ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)
Кафедра экономической математики, информатики и статистики (ЭМИС)

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

***Методические указания к практическим занятиям***

Составитель: С.И. Колесникова

Томск 2018

– Целью пособия является развитие и укрепление навыков в корректном использовании основных законов теории вероятности и математической статистики в профессиональной деятельности.

– Даются задачи и указания к их решению, объясняющие основные понятия теории вероятности: аксиоматику теории вероятности, случайные события и основные теоремы теории вероятности; методы описания и определения одно- и двумерных случайных величин; предельные теоремы теории вероятности.

– Приводятся примеры вычисления вероятности случайных событий; определения числовых характеристик случайных величин; применения методов точечного и интервального оценивания.

СОДЕРЖАНИЕ

Таблица 1. Краткое содержание разделов практических занятий

| Названия разделов | Наименование практических занятий (семинаров) |
|---|---|
| 1 Основы теории вероятностей. Случайные события | Операции над событиями. Классическое определение вероятности. Вероятность, аксиомы вероятности (по Колмогорову). Элементы комбинаторики. Основные теоремы теории вероятностей. Условные вероятности. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема независимых испытаний. Формулы Бернулли. |
| | Итого |
| 2 Случайные величины. Распределение вероятностей | Биномиальное распределение и предельные теоремы. Распределения случайных величин: дискретные с.в. Числовые характеристики случайных величин. Распределения непрерывных случайных величин. Плотность распределения. Моменты случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация и их свойства. Геометрическое распределение. Теорема Пуассона, оценка отклонения биномиальных вероятностей от пуассоновских. Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. Закон больших чисел. ЦПТ. |
| | Итого |
| 3 Системы случайных величин | Функции от случайных величин. Системы случайных величин. Независимость, зависимость случайных величин. Условные плотности. Корреляционный момент. |
| | Итого |
| 4 Основные понятия математической статистики | Выборка. Выборочные моменты, их асимптотические свойства. Порядковые статистики. Эмпирическая функция распределения. Выборочная медиана. Гистограмма. Статистические методы обработки экспериментальных данных.Точечные оценки. Функция правдоподобия. Построение доверительных интервалов с помощью центральной случайной величины и распределения точечной оценки. |
| | Итого |
| Итого за семестр | |

# ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая закономерности массовых случайных явлений, согласно которой нельзя предсказать результат отдельного опыта со случайными исходами, но достаточно надежно можно предсказать «средний» результат большого числа таких опытов.

Основными объектами изучения в теории вероятностей являются случайные события и случайные величины.

*Случайное событие* – это качественное понятие. Событие либо происходит, либо не происходит. *Случайная величина* – понятие количественное: в результате опыта случайная величина принимает одно из множества своих возможных значений.

Не все случайные явления (эксперименты) можно изучать методами теории вероятностей, а лишь те, которые могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях. Случайность и хаос – не одно и то же. Оказывается, что и в случайных экспериментах наблюдаются некоторые закономерности, например, *свойство статистической устойчивости*: доля экспериментов, в которых рассматриваемое событие произошло, имеет тенденцию стабилизироваться с ростом общего числа экспериментов, приближаясь к некоторому числу. Это число служит объективной характеристикой *степени возможности* событию произойти.

**Математической статистикой** называется раздел прикладной математики, изучающий методы сбора, обработки и анализа статистических данных для научных и практических целей. Математическая статистика занимается изучением закономерностей, которым подчиняются массовые явления, на основе результатов наблюдений.

*Предметом исследования в математической статистике* является совокупность объектов, *однородных* относительно некоторых признаков, например, мальчики 12 лет г.Томска; бегуны – мастера спорта России.

В пособии приводятся задачи и примеры их решения на основе применения теории вероятностей и математической статистики.

## **1.** ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель настоящей работы – освоить и уметь применять для решения задач следующие понятия и определения:
Операции над событиями. Произведение и сумма событий. Типы событий. Классическое определение вероятности, Классическое определение вероятности; геометрическое определение вероятности. Вероятность, аксиомы вероятности, конечномерные вероятностные пространства. Элементы комбинаторики. Основные теоремы теории вероятностей. Условные вероятности. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема независимых испытаний. Формулы Бернулли.

***Примеры задач и указания к их решению (к разделу 1)***

**Задача 1.1. Геометрическое определение вероятности**
В отрезке единичной длины на удачу появляется точка К. Определить вероятность того что расстояние от точки до обоих концов отрезка превосходит величину $\frac{1}{7}$ .

*Указание к решению.*

Необходимо попасть точкой в отрезок АВ длина отрезка АВ равна $1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$ весь отрезок единичной длины $\Rightarrow P=\frac{5}{7}$ при условии равновероятного попадания в любую точку.

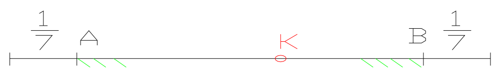


Рисунок 1.1. Интерпретация геометрической вероятности

**Задача 1.2. Произведение событий**

Урна содержит 9 занумерованных шаров с номерами от 1 до 9 . Шары извлекаются по одному без возвращения. Определить вероятность событий:
$A$={Номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1, 2, 3 ...}

*Указание к решению.* Вероятность правильного выбора первого шара $\frac{1}{9}$ , второго шара $\frac{1}{8}$, и так далее.

Поскольку в урне всегда присутствует только один шар с нужным номером, то нетрудно убедиться, что итоговая вероятность равна $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{7}...1=\frac{1}{9!}=2.7\cdot10^{-6}$.

**Задача 1.3 Элементы комбинаторики. Гипергеометрическая вероятность**

Имеются изделия четырех сортов.

$n_1=2$ первого сорта .

$n_2=5$ второго сорта .

$n_3=3$ третьего сорта.

$n_4=4$ четвертого сорта.

Для контроля на удачу выбирается 6 изделий . Определить вероятность того что среди них окажется

$m_1=1$ первосортное

$m_2=3$ второсортных

$m_3=1$ третьего сорта

$m_4=1$ четвертого сорта.

*Указание к решению.*

Для решения используется формула гипергеометрического распределения (задача №17, В.Е. Гмурман).

Суммарное число изделий $n=2+5+2+1+1=11$.

Суммарное число изделий в выборке $m=6$.

Вероятность определяется по формуле (почему?):

$$P=\frac{C_{n1}^{m1}C_{n2}^{m2}C_{n3}^{m3}C_{n4}^{m4}}{C_n^m}=\frac{C_2^1C_5^3C_2^1C_1^1}{C_{11}^6}=\frac{2\cdot10\cdot2\cdot1}{462}=0.087$$

**Задача 1.4. Операции над событиями. Произведение и сумма событий**

В двух партиях 81% и 37% доброкачественных деталей соответственно . На удачу выбирается по одному изделию из каждой партии . Какова вероятность обнаружить среди них .

**1. Хотя бы одно бракованное.**

*Указание к решению.*

Пусть $A_1$ - событие выбора качественного изделия из первой партии.

$A_2$ - событие выбора качественного изделия из второй партии.

Тогда искомое событие $B=\overline{A}_1A_2+\overline{A}_2A_1+\overline{A}_1\overline{A}_2$ где $\overline{A}$ - это противоположное событие «не $A$». Так как

$$P(A_1)=0.81\quad P(\overline{A}_1)=0.19,$$

$$P(A_2)=0.37\quad P(\overline{A}_2)=0.63,$$

то вероятность события

$$P(B)=P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_2A_1)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=0.19\cdot0.37+0.63\cdot0.81+0.19\cdot0.63=0.7.$$

**2. Два бракованных.**

*Указание к решению.*

Искомое событие $B = \overline{A}_1 \overline{A}_2$ .Вероятность события $P(B) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = 0.19 \cdot 0.63 = 0.12$.

**3. Одно доброкачественное и одно бракованное.**

*Указание к решению*:

Искомое событие $B = \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_2 A_1$.

Вероятность события $P(B) = P(\overline{A}_1 A_2) + P(\overline{A}_2 A_1) = 0.19 \cdot 0.37 + 0.63 \cdot 0.81 = 0.581$.

**Задача 1.5. Основные теоремы теории вероятностей. Условные вероятности**

В альбоме из $k = 15$ марок $n = 9$ чистых марок и $m = 6$ гашеных . Из них на удачу выбирается 2 марки (любых) и подвергаются спец гашению после чего возвращаются обратно. Затем вновь наудачу извлекается 3 марки . Определить вероятность того что все 3 марки чистые.

*Указание к решению*:

Пусть выбор для спец гашения одной чистой марки это событие $A_1$

двух чистых марок это событие $A_2$

ни одной чистой марки это событие $A_0$

Пусть выбор 3 чистых марок при наличии $n$ чистых марок это событие $B_n$

Тогда событие выбора 3 чистых марок $C$ равно :

$$C = A_0 B_{n-0} + A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2},$$

$$P(C) = P(A_0 B_{n-0}) + P(A_1 B_{n-1}) + P(A_2 B_{n-2}).$$

для вычисления вероятностей используется гипергеометрическое распределение :

при первом выборе:

$$P\left(A_0\right) = \frac{C_9^0 \cdot C_6^2}{C_{15}^2} = 0.143,$$

$$P\left(A_1\right) = \frac{C_9^1 \cdot C_6^1}{C_{15}^2} = 0.514,$$

$$P\left(A_2\right) = \frac{C_9^2 \cdot C_6^0}{C_{15}^2} = 0.343,$$

при втором выборе:

$$P\left(B_9\right) = \frac{C_9^3 C_6^0}{C_{15}^3} = 0.185,$$

$$P\left(B_8\right) = \frac{C_8^3 C_7^0}{C_{15}^3} = 0.123,$$

$$P\left(B_7\right) = \frac{C_7^3 C_8^0}{C_{15}^3} = 0.077,$$

$$P(C) = 0.143 \cdot 0.185 + 0.514 \cdot 0.123 + 0.343 \cdot 0.077 = 0.166.$$

**Задача 1.6. Формулы полной вероятности и Байеса**

Пусть имеются три завода, изготавливающие изделия одного и того же типа, и пусть, при этом, первый завод изготовил $n_1 = 2000$ изделий, допустив 90% брака, второй завод изготовил $n_2 = 3000$ изделий, допустив 95% брака, а третий завод изготовил $n_3 = 5000$ изделий, которые все оказались бракованными. Все десять тысяч изготовленных на трех заводах изделий ($n = n_1 + n_2 + n_3 = 10000$) отправлены на один склад, из которого контролер берет наугад одно из изделий. Спрашивается, а) какова вероятность того, что это наугад выбранное изделие окажется бракованным? б) какова вероятность того, что наугад выбранное изделие изготовлено на $i$-м заводе ($i = 1,2,3$), при условии, что оно оказалось бракованным?

**Указание к решению**.
а) Обозначим $B$ событие, состоящее в том, что выбранное изделие окажется бракованным, и введем систему альтернатив $A_1$, $A_2$, $A_3$, где $A_i$ есть случайное событие, состоящее в том, что наугад выбранное со склада изделие было изготовлено на $i$-ом заводе, $i = 1,2,3$. Используя классическое определение вероятности, можно легко подсчитать вероятности альтернатив $P(A_1) = 0.2$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.5$ и условные вероятности $P(B / A_1) = 0.90$, $P(B / A_2) = 0.95$, $P(B / A_3) = 1.00$. Подставляя найденные вероятности альтернатив и условные вероятности в формулу полной вероятности $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B / A_i) \cdot P(A_i)$, получаем вероятность $P(B) = 0.965$ того, что взятая наугад со склада деталь окажется бракованной.

б) Зная из решения предыдущей задачи, что $P(B) = 0.965$, легко сосчитать искомые вероятности: $P(A_1 / B) \approx 0.19$; $P(A_2 / B) \approx 0.29$; $P(A_3 / B) \approx 0.52$. Из этих результатов можно сделать вывод о наиболее вероятном изготовителе наугад выбранной бракованной детали – таким наиболее вероятным изготовителем брака является третий завод, который вносит наибольший вклад в общую сумму бракованных деталей, имеющихся на складе.

***Примеры контрольных задач по вариантам (к разделу 1)***

## Вариант 1

1) Три стрелка одновременно стреляют в одну мишень. Найти вероятность того, что а) в мишени будет только одна пробоина, если вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков соответственно равны 0.5, 0.6 и 0.7; б) хотя бы одна пробоина.
2) В урне три белых и пять черных шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что эти шары разных цветов?
3) Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.9. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов будет хотя бы одно попадание.
4) В тире имеется пять винтовок, вероятности попадания в цель из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность попадания в цель из взятой наугад винтовки.
5) 30% изделий некоторого предприятия – продукция высшего сорта. Приобретено 4

изделия этого предприятия. Какова вероятность того, что 2 из них высшего сорта?

**Вариант 2**

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что на двух костях выпадет число очков а) в сумме составляющее «шесть», а разность будет равна «двум»? б) в сумме составляющее «шесть», при условии, что разность будет равна «двум»?
2) Студент знает 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в экзаменационном билете.
3) Игральная кость бросается шесть раз. Найти вероятность того, что число выпавших очков ни разу не повторится.
4) Из урны, содержавшей 3 белых и 7 черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Найти вероятность извлечь наудачу из урны шар белого цвета.
5) Изделия некоторого предприятия содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий окажутся два бракованных.

**Вариант 3**

1) В урне 2 красных, 7 зеленых , 5 синих и 10 неокрашенных шаров. Наудачу извлекается три шара. Какова вероятность того, что все они окажутся окрашенными и все разных цветов?
2) В партии из десяти изделий два бракованных. Наудачу выбирают пять изделий. Какова вероятность того, что среди них одно бракованное?
3) В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Найти вероятность того, что обе пуговицы одного цвета.
4) Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 белых и 2 черных шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из взятой наугад урны извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержавшей 5 белых шаров?
5) Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41–го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти покупателей только одному потребуется обувь этого размера.

**Вариант 4**

1) В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность а) появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар; б) появления белого шара при первом испытании и черного шара при втором.
2) В урне пять пронумерованных шаров с номерами от 1 до 5. Из урны наугад один за другим вынимаются все шары. Найти вероятность того, что их номера будут идти в возрастающем порядке.
3) Стрелок ведет огонь по приближающейся цели. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0.4 и увеличивается на 0.1 для каждого последующего выстрела. Какова вероятность получить два попадания при трех выстрелах?
4) В шкафу стоят однотипные приборы, из которых 15 новых и 10 уже бывших в эксплуатации. Берутся наугад два прибора и эксплуатируются в течение некоторого

времени, после чего возвращаются в шкаф. Затем вторично берутся наугад два прибора. Найти вероятность того, что оба вторично взятых прибора новые.
5) Имеется 10 партий изделий, каждая из которых содержит по 20 изделий первого сорта и 5 изделий второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что взяты изделия одного сорта.

**Вариант 5**

1) При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,7. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при $n$ циклах объект а) будет обнаружен; б) не будет обнаружен; с) хотя бы один раз обнаружен.
2) Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Из этих восьми карточек наудачу извлекают четыре и складывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?
3) Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0.96 для первого сигнализатора и 0.98 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
4) На складе вперемешку хранятся лампы, полученные с четырех заводов: 250 – с первого завода, 525 – со второго, 275 –с третьего и 950 – с четвертого. Вероятность того, что лампа проработает больше 1500 часов, для продукции этих заводов соответственно равна 0.15, 0.3, 0.2 и 0.1. Найти вероятность того, что взятая наугад лампа проработает больше 1500 часов.
5) Имеется пять одинаковых партий изделий. Каждая партия состоит из четырех изделий первого сорта и одного изделия второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий хотя бы три изделия первого сорта.

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель настоящей работы – освоить и уметь применять для решения задач следующие понятия и определения:
Биномиальное распределение и предельные теоремы. Распределения случайных величин: дискретные с.в. Числовые характеристики случайных величин. Распределения непрерывных случайных величин. Плотность распределения. Моменты случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация и их свойства. Геометрическое распределение. Теорема Пуассона, оценка отклонения биномиальных вероятностей от пуассоновских. Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. Закон больших чисел. ЦПТ.

***Примеры задач и указания к их решению (к разделу 2)***

**Задача 2.1. Дискретные случайные величины и их типы: биномиальная СВ. Функции распределения СВ**

Найти закон распределения дискретной случайной величины $X$ – числа появлений «орла» при двух бросаниях монеты; построить ФР для заданного ряда (таблица 2.1)

*Указание к решению*. Возможные значения случайной величины: 0, $1$, $2$. Вероятности этих значений находим по формуле Бернулли:

$$p_0 = P(X=0) = P_2(0) = C_2^0 p^0 q^2 = \frac{2!}{0!\cdot 2!}\cdot 0.5^0 \cdot 0.5^2 = 0.25;$$

$$p_1 = P(X=1) = P_2(1) = C_2^1 p^1 q^1 = \frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot 0.5^1 \cdot 0.5^1 = 0.50;$$

$$p_2 = P(X=2) = P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2!}{2!\cdot 0!}\cdot 0.5^2 \cdot 0.5^0 = 0.25.$$

Записываем ряд распределения:

Таблица 2.1. Ряд распределения

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.25 | 0.50 | 0.25 |

Построим, например, график функции распределения случайной величины, заданной следующим рядом (Рисунок 2.1):

Таблица 2.2. Ряд распределения

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.3 | 0.5 | 0.2 |

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0.3, & 0 < x \le 0; \\ 0.8, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

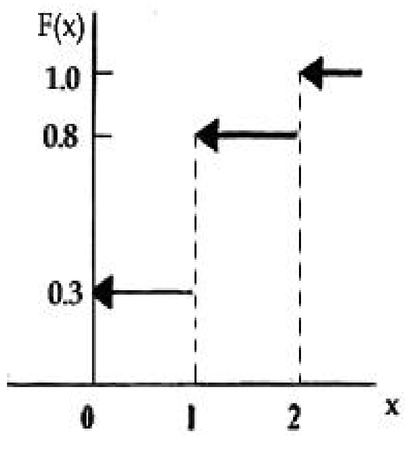


Рисунок 2.1. График функции распределения

**Задача 2.2. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения. Функции распределения случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия**

Случайная величина *X* задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos x, & -\pi/2\le x\le \pi/2,\\ 0, & x<-\pi/2,\quad x>\pi/2 \end{cases}$$

Требуется:

а) найти значение коэффициента *a;*

б) найти функцию распределения;

в)найти вероятность попадания случайной величины на интервал (0, $\pi/2$).

*Указание к решению,* а) Воспользуемся свойством 3:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cdot\cos x\cdot dx = a\cdot\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=a\cdot(1-(-1))=2a=1.$$

Отсюда получаем: $a=1/2$.

б) Если $x\le\pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0;$$

если $-\pi/2\le x\le\pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt+\int_{-\pi/2}^{x}\frac{1}{2}\cdot\cos t\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\sin t\Big|_{-\pi/2}^{x}=\frac{1}{2}\cdot(\sin x+1);$$

если $x>\pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\cdot\cos t\cdot dt+\int_{\pi/2}^{x} 0\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\sin t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=1;$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2,\\ \frac{1}{2}\cdot(\sin x+1), & -\pi/2\le x\le\pi/2,\\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$$

в) По свойству 4:

$$P(0<X<\pi/4)=F(\pi/4)-F(0)=\frac{1}{2}\cdot(\sin(\pi/4)+1)-\frac{1}{2}\cdot(\sin 0+1)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**Задача 2.3. Дискретные случайные величины. Математическое ожидание, дисперсия.**

Стрелок производит три выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,2. Составить закон распределения числа попаданий в цель (случайная величина X). Найти функцию распределения *F*(*x*) случайной величины *X* и построить ее график. Найти для *X* ее среднее значение (математическое ожидание *M*(*X*)), дисперсию *D*(*X*) и моду $M_0$.

*Указание к решению:* Пусть случайная величина *X* – число попаданий в цель при трех выстрелах. Случайная величина *X* может принимать следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$. По условию имеем

$p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}2$ - вероятность попасть при каждом выстреле и соответственно $q_1 = q_2 = q_3 = 0{,}8$ - вероятность промахнуться при каждом выстреле.

Для составления закона распределения случайной величины *X* найдем вероятности того, что случайная величина *X* примет соответствующие значения.

В данной задаче можно заметить, что испытания проводятся по схеме Бернулли. Действительно, число испытаний конечно. Каждое испытание является независимым. В каждом испытании наблюдается либо «успех» (попал в цель), либо «неуспех» (не попал в цель или промахнулся). Вероятность удачи в каждом испытании постоянна. Так как испытания проводятся по схеме Бернулли, то можно утверждать что случайная величина *X* имеет биномиальное распределение и соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли:

$$p_k = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Найдем соответствующие вероятности для данного примера:

$$p_0 = P_3(X = 0) = C_3^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{3-0} = 0{,}8^3 = 0{,}512,$$

$$p_1 = P_3(X = 1) = C_3^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{3-1} = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384,$$

$$p_2 = P_3(X = 2) = C_3^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{3-2} = 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096,$$

$$p_3 = P_3(X = 3) = C_3^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{3-3} = 0{,}2^3 = 0{,}008.$$

Тогда искомый закон распределения примет вид

Таблица 2.3. Итоговый ряд распределения

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,512 | 0,384 | 0,096 | 0,008 |

Убедимся, что сумма вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1$$

В случае биномиального распределения математическое ожидание и дисперсию легко посчитать используя следующие формулы: математическое ожидание $M(X) = np = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$; дисперсия $D(X) = npq = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

**Задача 2.4. Дискретные случайные величины. Функция распределения. Математическое ожидание, дисперсия, мода, медиана**

Пусть закон распределения случайной величины X задан следующим рядом распределения.

Таблица 2.4. Исходный ряд распределения

| X | 3 | 5 | 7 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,14 | 0,20 | 0,49 | 0,17 |

Найти функцию распределения F(x) случайной величины X. Найти для случайной величины X математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ и моду $M_0$.

*Указание к решению*: а). Функцию распределения $F(x)$ дискретной случайной величины *X* найдем по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i ,$$

которая может быть записана в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \le x_4, \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$

В нашем примере имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ 0{,}14, & 3 < x \le 5, \\ 0{,}14 + 0{,}20, & 5 < x \le 7, \\ 0{,}14 + 0{,}20 + 0{,}49, & 7 < x \le 11, \\ 0{,}14 + 0{,}20 + 0{,}49 + 0{,}17, & x > 11. \end{cases}$$

Таким образом, функция распределения примет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ 0{,}14, & 3 < x \le 5, \\ 0{,}34, & 5 < x \le 7, \\ 0{,}83, & 7 < x \le 11, \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

б). Математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины *X* найдем по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Тогда математическое ожидание

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}20 + 7 \cdot 0{,}49 + 11 \cdot 0{,}17 = 6{,}72.$$

в). Дисперсию дискретной случайной величины $X$ найдем по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

где математическое ожидание квадрата дискретной случайной величины $X$ $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

Найдем $M(X^2) = 3^2 \cdot 0{,}14 + 5^2 \cdot 0{,}20 + 7^2 \cdot 0{,}49 + 11^2 \cdot 0{,}17 = 50{,}84$.

Тогда дисперсия $D(X) = 50{,}84 - 6{,}72^2 = 5{,}6816$

г). Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}6816} \approx 2{,}38$.

д). Моду $M_0$ найдем по максимальной вероятности в ряде распределения: $M_0 = 7$.

Ответ: а) функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ 0{,}14, & 3 < x \le 5, \\ 0{,}34, & 5 < x \le 7, \\ 0{,}83, & 7 < x \le 11, \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

б) математическое ожидание $M(X) = 6{,}72$;

в) дисперсия $D(X) = 5{,}6816$;

г) среднеквадратическое отклонение $\sigma(X) \approx 2{,}38$;

д) мода $M_0 = 7$.

**Задача 2.5. Непрерывные случайные величины. Нормальное распределение**

Длина изготовляемой детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону. Средняя длина детали равна 50 мм, а дисперсия – 0,25 мм$^2$. Какое поле допуска длины изготовляемой детали можно гарантировать с вероятностью 0,99?

*Указания к решению.* Длина изготовляемой детали – случайная величина $X$, имеющая нормальный закон распределения с параметрами:

$a$=$M$($X$) = 50 мм, σ=($D$ ($X$))^(1/2) == 0,5.

Известна вероятность, гарантирующая некоторое поле допуска, то есть $P(\alpha<X<\beta) = 0{,}99$. Чтобы найти это поле допуска, воспользуемся формулой:

$$P(|X-a|<\varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$P(a-\varepsilon < X < a+\varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Исходя из условия задачи, можем записать:

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}99;\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}495.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. прил. 2) находим $t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = 2{,}58$.

Отсюда $\varepsilon$≤= 1,29, тогда 50 – 1,29·= 2,58$X$≤50 + 1,2 или 48,71≤$X$51,29.≤ 51,2.

***Примеры контрольных задач по вариантам (к разделу 2)***

**Вариант 1**

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.5, для второго – 0.6. $X$ – число попаданий в мишень. Требуется для дискретной с.в. $X$: а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, $M_o$, $M_e$; в) найти вероятности $P(X<M(X))$, $P(X\in[0.9, 2))$, $P(X\in[0.4, 1))$.
2. Задана плотность распределения вероятностей: $f(x)=\begin{cases} a(x-2), 2\le x\le 3 \\ 0, x<2,\ x>3 \end{cases}$.

   Найти: а) константу $a$; б) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значения $F(-1/2)$, $F(3/2)$; найти в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) $P(2 < X < M(X))$. Найти $M_o$, $M_e$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.
3. Весы для тяжелых предметов считаются годными, если отклонение $X$ от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 18г. Величина $X$ – нормально распределенная и $M(X)$=0, $D(X)$=10г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод?

**Вариант 2**

1. Из коробки, содержащей 3 синих и 4 красных карандаша, наудачу вынимают 3 карандаша. $X$ - число красных карандашей среди вынутых. Требуется для дискретной с.в. $X$: а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, $M_o$, $M_e$; в) найти вероятность $P(X>M(X))$; г) найти $P(X\in[1, 3))$, $P(X\in[0.1, 2.5))$.
2. Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ ax^2, & 0<x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

   Найти: а) константу $a$; б) функцию распределения F(x), в ответ ввести значения F(-1/3), F(1/3); найти в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) $P(-1/3 < X < 0.7)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

**3.** Средняя дальность полёта снаряда равна $m$. Предполагается, что дальность полёта $X$ распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 100м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 110м до120 м.

**Вариант 3**

1. Игральная кость бросается до появления шестерки, но не более четырех раз. $X$ - число бросаний кости. Требуется для дискретной с.в. $X$: а) найти

распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и σ(X), $M_o$, $M_e$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$; г) найти вероятности $P(X\in[1, 2))$, $P(X\in[2, 4))$.

2. Случайная величина $\eta$ имеет плотность распределения:

$$P_\eta(x)=\begin{cases}\frac{a}{2}, & x\in[2,4]\\ 0, & x\notin[2,4]\end{cases}$$

Определить константу $a$, математическое ожидание $M\eta$, дисперсию $D\eta$ случайной величины $\eta$, моду и медиану. Найти: P(1/3 < X < 2.7). Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

3. Случайные ошибки измерителя глубины распределены по нормальному закону ($m$=0) . Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь измеритель глубины, чтобы с вероятностью 0.7 ошибка измерения глубины по модулю была меньше 150м

**Вариант 4**

1 Вероятность попадания мячом в корзину при каждом бросании равна 0,4. X - число попаданий при пяти бросках. Требуется для дискретной случайной величины X: а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X), $M_o$, $M_e$; в) найти вероятность P(X<M(X)) ; г) найти вероятности $P(X\in[1, 3))$, $P(X\in[2, 4))$.

2 Случайная величина $\eta$ имеет плотность распределения

$$P_\eta(x)=\begin{cases}(b\cdot x^2), & x\in[1,2]\\ 0, & x\notin[1,2]\end{cases}$$

Найти $b$, математическое ожидание $M\eta$, дисперсию $D\eta$ случайной величины $\eta$, моду и медиану. Найти: P(1/3 < $X$ < $M\eta$). Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

3 Изделие считается пригодным, если отклонение его размера от номинала не превышает по модулю 1.45 мм. Случайные отклонения X распределены нормально, причём $M(X)$=0, σ(X)=1.5 мм. Определить вероятность того, что случайно взятое изделие является пригодным.

**Вариант 5**

1 Монета подбрасывается шесть раз. X - число выпадений «орла». Требуется для дискретной случайной величины X: а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X), $M_o$, $M_e$; в) найти вероятность P(X>M(X)) ; г) найти вероятности $P(X\in[2, 3.6))$, $P(X\in[3.1, 4.5))$.

2 Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ b\left(x-0.5\right)^2, & 0.5 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу b; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); найти в) M(X); г) D(X); д) P(0.5 < x < 0.8). Начертить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).

3 Компоненты изготовляемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка *X* которых распределена нормально, причём *M*(*X*)= 0, σ(X)= 0.0003 г. Норма веса лекарства 0.02 г. Определить вероятность отбракования лекарства, если максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021г.

# 3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель настоящей работы – освоить и уметь применять для решения задач следующие понятия и определения:
Функции от случайных величин. Системы случайных величин. Независимость, зависимость случайных величин. Условные плотности. Корреляционный момент.

***Примеры задач и указания к их решению (к разделу 3)***

**Задача 3.1. Функции от дискретных случайных величин**
Случайная величина $X$ имеет закон распределения:

Таблица 3.1 Ряд распределения

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.1 | 0.3 | 0.4 | 0.2 |

Найти закон распределения случайной величины $y = \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$**.**

*Указание к решению*. Находим значения функции $\varphi\mathbf{(}x\mathbf{)} = \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$ при $x$=0,1,2,3, в результате чего получаем числа 1,2,1,0; следовательно, возможными значениями $Y$ являются $y_i$ = 0, 1, 2. Теперь по формуле (3.20) находим вероятности:
$q_1 = \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}\,(X = 3) = 0.2$;
$q_2 = \mathbf{P}\,(Y = 1) = \mathbf{P}\,(X = 0) + \mathbf{P}\,(X = 2) = 0.1 + 0.4 = 0.5$;
$q_3 = \mathbf{P}\,(Y = 2) = \mathbf{P}\,(X = 1) = 0.3$.
Закон распределения $Y$ будет:

Таблица 3.2 Ряд распределения

| $y_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $q_i$ | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

**Задача 3.2. Функции от непрерывных случайных величин**
Вычислить плотность распределения $f_\eta\left(y\right)$, если $\eta = g\left(\xi\right) = -\left(\ln\ \xi\right)/\lambda$ и $f_\xi\left(x\right) = 1$ при $x \in \left(0,1\right)$.

*Указание к решению.* Из условия $y = g\left(x\right) = -\left(\ln\ x\right)/\lambda$ следует:

$$x = g^{-1}\left(y\right) = e^{-\lambda y},\ f_\xi\ \left(e^{-\lambda\, y}\right) = 1,\quad \left|\frac{dg^{-1}\left(y\right)}{dy}\right| = \lambda e^{-\lambda\, y}, y \in \left(0,\infty\right).$$

Поэтому с учётом формулы для плотности новой СВ получаем

$$f_\eta\left(y\right) = \lambda y^{-\lambda \text{н}},\qquad y \geq 0.$$

**Задача 3.3. Нелинейные функции от непрерывных случайных величин**

Найти $f_\eta\left(y\right)$, если $\eta = g\left(\xi\right) = \xi^2$ и $f_\xi\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

*Указание к решению.* Обратная функция $x = g^{-1}\left(y\right)$ в данном случае имеет две ветви $g_1^{-1}\left(y\right) = -\sqrt{y}$ и $g_2^{-1}\left(y\right) = \sqrt{y}$, соответствующие областям $X_1 = \left\{x : x \le 0\right\}$, $X_2 = \left\{x : x > 0\right\}$. Используя формулу для плотности новой СВ, получаем

$$f_\eta\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}, \ \ y \ge 0.$$

**Задача 3.4. Функции от случайных величин**

Случайная величина $\xi$ имеет плотность распределения $P_\xi\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} x \in \left[2,4\right] \\ 0 x \notin \left[2,4\right] \end{cases}$ другая случайная величина связана с $\xi$ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi^3 + 1$ . Определить математическое ожидание $M\left[\eta\right]$ и дисперсию $D\left[\eta\right]$ случайной величины

*Указание к решению*:

1. Математическое ожидание.

По определению:

$$M\left[\eta\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(2x^3 + 1\right) \cdot P(x) dx = \frac{1}{2} \int\limits_2^4 \left[3x^3 + 1\right] dx = 61$$

2. Дисперсия.

По определению:

$$D\left[\eta\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left(2x^3 + 1\right) - 61\right]^2 \cdot P\left(x\right) dx = \int\limits_2^4 \left(2x^3 - 60\right)^2 \frac{1}{2} dx = 1045 .$$

**Задача 3.5. Системы случайных величин**

По таблице двумерного распределения $P(x, y)$ найти коэффициент корреляции $\rho_{xy}$.

Таблица 3.3 Ряд распределения

| *x* / *y* | $x_1$=1 | $x_2$=3 |
|---|---|---|
| $y_1$ = -1 | 0,2 | 0,4 |
| $y_2$ =1 | 0,3 | 0,1 |

*Указание к решению*. Используем формулу $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$, где

$$K_{XY} = MXY - MX \cdot MY ; \ DX = MX^2 - M^2 X \ \text{ и } \ DY = MY^2 - M^2 Y .$$

Далее по формуле совместного математического ожидания получаем:

$$MXY=\sum_i\sum_j x_i y_j P(x_i,y_j)=1\cdot(-1)\cdot 0,2+(-1)\cdot 3\cdot 0,4+1\cdot 1\cdot 0,3+1\cdot 0,3\cdot 0,1=-0,8.$$

Используем формулы для начальных моментов:

$$MX^2=\sum_i x_i^2\sum_j P\left(x_i,y_j\right)=1\cdot 0,5+9\cdot 0,5=5;\ MY^2=\sum_j y_j^2\sum_i P\left(x_i,y_j\right)=1\cdot 0,6+1\cdot 0,4=1;$$

$$MX=\sum_i x_i\sum_j P\left(x_i,y_j\right)=1\cdot 0,5+3\cdot 0,5=2;$$

$$MY=\sum_j y_j\sum_i P\left(x_i,y_j\right)=-1\cdot 0,6+1\cdot 0,4=-0,2.$$

$K_{XY}=MXY-MX\cdot MY\ \Rightarrow K_{XY}=-0,8+2\cdot 0,2=-0,4$.

$DX=MX^2-M^2X\Rightarrow DX=5-4=1$.

$DY=MY^2-M^2Y\Rightarrow DY=1-0,04=0,96$.

Ответ: $\rho_{XY}=\dfrac{-0,4}{\sqrt{0,96}}\cong -0,41$, что свидетельствует об умеренной линейной связи между СВ $X,Y$.

***Примеры контрольных задач по вариантам (к разделу 3)***

**Вариант 1**

1. Найти распределение величины $Y=aX+b$, если плотность вероятности СВ $X$ имеет вид: $f(x)=\dfrac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-x^2}{2\delta^2}}$.
2. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале (*a,b*). Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $\eta=\xi^2$ .
3. Случайные величины ξ и η принимают значения из множеств{0,2,-2} и {0,1,4} соответственно. Вероятности различных сочетаний даются табл.

Таблица 3.1. Ряд распределения

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ξ | -2 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| η | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | 4 |
| *p* | 1/16 | 1/16 | 1/4 | 1/8 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/4 |

Определить: а) являются ли ξ и η независимыми? коэффициент корреляции r(ξ, η)? б) Найти законы распределения ξ и η.

**Вариант 2**

1 Найти распределение величины $Y=e^X$, плотность вероятности случайной величины $X$ имеет вид: $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1);\\ 0, & x\,\overline{\in}\,(0,1).\end{cases}$

2 Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $\eta=\xi^2+1$, если $\xi$ - гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2$.

3 Даны значения независимых случайных величин x и y и их вероятности:

Таблица 3.2. Ряды распределения

| $x$ | 0 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

| $y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,8 |

Найти распределения (значения и вероятности) случайной величины $z=x-y$. Вычислить среднее значение и дисперсию.

**Вариант 3**

1 Даны значения независимых случайных величин x и y и их вероятности:

Таблица 3.3. Ряды распределения

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

| $y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,8 |

Найти распределения (значения и вероятности) случайной величины $z=x+y$. Вычислить среднее значение и дисперсию.

2 Нормальная случайная величина $\xi$ с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2$ подвергается преобразованию $\eta=|\xi|$. Найти среднее значение случайной величины $\eta$.

**Вариант 4**

Таблица 3.4. Ряд распределения

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_\xi(x)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

1. Пусть случайная величина $\xi$ имеет ряд распределения $P_\xi(x)$, представленный в таблице 3.4. Найти ряд распределения $P_\eta(y)$ у случайной величины $\eta=|\xi|$?
2. Пусть $\xi$ - гауссовская случайная величина с $m_\xi$=0 и дисперсией $D_\xi$=9. Найти плотность вероятности случайной величины

**Вариант 5**

1 Дана таблица совместного распределения двух СВ. Получить характеристики: 1) математическое ожидание СВ $X+Y$; 2) распределение СВ $X$ при условии $Y=2$; коэффициент корреляции $r(X, Y)$.

Таблица 3.5. Ряд распределения

| $Y$ | $X$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| $-1$ | 0.17 | 0.13 | 0.25 |
| 1 | 0.10 | 0.30 | 0.05 |

2 Случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение с параметрами $a = -1$, $\sigma^2 = 4$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1-2\xi$.

## 4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ** – освоить и уметь применять для решения задач следующие понятия и определения:
Выборка. Интервальный вариационный ряд. Гистограмма. Выборочные моменты, их асимптотические свойства. Эмпирическая функция распределения, выборочные математическое ожидание, дисперсия, ковариация, мода, медиана. Методы оценивания плотности распределения. Точечные оценки. Функция правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия и их свойства. Метод моментов. Свойства оценок, полученных по методу моментов. Интервальное оценивание. Построение доверительных интервалов с помощью центральной случайной величины и распределения точечной оценки. Статистическая гипотеза и процедура ее проверки.

***Примеры задач и указания к их решению (к разделу 4)***

**Задача 4.1. Выборка. Вариационный ряд для ДСВ. Гистограмма**
Для ранжированного ряда: 23 23 24 24 25 25 25 27 28 в нижеприведенной таблице в первой строке записаны все значения величины (варианты), во второй – соответствующие им частоты (безынтервальный вариационный ряд), в третьей – накопленные частоты, в четвертой – относительные частоты (табл.4.1).

Таблица 4.1. Значения вариант и их частот

| $X$ | 22 | 23 | 24 | 25 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 |
| $n_н$ | 1 | 3 | 5 | 8 | 9 | 10 |
| $\frac{n_i}{n}$ | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |

**Задача 4.2. Выборка. Интервальный ряд для НСВ. Гистограмма**
Измерена масса тела 100 женщин 30 лет, получены значения от 60 до 90 кг. Построить интервальный вариационный ряд (табл. 4.3) и гистограмму.

Таблица 4.2. Интервальный вариационный ряд

| Интервал | Середина интервала | $m_i$ | $m_i / h$ |
|---|---|---|---|
| 60–65 | 62.5 | 14 | 2.8 |
| 65–70 | 67.5 | 32 | 6.4 |
| 70–75 | 72.5 | 28 | 5.6 |
| 75–80 | 77.5 | 14 | 2.8 |
| 80–85 | 82.5 | 7 | 1.4 |
| 85–90 | 87.5 | 2 | 0.4 |

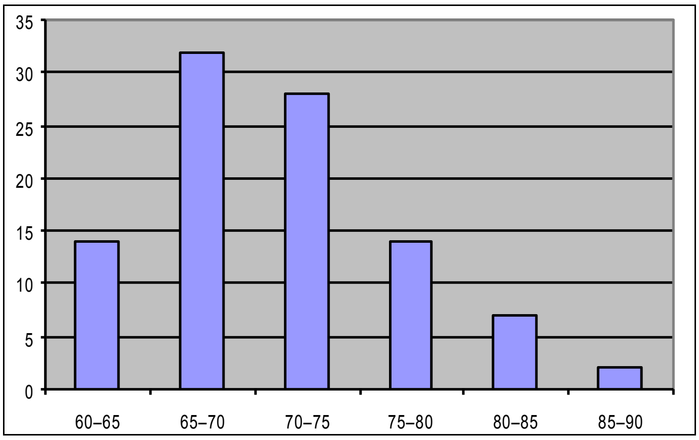

Рисунок 4.1. Гистограмма

**Задача 4.3. Эмпирическая функция распределения, выборочные математическое ожидание, дисперсия, ковариация, мода, медиана**

Измерена длина ($X$) и масса тела ($Y$) девочек 10-ти лет. Получены следующие показатели: $X$=130 см, $\sigma_X$ = 5 см, $Y$ = 32 кг, $\sigma_Y$ = 4 кг. Какая величина имеет большую вариативность?

Так как длина и масса тела измеряются в разных единицах, то вариативность нельзя сравнить при помощи СКО. Необходимо вычислить относительный показатель вариации.

$$V_X = \frac{5}{130}\cdot 100\% = 3.8\%; \qquad V_Y = \frac{4}{32}\cdot 100\% = 12.5\%.$$

Таким образом, масса тела имеет большую вариативность, чем длина тела.

**Задача 4.4. Интервальное оценивание. Построение доверительных интервалов**

По результатам наблюдений была найдена точечная оценка неизвестного математического ожидания $m$ случайной величины $\xi \sim N\left(m,\sigma^2\right)$ $\overline{m}$=10.2, и дисперсия оценки $\sigma_X$=4. Требуется оценить доверительный интервал для оценки математического ожидания по 36-ти наблюдениям с заданной надежностью $\gamma$=0.99.

*Указание к решению*. Из формул: $\mathbf{P}\left(\left|\overline{m}-m\right|<\delta\right) = 2\cdot\Phi_{0,1}\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X}\right) = 2\cdot\Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \gamma$,

$2\cdot\Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \gamma$, где $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X}$ [1], следует, что $\Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \frac{0.99}{2} = 0.495$. Отсюда получаем, что $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X}$=2.58 и половина искомого интервала $\delta = \frac{2.58\cdot 4}{\sqrt{36}} = 1.89$.

Так как $\overline{m}-\delta < m < \overline{m}+\delta$, то с вероятностью 0.99 доверительный интервал для оценки математического ожидания: $8.31 < m < 12.09$.

**Задача 4.5. Функция правдоподобия. Оценка на основе ММП**

Известно что случайная величина распределена по биномиальному закону $P(m) = C_{110}^{m} p^{m} (1-p)^{110-m}$ неизвестным считается параметр $p$ используя метод наибольшего правдоподобия найти по реализации выборки $(x_1, x_2 \ldots x_8)$ значение оценки $p^*$ неизвестного параметра $p$.

$$x_1 = 73 \quad x_2 = 75 \quad x_3 = 69 \quad x_4 = 74 \quad x_5 = 73 \quad x_6 = 77 \quad x_7 = 68 \quad x_8 = 70$$

*Указания к решению.* Функция правдоподобия имеет вид:

$$L(73,75,69,74,73,77,68,70,p) = \prod_{i=1}^{8} p(x_i, p)$$

где $P(x_i) = C_{110}^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{110-x_i}$.

Критическая точка уравнения правдоподобия: $p^* = \dfrac{1}{110 \cdot 8} \sum_{i=1}^{8} x_i = 0.657$.

Осталось убедиться, что эта точка доставляем максимум функции правдоподобия.

**Задача 4.6. Статистическая гипотеза и процедура ее проверки**

По результатам сессии подсчитаны средние баллы среди студенческих групп (с точностью до сотых долей балла) и представлены в виде выборки $x_i, i = 1, 2, \ldots, 30$:

3.7, 3.85, 3.7, 3.78, 3.6, 4.45, 4.2, 3.87, 3.33, 3.76, 3.75, 4.03, 3.8, 4.75, 3.25, 4.1, 3.55, 3.35, 3.38, 3.05, 3.56, 4.05, 3.24, 4.08, 3.58, 3.98, 3.4, 3.8, 3.06, 4.38.

Выдвинуть гипотезу о виде распределения среднего балла и осуществить ее проверку на значимость ($\alpha = 0.025$).

*Указания к решению*. Наименьший средний балл равен 3.05, наибольший — 4.75. Интервал [3; 4.8] разобьем на 6 частей длиной $h = 0.3$, применяя формулу Старджеса ($k = 5.875 \approx 6$). Подсчитаем частоту $n_i$ (относительную частоту $\dfrac{n_i}{n}$) для каждого интервала и получим сгруппированный статистический ряд (табл. 5.3).

Таблица 4.3. Статистический ряд

| **Интервалы** | [3;3.3) | [3.3;3.6) | [3.6;3.9) | [3.9;4.2) | [4.2;4.5) | [4.5;4.8) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | 4 | 7 | 10 | 5 | 3 | 1 |
| Относительные частоты $\dfrac{n_i}{n}$ | 0.133 | 0.233 | 0.3 | 0.167 | 0.1 | 0.033 |

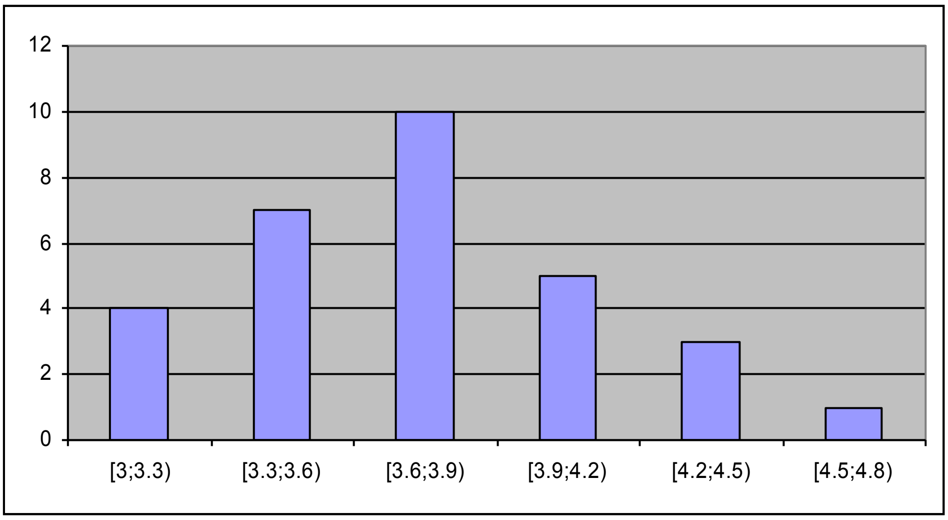

Рисунок 4.2. Вид гистограммы

По виду гистограммы (Рисунок 4.2) сформулируем гипотезы.

$H_0 : X \sim N(\overline{a},\ \overline{\sigma})$ — случайная величина $X$ (средний балл) подчиняется нормальному закону с параметрами $\overline{a},\ \overline{\sigma}$, значения которых рассчитаем по выборке (см.формулы раздела 4.2.1): $\overline{a} = 3.746, \quad \overline{\sigma} = 0.399.$

$H_1$: случайная величина $X$ не подчиняется нормальному закону с данными параметрами.

Рассчитаем наблюдаемое значение $K_{\text{набл}}$ статистики Пирсона. Эмпирические частоты $n_j$ уже известны (табл. 4.5), а для вычисления вероятностей $p_j$ (в предположении, что гипотеза $H_0$ справедлива) применим уже известную формулу (свойство **В**):

$$p_j = P(a_j < X < a_{j+1}) = \Phi\left(\frac{a_{j+1} - \overline{a}}{\overline{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{a_j - \overline{a}}{\overline{\sigma}}\right), \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

и таблицу функции Лапласа (приложение 1). Полученные результаты сведем в таблицу (табл. 4.4). Наблюдаемое значение статистики Пирсона равно $K_{\text{набл}} = 0.978$.

Определим границу критической области. Так как статистика Пирсона измеряет разницу между эмпирическим и теоретическим распределениями, то чем больше ее наблюдаемое значение $K_{\text{набл}}$, тем сильнее довод против основной гипотезы. Поэтому критическая область для этой статистики всегда правосторонняя: $[K_{\text{кр}};\ \ +\infty)$. Её границу $K_{\text{кр}} = \chi^2_{(k-r-1;\ \alpha)}$ находим по таблицам распределения «хи-квадрат» (приложение 3) и заданным значениям $\alpha = 0.025,\ \ k = 6$ (число интервалов), $r = 2$ (2 оцениваемых параметра — $a$ и $\sigma$): $K_{\text{кр}} = \chi^2(6 - 2 - 1;\ 0.025) = \chi^2(3;\ 0.025) = 9.4.$

Наблюдаемое значение статистики Пирсона не попадает в критическую область: $K_{\text{набл}} < K_{\text{кр}}$, поэтому *нет оснований отвергать основную гипотезу.*

Вывод: на уровне значимости 0.025 справедливо предположение о том, что средний балл имеет нормальное распределение.

Таблица 4.4. Сравнение наблюдаемых и ожидаемых частот

| № п/п | Интервалы $[a_{j;}a_{j+1})$ | Наблюдаемая частота $n_j$ | Вероятность $p_j$ попадания в $j$-й интервал | Ожидаемая частота $n \cdot p_j$ | Слагаемые статистики Пирсона $\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | [3; 3.3) | 4 | 0.101 | 3.032 | 0.309 |
| 2. | [3.3; 3.6) | 7 | 0.225 | 6.761 | 0.008 |
| 3. | [3.6; 3.9) | 10 | 0.295 | 8.79 | 0.166 |
| 4. | [3.9; 4.2) | 5 | 0.222 | 6.665 | 0.416 |
| 5. | [4.2; 4.5) | 3 | 0.098 | 2.946 | 0.001 |
| 6. | [4.5; 4.8) | 1 | 0.025 | 0.758 | 0.077 |
| $\sum$ | — | 30 | 0.965 | 28.95 | $K_{\text{набл}} = 0.978.$ |

## Задача 4.7. Статистическое определение вероятности

Даны результаты испытаний, определить статистическую вероятность события А, сделать вывод относительно устойчивости частот.

1) 0 1 0 1 0 0
2) 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0
3) 1 1 1 0 1
4) 0 0 1 1 1 1
5) 0 1 0 0 1 0
6) 0 0 1 1 1 0 1 1 0
7) 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1
8) 0 0 1 1 0
9) 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1
10) 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0
11) 0 0 0 0 0
12) 1 0 1 0 1 1
13) 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1
14) 0 0 1 0 1 1 0 0 1
15) 0 0 1 0 0 0 0 1
16) 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0
17) 0 1 1 0 0
18) 1 1 0 0 1
19) 1 0 0 1 1 0 0 1 1
20) 0 0 1 0 1 0 1 0 1

*Указание к решению.* Используем обозначения:

$L_i$-общее количество цифр в $i$-той строке; $l_i$-количество единиц в $i$-той строке;
$m_k$-число испытаний в которых событие $A$ происходило в $k$ первых сериях испытаний; $n_к$-общее количество испытаний в этих сериях;
$m_k = \sum l_i$; $n_к = \sum L_i$; $P^*_k(A) = m_k / n_к$ –частота события А

Таблица 4.5. Устойчивость частот

| ***K*** | ***$l_k$*** | ***$L_k$*** | ***$m_k$*** | ***$n_k$*** | ***$P^*(A)$*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 2 | 6 | 0.333 |
| 2 | 6 | 10 | 8 | 16 | 0.5 |
| 3 | 4 | 5 | 12 | 21 | 0.571 |
| 4 | 4 | 6 | 16 | 27 | 0.592 |
| 5 | 2 | 6 | 18 | 33 | 0.545 |
| 6 | 5 | 9 | 23 | 42 | 0.547 |
| 7 | 9 | 14 | 32 | 56 | 0.571 |
| 8 | 2 | 5 | 34 | 61 | 0.557 |
| 9 | 4 | 12 | 38 | 73 | 0.520 |
| 10 | 7 | 14 | 45 | 87 | 0.517 |
| 11 | 0 | 5 | 45 | 92 | 0.489 |
| 12 | 4 | 6 | 49 | 98 | 0.510 |
| 13 | 7 | 9 | 56 | 107 | 0.507 |
| 14 | 4 | 9 | 60 | 116 | 0.5 |
| 15 | 2 | 8 | 62 | 124 | 0.51 |
| 16 | 8 | 13 | 70 | 137 | 0.507 |
| 17 | 2 | 5 | 72 | 142 | 0.510 |
| 18 | 3 | 5 | 75 | 147 | 0.507 |
| 19 | 5 | 9 | 80 | 156 | 0.512 |
| 20 | 4 | 9 | 84 | 165 | 0.509 |

Рисунок 4.3. Интерпретация свойства устойчивости частот

Вывод: статистическая вероятность события А равна 0,509. Выполняется свойство устойчивости частот (рисунок 4.3).

*Примеры контрольных задач по вариантам (к разделу 4)*

## Вариант 1

1. **Описательная статистика**. Для выборочных данных выполнить обработку:

а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;

б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3-х сигма»;
в) оценить симметричность распределения с помощью первого коэффициента Пирсона;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерены диаметры 40 металлических шариков, мм:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.4 | 8.4 | 8.5 |
| 8.6 | 8.4 | 8.5 | 8.4 | 8.5 | 8.6 | 8.6 |
| 8.5 | 8.4 | 8.4 | 8.4 | 8.5 | 8.4 | 8.5 |
| 8.5 | 8.4 | 8.4 | 8.5 | 8.6 | 8.5 | 8.4 |
| 8.5 | 8.6 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.6 | 8.5 |
| 8.6 | 8.4 | 8.5 | 8.5 | 8.6 | | |

2. **Интервальные оценки.**
В целях изучения среднедушевого дохода семей города в 1995 г. была произведена 1 %-ая повторная выборка из 30 тыс. семей. По результатам обследования среднедушевой доход семьи в месяц составил 200 тыс. руб. со средним квадратичным отклонением, равным 150 тыс. руб. С вероятностью 0.95 найдите доверительный интервал, в котором находится величина среднедушевого дохода всех семей города, считая среднедушевой доход случайной величиной, распределенной по нормальному закону.

## Вариант 2

1. **Описательная статистика**. Для выборочных данных выполнить обработку:

а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;

б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения с помощью первого коэффициента Пирсона;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;

д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерена продолжительность работы 30 электрических лампочек, десятков часов:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 56 | 69 | 31 | 56 | 49 | 51 | 53 | 74 | 51 |
| 63 | 48 | 53 | 51 | 64 | 50 | 59 | 84 | 55 | 82 |
| 55 | 72 | 70 | 54 | 51 | 77 | 98 | 62 | 73 | 55 |

2. **Интервальные оценки.**
Для изучения различных демографических характеристик населения выборочно обследовалось 300 семей города. Оказалось, что среди обследованных семей 15 % состоят из двух человек. В каких пределах находится в генеральной совокупности доля семей, состоящих из двух человек, если принять доверительную вероятность равной 0.95?

**Вариант 3**

1. **Описательная статистика**. Для выборочных данных выполнить обработку:

а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;

б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения с помощью первого коэффициента Пирсона;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерена скорость автомобиля на некотором участке дороги, км/час:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 41.5 | 42.3 | 47.4 | 51.2 | 52.3 | 43.9 |
| 49.1 | 46.6 | 41.7 | 57.5 | 52.3 | 45.7 |
| 48.0 | 49.3 | 57.4 | 44.4 | 51.0 | 49.8 |
| 43.8 | 50.6 | 49.6 | 40.9 | 50.8 | 51.8 |
| 39.6 | 48.1 | 43.2 | 50.8 | 48.0 | 56.9 |

2. **Интервальные оценки.**
В 1995 г. выборочное обследование распределения населения города по среднедушевому доходу показало, что 40 % обследованных в выборке имеют среднедушевой доход не более 200 тыс. руб. В каких пределах находится доля населения, имеющего такой среднедушевой доход, во всей генеральной совокупности, если объем генеральной совокупности составляет 1000000 единиц,

выборка не превышает 10 % объема генеральной совокупности и осуществляется по методу случайного бесповторного отбора, а доверительная вероятность равна 0.954?

**Вариант 4**

1. **Описательная статистика**. Для выборочных данных выполнить обработку:

а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;

б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения с помощью первого коэффициента Пирсона;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Основные фонды 30 предприятий, млн руб.:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.2 | 2.4 | 4.9 | 6.7 | 4.5 | 2.7 | 3.9 | 2.1 | 5.8 | 4.0 |
| 2.8 | 7.3 | 4.4 | 6.6 | 2.0 | 6.2 | 7.0 | 8.1 | 0.7 | 6.8 |
| 9.4 | 7.6 | 6.3 | 8.8 | 6.5 | 1.4 | 4.6 | 2.0 | 7.2 | 9.1 |

2. **Интервальные оценки.**
С помощью случайной выборки оценивается среднее время ежедневного просмотра телепередач абонентами кабельного телевидения в период с 18 до 22 ч. Каким должен быть объем выборки в этом случае, если в предыдущих выборочных обследованиях стандартное отклонение времени просмотра передач составило 40 мин., а отклонение выборочной средней от генеральной средней по абсолютной величине не должно превышать 5 мин. с вероятностью 0.99?

**Вариант 5**

1. **Описательная статистика**. Для выборочных данных выполнить обработку:

а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;

б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения с помощью первого коэффициента Пирсона;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерены длины 40 графитовых стержней для цанговых карандашей, см:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.6 | 6.4 | 6.5 | 6.5 | 6.6 | 6.5 | 6.6 | 6.5 | 6.5 |
| 6.6 | 6.5 | 6.5 | 6.4 | 6.4 | 6.5 | 6.6 | 6.5 | 6.4 |
| 6.5 | 6.5 | 6.4 | 6.4 | 6.4 | 6.5 | 6.4 | 6.5 | 6.6 |
| 6.4 | 6.5 | 6.4 | 6.5 | 6.6 | 6.6 | 6.5 | 6.5 | 6.5 |
| 6.5 | 6.4 | 6.4 | 6.5 | | | | | |

2. **Интервальные оценки.**

Аудиторская фирма хочет проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайно отбираются 50 счетов. По 20 счетам из 50 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Постройте 99 %-ый доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 320 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/4864#book_name, дата обращения: 17.05.2018.
2. Вентцель Е.С.,Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей : Учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 6-е изд., стереотип. - М. : Академия, 2005. (наличие в библиотеке ТУСУР - 99 экз.)
3. П. Е.Данко. Высшая математика в упражнениях и задачах [с решениями]: учебное пособие: в 2 ч. / П. Е.Данко [и др.]. - Ч. 2. - 7-е изд., испр. . - М. : ОНИКС, 2009. - 448с (наличие в библиотеке ТУСУР - 6 экз.).
4. В. Е. Гмурман Теория вероятностей и математическая статистика : Учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман ; Министерство образования и науки Российской Федерации. - 12-е изд., перераб. - М. : Высшее образование, 2006. – 478с. (наличие в библиотеке ТУСУР - 21 экз.).
5. А.И. Орлов. Математика случая. Вероятность и статистика – основные факты. – Учебное пособие. – М.: МЗ-Пресс, 2004.
6. Колесникова С.И. Высшая математика III. Основы теории вероятностей. Элементы математической статистики. Методическое пособие. Томск: ТУСУР, 2007.–106 с. (наличие в библиотеке ТУСУР - 54 экз.)
7. Теория вероятностей и математическая статистика: Методические указания по выполнению практических работ / Колесникова С. И. - 2012. 28 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/880, дата обращения: 17.05.2018.
8. Теория вероятностей и математическая статистика: Методические указания к самостоятельной работе студентов / Колесникова С. И. - 2012. 16 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/881, дата обращения: 17.05.2018.
9. Анализ данных: Методические указания по самостоятельной работе / Колесникова С. И. - 2012. 18 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/3053, дата обращения: 17.05.2018.