$$

Последнее условие называется нормировочным. В системе (3.3) всегда одно уравнение является линейной комбинацией других. Следовательно, его можно вычеркнуть. Решим совместно первое уравнение системы и нормировочное. Имеем

$0{,}6p_1=0{,}3p_2$, то есть $p_2=2p_1$. Тогда $p_1+2\ p_1=1$ или $p_1=\frac{1}{3}$, то есть $p_2=\frac{2}{3}$.

Следовательно, $\vec{p}=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Ответ:

1) матрица перехода за два шага для данной цепи Маркова имеет вид $P_2=\begin{Vmatrix}0{,}34 & 0{,}66\\ 0{,}33 & 0{,}67\end{Vmatrix}$;

2) распределение вероятностей по состояниям в момент t=2 равно $\vec{p}(2)=(0{,}331;0{,}669)$;

3) вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет A_2 , равна $p_2(t)$=0,69;

4) стационарное распределение имеет вид $\vec{p}=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Задание 3.5. Модель сети систем массового обслуживания

Пусть матрица переходных вероятностей $P=||p_{ij}||$, сети СМО имеет вид:

$$|P_{ji}|=\begin{array}{cccc|c} S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & S_4\\ P_{34} & P_{33} & P_{32} & P_{31} & S_3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & S_2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & S_1 \end{array}$$

Записать систему уравнений для интенсивностей потоков λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, где через λ_1, λ_2, λ_3 обозначены суммарные интенсивности потоков на входе i-й СМО, а через λ_4 интенсивность потока запросов от СМО 4.

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1=\lambda_3P_{31};\\ &\lambda_2=\lambda_3P_{32};\\ &\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3P_{33}+\lambda_4. \end{aligned}\right\}$$

Указание к решению. Пример задания сети СМО:

1) N=3;
2) K_1=1; K_2=1; K_3=2;

3) $$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

4) $I_1 = 1$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$;
5) $\overline{T}_{\text{обс}1} = 0{,}07$; $\overline{T}_{\text{обс}2} = 0{,}06$; $\overline{T}_{\text{обс}3} = 0{,}35$.

Рисунок 3.1. Граф задания сети СМО

Задание 3.6. Технологическая система.

Технологическая система (участок) S состоит из двух станков, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Перечислить возможные состояния системы, интерпретировать геометрической схемой – графом состояний.

Указание к решению. S_0 - оба станка исправны; S_1 - первый станок ремонтируется, второй исправен; S_2 - второй станок ремонтируется, первый исправен; S_3 - оба станка ремонтируются.

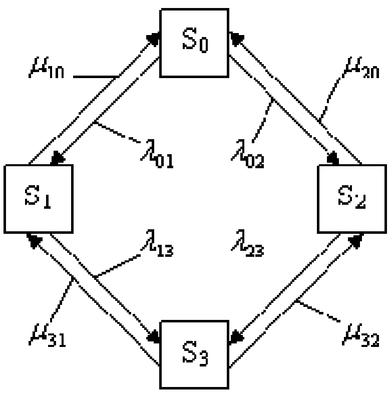

Рисунок 3.2. Граф состояний системы

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салмина Н.Ю. Моделирование систем: Учебное пособие для вузов. - Томск: ТУСУР, 2002. – 197 с.
2. Шевченко Н. Ю. Моделирование систем: Учебное пособие, МОРФ; ТУСУР; Каф. АОИ. - Томск: ТМЦДО, 2002. - 176 с
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1987.
4. Тихоненко О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: Учебное пособие для вузов. - Минск: "Технопринт", 2003. – 326 с.
5. Мицель А. А., Грибанова Е. Б. Имитационное моделирование экономических процессов: учебное пособие. - Томск: ТМЦДО, 2005.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Высш.шк., 2000, 480 с.
7. Т.Л.Саати. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: Пер. с англ. /Под. ред. И.Н. Коваленко, изд-ие 2. М., 1971.
8. Д.Кениг, Д.Штойян. Методы теории массового обслуживания: Пер. с нем. /Под. ред. Г.П.Климова. М., 1981.
9. Г.И.Ивченко, В.А.Каштанов, И.Н.Коваленко. Теория массового обслуживания. М., 1982.
10. Козлов, В.Г. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Москва : ТУСУР, 2012. — 57 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/10921.
11. Теория массового обслуживания: Методические указания к практическим занятиям / Колесникова С. И. — 2012. 25 с.
12. Имитационное моделирование экономических процессов в Excel: Учебное пособие / Мицель А. А., Грибанова Е. Б. — 2016. 115 с.
13. Сборник задач по имитационному моделированию экономических процессов: Учебное пособие / Мицель А. А., Грибанова Е. Б. — 2016. 218 с.

Электронные учебники

14. http://www.resolventa.ru/metod/student/servtheory.htm
15. http://portal.tpu.ru/SHARED/l/LASUKOV/ms/Tab1/g5.pdf
16. https://lib.tusur.ru/