ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)
Кафедра экономической математики, информатики и статистики
(ЭМИС)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
Методические указания к самостоятельной работе студентов

Составитель: С.И. Колесникова

Томск 2018

– В пособии даются примеры и задачи с решениями, объясняющие основные понятия теории вероятности: аксиоматику теории вероятности, случайные события и основные теоремы теории вероятности; методы описания и определения систем случайных величин; предельные теоремы теории вероятности.

– Приводятся примеры вычисления выборочных числовых характеристик случайных величин; применения методов точечного и интервального оценивания.

– Обращается внимание на корректное использование основных законов теории вероятности и математической статистики в профессиональной деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая закономерности массовых случайных явлений, согласно которой нельзя предсказать результат отдельного опыта со случайными исходами, но достаточно надежно можно предсказать «средний» результат большого числа таких опытов.

Основными объектами изучения в теории вероятностей являются случайные события и случайные величины.

В пособии приводятся задачи и примеры их решения на основе применения теории вероятностей и математической статистики.

Таблица 1. Краткое содержание разделов практических занятий

Названия разделов	Наименование практических занятий (семинаров)
1 Основы теории вероятностей. Случайные события	Операции над событиями. Классическое определение вероятности. Вероятность, аксиомы вероятности (по Колмогорову). Элементы комбинаторики. Основные теоремы теории вероятностей. Условные вероятности. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема независимых испытаний. Формулы Бернулли.
	Итого
2 Случайные величины. Распределение вероятностей	Биномиальное распределение и предельные теоремы. Распределения случайных величин: дискретные с.в. Числовые характеристики случайных величин. Распределения непрерывных случайных величин. Плотность распределения. Моменты случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация и их свойства. Геометрическое распределение. Теорема Пуассона, оценка отклонения биномиальных вероятностей от пуассоновских. Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. Закон больших чисел. ЦПТ.
	Итого
3 Системы случайных величин	Функции от случайных величин. Системы случайных величин. Независимость, зависимость случайных величин. Условные плотности. Корреляционный момент.
	Итого
4 Основные понятия математической статистики	Выборка. Выборочные моменты, их асимптотические свойства. Порядковые статистики. Эмпирическая функция распределения. Выборочная медиана. Гистограмма. Статистические методы обработки экспериментальных данных.Точечные оценки. Функция правдоподобия. Построение доверительных интервалов с помощью центральной случайной величины и распределения точечной оценки.

1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ: ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ПРИМЕРЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И УКАЗАНИЙ К РЕШЕНИЮ (к разделу 1)

Вариант 1

1. Подброшены три игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна десяти.

2. События А и В независимы. Вероятность наступления хотя бы одного из них равна 0,76, а ровно одного — 0,52. Найти *P{A)* и *P{B),* если *P{A) > P{B).* В ответ записать сначала *P{A),* а затем *P(B)* в виде десятичной дроби.

3. Один аппарат обслуживает три конвейерные линии. Первая линия может требовать ремонта с вероятностью 0.25; вторая с вероятностью 0.28; а третья —0.36. Найти вероятность того, что а) хотя бы одна линия потребует ремонта; б) не более двух линий потребует ремонта.

4. Имеется 10 ящиков с лампами. В двух из них — 8 матовых и 2 прозрачные, в трёх — 6 матовых и 4 прозрачных, в пяти — 5 матовых и 5 прозрачных. Из случайно взятого ящика извлекли две лампы. Они оказались матовыми. Найти вероятность того, что они извлечены из первой группы ящиков.

5. Завод отправил на контроль 700 изделий. В пути с вероятностью в 0.2 возможно повреждение изделия. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено а) ровно 3 изделия; б) не менее трёх изделий.

Вариант 2

1. В урне находятся 10 шаров, из них 4 белых, остальные - чёрные. Последовательно, без возвращения извлекают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

2. В партии, состоящей из 25 изделий, имеется пять бракованных. Из партии для контроля выбирается 7 изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных будет а) три бракованных; б) хотя бы одно бракованное.

3. Производится стрельба из 4-х орудий по одной цели. Вероятность попадания первым орудием 0,6, вторым — 0,7, третьим — 0,8, четвертым – 0,5. Найти вероятность разрушения цели, если известно, что при одном попадании цель будет разрушена с вероятностью 0,1, при двух - 0,4, при трёх — 0,8, при четырех — 0,95 . В результате одного залпа цель была разрушена. Найти вероятность того, что при этом было два попадания в цель.

4. В спартакиаде участвуют 30 спортсменов: 22 лыжника и 8 конькобежцев. Вероятность выполнить норму лыжником равна 0,8, а конькобежцем —0,4. Случайно вызвано три спортсмена. Найти вероятность того, что они все выполнят норму.

5. Найти вероятность того, что среди 300 изделий окажется менее трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1,5%.

Вариант 3

1. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что на двух костях выпадет число очков а) в сумме составляющее «пять», а разность будет равна

«двум»? б) в сумме составляющее «шесть», при условии, что разность будет равна «двум»?

2. Студент знает 40 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает оба вопроса, содержащиеся в экзаменационном билете.
3. Игральная кость бросается шесть раз. Найти вероятность того, что число выпавших очков будет составлять строго возрастающие величины.
4. Из урны, содержавшей 4 белых и 7 черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Найти вероятность извлечь наудачу из урны шар черного цвета.
5. Изделия некоторого предприятия содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу изделий окажутся два бракованных.

Вариант 4

1. В урне 3 красных, 6 зеленых , 5 синих и 10 неокрашенных шаров. Наудачу извлекается три шара. Какова вероятность того, что все они окажутся окрашенными и все разных цветов?
2. В партии из десяти изделий три бракованных. Наудачу выбирают пять изделий. Какова вероятность того, что среди них не менее одного бракованных?
3. В ящике 9 красных и 7 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Найти вероятность того, что а) обе пуговицы одного цвета; б) разных цветов.
4. Имеется девять одинаковых урн, из которых в восьми находятся по 3 белых и 2 черных шара, а в одной – 4 белых и 2 черных шара. Из взятой наугад урны извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержавшей 4 белых шаров?
5. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 45–го размера, равна 0,02. Найти вероятность того, что из пяти покупателей хотя бы одному потребуется обувь этого размера.

Вариант 5

1. 4 стрелка одновременно стреляют в одну мишень. Найти вероятность того, что а) в мишени будет только одна пробоина, если вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков соответственно равны 0.4, 0.6, 0.3 и 0.7; б) хотя бы одна пробоина.
2. В урне два белых и шесть черных шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что а) шары разных цветов; б) шары одинаковых цветов?
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.7. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов будет не меньше одного попадания.
4. В тире имеется пять винтовок, вероятности попадания в цель из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность а) попадания в цель из взятой наугад винтовки; б) была выбрана первая винтовка, если известно, что цель была поражена.
5. 10% изделий некоторого предприятия – продукция высшего сорта. Приобретено 5 изделий этого предприятия. Какова вероятность того, что не менее 2-х из них высшего сорта?

ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И УКАЗАНИЙ К РЕШЕНИЯМ

Примеры 1.1. Классическое и геометрическое определение вероятности. Комбинаторика.

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Общее число исходов испытания (выбор в определенном порядке двух цифр из десяти) равно числу вариантов извлечения двух элементов из десяти с учетом порядка следования их, т.е. числу размещений из десяти элементов по два:

$$n == A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 9\cdot 10 = 90.$$

Благоприятный исход испытания только один, m=1. Следовательно, искомая вероятность равна p=1|90.

2. В партии из десяти деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу изделий 4 стандартных.

Решение. Общее число исходов испытания равно числу вариантов извлечения шести деталей из десяти без учета порядка извлечения, т.е. равно числу сочетаний из десяти элементов по шесть:

$$n == C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 3\cdot 10 = 210.$$

Число благоприятных исходов согласно основному правилу комбинаторики равно произведению числа вариантов извлечения четырех деталей из семи стандартных на число вариантов извлечения двух деталей из трех нестандартных:

$$m = C_7^4\cdot C_3^2 = \frac{7!}{4!\ \cdot\ 3!}\cdot\frac{3!}{2!\ \cdot\ 1!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2} = 105.$$

Искомая вероятность равна p= 105/210= 1/2.

Примеры 1.2. Произведение и сумма событий

1. Из урны, содержащей не менее двух белых и двух черных шаров, последовательно извлекаются два шара.

A = {белый шар при первом извлечении};

B = {белый шар при втором извлечении};

AB = {белые шары при первом и втором извлечениях};

A+B = {первый шар – белый, второй – черный, или первый шар – черный, второй – белый, или первый и второй шары – белые}.

2. Урна содержит 9 занумерованных шаров с номерами от 1 до 9 . Шары извлекаются по одному без возвращения . определить вероятность событий:

A . Номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1, 2, 3 ...

Указание к решению.

Вероятность правильного выбора первого шара $\frac{1}{9}$ второго шара $\frac{1}{8}$ и так далее так как в урне всегда присутствует только один шар с нужным номером . Общая вероятность равна $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{7}...1=\frac{1}{9!}=2.7\cdot10^{-6}$.

Примеры 1.3. Условная вероятность. Операции над событиями

1. Опыт: подбрасывание двух монет. События:
A = {выпадение «орла» на обеих монетах};
B = {выпадение «орла» на одной из монет}.
Найти вероятность $P(A)$. Общее число возможных исходов опыта n=4 *(*оо*,* ор, рр, ро), благоприятствующий исход один (оо), следовательно, $P(A)$=1/4. (Здесь обозначено за «о» – «орел», за «р» – «решка»).
Найти теперь условную вероятность $P(A|B)$. Поскольку известно, что произошло событие B*,* число возможных исходов испытания n–1 (оо, ор, ро), благоприятствующий исход по–прежнему один, следовательно, $P(A|B)$=1/3.

2. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, наудачу извлекают два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.
Решение. Считаем, что шары извлекаются поочередно. Пусть
A = {первый шар – белый}, B = {второй шар – белый}, тогда AB – {оба шара – белые}.
По теореме умножения вероятностей $P(AB)=P(A)P(B|A)$. Согласно классическому определению вероятности $P(A)$=3/10*,* $P(B|A)$=2/9. Следовательно, $P(AB)$= (3/10)·(2/9).

3. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0.6, вторым – 0.8. Найти вероятность того, что в мишени будет две пробоины.
Решение. Введем в рассмотрение события, вероятности которых известны:
A = {поражение мишени первым стрелком},
B – {поражение мишени вторым стрелком}.
Интересующее нас событие выразим через эти события. Для того, чтобы имело место событие С={две пробоины в мишени}, надо, чтобы произошли вместе события A и B*,* т.е. $C=AB$.
Естественно считать события A и B независимыми, поэтому
$P(C)=P(A)\cdot P(B)$=0.6·0.8.

4. В условиях примера 2 предыдущего пункта найти вероятность появления *хотя бы одной* пробоины.
Решение. Данное событие есть сумма событий A и B*,* причем эти события совместные, поэтому вероятность интересующего нас события равна $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$. Ранее было найдено, что $P(AB)$=0.48, следовательно, $P(A + B)$ = 0.6 + 0.8 – 0.48 = 0.92.

5. Устройство содержит четыре независимо работающих элемента и сохраняет работоспособность, если работает хотя бы один из элементов. Вероятности безотказной работы элементов в течение определенного срока соответственно равны 0.9, 0.8, 0.7 и 0.6. Найти вероятность безотказной работы устройства.

6. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятности попадания в мишень при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0.2, 0.5, 0.4. Найти вероятность того, что будет *ровно* два попадания в мишень.

Решение. Событие A={*ровно два* попадания в мишень} выражается через события A_1={попадание при первом выстреле}, A_2={попадание при втором выстреле), A_3={попадание при третьем выстреле} следующим образом:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Отсюда, учитывая несовместность суммируемых произведений событий и независимость событий A_1, A_2, A_3, находим

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) +$$
$$+ P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.26$$

7. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом: в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, во второй 10 белых, 8 черных и 6 красных. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение. Введем в рассмотрение следующие события:

B_1={извлечение белого шара из первой урны},
B_2={извлечение белого шара из второй урны},
C_1={извлечение черного шара из первой урны},
C_2={извлечение черного шара из второй урны},
D_1={извлечение красного шара из первой урны},
D_2={извлечение красного шара из второй урны}.

Выразим событие A= {извлечение шаров одного цвета} через эти события:

$A= B_1\ B_2+ C_1\ C_2+ D_1\ D_2$

Следовательно,

$P(A) = P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) + P(D_1)P(D_2)$.

Вероятности событий B, C, D найдем из классического определения: $P(B_1)$=5/24, $P(B_2)$=10/24, $P(C_1)$=11/24, $P(C_2)$=8/24, $P(D_1)$=8/24, $P(D_2)$=*6/24*.

Таким образом, получаем

$$P(A) = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} + \frac{11}{24} \cdot \frac{8}{24} + \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} = \frac{186}{576} = 0.323$$

Примеры 1.4. Формулы полной вероятности и Байеса

1. Первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие окажется бракованным.

Решение. Введем гипотезы:

H_1={взятое изделие изготовлено на первом станке},
H_2={взятое изделие изготовлено на втором станке},
H_3={взятое изделие изготовлено на третьем станке}.
События H_1, H_2 и H_3 несовместные, образуют полную группу, и событие A ={взятое изделие – брак} происходит вместе с одним из них, следовательно, они действительно могут быть взяты в качестве гипотез для события A. Согласно формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3).$$

По условию задачи
$P(H_1)$= 0.25, $P(H_2)$=0.35, $P(H_3)$=0.40, $P(A/H_1)$=0.05,
$P(A/H_2)$=0.04, $P(A/H_3)$=0.02,
следовательно, $P(A) = 0.25 \bullet 0.05 + 0.35 \bullet 0.04 + 0.40 \bullet 0.02 = 0.0345$.
Замечание. Вероятности $P(H_i)$ характеризуют возможность осуществления некоторых условий H_i, а $P(A/H_i)$ возможность появления A при этих условиях.

2. Первый станок производит 20%, а второй 80% всех деталей. Брак в их производстве составляет соответственно 4% и 2%. Взятая наугад деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом станке.
Решение. Введем две гипотезы для события A={взятая деталь оказалась бракованной}:
H_1={взятая деталь изготовлена на первом станке},
H_2={взятая деталь изготовлена на втором станке}.
Из условия задачи известно: $P(H_1)$= 0.2, $P(H_2)$=0.8, $P(A/H_1)$=0.04, $P(A/H_2)$=0.02.. По формуле Байеса находим

$$P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{0.2\cdot 0.04}{0.2\cdot 0.04+0.8\cdot 0.02}=\frac{1}{3}=0.333.$$

Замечание. Формула Байеса указывает путь использования новых экспериментальных данных для коррекции *априорных* (доопытных) вероятностных представлений об исследуемом объекте.

Примеры 1.5. Последовательности испытаний. Формула Бернулли

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.6. Найти вероятность двух попаданий при трех выстрелах.
Решение. Имеем дело с тремя независимыми испытаниями, в каждом из которых с вероятностью p=0.6 может произойти событие A={попадание в цель}. Вероятность двух попаданий (в любой последовательности) при трех выстрелах находим по формуле Бернулли:

$$P_3(2)=C_3^2p^2q^1=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 0.6^2\cdot 0.4=0.432.$$

2. Испытывается 15 одинаковых изделий. Вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0.9. Найти наивероятнейшее число изделий, выдержавших испытание.

Решение. По условию имеем: $n=15,\ p=0.9,\ q=0.1$. Подставим эти данные в неравенства для m_0:

$15\cdot 0.9-0.1 \le m_0 < 15\cdot 0.9+0.9 \Rightarrow 13.4 < m_0 < 14.4$.

Отсюда следует, что $m_0=14$.

3. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что в пути будут повреждены три изделия.

Решение. Можно считать, что имеем дело со схемой Бернулли, в которой испытания проводятся 500 раз. Так как число $n=500$ достаточно велико, а вероятность $p=0.002$ мала (причем $npq=500\cdot 0.002\cdot 0.998\approx 2<9$), то воспользуемся приближенной формулой (2.5), где $\lambda=np=500\cdot 0.002=1$:

$$P_{500}(3)\cong \frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1}=0.0613.$$

4. Найти вероятность того, что событие происходит 80 раз в 400–х испытаниях, если вероятность этого события в каждом испытании равна 0.2.

Решение. Здесь $n=400$ достаточно велико, но величина npq также велика ($npq=400\cdot 0.2\cdot 0.8=64>9$), поэтому воспользуемся формулой (2.6). Вычисляем

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0.2}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}}=0.$$

По таблице функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(0)=0.3989$. Окончательно получаем:

$$P_{400}(80)\cong \frac{\varphi(0)}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}}=\frac{0.3989}{8}=0.0499.$$

5. Найти вероятность того, что в 400–х испытаниях событие произойдет не более 70–ти раз, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0.2.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа для вычисления вероятности $P_{400}(0;\ 70)$:

$$x_1=\frac{0-400\cdot 0.2}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}}=-10,\quad x_2=\frac{70-400\cdot 0.2}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}}=-1.25,$$

$$P_{400}(0;\ 70)\cong \Phi(-1.25)-\Phi(-10)=\Phi(10)-\Phi(1.25)=$$
$$=0.500-0.394=0.106.$$

6. Определим, сколько надо провести испытаний, чтобы с вероятностью 0.95 относительная частота выпадения «орла» отличалась от вероятности $p=0.5$ этого события не более чем на 5%.

Решение. Воспользуемся формулой (2.8). В нашем случае $p=0.5$, $q=0.5$, $\varepsilon=0.5\ 0.05=0.025$. По условию задачи

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=0.95$$

или $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{pq}\right)=0.475$. Пользуясь таблицей функции Лапласа, по значению функции находим значение аргумента:

$$\left(\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{pq}\right)=1.96, \text{ т.е. } 0.025\cdot\sqrt{n}/\sqrt{0.5\cdot 0.5}=1.96.$$

Отсюда находим, что n=1536.64. Таким образом, надо провести не менее чем 1537 испытаний.

2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ: СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПРИМЕРЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И УКАЗАНИЙ К РЕШЕНИЮ (к разделу 2)

Вариант 1

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.7, для второго – 0.6. X– число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и σ(X); в) найти вероятность $P(X<M(X))$; найти вероятность $P(0<X<M(X))$;.
2. Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ ax^2, & 0\le x\le 1/2 \\ 0, & x>1/2 \end{cases}$$

3.
4. Найти: а) константу b; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); в) MX; г) DX; д) P(1/3 < X < 1/2).
5. Весы для тяжелых предметов считаются годными, если отклонение X от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 10 г Величина X – нормально распределенная и $M(X)$=0, $D(X)$=10 г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод?

Вариант 2

1. Из коробки, содержащей 3 синих и 5 красных карандаша, наудачу вынимают 3 карандаша. X – число синих карандашей среди вынутых. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и σ(X); в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
2. Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} a|x|, & |\mathrm{x}|\le 1 \\ 0, & |\mathrm{x}|>1. \end{cases}$$

Найти: а) константу a; б) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значения $F(-1/2)$, $F(1/2)$; в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) P(–1/2 < X < 1).

3. Компоненты изготовляемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка X которых распределена нормально, причём $M(X)$= 0, $\sigma(X)$= 0.003 г. Норма веса лекарства 0.02 г. Определить вероятность отбракования лекарства, если максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021г.

Вариант 3

1. Игральная кость бросается до появления шестерки, но не более пяти раз. X– число бросаний кости. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и σ(X); в) найти вероятность $P(X<M(X))$.

2. Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1 \\ ax^2+b, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константы a; b б) функцию распределения F(x), в ответ ввести значения F(–1/3), F(1/3); в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) P(–1/2 < X < 0.7).

3. Изделие считается пригодным, если отклонение его размера от номинала не превышает по модулю 0.45 мм. Случайные отклонения X распределены нормально, причём $M(X)$=0, σ(X)=0.5 мм. Определить вероятность того, что случайно взятое изделие является пригодным.

ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И РЕШЕНИЙ

Примеры 2.1. Закон распределения дискретной случайной величины

1. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «орла» при двух бросаниях монеты.

Решение. Возможные значения случайной величины: 0, 1, 2. Вероятности этих значений находим по формуле Бернулли:

$$p_0 = P\left(X=0\right)=P_2(0)=C_2^0 p^0 q^2 = \frac{2!}{0!\cdot 2!}\cdot 0.5^0\cdot 0.5^2 = 0.25;$$

$$p_1 = P\left(X=1\right)=P_2(1)=C_2^1 p^1 q^1 = \frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot 0.5^1\cdot 0.5^1 = 0.50;$$

$$p_2 = P\left(X=2\right)=P_2(2)=C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2!}{2!\cdot 0!}\cdot 0.5^2\cdot 0.5^0 = 0.25.$$

Записываем ряд распределения:

Таблица 2.1 Ряд распределения

X	0	1	2
p	0.25	0.50	0.25

Записываем функцию распределения и строим ее график:

$$F\left(x\right)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0.3, & 0<x \le 0; \\ 0.8, & 1<x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

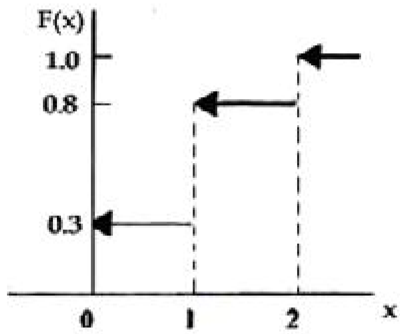


Рисунок 2.1. Формула и график функции распределения

2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной рядом распределения:

Таблица 2.2 Ряд распределения

X	0	1	2	3
p	0.2	0.4	0.3	0.1

Решение.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4} p_i x_i .=0\cdot 0.2 + 1\cdot 0.4 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.1=1.3.$$

3. Найти дисперсию случайной величины, заданной рядом распределения из 2.
Решение. Чтобы вычислить дисперсию, необходимо знать математическое ожидание. Для данной случайной величины выше было найдено: m=1.3. Вычисляем дисперсию по формуле (3.5):

$$D(X)=M\left(X^2\right)-m^2=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i-m^2=.$$

$$=0^2\cdot 0.2 + 1^2\cdot 0.4 + 2^2\cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1-1.3^2 =0.81.$$

Примеры 2.2. Закон распределения непрерывной случайной величины. Плотность распределения. Математическое ожидание, дисперсия

1. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos x, & -\pi/2\le x\le\pi/2, \\ 0, & x<-\pi/2, \quad x>\pi/2 \end{cases}$$

Требуется:

а) найти значение коэффициента a;

б) найти функцию распределения;

в) найти вероятность попадания случайной величины на интервал (0, $\pi/2$).

Решение, а) Воспользуемся свойством 3:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cdot\cos x\cdot dx = a\cdot\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=a\cdot(1-(-1))=2a=1.$$

Отсюда получаем: a=1/2.

б) Если $x\le\pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0;$$

если $-\pi/2\le x\le\pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt+\int_{-\pi/2}^{x}\frac{1}{2}\cdot\cos t\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\sin t\Big|_{-\pi/2}^{x}=\frac{1}{2}\cdot(\sin x+1);$$

если $x>\pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\cdot\cos t\cdot dt+\int_{\pi/2}^{x} 0\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\sin t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=1;$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2, \\ \dfrac{1}{2}\cdot(\sin x+1), & -\pi/2\le x\le \pi/2, \\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$$

в) По свойству 4:

$$P(0<X<\pi/4)=F(\pi/4)-F(0)=\frac{1}{2}\cdot(\sin(\pi/4)+1)-\frac{1}{2}\cdot(\sin 0+1)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. Найти математическое ожидание случайной величины, заданной плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} x/2, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x<0, \quad x>2 \end{cases}.$$

Решение. $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{2} x\cdot x/2\cdot dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x^2\cdot dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=1.33.$

3. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} (1/2)\cdot\cos x, & |x|\le \pi/2, \\ 0, & |x|>\pi/2. \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Находим сначала математическое ожидание:

$$m=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cdot\cos x\cdot dx=0$$

(как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку).

Теперь вычисляем дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cdot\cos x\cdot dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2\cdot\cos x\cdot dx = x^2\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\cdot\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cdot\sin x\cdot dx=$$

$$=x^2\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}+2x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2}-2\cdot\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cdot\cos x\cdot dx=$$

$$=x^2\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}+2x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2}-2\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}-2=\frac{\pi^2-8}{4};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}.$$

Примеры 2.3. Свойства нормального распределения

2. Полезный справочный материал.

A. Если случайная величина $\xi \sim N\left(m,\sigma^2\right)$, то $\eta = \dfrac{\xi - m}{\sigma} \sim N(0,1)$.

B. Если случайная величина $\xi \sim N\left(m,\sigma^2\right)$, то

$$\mathbf{P}(x_1 < \xi < x_2) = \Phi_{m,\sigma^2}(x_2) - \Phi_{m,\sigma^2}(x_1) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right).$$

В частности, $\mathbf{P}\left(|\xi - m| < l\right) = 2 \cdot \Phi_{0,1}\left(\dfrac{l}{\sigma}\right)$.

Таким образом, вычисление любых вероятностей для нормально распределённой случайной величины сводится к вычислению функции распределения $\Phi_{0,1}(x)$. Она обладает следующими свойствами: $\Phi_{0,1}(0) = 0.5$; $\quad \Phi_{0,1}(-x) = 1 - \Phi_{0,1}(x)$.

C. Если $\xi \sim N(0,1)$, то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(|\xi| < x\right) = 1 - 2\Phi_{0,1}(-x) = 2\Phi_{0,1}(x) - 1.$$

D. *Правило трех сигм*. Если $\xi \sim N\left(m,\sigma^2\right)$, то

$$\mathbf{P}\left(|\xi - m| \ge 3\sigma\right) = 0.0027.$$

Большого смысла в запоминании числа 0.0027 нет, но полезно помнить, что почти вся масса нормального распределения сосредоточена в границах от $(a - 3\sigma)$ до $(a + 3\sigma)$.

2. Дана случайная величина $X \sim N(1,4)$. Найти $P(2 < X < 3)$.

Решение. По формуле свойства **B** при $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\quad m = 1,\ \sigma = 2$ получаем $P(2 < X < 3) = \Phi(1) - \Phi(0.5)$. По таблице для функции Лапласа находим $\Phi(0.5) = 0.1915,\ \Phi(1) = 0.3413$.

$P(2 < X < 3) = 0.3413 - 0.1915 = 0.1498.$

3. Случайная величина X – отклонение размера изделия от нормы – нормально распределенная, причём M (X)= 0. Найти σ (X), если известно, что P(– 3 < X < 3) = 0.7.

Решение. P(– 3 < X < 3) = P(| X | < 3) = $2 \cdot \Phi_{0,1}\left(\dfrac{3}{\sigma}\right)$ = 0.7. Отсюда следует, что $\Phi_{0,1}\left(\dfrac{3}{\sigma}\right) = 0.35$, и, используя табличные данные (приложение 1), получаем 3/σ =1.4, или σ = 3/1.4 ≈ 2.14.

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ: СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ПРИМЕРЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И УКАЗАНИЙ К РЕШЕНИЮ (к разделу 3)

Вариант 1

1 Две случайные величины имеют соответственно средние, равные 2 и 3, дисперсии, равные 16 и 25, а также коэффициент корреляции, равный 0,25. Найти среднее значение их произведения.

2 Пусть случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ с плотностью $f(x) = 1/\pi$, вне этого интервала $f(x) = 0$, то каков вид плотности $g_\eta(y)$ у новой случайной величины $\eta = |\xi|$? Как эта плотность выглядит графически?

3 Случайные величины ξ и η принимают значения из множеств $\{0,1,-1\}$ и $\{0,1,5\}$ соответственно. Вероятности различных сочетаний даются табл.

Таблица 3.1 Распределение системы двух СВ

ξ	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
η	0	1	5	0	1	5	0	1	5
p	1/16	1/16	1/4	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4

Определить: а) являются ли ξ и η независимыми? коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$?
б) Найти законы распределения ξ и η.

Вариант 2

1 Дана таблица совместного распределения двух СВ. Получить характеристики: 1) распределения составляющих *X*, *Y*; 2) распределение СВ *X* при условии *Y* =1; коэффициент корреляции *r*(*X*, *Y*).

Таблица 3.2 Распределение системы двух СВ

X\Y	-1	-2	2
-1	0.05	0.30	0.1
1	0.25	0.13	0.17

2 (Закон распределения χ^2). Если старая случайная величина ξ распределена по стандартному нормальному закону, т.е. $\xi \sim N_\xi(x|0,1)$, то каков вид плотности $p_\eta(y)$ у новой случайной величины $\eta = \xi^2$? Как эта плотность выглядит графически?

3 Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале (a,b). Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $\eta=\xi^2$. a=-5, b=5.

Вариант 3

1 Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $\eta=\xi^2$, если ξ – нормальная (гауссовская) случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

2 Если старая случайная величина ξ распределена по закону Коши, т.е. $f(x)=1/\left(\pi\left(1+x^2\right)\right)$, то каков вид плотности $p_\eta(y)$ у новой случайной величины $\eta=\xi^2$? Как эта плотность выглядит графически?

3 Случайные величины ξ и η принимают значения из множеств{0,1,-1} и {0,1,2} соответственно. Вероятности различных сочетаний даются табл.

Таблица 3.3 Распределение системы двух СВ

ξ	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
η	0	1	2	0	1	2	0	1	2
p	1/16	1/16	1/4	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4

Определить: а) являются ли ξ и η независимыми? коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$? б) Найти законы распределения ξ и η.

Вариант 4

1 Пусть случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ с плотностью $f(x)=1/\pi$, вне этого интервала $f(x)=0$, то каков вид плотности $g_\eta(y)$ у новой случайной величины $\eta=tg(\xi)$? Как эта плотность выглядит графически?

2 Пусть случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $(0,\pi/2)$ то каков вид плотности $g_\eta(y)$ у новой случайной величины $\eta=Sin(\xi)$? Как эта плотность выглядит графически?

3 Дана таблица совместного распределения двух СВ. Получить характеристики: 1) математическое ожидание СВ $X+Y$; 2) распределение СВ Y при условии $X=0$; коэффициент корреляции $r(X, Y)$.

Таблица 3.4 Распределение системы двух СВ

X\Y	-1	-2	1
0	0.05	0.30	0.1
2	0.25	0.13	0.17

Вариант 5

1 Чему равен коэффициент корреляции величин $a\xi+b$ и $c\eta+d$, где a, b, c, d - детерминированные константы, а ξ и η имеют коэффициент корреляции r?

2 (Задача А.Н. Колмогорова, приводящая к логнормальному распределению). Найти плотность распределения $p_\eta(y)$ новой случайной величины $\eta = e^\xi$, когда старая случайная величина распределена нормально, т.е. $\xi \sim N\left(x \middle| \mu, \sigma^2\right)$

3 Дана таблица совместного распределения двух СВ. Получить характеристики: 1) математическое ожидание СВ $X+Y$; 2) распределение СВ Y при условии $X=1$; коэффициент корреляции $r(X, Y)$.

Таблица 3.5 Распределение системы двух СВ

X\Y	1	2	3
0	0.05	0.30	0.1
1	0.25	0.13	0.17

ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И УКАЗАНИЙ К РЕШЕНИЯМ

Пример 3.1. Системы дискретных случайных величин

Данные статистической обработки сведений относительно двух показателей X и Y отражены в корреляционной таблице. Требуется:

1. найти ряды распределения для X и Y, вычислить выборочные средние и выборочные средние квадратические отклонения;
2. найти условные ряды распределения Y/x и вычислить условные средние Y/x;
3. построить график зависимости условных средних Y/x от значений X;
4. рассчитать выборочный коэффициент корреляции Y на X;
5. написать выборочное уравнение прямой регрессии;
6. изобразить геометрически данные корреляционной таблицы и построить прямую регрессии.

Таблица 3.6 Ряд распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0.1	0.3	0.4	0.2

Найти закон распределения случайной величины $y = \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$.

Указание к решению. Находим значения функции $\varphi(x) = \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$ при x=0,1,2,3, в результате чего получаем числа 1,2,1,0; следовательно, возможными значениями Y являются y_i = 0, 1, 2. Теперь по формуле (3.20) находим вероятности:
$q_1 = \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 3) = 0.2$;
$q_2 = \mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 2) = 0.1 + 0.4 = 0.5$;
$q_3 = \mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X = 1) = 0.3$.
Закон распределения Y будет:

Таблица 3.2 Ряд распределения

y_i	0	1	2
q_i	0.2	0.5	0.3

Пример 3.2. Функции от непрерывных случайных величин

Вычислить плотность распределения $f_\eta(y)$, если $\eta = g(\xi) = -(\ln\ \xi)/\lambda$ и $f_\xi(x) = 1$ при $x \in (0,1)$.

Указание к решению. Из условия $y = g(x) = -(\ln\ x)/\lambda$ следует, что

$$x = g^{-1}(y) = e^{-\lambda y},\ f_\xi\left(e^{-\lambda y}\right) = 1,\quad \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = \lambda e^{-\lambda y}, y \in (0, \infty).$$

Поэтому с учётом (3.30) получаем

$$f_\eta(y) = \lambda y^{-\lambda н}, \quad y \geq 0.$$

Пример 3.3. Нелинейные функции от непрерывных случайных величин

Найти $f_\eta(y)$, если $\eta = g(\xi) = \xi^2$ и $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Указание к решению. Обратная функция $x = g^{-1}(y)$ в данном случае имеет две ветви $g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ и $g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$, соответствующие областям $X_1 = \{x : x \leq 0\}$, $X_2 = \{x : x > 0\}$. Поэтому используем формулу (3.31) и получаем

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2},\ \ y \geq 0.$$

Пример 3.4. Функции от случайных величин

Случайная величина ξ имеет плотность распределения $P_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x \in [2,4] \\ 0 x \notin [2,4] \end{cases}$ другая случайная величина связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi^3 + 1$. Определить математическое ожидание $M[\eta]$ и дисперсию $D[\eta]$ случайной величины

Указание к решению:

1. Математическое ожидание.

По определению:

$$M[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2x^3 + 1\right) \cdot P(x) dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \left[3x^3 + 1\right] dx = 61$$

2. Дисперсия.

По определению:

$$D[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(2x^3 + 1\right) - 61\right]^2 \cdot P(x) dx = \int_2^4 \left(2x^3 - 60\right)^2 \frac{1}{2} dx = 1045.$$

Пример 3.5. Системы случайных величин

По таблице двумерного распределения $P(x, y)$ найти коэффициент корреляции ρ_{xy}.

Таблица 3.7 Ряд распределения

Y \ X	x_1=1	x_2=3
y_1 = -1	0,2	0,4
y_2 =1	0,3	0,1

Указание к решению. Используем формулу $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$, где

$$K_{XY} = MXY - MX \cdot MY\,;\ DX = MX^2 - M^2X \quad \text{и} \quad DY = MY^2 - M^2Y\,.$$

Далее по формуле совместного математического ожидания получаем:

$$MXY = \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j) = 1 \cdot (-1) \cdot 0,2 + (-1) \cdot 3 \cdot 0,4 + 1 \cdot 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = -0,8\,.$$

Используем формулы для начальных моментов:

$$MX^2 = \sum_i x_i^2 \sum_j P\left(x_i, y_j\right) = 1 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,5 = 5\,;\ MY^2 = \sum_j y_j^2 \sum_i P\left(x_i, y_j\right) = 1 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 1\,;$$

$$MX = \sum_i x_i \sum_j P\left(x_i, y_j\right) = 1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 = 2\,;$$

$$MY = \sum_j y_j \sum_i P\left(x_i, y_j\right) = -1 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = -0,2\,.$$

$K_{XY} = MXY - MX \cdot MY \Rightarrow K_{XY} = -0,8 + 2 \cdot 0,2 = -0,4$.

$DX = MX^2 - M^2X \Rightarrow DX = 5 - 4 = 1$.

$DY = MY^2 - M^2Y \Rightarrow DY = 1 - 0,04 = 0,96$.

Ответ: $\rho_{XY} = \dfrac{-0,4}{\sqrt{0,96}} \cong -0,41$, что свидетельствует об умеренной линейной связи между СВ X, Y.

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ: НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ПРИМЕРЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И УКАЗАНИЙ К РЕШЕНИЮ (к разделу 4)

Вариант 1

Описательная статистика. Для выборочных данных выполнить обработку:
а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;
б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерены диаметры 40 металлических шариков, мм:

8.5	8.5	8.5	8.5	8.4	8.4	8.5
8.6	8.4	8.5	8.4	8.5	8.6	8.6
8.5	8.4	8.4	8.4	8.5	8.4	8.5
8.5	8.4	8.4	8.5	8.6	8.5	8.4
8.5	8.6	8.5	8.5	8.5	8.6	8.5
8.6	8.4	8.5	8.5	8.6		

Вариант 2

Описательная статистика. Для выборочных данных выполнить обработку:
а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;
б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерена продолжительность работы 30 электрических лампочек, десятков часов:

51	56	69	31	56	49	51	53	74	51
63	48	53	51	64	50	59	84	55	82
55	72	70	54	51	77	98	62	73	55

Вариант 3

Описательная статистика. Для выборочных данных выполнить обработку:
а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;

б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерена скорость автомобиля на некотором участке дороги, км/час:

41.5	42.3	47.4	51.2	52.3	43.9
49.1	46.6	41.7	57.5	52.3	45.7
48.0	49.3	57.4	44.4	51.0	49.8
43.8	50.6	49.6	40.9	50.8	51.8
39.6	48.1	43.2	50.8	48.0	56.9

Вариант 4

Описательная статистика. Для выборочных данных выполнить обработку:
а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;
б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения с помощью первого коэффициента Пирсона;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Основные фонды 30 предприятий, млн руб.:

4.2	2.4	4.9	6.7	4.5	2.7	3.9	2.1	5.8	4.0
2.8	7.3	4.4	6.6	2.0	6.2	7.0	8.1	0.7	6.8
9.4	7.6	6.3	8.8	6.5	1.4	4.6	2.0	7.2	9.1

Вариант 5

Описательная статистика. Для выборочных данных выполнить обработку:
а) найти выборочные значения среднего арифметического, моды, медианы;
б) найти размах выборки, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; проверить выполнение правила «3сигма»;
в) оценить симметричность распределения;
г) найти верхнюю и нижнюю выборочные квартили, пояснить их смысл;
д) построить сгруппированный статистический ряд и гистограмму;
е) найти модальный и медианный интервалы, сравнить середины этих интервалов со значениями моды и медианы, рассчитанными по выборке.

Измерены длины 40 графитовых стержней для цанговых карандашей, см:

6.6	6.4	6.5	6.5	6.6	6.5	6.6	6.5	6.5
6.6	6.5	6.5	6.4	6.4	6.5	6.6	6.5	6.4
6.5	6.5	6.4	6.4	6.4	6.5	6.4	6.5	6.6
6.4	6.5	6.4	6.5	6.6	6.6	6.5	6.5	6.5
6.5	6.4	6.4	6.5					

ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И УКАЗАНИЙ К РЕШЕНИЯМ

Пример 4.1. Выборка для одномерной ДСВ. Вариационный ряд. Полигон частот и гистограмма. Эмпирическая функция распределения

Справка. Пусть X — некоторый признак изучаемого объекта или явления (температура, давление, срок службы электролампы или компьютера, вес студента, диаметр шарика для подшипника и т.п.). Генеральной совокупностью является *мультимножество* всех возможных значений этого признака (их количество обозначим за N и назовем объемом генеральной совокупности), а результаты n наблюдений над признаком X дадут нам выборку объема n — первоначальные статистические данные, значения $x_1, x_2, ..., x_n$ (простая выборка, не сгруппированные данные).

При этом значение x_1 получено при первом наблюдении случайной величины X, x_2 – при втором наблюдении той же случайной величины и т.д.

Выборку преобразуют в *вариационный ряд*, располагая результаты наблюдений в порядке возрастания: $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$. Каждый член $x_{(i)}$ вариационного ряда называется *вариантой*.

Отдельные значения статистического ряда называются *вариантами*. Если варианта x_i появилась m раз, то число m называют *частотой*, а ее отношение к объему выборки m/n – *относительной частотой*.

Последовательность вариант, записанная в возрастающем (убывающем) порядке, называется *ранжированным рядом*.

1. Для ранжированного ряда: 23 23 24 24 25 25 25 27 28 в нижеприведенной таблице в первой строке записаны все значения величины (варианты), во второй – соответствующие им частоты (безынтервальный вариационный ряд), в третьей – накопленные частоты, в четвертой – относительные частоты (табл.4.1).

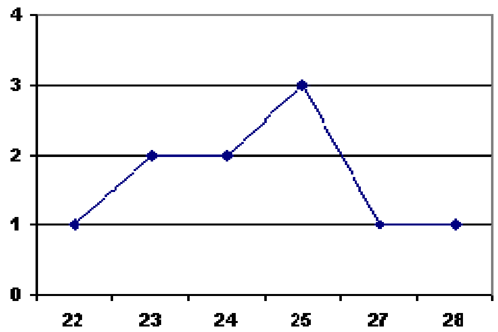
Таблица 4.1. Значения вариант и их частот

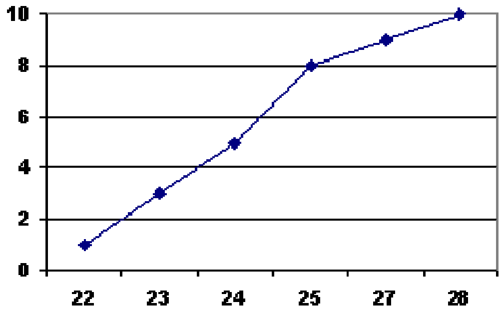
X	22	23	24	25	27	28
n_i	1	2	2	3	1	1
$n_н$	1	3	5	8	9	10
$\frac{n_i}{n}$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i; n_i) (Рисунок 4.1. а)).

Отметим, что сумма частот статистического ряда равна объему выборки $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Часто статистический ряд составляют, используя относительные частоты вариант: $h_i = \dfrac{n_i}{n}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots, k$ (k — количество различных вариант). Сумма относительных частот равна единице.

Полигоном относительных частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i; h_i).





а) б)

Рисунок 4.1. Полигон частот а), кумулятивная кривая б)

Эмпирическим аналогом графика интегральной функции распределения является *кумулятивная кривая* (*кумулята*). Для ее построения на оси OX откладывают значения вариант, на оси OY – накопленные частоты или относительные частоты. Полученная плавная кривая называется кумулятой (Рисунок 4.1. б))..

Эмпирическая функция распределения находится по следующей формуле (отношение накопленных частот к объему выборки):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2, \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3, \\ \dfrac{n_1 + n_2 + n_3}{n}, & x_3 < x \le x_4, \\ \ldots & \ldots \\ n = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{n_i}{n}, & x_{m-1} < x \le x_m, \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

В том случае, когда выборка представлена большим количеством различных значений непрерывной случайной величины, то группировку данных проводят в виде интервального вариационного ряда (ИВР). Для этого диапазон варьирования признака разбивают на несколько (5–10) равных интервалов и указывают количество вариант, попавших в каждый интервал.

2. *Алгоритм построения интервального вариационного ряда*.
1. Исходя из объема выборки (n), определить количество интервалов (k), рекомендуемое соотношение указано в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Соотношение объем выборки−число интервалов

n	25–40	40–60	60–100	100–200	>200
k	5–6	6–8	7–10	8–12	10–15

2. Вычислить размах ряда: $R=X_{max} - X_{min}$
3. Определить ширину интервала: $h=R/(k-1)$
4. Найти начало первого интервала $X_0 = X_{min} - h/2$
5. Составить интервальный вариационный ряд.

Графическим изображением ИВР является *гистограмма*. Для ее построения на оси OX откладывают интервалы шириной h, на каждом интервале строят прямоугольник высотой $m_i / h,\ i = 1,...,k$. Величина m_i / h называется *плотностью частоты* (m_i – количество значений из величин $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$, попавших в i-й интервал (*карман*)). Гистограмма является эмпирическим аналогом графика плотности функции распределения.

3. Измерена масса тела 100 женщин 30 лет, получены значения от 60 до 90 кг. Построить интервальный вариационный ряд (табл. 4.3) и гистограмму.

Таблица 4.3. Интервальный вариационный ряд

Интервал	Середина интервала	m_i	m_i / h
60–65	62.5	14	2.8
65–70	67.5	32	6.4
70–75	72.5	28	5.6
75–80	77.5	14	2.8
80–85	82.5	7	1.4
85–90	87.5	2	0.4

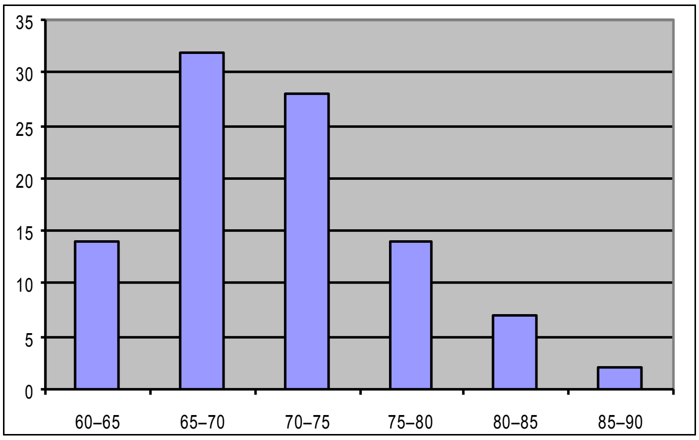


Рисунок 4.2. Гистограмма

Пример 4.2. Выборка для двумерной ДСВ. Числовые характеристики составляющих и условные характеристики. Выборочные средние и коэффициент корреляции

Данные статистической обработки сведений относительно двух показателей X и Y отражены в корреляционной таблице. Требуется:

Таблица 4.4. Значения вариант и их частот

X / Y	20	30	40	50	60
11	2	0	0	0	0
16	4	6	0	0	0
21	0	3	6	2	0
26	0	0	45	8	4
31	0	0	4	6	7
36	0	0	0	0	3

1. Найти ряды распределения для X и Y и вычислить для них выборочные средние и выборочные средние квадратические отклонения;
2. Определить условные ряды распределения Y/x и вычислить условные средние Y/x;
3. Построить графическую зависимость условных средних Y/x от значений X;
4. Рассчитать выборочный коэффициент корреляции Y на X;
5. Определить уравнение прямой регрессии;
6. Интерпретировать геометрически данные корреляционной таблицы и построить прямую регрессии.

Некоторые понятия

Упорядоченная пара (X,Y) случайных величин X и Y называется двумерной случайной величиной, или случайным вектором двумерного пространства.

Двумерная случайная величина (X,Y) называется также системой случайных величина X и Y.

Множество всех возможных значений дискретной случайной величины с их вероятностями называется законом распределения этой случайной величины.

Дискретная двумерная случайная величина (X,Y) считается заданной, если известен ее закон распределения: $P(X=x_i,\ Y=y_j) = p_{ij}$, $i=1,2...,n,\ j=1,2..,m$

События $(X=x_i,\ Y=y_j)$ образуют полную группу событий, поэтому сумма всех вероятностей $p_{ij}(i=1,2...,n,\ j=1,2..,m)$, указанных в таблице, равна 1.

1. Зависимость случайных величин X и Y.
Находим ряды распределения X и Y.
Пользуясь формулой $\sum P(x_i,y_j) = p_i$ (j=1..n), находим ряд распределения X.

Таблица 4.5. Значения вариант и их частот

X	11	16	21	26	31	36	
P	2	10	11	57	17	3	$\sum P_i$ = **100**

Математическое ожидание M[X].
M[x] = (11*2 + 16*10 + 21*11 + 26*57 + 31*17 + 36*3)/100 = 25.3
Дисперсия D[X].
$D[X] = (11^2*2 + 16^2*10 + 21^2*11 + 26^2*57 + 31^2*17 + 36^2*3\ )/100 - 25.3^2 = 24.01$.
Среднее квадратическое отклонение σ(x).
$\sigma(x) = \sqrt{D[X]} = \sqrt{24.01} = 4.9$
Пользуясь формулой $\sum P(x_i,y_j) = q_j$ (i=1..m), находим ряд распределения Y.

Таблица 4.6. Значения вариант и их частот

Y	20	30	40	50	60	
P	6	9	55	16	14	$\sum P_i$ = **100**

Математическое ожидание M[Y].
M[*Y*] = (20*6 + 30*9 + 40*55 + 50*16 + 60*14)/100 = 42.3
Дисперсия D[Y].
$D[Y] = (20^2*6 + 30^2*9 + 40^2*55 + 50^2*16 + 60^2*14\ )/100 - 42.3^2 = 99.71$
Среднее квадратическое отклонение σ(Y).
$\sigma(y) = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{99.71} = 9.99$
Поскольку, P(X=11,Y=20) = 2≠2•6, то случайные величины X и Y *зависимы*.

2. Условный закон распределения X.
Условный закон распределения X при условии, что Y=20:
P(X=11/Y=20) = 2/6 = 0.33, P(X=16/Y=20) = 4/6 = 0.67,
P(X=21/Y=20) = 0/6 **= 0=** P(X=26/Y=20)= P(X=31/Y=20)= P(X=36/Y=20).

Условное математическое ожидание M[X/Y=20].
$M[X/Y=y] = 11*0.33 + 16*0.67 + 21*0 + 26*0 + 31*0 + 36*0 = 14.33$

Условная дисперсия D[X/Y=20].
$D[X/Y=y] = 11^2*0.33 + 16^2*0.67 + 21^2*0 + 26^2*0 + 31^2*0 + 36^2*0 - 14.33^2 \cong 5.555$

Условный закон распределения X при условии, что Y=30:
P(X=16/Y=30) = 6/9 = 0.67, P(X=21/Y=30) = 3/9 = 0.33,
P(X=11/Y=30) = 0/9 **= 0=** P(X=26/Y=30)= P(X=31/Y=30)= P(X=36/Y=30).

Условное математическое ожидание M[X/Y=30].
$M[X/Y=y] = 11*0 + 16*0.67 + 21*0.33 + 26*0 + 31*0 + 36*0 = 17.67.$

Условная дисперсия D[X/Y=30].
$D[X/Y=y] = 11^2*0 + 16^2*0.67 + 21^2*0.33 + 26^2*0 + 31^2*0 + 36^2*0 - 17.67^2 \cong 5.555.$

Условный закон распределения X при условии, что Y=40.
P(X=16/Y=40) = 0/55 = 0, P(X=21/Y=40) = 6/55 = 0.11, P(X=26/Y=40)=45/55 = 0.82,
P(X=31/Y=40) = 4/55 = 0.0727, P(X=11/Y=40)=0/55**=0=**P(X=16/Y=40)=P(X=36/Y=40).

Условное математическое ожидание M[X/Y=40].
$M[X/Y=y] = 11*0 + 16*0 + 21*0.11 + 26*0.82 + 31*0.0727 + 36*0 = 25.82.$

Условная дисперсия D[X/Y=40].
$D[X/Y=y] = 11^2*0 + 16^2*0 + 21^2*0.11 + 26^2*0.82 + 31^2*0.0727 + 36^2*0-25.82^2 \cong 4.512.$

Условный закон распределения X(Y=50).
P(X=11/Y=50) = 0/16 = 0= P(X=16/Y=50) = P(X=36/Y=50),
P(X=21/Y=50) = 2/16 = 0.13, P(X=26/Y=50) = 8/16 = 0.5, P(X=31/Y=50) = 6/16 = 0.38.

Условное математическое ожидание M[X/Y=50].
$M[X/Y=y] = 11*0 + 16*0 + 21*0.13 + 26*0.5 + 31*0.38 + 36*0 = 27.25$

Условная дисперсия D[X/Y=50].
$D[X/Y=y] = 11^2*0 + 16^2*0 + 21^2*0.13 + 26^2*0.5 + 31^2*0.38 + 36^2*0-27.25^2 = 10.9375$

Условный закон распределения X при условии, что Y=60.
P(X=11/Y=60) = 0=P(X=16/Y=60) = P(X=21/Y=60),
P(X=26/Y=60) = 4/14 = 0.29, P(X=31/Y=60) = 7/14 = 0.5,
P(X=36/Y=60) = 3/14 = 0.21.

Условное математическое ожидание M[X/Y=60].
$M[X/Y=y] = 11*0 + 16*0 + 21*0 + 26*0.29 + 31*0.5 + 36*0.21 = 30.64.$

Условная дисперсия D[X/Y=60].
$D[X/Y=y] = 11^2*0 + 16^2*0 + 21^2*0 + 26^2*0.29 + 31^2*0.5 + 36^2*0.21-30.64^2 \cong 12.372.$

3. Условный закон распределения Y.

Условный закон распределения Y при условии, что X=11.

P(Y=20/X=11) = 2/2 = 1, P(Y=30/X=11) **= 0=**P(Y=40/X=11) =P(Y=50/X=11) = =P(Y=60/X=11).

Условное математическое ожидание M[Y/X=11).

M[Y/X=x] = 20*1 + 30*0 + 40*0 + 50*0 + 60*0 = 20

Условная дисперсия D[Y/X=11).

$D[Y/X=x] = 20^2*1 + 30^2*0 + 40^2*0 + 50^2*0 + 60^2*0 - 20^2 = 0.$

Условный закон распределения Y при условии, что X=16.

P(Y=20/X=16) = 4/10 = 0.4, P(Y=30/X=16) = 6/10 = 0.6;

P(Y=40/X=16) = P(Y=50/X=16) =P(Y=60/X=16) = 0.

Условное математическое ожидание M[Y/X=16).

M[Y/X=x] = 20*0.4 + 30*0.6 + 40*0 + 50*0 + 60*0 = 26.

Условная дисперсия D[Y/X=16).

$D[Y/X=x] = 20^2*0.4 + 30^2*0.6 + 40^2*0 + 50^2*0 + 60^2*0 - 26^2 = 24.$

Условный закон распределения Y при условии, что X=21.

P(Y=20/X=21) = P(Y=60/X=21) = 0/11 = 0;

P(Y=30/X=21) = 3/11 = 0.27, P(Y=40/X=21) = 6/11 = 0.55, P(Y=50/X=21) = 2/11 =0.18.

Условное математическое ожидание M[Y/X=21).

M[Y/X=x] = 20*0 + 30*0.27 + 40*0.55 + 50*0.18 + 60*0 = 39.09.

Условная дисперсия D[Y/X=21).

$D[Y/X=x] = 20^2*0 + 30^2*0.27 + 40^2*0.55 + 50^2*0.18 + 60^2*0 - 39.09^2 = 44.63.$

Условный закон распределения Y при условии, что X=21.

P(Y=20/X=26) = 0/57 =P(Y=30/X=26) = 0/57 = 0;

P(Y=40/X=26) = 45/57 =0.79, P(Y=50/X=26)=8/57 = 0.14, P(Y=60/X=26)=4/57≅0.0702.

Условное математическое ожидание M[Y/X=26).

M[Y/X=x] = 20*0 + 30*0 + 40*0.79 + 50*0.14 + 60*0.0702 = 42.81.

Условная дисперсия D[Y/X=26).

$D[Y/X=x] = 20^2*0 + 30^2*0 + 40^2*0.79 + 50^2*0.14 + 60^2*0.0702 - 42.81^2 = 34.23.$

Условный закон распределения Y при условии, что X=31.

P(Y=20/X=31) =P(Y=30/X=31) = 0;

P(Y=40/X=31) = 4/17 = 0.24, P(Y=50/X=31) = 6/17 = 0.35, P(Y=60/X=31) = 7/17 =0.41.

Условное математическое ожидание M[Y/X=31).

M[Y/X=x] = 20*0 + 30*0 + 40*0.24 + 50*0.35 + 60*0.41 = 51.76.

Условная дисперсия D[Y/X=31).
$D[Y/X=x] = 20^2*0 + 30^2*0 + 40^2*0.24 + 50^2*0.35 + 60^2*0.41 - 51.76^2 = 61.59.$

Условный закон распределения Y(X=36).
P(Y=20/X=36) = P(Y=30/X=36) = P(Y=40/X=36) =P(Y=50/X=36) = 0/3 = 0;
P(Y=60/X=36) = 3/3 = 1.

Условное математическое ожидание M[Y/X=36).
M[Y/X=x] = 20*0 + 30*0 + 40*0 + 50*0 + 60*1 = 60.

Условная дисперсия D[Y/X=36).
$D[Y/X=x] = 20^2*0 + 30^2*0 + 40^2*0 + 50^2*0 + 60^2*1 - 60^2 = 0.$

4. Ковариация.
$cov(X,Y) = M[X\cdot Y] - M[X] \cdot M[Y];$
$cov(X,Y) = (20\cdot 11\cdot 2 + 20\cdot 16\cdot 4 + 30\cdot 16\cdot 6 + 30\cdot 21\cdot 3 + 40\cdot 21\cdot 6 + 50\cdot 21\cdot 2 + 40\cdot 26\cdot 45 + 50\cdot 26\cdot 8 + 60\cdot 26\cdot 4 + 40\cdot 31\cdot 4 + 50\cdot 31\cdot 6 + 60\cdot 31\cdot 7 + 60\cdot 36\cdot 3)/100 - 25.3 \cdot 42.3 = 38.11.$

Если случайные величины независимы, то их ковариации равна нулю. В нашем случае $cov(X,Y) \neq 0$.

Коэффициент корреляции.
$r_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}; \; r_{xy} = \frac{38.11}{4.9 \bullet 9.99} = 0.78$

Уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид:

$$y_x = r_{xy} \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x} \sigma_y + \overline{y}$$

Уравнение линейной регрессии с x на y имеет вид:

$$x_y = r_{xy} \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y} \sigma_x + \overline{x}$$

Определение числовых характеристик
Выборочные средние:

$\overline{x} = (20(2 + 4) + 30(6 + 3) + 40(6 + 45 + 4) + 50(2 + 8 + 6) + 60(4 + 7 + 3))/100 = 42.3.$

$\overline{y} = (20(2 + 4) + 30(6 + 3) + 40(6 + 45 + 4) + 50(2 + 8 + 6) + 60(4 + 7 + 3))/100 = 25.3.$

Дисперсии:
$\sigma^2_x = (20^2(2 + 4) + 30^2(6 + 3) + 40^2(6 + 45 + 4) + 50^2(2 + 8 + 6) + 60^2(4 + 7 + 3))/100 - 42.3^2 = 99.71.$
$\sigma^2_y = (11^2(2) + 16^2(4 + 6) + 21^2(3 + 6 + 2) + 26^2(45 + 8 + 4) + 31^2(4 + 6 + 7) + 36^2(3))/100 - 25.3^2 = 24.01.$
Откуда получаем среднеквадратические отклонения:
$\sigma_x = 9.99$ и $\sigma_y = 4.9$.
Ковариация:
$Cov(x,y) = (20\cdot 11\cdot 2 + 20\cdot 16\cdot 4 + 30\cdot 16\cdot 6 + 30\cdot 21\cdot 3 + 40\cdot 21\cdot 6 + 50\cdot 21\cdot 2 + 40\cdot 26\cdot 45 + 50\cdot 26\cdot 8 + 60\cdot 26\cdot 4 + 40\cdot 31\cdot 4 + 50\cdot 31\cdot 6 + 60\cdot 31\cdot 7 + 60\cdot 36\cdot 3)/100 - 42.3 \cdot 25.3 = 38.11$

Определим коэффициент корреляции:

$r_{xy} = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$; $r_{xy} = \dfrac{38.11}{9.99 \bullet 4.9} = 0.78.$

Уравнения линий регрессии y(x): $y_x = 0.78 \dfrac{x - 42.3}{9.99} 4.9 + 25.3 = 0.38\ x + 9.14.$

Уравнения линий регрессии x(y): $x_y = 0.78 \dfrac{y - 25.3}{4.9} 9.99 + 42.3 = 1.59\ y + 2.15.$

Если построить точки, определяемые таблицей и линии регрессии, увидим, что обе линии проходят через точку с координатами (42.3; 25.3) и точки расположены близко к линиям регрессии.

5. Значимость коэффициента корреляции.

$t_{набл} = r_{xy} \dfrac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2_{xy}}} = 0.78 \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{1 - 0.7788^2}} = 12.29.$

По таблице Стьюдента с уровнем значимости α=0.05 и степенями свободы k=100-m-1 = 98 находим $t_{крит}$ (n-m-1;α/2) = (98;0.025) = 1.984, где m = 1 - количество объясняющих переменных.

Если $t_{набл} > t_{критич}$, то полученное значение коэффициента корреляции признается значимым (нулевая гипотеза, утверждающая равенство нулю коэффициента корреляции, отвергается).

Поскольку $t_{набл} > t_{крит}$, то отклоняем гипотезу о равенстве 0 коэффициента корреляции. Другими словами, коэффициент корреляции статистически - значим.

Пример 4.3. Доверительный интервал.

По результатам наблюдений была найдена точечная оценка неизвестного математического ожидания *m* случайной величины $\xi \sim N\left(m, \sigma^2\right)$ $\overline{m}$=10.2, и дисперсия оценки σ_X=4. Требуется оценить доверительный интервал для оценки математического ожидания по 36-ти наблюдениям с заданной надежностью γ=0.99.

Решение. Из (4.2) и (4.3) следует, что $\Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \dfrac{0.99}{2} = 0.495$. Отсюда получаем, что $t_\gamma = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X}$=2.58 и половина искомого интервала $\delta = \dfrac{2.58 \cdot 4}{\sqrt{36}} = 1.89$. Так как $\overline{m} - \delta < m < \overline{m} + \delta$, то с вероятностью 0.99 доверительный интервал для оценки математического ожидания: $8.31 < m < 12.09$.

Со случаем, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна, можно ознакомится в [1-7].

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 320 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/4864#book_name, дата обращения: 17.05.2018.
2. Вентцель Е.С.,Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей : Учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 6-е изд., стереотип. - М. : Академия, 2005. (наличие в библиотеке ТУСУР - 99 экз.)
3. П. Е.Данко. Высшая математика в упражнениях и задачах [с решениями]: учебное пособие: в 2 ч. / П. Е.Данко [и др.]. - Ч. 2. - 7-е изд., испр. . - М. : ОНИКС, 2009. - 448с (наличие в библиотеке ТУСУР - 6 экз.).
4. В. Е. Гмурман Теория вероятностей и математическая статистика : Учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман ; Министерство образования и науки Российской Федерации. - 12-е изд., перераб. - М. : Высшее образование, 2006. – 478с. (наличие в библиотеке ТУСУР - 21 экз.).
5. А.И. Орлов. Математика случая. Вероятность и статистика – основные факты. ─ Учебное пособие. ─ М.: МЗ-Пресс, 2004.
6. Колесникова С.И. Высшая математика III. Основы теории вероятностей. Элементы математической статистики. Методическое пособие. Томск: ТУСУР, 2007.–106 с. (наличие в библиотеке ТУСУР - 54 экз.)
7. Теория вероятностей и математическая статистика: Методические указания по выполнению практических работ / Колесникова С. И. - 2012. 28 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/880, дата обращения: 17.05.2018.
8. Теория вероятностей и математическая статистика: Методические указания к самостоятельной работе студентов / Колесникова С. И. - 2012. 16 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/881, дата обращения: 17.05.2018.
9. Анализ данных: Методические указания по самостоятельной работе / Колесникова С. И. - 2012. 18 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://edu.tusur.ru/publications/3053, дата обращения: 17.05.2018.
10. https://math.semestr.ru/math/system-primer.php
11. http://ebooks.kbsu.ru/
12. https://studfiles.net/preview/1547105/
13. http://window.edu.ru/catalog/resources/uchebnik-teoriya-veroyatnostej?p_nr=50.