Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

А.А. Ельцов

Математика
2-й семестр
Курс лекций
Учебное пособие

Для направлений
11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств»
20.03.01 «Техносферная безопасность»

2018

Приведён конспект лекций по дисциплине «Математика», прочитанный весной 2018 года в группах 227-1, 237-1,2,3, и включает в себя определённый и неопределённый интегралы, в том числе и несобственные, криволинейные интегралы, введение в теорию функций комплексного переменного, теорию числовых и функциональных рядов в комплексной форме, теорию степенных рядов (Тейлора и Лорана), ряды Фурье, преобразование и интеграл Фурье, преобразование Лапласа (операционное исчисление).

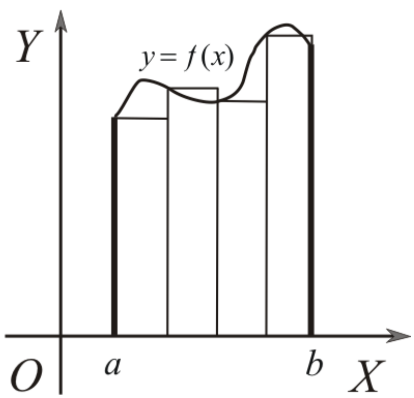
СОДЕРЖАНИЕ

1. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение, свойства, существование

Математика долгое время была сугубо прикладной наукой. Многие её разделы зародились из решения практических задач. Ещё древние греки решали задачи о вычислении площадей плоских фигур и объёмов сложных тел.

Задача о вычислении площади плоской фигуры. Пусть требуется найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, прямыми $x = a, x = b$ и кривой $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Пусть m_i – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, а M_i – наибольшее значение функции $f(x)$ на том же отрезке. Заменим площадь трапеции между точками x_i, x_{i+1} площадью $m_i \Delta x_i$ прямоугольника с высотой m_i. Это площадь с недостатком. Тогда $\underline{\sigma}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ – приблизительная площадь исходной трапеции с недостатком. Аналогично $\overline{\sigma}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ – приблизительная площадь исходной трапеции с избытком. Площадь S исходной криволинейной трапеции находится между этими значениями. Мы также можем заменить площадь трапеции между точками x_i, x_{i+1} площадью $f(\xi_i)\Delta x_i$ прямоугольника с высотой $f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ – некоторая



фиксированная точка. Сумма $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ также будет давать приблизительную площадь исходной трапеции и будет находиться между суммами $\underline{\sigma}_n$ и $\overline{\sigma}_n$. Интуитивно ясно, что, переходя во всех трёх суммах к пределу по всевозможным разбиениям, при условии, что максимальная длина $\max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, получаем некоторую величину, которую и принимают за площадь исходной криволинейной трапеции.

Подобная идея суммирования и предельного перехода используется и при решении некоторых физических задач.

Задача о вычислении пути. Пусть тело движется со скоростью $V = f(t)$, $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T_2$. Пусть далее $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, i = 0,1,\ldots,n-1$. За время Δt_i тело пройдёт путь $f(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i – некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, получаем путь, пройденный телом за время от момента T_0 до момента T_1.

Задача о вычислении количества электричества. Пусть по проводнику течёт ток с силой тока $I(t)$ и $I(t) \ge 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T_2$. Пусть далее $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Тогда количество электричества, протекшее по проводнику за время Δt_i, равно $\Delta Q_i = I(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i – некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, при условии, что $\max_{0 \le i \le n-1} \Delta t_i$ стремится к нулю, получаем количество электричества, протекшего по проводнику за время от момента T_1 до момента T_2. Если сила тока

$I(t)$ меняет знак за отрезок времени от T_1 до T_2, то получаем разность между количеством электричества, протёкшим по проводнику в ту и другую сторону.

Задача о вычислении работы силы при прямолинейном движении материальной точки. Пусть $f(x)$ – переменная сила, направленная параллельно отрезку $[a,b]$, под действием которой материальная точка движется по прямой от точки a к точке b. Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Будем считать, что на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сила постоянна и равна $f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ – некоторая фиксированная точка. Тогда работа по перемещению материальной точки из начала в конец отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ приблизительно равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Суммируя по всем участкам разбиения, получаем, что $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ приближённо есть работа по перемещению точки из начала в конец отрезка $[a,b]$. Работу по перемещению точки из начала в конец отрезка $[a,b]$ положим равной пределу по всевозможным разбиениям суммы $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при условии, что $\max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$ стремится к нулю.

Подобные задачи и легли в основу рассмотренного далее понятия определённого интеграла.

Определение. **Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ ($-\infty < a \le b < \infty$). Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$** (если $b < a$, то разбиваем точками $a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b$ и ξ_i выбираем из отрезка $[x_{i+1}, x_i]$) **и составим сумму $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Предел сумм σ_n по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зави-**

сит от способа разбиения, способа выбора точек ξ_i, при условии, что максимальная длина $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1} |\Delta x_i| = \max\limits_{0\le i\le n-1} |x_{i+1} - x_i|$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, называется определенным интегралом (интегралом Римана) от функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сама функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману.

Строго говоря, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\max\limits_{1\le i\le n} |\Delta x_i| < \delta$, и интегральных сумм σ_n, построенных с помощью этого разбиения, выполняется неравенство $|\sigma_n - I| < \varepsilon$.

Отметим некоторые свойства определенного интеграла при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$ Следует из определения, так как все Δx_i меняют знак.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$ Действительно, если $c \in [a,b]$, то, включив c в число точек разбиения, получаем требуемое. Если $c \notin [a,b]$, то при $b < c$ применяем только что доказанное к отрезку $[a,c]$ и пользуемся свойством 1. При $c < a$ аналогично.

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b k\,f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$

5. Если $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$ и $a\le b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

6. Если $f(x)\le g(x)$ на $[a,b]$ и $a\le b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx \ (a\le b).$

8. Если $m\le f(x)\le M$ и $a\le b$, то

$$m(b-a)\le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

9. (Первая теорема о среднем). $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, где μ - некоторое число, $m\le\mu\le M$.

Свойства 3 - 9 следуют из определения, так как все записанные в них соотношения справедливы для любых интегральных сумм и сохраняются при переходе к пределу.

10. (Вторая теорема о среднем). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка c из $[a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме о промежуточных значениях существует точка c из $[a,b]$ такая, что $f(c)=\mu$, что в силу свойства 9 влечёт требуемое.

Приведём условия интегрируемости функции $f(x)$.

Теорема 2.3. Всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. (Не обязательный материал, для справки). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и ξ_i, η_i - точки наименьшего и наибольшего значений этой функции на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, которые достигаются согласно второй теореме Вейерштрасса. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то, согласно теореме Римана [3,4,5], она равномерно непрерывна, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, y, удовлетворяющих условию $|x-y| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Пусть теперь разбиение отрезка $[a,b]$ таково, что $\max\limits_{1\le i\le n} |x_{i+1} - x_i| < \delta$. Тогда, по только что сказанному, $f(\eta_i) - f(\xi_i) < \varepsilon$ для любого $i = 1,2,...,n$ (знак модуля опущен, так как разность $f(\eta_i) - f(\xi_i)$ неотрицательна). Поэтому

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \Delta x_i =$$

$\varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b-a)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$ и, по предыдущей теореме, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$.

Следствие. Функция $f(x)$, имеющая на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема по Риману.

Доказательство. Разбиваем отрезок $[a,b]$ на участки непрерывности. На каждом из них функция интегрируема. По свойству 2 аддитивности интеграла получаем требуемое.

Теорема 2.4. Всякая монотонная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Примем эту теорему без доказательства.

Доказательство существования интеграла Римана для других классов функций требует введения новых понятий и дополнительных рассмотрений. Желающие могут ознакомиться с этим в [4,5].

Примером функции, для которой не существует интеграл Римана, служит функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x-\text{рациональное число,}\\ 0, & \text{если } x-\text{иррациональное число.}\end{cases}$$

Действительно, если при любом разбиении отрезка $[a,b]$ точки ξ_i выберем рациональными, то интегральная сумма будет равна длине отрезка интегрирования, а если точки ξ_i выберем иррациональными, то интегральная сумма будет равна нулю. Отсюда следует, что предел интегральных сумм зависит от выбора точек ξ_i и поэтому интеграл Римана от функции $D(x)$ не существует.

1.2. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница

Совершенно ясно, что вычислять пределы сумм, полученных в определении интеграла Римана, достаточно сложно и утомительно. Нужен метод, позволяющий обойти возникающие сложности. Этот метод был найден Ньютоном и Лейбницем и связан с решением задачи, обратной задаче дифференцирования, к решению которой мы приступаем.

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$. Эту функцию называют: интеграл как функция верхнего предела. Отметим несколько свойств этой функции.

Теорема 2.5. Если $f(x)$ интегрируемая на $[a,b]$ функция, то $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. По свойству 9 определенного интеграла (теорема о среднем) имеем $\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int\limits_x^{x+h} f(t)dt=\mu h$, откуда при $h\to 0$ получаем требуемое.

Теорема 2.6. Если $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ функция, то функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $\Phi'(x)=f(x)$.

Доказательство. По свойству 10 определенного интеграла (вторая теорема о среднем) имеем $\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = f(c)$, где c – некоторая точка отрезка $[x, x+h]$. В силу непрерывности функции f получаем

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Функция $F(x)$, производная $F'(x)$ которой совпадает с функцией $f(x)$, называется первообразной для $f(x)$.

Задача нахождения первообразной решается неоднозначно в том смысле, что у одной и той же функции существует много первообразных. Непосредственным вычислением проверяется, что функции $2\sin^2 x$, $-\cos 2x$, $-2\cos^2 x$ являются первообразными для функции $2\sin 2x$. Этот факт не случаен. Оказывается, что первообразные одной и той же функции отличаются одна от другой на константу. Для указанных выше функций это подтверждается школьными формулами тригонометрии, а в общем случае будет доказано позже при изучении неопределённого интеграла. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\Phi(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$. Ниже мы докажем, что две первообразных одной и той же функции связаны соотношением $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ - другая первообразная $f(x)$. Далее, так как $\Phi(a) = 0$, то $0 = F(a) + C$, следовательно, $C = -F(a)$ и поэтому $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Полагая $x = b$, получаем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) = F(b) - F(a).$$

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что для вычисления определённых интегралов мы можем применять весь набор приёмов и методов нахождения неопределённых интегралов.

Примеры

1. $\int_0^1 e^{x^2} x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{2} = \frac{e-1}{2}.$

2.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x d \sin x = \frac{\sin^4 x}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}(\sin^4 \tfrac{\pi}{3} - \sin^4 \tfrac{\pi}{4}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right) = \frac{5}{64}.$$

2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение и свойства

В дифференциальном исчислении по данной функции находилась её производная. В этом разделе будем заниматься задачей, обратной к задаче нахождения производной.

Определение. **Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) на отрезке $[a,b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in[a,b]$ ($dF(x)=f(x)dx$).**

Нетрудно видеть, что функция $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$ является первообразной для функции $\cos^3 x$. Действительно,

$$\left(\sin x-\tfrac{1}{3}\sin^3 x\right)'=\cos x-\sin^2 x\cos x=\cos x\left(1-\sin^2 x\right)=\cos^3 x.$$

Аналогично доказывается, что $\sin 2x$ является первообразной для $2\cos 2x$.

Докажем несколько свойств первообразных.

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая константа, также является первообразной для $f(x)$.

Доказательство. Действительно, $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные одной и той же функции, то их разность $F(x)-\Phi(x)$ есть константа.

Доказательство. Докажем вначале, что если для $\forall x\in[a,b]$ $\varphi'(x)=0$, то $\varphi(x)$ есть константа на $[a,b]$. Пусть x_1,x_2 - любые две точки из $[a,b]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях, существует точка ξ из отрезка $[x_1,x_2]$ такая, что $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi)(x_2-x_1)$. Так как по условию $\varphi'(\xi)=0$, то $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$, и поэтому, в силу произвольности x_1,x_2, $\varphi(x)$ есть константа на $[a,b]$. Вычисляя производную, получаем $(F(x)-\Phi(x))' = F'(x)-\Phi'(x) = \quad f(x)-f(x)=0$ для всех x из $[a,b]$, и, по доказанному выше, $F(x)-\Phi(x)$ есть константа. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 получается важный результат.

Теорема 3. Любые две первообразные одной и той же функции связаны соотношением $\Phi(x) = F(x)+C$.

Теорема 3 позволяет ввести нижеследующий объект.

Определение. **Множество всех первообразных функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.**

Укажем несколько свойств неопределенного интеграла.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Действительно, если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, то $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x)+C$.

Доказывается аналогично.

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

Вычисляя дифференциал правой части, получаем $d\left(a\int f(x)dx\right) = ad\left(\int f(x)dx\right) = af(x)dx$. Последнее означает справедливость доказываемого свойства.

4. $\int \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Аналогично предыдущему, вычисляя дифференциал правой части получаем
$d\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right) = d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx = f(x)dx \pm g(x)dx = (f(x)\pm g(x))$
$= d\left(\int (f(x)\pm g(x))dx\right)$. Свойство доказано.

Заметим, что свойства 3 и 4 означают линейность операции интегрирования.

5. $\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$.

Так как по свойству инвариантности формы первого дифференциала $f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt$, то, используя свойство1, получаем

$$d\int f(x)dx = f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt = d\int f(x(t))x'(t)dt.$$

Утверждение доказано. Это свойство лежит в основе нахождения интеграла с помощью замены переменной.

Используя свойства 1-5 и свойства дифференциалов, сводят вычисление интегралов к так называемым табличным интегралам.

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}$.

5а. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$.

6а. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$.

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

7а. $\int e^x dx = e^x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

Иногда возникает необходимость вычисления интегралов $\int e^{ax}\cos bx dx$ и $\int e^{ax}\sin bx dx$ которые, соответственно, равны

16. $\int e^{ax}\cos bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$.

17. $\int e^{ax}\sin bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

Формулы 5а, 6а, 16, 17 будут доказаны позднее. Остальные обратны табличным производным и могут быть легко получены.

2.2. Приемы нахождения неопределенных интегралов

Вычисление неопределённых интегралов производится сведением исходных интегралов к табличным с помощью эквивалентных преобразований с использованием свойств неопределённых интегралов.

2.2.1. Подведение под знак дифференциала

Иногда удается представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде $\varphi(u)du$, где u - некоторая функция от x, то есть записать его в форме $f(x)dx = \varphi(u(x))du(x)$, и при этом интеграл $\int \varphi(u)du$ является табличным. Тогда если $\int \varphi(u)du = F(u) + C$, то по свойству 5 неопределённого интеграла $F(u(x)) + C = \int \varphi(u(x))du(x) = \int \varphi(u(x))u'(x)dx = \int f(x)dx$.

Этот прием называется подведением под знак дифференциала и представляет собой простейший вариант использования формулы замены переменной, выраженной свойством 5. Для овладения этим приёмом необходимы устойчивое (доведённое до автоматизма) знание таблиц производных и дифференциалов и умение ими пользоваться в обе стороны, то есть необходимо не только уметь вычислять по исходной функции производную и дифференциал, но и по дифференциалу увидеть исходную функцию. Нам также понадобится свойство дифференциала

$$\boxed{df(x)=\frac{1}{a}d(af(x))=\frac{1}{a}d(af(x)+b)}.$$

Пример. $\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\sin 2xd(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$

С другой стороны,

$$\int\sin 2xdx=\int 2\sin x\cos xdx=\int 2\sin xd\sin x=\sin^2 x+C;$$

$$\int\sin 2xdx=\int 2\sin x\cos xdx=-\int 2\cos xd\cos x=-\cos^2 x+C.$$

Этот пример показывает, что у одной и той же функции может быть несколько разных первообразных, связанных между собой соотношением $\Phi(x)=F(x)+C$.

Займёмся более подробно указанным приёмом. Вначале приведём таблицу дифференциалов в необходимой нам форме.

Таблица основных дифференциалов

1. $dx=\frac{1}{a}d(ax)=\frac{1}{a}d(ax+b)$, где a и b - некоторые числа. В частности, $dx=\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}d(2x+b)=\frac{1}{3}d(3x)=\frac{1}{3}d(3x+b)$ и так далее.

2. $x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1})=\frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}+b), \alpha\neq -1$.

В частности, $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2}d(x^2+b)$, $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)=\frac{1}{3}d(x^3+b)$, $\frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right)=-d\left(\frac{1}{x}+b\right)$, $\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}+b\right)$, $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right)=2d\left(\sqrt{x}+b\right)$.

3. $\frac{dx}{x}=d(\ln x)=d(\ln x+b)=\frac{1}{a}d(a\ln x+b)$.

4. $e^x dx=d(e^x)=d(e^x+b)$.

5. $\cos x dx = d\sin x = d(\sin x + b)$.

6. $\sin x dx = -d\cos x = -d(\cos x + b)$.

7. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d\mathrm{tg}x = d(\mathrm{tg}x + b)$.

8. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d\mathrm{ctg}x = -d(\mathrm{ctg}x + b)$.

9. $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}x) = -d(\mathrm{arcctg}x)$.

10. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Остальное читатель в состоянии восстановить самостоятельно из таблицы производных.

Покажем теперь применение вышесказанного для некоторых интегралов с указанием табличных, к которым они сводятся.

Интегралы $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

$\int x \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx = \dfrac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2} d(x^2) = \dfrac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2} d(x^2+1)$. В этом месте можно либо продолжить вычисления непосредственно и тогда получим

$\dfrac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\, d(x^2+1) = \dfrac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}} d(x^2+1) =$

$\dfrac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} : \dfrac{4}{3} + C = \dfrac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$, либо сделать замену переменных $u = x^2 + 1$ и тогда $\dfrac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2} d(x^2+1)$

$= \dfrac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}} du = \dfrac{1}{2} u^{\frac{4}{3}} : \dfrac{4}{3} + C = \dfrac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$\int \sin^3 5x \cos 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \sin^3 5x\, d\sin 5x = \frac{\sin^4 5x}{5\cdot 4} + C = \frac{\sin^4 5x}{20} + C.$$

$$\int \frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx = \int \text{arctg}x\, d(\text{arctg}x) = \frac{\text{arctg}^2 x}{2} + C\,.$$

Интегралы $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Знак модуля опущен в силу того, что $1 + x^2 \geq 1 > 0$ для $\forall$ x из R.

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

.

$$\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x)}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C\,.$$

$$\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{1+\cos 3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x + 1)}{1+\cos 3x} = -\frac{1}{3}\ln(1+\cos 3x) + C$$

$$\int \frac{\cos 5x}{1+\sin 5x}dx = \frac{1}{5}\int \frac{d(\sin 5x)}{1+\sin 5x} = \frac{1}{5}\ln(1+\sin 5x) + C\,.$$

Интегралы $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C = -\text{arcctg}x + \tilde{C}\,.$

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4}\text{arctg}(x^4) + C.$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{x^2+6x+9+1} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} =$$

$$= \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+3) + C$$

$$\int \frac{x^5}{1+x^{12}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{dx^6}{1+x^{12}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx^6}{1+(x^6)^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^6) + C.$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^{10}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx^5}{1+x^{10}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx^5}{1+(x^5)^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(x^5) + C.$$

$$\int \frac{e^{5x}dx}{e^{10x}+1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(e^{5x})}{1+(e^{5x})^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(e^{5x}) + C.$$

$$\int \frac{e^{4x}dx}{e^{8x}+1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(e^{4x})}{1+(e^{4x})^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(e^{4x}) + C.$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\operatorname{arctg}(\cos x) + C.$$

Для интеграла $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ имеем $\int \frac{dx}{a^2+x^2} =$ $= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$. Таким образом, нами доказана формула 5а таблицы интегралов. Часть из приведённых выше примеров можно решить используя эту формулу.

Интегралы $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3 dx}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+8)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+9-1)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2+6x+9)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+3)^2}} = \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{1-(x+3)^2}} =$$

$$= \arcsin(x+3) + C.$$

$$\int \frac{e^{5x} dx}{\sqrt{1-e^{10x}}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(e^{5x})}{\sqrt{1-(e^{5x})^2}} = \frac{1}{5}\arcsin(e^{5x}) + C\,.$$

$$\int \frac{e^{4x} dx}{\sqrt{1-e^{8x}}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(e^{4x})}{\sqrt{1-(e^{4x})^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(e^{4x}) + C\,.$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{4}}} = -\arcsin\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C\,.$$

Для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ имеем $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$. Таким образом нами доказана формула 6а таблицы интегралов. Часть из приведённых выше примеров можно решить используя эту формулу.

Интегралы $\int e^x dx = e^x + C$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C .$$

$$\int x^3 e^{2x^4+1} dx = \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1} d(2x^4) = \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1} d(2x^4+1) =$$

$$= \frac{1}{8} e^{2x^4+1} + C.$$

$$\int e^{3\sin 2x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{6}\int e^{3\sin 2x} d(3\sin 2x) = \frac{1}{6} e^{3\sin 2x} + C .$$

$$\int \frac{e^{2\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\int e^{2\operatorname{tg} x} d(2\operatorname{tg} x) = \frac{1}{2} e^{2\operatorname{tg} x} + C .$$

Интегралы $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, d2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C .$$

$$\int x\cos(x^2+3)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2+3)\, d(x^2+3) = \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + C$$

.

Интегралы $\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\cdot \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\cdot d\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

$$\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \cos\frac{1}{x}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C .$$

$$\int e^{1/x^2}\cdot\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int e^{1/x^2} d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} e^{1/x^2} + C .$$

$$\int \sin\frac{1}{x^3}\cdot\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\int \sin\frac{1}{x^3}\, d\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{x^3} + C .$$

2.2.2. Интегрирование по частям

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда, вычисляя дифференциал произведения функций $U(x)$ и $V(x)$, получаем $d(U(x)V(x)) = U(x)dV(x) + V(x)dU(x)$. Поэтому можем записать $U(x)dV(x) = \ d(U(x)V(x)) - V(x)dU(x)$. Вычисляя интеграл от обеих частей последнего равенства с учетом того, что $\int d(U(x)V(x)) = U(x)V(x)+C$, получаем соотношение

$$\int U(x)dV(x) = UV - \int V(x)dU(x) \ ,$$

называемое формулой интегрирования по частям. Понимают его в том смысле, что множество первообразных, стоящее в левой части, совпадает со множеством первообразных, получаемых по правой части.

Интегрирование по частям в определённом интеграле

В определенном интеграле сохраняется формула интегрирования по частям. В этом случае она приобретает вид

$$\boxed{\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU.}$$

Примеры

2. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$. Полагаем $U = x^2$, $dV = xe^{x^2} dx$. Тогда $dU = 2xdx,\ V = \frac{1}{2}e^{x^2}$ и

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{2}(e - 0 - e + 1) = \frac{1}{2}.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int xe^x dx.$

Положим $U = x,\ dV = e^x dx.$ Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int e^x dx = e^x + C$, и в качестве V можем взять $V = e^x$. Поэтому $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int x \cos x dx$.

Полагаем $U = x,\ dV = \cos x dx.$ Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \cos x dx = \sin x + C$, и в качестве V можем взять

$V=\sin x$. Следовательно, $\int x\cos x dx$ $=x\sin x-\int \sin x dx = x\sin x+\cos x+C$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x\cos 5x dx$.

Полагаем $U=x,\ dV=\cos 5x dx$. Тогда $dU=dx$, $\int dV=\int \cos 5x dx = \ =\frac{1}{5}\sin 5x+C$, и в качестве V можем взять $V=\frac{1}{5}\sin 5x$, поэтому можем написать $\int x\cos 5x dx=\frac{1}{5}x\sin 5x-\frac{1}{5}\int \sin 5x dx=\frac{1}{5}x\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x+C$.

При использовании формулы интегрирования по частям нужно удачно выбрать U и dV так, чтобы интеграл, полученный в правой части формулы, находился легче. Приведём пример неудачного выбора U и dV. Положим в первом примере $U=e^x, dV=xdx$. Тогда $dU=e^x dx, V=\frac{x^2}{2}$ и $\int xe^x dx=\frac{x^2}{2}e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx$. Вряд ли интеграл $\int x^2 e^x dx$ можно считать проще исходного. Основные рекомендации здесь такие.

Если подынтегральная функция есть произведение полинома (многочлена) на экспоненту ($e^x=\exp(x)$ ***) или тригонометрическую функцию, то обычно в качестве*** $U(x)$ ***выбирают полином, а всё остальное относят к*** $dV(x)$***.***

Заметим, что иногда требуется применить формулу интегрирования по частям несколько раз, например, при вычислении интеграла $\int x^2e^{3x}dx$. Полагаем $U=x^2$, $dV=e^{3x}dx$. Тогда $dU=2xdx$, $V=\frac{1}{3}e^{3x}$ и $\int x^2e^{3x}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{1}{3}\int 2xe^{3x}dx$. Для вычисления второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = x,\ dV = e^{3x}dx.$ Тогда $dU = dx$, $V = \frac{1}{3}e^{3x}$, и поэтому $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$. Таким образом, $\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$.

Интеграл $\int x^2 \sin x dx.$ предлагается найти самостоятельно.

Приведём ещё несколько примеров на применение формулы интегрирования по частям.

Пример 4. Вычислить $\int x\,\mathrm{tg}^2 6x\,dx$.

Полагаем $U = x,\ dV = \mathrm{tg}^2 6x\,dx.$ Тогда $dU = dx$, $\int \mathrm{tg}^2 6x\,dx = \ = \int \frac{\sin^2 6x}{\cos^2 6x}dx = \int \frac{1-\cos^2 6x}{\cos^2 6x}dx = \frac{1}{6}\mathrm{tg}6x - x + C$, и в качестве V можем взять $\frac{1}{6}\mathrm{tg}6x - x$. Поэтому

$$\int x\,\mathrm{tg}^2 6x\,dx = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}6x - x^2 - \int\left(\frac{1}{6}\mathrm{tg}6x - x\right)dx = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}6x - x^2 +$$

$$+ \frac{1}{36}\ln|\cos 6x| + \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}6x + \frac{1}{36}\ln|\cos 6x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

Пример 5. Вычислить $\int \arcsin^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \arcsin^2 x$, $dV = dx$. Тогда $dU = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ V = x$ и $\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$. Для нахождения второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = \arcsin x,\ dV = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда

$dU = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$ и в качестве V можно взять $V = -\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, окончательно получаем

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C .$$

Пример 6. Вычислить $\int x\,\mathrm{arctg}^2\, x\,dx$.

Полагаем $U = \mathrm{arctg}^2\, x,\ dV = x\,dx$. Тогда $dU = \dfrac{2\,\mathrm{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, $V = \frac{1}{2}x^2$ и $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}^2\, x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}^2\, x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{arctg} x\,dx$. Полагая во втором слагаемом $U = \mathrm{arctg} x$, $dV = \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx$, имеем $dU = \dfrac{dx}{1+x^2}$,

$\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = x - \mathrm{arctg} x + C$, поэтому в качестве V можно взять $V = x - \mathrm{arctg} x$ и, следовательно,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{arctg} x\,dx = (x - \mathrm{arctg} x)\,\mathrm{arctg} x - \int \frac{x - \mathrm{arctg} x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= (x - \mathrm{arctg} x)\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C .$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{arctg}^2 x - x\,\mathrm{arctg} x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

.

Пример 7. Вычислить $\int \ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U=\ln^2 x,\ dV=dx$. Тогда $dU=\dfrac{2\ln x}{x}dx,\ V=x$, и поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U=\ln x,\ dV=dx$, имеем $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$. Поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

Пример 8. Вычислить $\int x\ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U=\ln^2 x,\ dV=xdx$. Тогда $dU=\dfrac{2\ln x}{x}dx,\ V=\dfrac{1}{2}x^2$ и поэтому $\int x\ln^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U=\ln x$, $dV=xdx$, имеем $\int x\ln x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{2}\int xdx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C$. Поэтому

$$\int x\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Пример 9. Вычислить $\int \ln(x^2+3)\,dx$.

Полагаем $U=\ln(x^2+3)$, $dV=dx$. Тогда $dU=\dfrac{2xdx}{x^2+3},\ V=x$ и поэтому

$$\int \ln(x^2+3)\,dx = x\ln(x^2+3) - 2\int \frac{x^2}{x^2+3}dx =$$
$$= x\ln(x^2+3) - 2x + 2\sqrt{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 10. Интеграл $\int \dfrac{x^9}{(1+x^5)^3}dx$ вычисляется либо интегрированием по частям с $U=x^5,\ dV=\dfrac{x^4}{(1+x^5)^3}dx$, либо с помощью замены переменной $z=1+x^5$. В первом случае $dU=5x^4dx,\ V=-\dfrac{1}{10(1+x^5)^2}$, и поэтому

$$\int\frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx=-\frac{x^5}{10(1+x^5)^2}+\int\frac{5x^4}{10(1+x^5)^2}dx=$$

$$=-\frac{x^5}{10(1+x^5)^2}-\frac{1}{10(1+x^5)}+C.$$

Во втором случае $dz=5x^4dx,\ x^5=z-1$, и поэтому

$$\int\frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx=\frac{1}{5}\int\frac{z-1}{z^3}dz=\frac{1}{5}\int\frac{1}{z^2}dz-\frac{1}{5}\int\frac{1}{z^3}dz=$$

$$-\frac{1}{5z}+\frac{1}{10z^2}+C=-\frac{1}{5(1+x^5)}+\frac{1}{10(1+x^5)^2}+C.$$

Приведём два примера применения формулы интегрирования по частям с далеко не очевидным итогом.

Пример 11. Вычислим интеграл $J=\int e^x\cos x\,dx$.

Положив $U=e^x$, $dV=\cos x\,dx$, получаем $J=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx.$. Применив к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям с $U=e^x$, $dV=\sin x\,dx$, имеем $J=e^x\sin x+e^x\cos x-J$. Разрешая последнее равенство относительно J, получаем

$$J=\int e^x\cos x dx=\frac{e^x\cos x+e^x\sin x}{2}+C.$$

Таким образом нами, в частном случае $a=1, b=1$, доказана формула 16 из таблицы интегралов. Интеграл примера 11, равно как и интегралы $\int e^x\sin x\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ называется циклическим. Циклические интегралы вычисляются по схеме примера 11. Предлагается вывести формулы для вычисления этих интегралов самостоятельно или ознакомиться с их получением, например, в [5].

Пример 12. С помощью формулы интегрирования по частям найдём $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$. Положив $U = \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$, $dV = dx$, получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \int \frac{2nx^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} +$$

$$+ \int \frac{2n(x^2 + a^2 - a^2)dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} -$$

$$-2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\, J_n - 2na^2 J_{n+1}.$$

Из крайних частей последнего равенства, разрешая относительно J_{n+1}, получаем рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} J_n + \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \tag{1.1}$$

для вычисления интеграла J_{n+1} при любом n. Действительно, $J_1 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$. Тогда $J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} =$

$= \frac{1}{2a^2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C$. Аналогично находятся $J_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$, J_4 и так далее. По приведённой схеме эти интегралы получены в таблицах интегралов [7] и других.

2.2.3. Простейшие преобразования подынтегрального выражения

Рассмотрим некоторые преобразования подынтегрального выражения, применение которых позволяет иногда достаточно легко найти интеграл.

Выделение целой части

Суть приёма видна из примеров.

Примеры

1.

$$\int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + C .$$

2.

$$\int \frac{x}{x+3}dx = \int \frac{x+3-3}{x+3}dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x+3} = x - 3\ln|x+3| + C .$$

3.

$$\int \frac{x^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4} = x - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C .$$

4.

$$\int \frac{x^2}{x^2+16}dx = \int \frac{x^2+16-16}{x^2+16}dx = \int dx - 16\int \frac{dx}{x^2+16} = x - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C .$$

5. $\int \frac{(x+2)^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4+4x}{x^2+4}dx = \int dx + \int \frac{4xdx}{x^2+4} =$

$$= \int dx + 2\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = x + 2\ln(x^2+4) + C .$$

Преобразование тригонометрического выражения

Наиболее часто применяется понижение степени с использованием формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

преобразование произведения в сумму по формулам

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

и некоторые другие.

Примеры

1. $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

2. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

3. $\int \cos 3x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x + \cos 4x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

4. $\int \cos 2x \sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 7x + \sin 3x)dx = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 3x}{6} + C$.

5. $\int \sin 2x \sin 6x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 8x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

6. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg}x - x + C$.

Выделение полного квадрата

Иногда удаётся получить табличный интеграл выделив в подынтегральной функции выражения вида $(ax+b)^2$, то есть полный квадрат двучлена $ax+b$. Покажем на примерах, как это делается.

Примеры

1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

Знаменатель дроби можем преобразовать следующим образом $x^2+4x+20 = (x^2+4x+4)+16 = (x+2)^2+4^2$. Сделав замену $x+2=t$, окончательно получаем $\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dt}{t^2+4^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C$.

2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}}$.

Выражение под корнем можно преобразовать следующим образом $18x-9x^2-5 = -9(x^2-2x+1)+9-5 = 4-9(x-1)^2$. Поэтому можем написать $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x-1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3(x-1)}{2} + C$.

3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$.

Аналогично предыдущим примерам можно написать $-x^2-2x = -(x^2+2x+1)+1 = 1-(x+1)^2$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = \arcsin(x+1) + C.$$

Выделение дифференциала

Интегралы $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx$.

Производная знаменателя равна $2x+4$. Поэтому

$$\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+20}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+20}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+4x+20)}{x^2+4x+20} - \frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+20}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+20) - \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.$$

(Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$ найден ранее.)

Аналогично, интеграл $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$ выделением в числителе дифференциала подкоренного выражения сводится к интегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{(4x+2)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$.

Производная подкоренного выражения равна $-2(x+1)$. Поэтому

$$\int \frac{(4x+2)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = -2\int \frac{(-2(x+1)-1)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} =$$

$$= -2\sqrt{1-(x+1)^2} + 2\arcsin(x+1) + C.$$

2.2.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью или рациональной функцией называется отношение двух полиномов (многочленов), то есть выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где*

$$P(x) = \sum_{l=0}^{k} b_l x^l = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

и

$$Q(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ -}$$

полиномы (многочлены) степеней k *и* n *соответственно. Если степень полинома (многочлена) в числителе меньше степени полинома в знаменателе, то есть* $k < n$, *то такую рациональную дробь называют правильной.*

В дальнейшем будем считать, что $k < n$, так как в противном случае всегда можно представить числитель в виде

$P(x) = Q(x)R(x) + S(x),$ где $R(x)$ и $S(x)$ - полиномы, называемые обычно, как и в случае действительных чисел, частным и остатком, причем степень полинома $S(x)$ меньше n. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}, \tag{1.2}$$

а интеграл от полинома $R(x)$ мы вычислять умеем.

Покажем на примере, как можно получить разложение (1.2). Пусть

$P(x)= x^7 + 3x^6 + 3x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2,\ Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2.$

Разделим полином $P(x)$ на полином $Q(x)$ так же, как мы делим вещественные числа. Имеем

$$
\begin{array}{l|l}
\_\, x^7 + 3x^6 + 3x^5 \quad - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & x^3 + 3x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^7 + 3x^6 + x^5 - 2x^4} & x^4 + 2x^2 - 4x + 7 \\
\qquad \_\, 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & \\
\qquad \underline{2x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 4x^2} & \\
\qquad\quad \_ - 4x^4 - 5x^3 + 8x^2 + x - 2 & \\
\qquad\quad \underline{- 4x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 8x} & \\
\qquad\qquad \_\, 7x^3 + 12x^2 - 7x - 2 & \\
\qquad\qquad \underline{7x^3 + 21x^2 + 7x - 14} & \\
\qquad\qquad\quad -9x^2 - 14x + 12 &
\end{array}
$$

Таким образом, мы получили целую часть дроби (частное от деления полинома P на полином Q) $R(x)= x^4 + 2x^2 - 4x + 7$ и остаток $S(x) = -9x^2 - 14x + 12$ от этого деления. Поэтому можем записать

$$\frac{x^7 + 3x^6 + 3x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2}{x^3 + 3x^2 + x - 2} = x^4 + 2x^2 - 4x + 7 + \frac{-9x^2 - 14x + 12}{x^3 + 3x^2 + x - 2}$$

.

Простейшими рациональными дробями назовём дроби $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)^n}$, $\frac{1}{x^2+a^2}$, $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $\frac{1}{x^2+px+q}$, $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

Рассмотрим интегрирование этих дробей. Интегралы $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$, $\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C,\ n\neq 1$, $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$ являются табличными, а интеграл $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ может быть найден или по рекуррентной формуле (1.1) $J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n$, полученной выше интегрированием J_n по частям, или с помощью таблиц [5,7]. Интегралы $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ в случае, когда знаменатель имеет комплексные корни (дискриминант $D=p^2-4q<0$), сводятся с помощью выделения полного квадрата к интегралам $\int\frac{dt}{t^2+a^2}$, $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ заменой $x+\frac{p}{2}=t$. Наконец, как это указывалось ранее, интегралы $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Таким образом, осталось научиться раскладывать

правильные рациональные дроби на сумму простейших.

По основной теореме алгебры любой полином может быть разложен на простейшие множители, то есть представлен в виде $Q(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = a_n \prod_{l=1}^{n}(x - x_l)$, где x_l – действительные или комплексные корни полинома $Q(x)$, повторенные столько раз, какова их кратность.

Пусть полином $Q(x)$ имеет n различных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда правильная рациональная дробь может быть представлена в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{x - x_n}$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - числа, подлежащие определению. Если x_i - корень кратности α, то ему в разложении на простейшие дроби соответствует α слагаемых $\dfrac{A_1}{x - x_i} + \dfrac{A_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \dfrac{A_\alpha}{(x - x_i)^\alpha}$. Если x_j - комплексный корень кратности α полинома с действительными коэффициентами, то комплексно–сопряженное число $\overline{x_j}$ - тоже корень кратности α этого полинома. Чтобы не иметь дело с комплексными числами при интегрировании рациональных дробей, слагаемые в разложении правильной рациональной дроби, соответствующие парам комплексно сопряженных корней, объединяют и записывают одним слагаемым вида $\dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}$, если $x_j, \overline{x_j}$ – корни кратности один. Если $x_j, \overline{x_j}$ – корни кратности α, то им соответствует α слагаемых, и соответствующее разложение имеет вид

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\alpha x + N_\alpha}{(x^2 + px + q)^\alpha}.$$

Таким образом, интегрирование правильных рациональных дробей свелось к интегрированию простейших дробей, рассмотренных выше.

Одним из способов нахождения коэффициентов A_j, M_j, N_j в разложении правильной рациональной дроби является следующий. Правую часть полученного разложения с неопределенными коэффициентами A_j, M_j, N_j приводят к общему знаменателю. Так как знаменатели правой и левой частей равны, то должны быть равны и числители, которые являются полиномами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (так как полиномы равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x), получаем систему линейных уравнений для определения этих коэффициентов. Продемонстрируем изложенное на примерах.

Пример 1. Найти $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$.

Корни знаменателя – $x_1 = -2$ кратности 1 и $x_2 = 1$ кратности 2. Поэтому $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x+2)}{x^3 - 3x + 2} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 + A_2 + A_3)x + (A_1 - 2A_2 + 2A_3)}{x^3 - 3x + 2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ -2A_1 + A_2 + A_3 = -1, \\ A_1 - 2A_2 + 2A_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = \dfrac{7}{9}, A_2 = \dfrac{2}{9}, A_3 = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{7}{9} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{7}{9} \ln|x+2| + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

Пример 2. Найти $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} dx$.

Корни знаменателя – $x_1 = 2$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3} = -1 \pm i$. Поэтому $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Mx + N)(x-2)}{x^3 - 2x - 4} =$$

$$= \frac{(A+M)x^2 + (2A - 2M + N)x + (2A - 2N)}{x^3 - 2x - 4}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A + M = 2, \\ 2A - 2M + N = 2, \\ 2A - 2N = -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 1, M = 1, N = 2$.

Таким образом,

$$\int \frac{2x^2+2x-2}{x^3-2x-4}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} +$$

$$+\int \frac{x+1+1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + \mathrm{C}\,.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}dx$.

Корни знаменателя – $x_{1,2}=5$ кратности 2 и пара комплексно – сопряжённых корней $x_{3,4}=-1\pm i$ кратности 1. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{(x-5)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2}\,.$$

Приводя к общему знаменателю и подобные, получаем

$$\frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{(A_1+M)x^3+(-3A_1+A_2-10M+N)x^2}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} +$$

$$+\frac{(-8A_1+2A_2+25M-10N)x+(-10A_1+2A_2+25N)}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + M = 0, \\ -3A_1 + A_2 - 10M + N = -14, \\ -8A_1 + 2A_2 + 25M - 10N = 54, \\ -10A_1 + 2A_2 + 25N = 43. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1=-2, A_2=-1, M=2,\ N=1$.

Таким образом,

$$\int \frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}dx = -2\int \frac{dx}{x-5} - \int \frac{dx}{(x-5)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx =$$
$$= -2\ln|x-5| + \frac{1}{x-5} + \ln(x^2+2x+2) - \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{2x^3+6x^2+4}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$.

Корни знаменателя – $x_1 = 1$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3,4,5} = \pm i$ кратности 2. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^3+6x^2+4}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Дальнейшие вычисления предлагается проделать самостоятельно.

2.2.5. Интегрирование простейших иррациональностей и выражений, содержащих тригонометрические функции

Материал этого пункта даётся для справки и является необязательным.

Рациональной функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ *назовём отношение двух полиномов от этих переменных, или, что то же самое, отношение двух линейных комбинаций всевозможных произведений целых степеней этих переменных.*

Пусть $R\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, ..., \sqrt[r_n]{x}\right)$ – рациональная функция от $x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, ..., \sqrt[r_n]{x}$. Эта функция, а следовательно, и интеграл от неё, рационализируется подстановкой $x = t^r$, где r – наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, ..., r_n$. Тогда $dx = rt^{r-1}dt$ и Тогда $dx = rt^{r-1}dt$ и, подставляя x и dx в подынтегральное выражение, получаем под интегралом рациональную функцию аргумента t. Аналогично, если подынтегральное выражение

$R\left(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ есть рациональная функция от $x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то подынтегральная функция рационализируется подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$, где r – наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда $x = \frac{dt^r - b}{-ct^r + a}$. Подставляя в исходное выражение, получаем рациональную функцию от t.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx.$

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Поэтому делаем замену $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5 dt$, и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6 - t^4} = 6\int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt = 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt =$$

$$= 6\int (t^2 + 1) dt + 6\int \frac{dt}{t^2 - 1} = 6\int (t^2 + 1) dt + 3\int \frac{dt}{t - 1} - 3\int \frac{dt}{t + 1} =$$

$$= 2t^3 + 6t + 3\ln|t - 1| - 3\ln|t + 1| + C = 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[5]{(x+2)^8}} dx$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 5 равно 10. Поэтому делаем замену $x + 2 = t^{10}$. Тогда $dx = 10t^9 dt$, и

$$\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2}-\sqrt[5]{(x+2)^8}}dx=\int \frac{t^6 10t^9 dt}{t^5-t^{16}}=10\int \frac{t^{10}}{1-t^{11}}dt=$$

$$=-\frac{10}{11}\ln\left|1-t^{11}\right|+C=-\frac{10}{11}\ln\left|1-(x+2)^{\frac{11}{10}}\right|+C.$$

Пример 3. $\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^3}}dx.$

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 4 равно 4. Поэтому делаем замену $x-1=t^4$. Тогда $dx=4t^3dt$, и

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^3}}dx=\int \frac{(t+1)4t^3dt}{t^2+t^3}=$$

$$=4\int tdt=2t^2+C=2\sqrt{x-1}+C.$$

Для интегрирования рациональных функций вида $R(\sin x,\cos x)$ применяют подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. Тогда $x=2\operatorname{arctg}t, dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. К сожалению, универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к большим вычислениям. Поэтому по возможности пользуются следующими подстановками. Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то делают замену $\cos x=t$, и тогда $\sin xdx=-dt$. При $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ полагают $\sin x=t$, при этом $\cos xdx=dt,$ а в случае $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ делают замену $\operatorname{tg}x=t$, при которой $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}, \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ или замену $\operatorname{ctg}x=t$. Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$.

Делаем замену $\cos x = t$. Тогда $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx = -\int t^4(1-t^2)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C =$ $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = $$
$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$.

Делаем замену $\mathrm{tg} x = t.$ Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^4(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^4} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg} x + C.$$

Заметим, что в данном примере лучше было сделать замену $\mathrm{ctg} x = t$, так как эта подстановка быстрее приводит к цели. Действительно, тогда $dx = -\frac{dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и поэтому $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = -\int \frac{(1+t^2)^2 dt}{(1+t^2)} = -\int (1+t^2)dt = -\frac{t^3}{3} - t + C$

$$= -\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg} x + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \cos^3 x \sin^8 x dx.$

Делаем замену $\sin x = t$. Тогда $\int \cos^3 x \sin^8 x dx =$ $\int t^8(1-t^2)dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx$.

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-t^2)dt}{1+t^2} = \int \frac{2-(t^2+1)}{1+t^2} dt =$$
$$2\,\mathrm{arctg} t - t + C = 2\,\mathrm{arctg} \sin x - \sin x + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{1}{\cos^6 x} dx$.

Делаем замену $\mathrm{tg} x = t$. Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\cos^6 x} dx = \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{(1+t^2)} = \int (1+t^2)^2 dt =$$
$$= \int dt + \int 2t^2 dt + \int t^4 dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$
$$= \mathrm{tg} x + \frac{2\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C$$

Для интегрирования рациональных выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ применяют замену $x = a \sin t$ или $x = a \cos t$, выражений вида $R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ - подстановку $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$, а для интегрирования выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ применяют замену $x = a\,\mathrm{tg} t$ или $x = a\,\mathrm{ctg} t$. Можно в этих случаях пользоваться также заменами с гиперболическими функциями.

Пример 10. Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$ воспользуемся заменой $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t dt,$

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$, и исходный интеграл равен интегралу $\int\frac{2\cos t dt}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}$. Тогда $\int\frac{2\cos t\,dt}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}=\int\frac{dt}{4\sin^2 t}=-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\,t+C.$ Делая обратную замену $t=\arcsin\frac{x}{2}$, получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}(\arcsin\frac{x}{2})+C$. После преобразований получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$.

Пример 11. Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ воспользуемся заменой $x=\mathrm{tg}\,t$. Тогда $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}=\frac{1}{\cos t}$, и исходный интеграл равен интегралу $\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$. Тогда $\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+C.$ Делая обратную замену $t=\mathrm{arctg}\,x$, получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{\sin(\mathrm{arctg}\,x)}+C$. После преобразований получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

2.3. Задача интегрирования в конечном виде

В этой главе мы научились находить первообразные, а следовательно, и неопределённые интегралы для некоторых типов функций. В связи с этим совершенно естественным является вопрос о классе функций, для каждой из которых существует первообразная. Ответ на него даёт следующая теорема.

Теорема. Для любой непрерывной функции существует первообразная.

Обобщение понятия первообразной на функции, имеющие конечное число точек разрыва, даётся следующим образом.

Определение. **Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) на отрезке $[a,b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, и $F'(x)=f(x)$ во всех точках существования производной функции $F(x)$.**

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для любой функции, имеющей конечное число точек разрыва 1-го рода, существует первообразная, дифференцируемая во всех точках непрерывности подынтегральной функции.

Доказательство этих результатов, а также решение задачи восстановления первообразной будут приведены в п. 2.2.

Как известно, элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и им обратные функции, а также полученные из перечисленных с помощью конечного числа их суперпозиций и конечного числа операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корня. При изучении производных мы видели, что производная элементарной функции снова есть элементарная функция. Для первообразной это не так. Не для каждой элементарной функции первообразная есть элементарная функция. Это даёт возможность введения новых, неэлементарных функций, с помощью операции интегрирования. Интегралы от функций, для которых первообразная не является элементарной функцией, называются неберущимися. Наиболее известными неэлементарными функциями являются $\int e^{-x^2}dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{si}x + C$ - интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}dx = \mathrm{ci}x + C$ - интегральный косинус, $\mathrm{li}x + C = \int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^y}{y}dy$ - интегральный логарифм.

2.4. Замена переменных в определённом интеграле

Иногда возникает необходимость перейти в интеграле к новой переменной. Имеет место следующий результат.

Теорема 2.7. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ - дифференцируемое биективное (взаимно однозначное) отображение, такое, что $\varphi(\alpha)=a;\ \varphi(\beta)=b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

Доказательство. Докажем теорему в предположении, что функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha,\beta]$.Это выполнено, например, когда функции $f(x)$ и $\varphi'(t)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода (кусочно–непрерывны), так как в этом случае функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ также кусочно–непрерывна и, по следствию из теоремы 2.3, интегрируема. Разобьём отрезок $[\alpha,\beta]$ на части точками $t_0, t_1, \dots, t_n$. Этому разбиению отрезка $[\alpha,\beta]$ соответствует разбиение отрезка $[a,b]$ точками $x_i=\varphi(t_i)$. Так как $\varphi(t)$ дифференцируема, то, по теореме Лагранжа о конечных приращениях [3], $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, где $\tau_i\in[t_i,t_{i+1}]$ - некоторая точка. Положим $\xi_i=\varphi(\tau_i)\in[x_i,x_{i+1}]$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i\ .$$

В левой части этого равенства стоит интегральная сумма для интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а справа - для интеграла $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Так как оба интеграла существуют, то, переходя в этом равенстве к пределу по всевозможным разбиениям, получаем справедливость утверждения теоремы.

Примеры

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$. Положим $x=t^2$. Тогда $\alpha=0,\ \beta=2$, $dx=2tdt$ и поэтому исходный интеграл равен

$$\int\limits_0^2 \frac{2t^3dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{((t^3+1)-1)dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{((t+1)(t^2-t+1)-1)dt}{1+t} =$$

$$= 2\int\limits_0^2 (t^2-t+1)dt - 2\int\limits_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+2-(\ln 3-\ln 1)\right) = \frac{16}{3}-2\ln 3.$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$. Положим $x+1=t^2$. Тогда $\alpha=2,\ \beta=3$, $dx=2tdt$ и поэтому

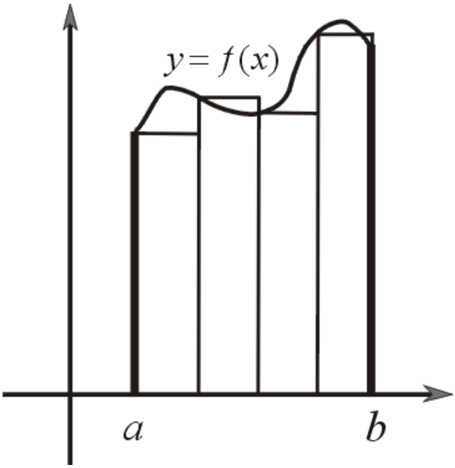
$$\int\limits_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}} = 2\int\limits_2^3 \frac{tdt}{t+2} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int\limits_2^3 dt - 4\int\limits_2^3 \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t\Big|_2^3 - 4\ln(t+2)\Big|_2^3 = 2(3-2)-4(\ln 5-\ln 4) = 2-4\ln 1{,}25.$$

2.5. Приближённое вычисление определённого интеграла

Если первообразная является неэлементарной функцией или находится достаточно сложно, то использование формулы Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла затруднено. В этом случае определённый интеграл вычисляют приближённо, чаще всего численно. Получением некоторых формул для численного вычисления интеграла мы и займёмся.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$. Так как интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей точками $x_i = a + ih, i = 0,1,...,n$, где $h = \frac{b-a}{n}$. Положив в интегральной сумме $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ последовательно $\xi_i = x_i$, $\xi_i = x_{i+1}$ и $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, получаем в результате формулы для приближённого вычисления интеграла



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

называемые формулами прямоугольников.

Называются они так потому, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}, y = f(x)$, заменяется в первом случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}$, $y = f(x_i)$, во втором случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}$,

$y = f(x_{i+1})$, а в третьем случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}$, $y = f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

Если криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}, y = f(x)$, заменить трапецией с вершинами в точках $(x_i,0), (x_{i+1},0),(x_i, f(x_i)),(x_i, f(x_{i+1}))$, то для приближённого вычисления интеграла получаем формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

называемую формулой трапеций.

Точность формул прямоугольников и формулы трапеций имеет порядок $\dfrac{1}{n^2}$.

2.6. Несобственные интегралы

Выше был определён интеграл для ограниченных и заданных на ограниченном отрезке функций. Распространим понятие интеграла на случаи, когда одно или оба этих условия нарушаются.

2.6.1. Несобственные интегралы первого рода

Рассмотрим вначале случай, когда функция задана на промежутке $[a,\infty)$. Так как понятие интеграла по конечному промежутку уже введено, то рассмотрим конечный отрезок $[a, A]$ входящий в полуинтервал $[a,\infty)$ и, соответственно, интеграл $\int_a^A f(x)dx$ по этому промежутку. Переходя к пределу, при стремлении A к бесконечности, получаем понятие несобственного интеграла по бесконечному промежутку (первого рода). Формализация этой идеи приводит к следующему определению.

Определение. **Пусть $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a,\infty)$ и для всякого $A \geq a$ существует интеграл**

$\int\limits_a^A f(x)dx.$ **Предел** $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ **называется несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку) и обозначается** $\int\limits_a^\infty f(x)dx.$ **Если** $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ **существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется расходящимся**.

Пример 1. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha=1$. Тогда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} =$ $= \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim\limits_{A\to\infty}(\ln A - \ln 1) = \infty.$ Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha=1$ расходится. Пусть теперь $\alpha\neq 1$. Тогда

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{A\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^A = \begin{cases} \infty & \text{при } \alpha<1, \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1, \end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha\le 1$ расходится и при $\alpha>1$ сходится. *Этот интеграл часто используется в признаке сравнения в качестве эталонного.*

Пример 2. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2-2x+2}$.

Имеем

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2-2x+2} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x^2-2x+2} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$= \lim\limits_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(x-1)\Big|_1^A\right) = \lim\limits_{A\to\infty}(\operatorname{arctg}(A-1)-\operatorname{arctg}0) = \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 3. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty xe^{-x^2}dx = \int\limits_1^\infty x\exp(-x^2)dx$.

По определению получаем

$$\int\limits_1^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^A xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}(-\tfrac{1}{2})\int\limits_1^A e^{-x^2}d(-x^2) =$$

$$\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^A\right) = \frac{1}{2e} - \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}e^{-A^2} = \frac{1}{2e}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $0{,}5e^{-1}$.

Пример 4. Для интеграла $\int\limits_e^\infty \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ имеем

$$\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty}\int\limits_e^A \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_e^A = \lim_{A\to\infty}\left(2\sqrt{\ln A}-2\right) = \infty$$

.

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 5. Для интеграла $\int\limits_e^\infty \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ по определению имеем

$$\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{A\to\infty}\int\limits_e^A \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^A = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln A}+1\right) = 1$$

.

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 6. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx$, $\alpha > 0$.

По определению

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{\alpha})\int\limits_0^A e^{-\alpha x}d(-\alpha x) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^A\right) = \frac{1}{\alpha} - \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\alpha}e^{-A} = \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{1}{\alpha}$.

Нам в дальнейшем понадобится следующий важный результат.

Теорема 2.8. (Критерий Коши). Несобственный интеграл первого рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A \geq a$ такое, что для всех $A_1, A_2 \geq A$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

Доказательство этого результата опустим.

Определение. **Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx.$**

Отметим, что если несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно, то он сходится. Действительно, тогда для интеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ выполнен критерий Коши, а в силу справедливости неравенства $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx\right|$ критерий Коши выполнен и для интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx.$

Обратное утверждение неверно, точнее, если интеграл сходится, то он не обязан сходиться абсолютно.

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ определяется аналогично. Предлагается проделать это самостоятельно.

Для несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ можем записать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ и назвать этот интеграл сходящимся, если сходятся оба слагаемых. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то будем считать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ расходящимся. В качестве точки a выбирают обычно 0.

Пример 7. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. По определению сходимости этого интеграла получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{A_1 \to -\infty} \int\limits_{A_1}^{0} \frac{xdx}{1+x^2} + \lim_{A_2 \to +\infty} \int\limits_{0}^{A_2} \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{A_1 \to -\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0} + \tfrac{1}{2} \lim_{A_2 \to +\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2}.$$

Так как оба слагаемых расходятся, то исходный интеграл расходится. Получаемая при этом неопределённость $\infty - \infty$ при разных скоростях стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$ даёт разные результаты. В частности, если $A_1 = -\sqrt{n^2-1}$, $A_2 = \sqrt{n-1}$, то

$$\frac{1}{2}\lim_{A_1\to-\infty}\ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0}+\frac{1}{2}\lim_{A_2\to+\infty}\ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\ln n-2\ln n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\tfrac{n}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}=-\infty\,.$$

Если $A_1=-\sqrt{n-1}$, $A_2=\sqrt{n^2-1}$, то абсолютно аналогично показывается, что этот предел равен $+\infty$. Подобрав скорости стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$, можно получить в пределе любое заранее заданное число от $-\infty$ до $+\infty$.

С другой стороны, при согласованном стремлении верхнего и нижнего пределов к ∞ можем записать

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{-A}^{A}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\ln(A^2+1)-\ln(A^2+1))=0.$$

Это дает возможность ввести новое понятие.

Определение. **Говорят, что несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится в смысле главного значения Коши, если существует и конечен предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$.**

В случае, если рассматривают сходимость интеграла в смысле главного значения Коши, то перед знаком интеграла добавляют буквы V.P., то есть пишут V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ (V.P. – начальные буквы французских слов valeur principal переводящихся как «главное значение»).

Рассмотренный выше пример показывает, что несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ может сходиться в смысле главного значения Коши и расходиться в обычном смысле.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов первого рода $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

1. Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, то для всякого $b \ge a$ интеграл $\int\limits_b^\infty f(x)dx$ сходится и $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^\infty f(x)dx.$

2. Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_a^\infty \alpha\, f(x)dx$ и имеет место равенство $\int\limits_a^\infty \alpha\, f(x)dx = \alpha \int\limits_a^\infty f(x)dx.$

3. Если интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходятся, то сходятся интегралы $\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx$ и имеет место равенство

$$\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Обратное утверждение неверно, то есть, если интеграл от алгебраической суммы функций сходится, то интегралы от слагаемых сходиться не обязаны. Например, интегралы $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$ и

$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ расходятся, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$, как будет показано позднее, сходится.

Для других типов несобственных интегралов первого рода свойства аналогичны.

Сходимость не всех несобственных интегралов первого рода просто выяснить по определению. Поэтому часто используют так называемые признаки сравнения в непредельной и предельной формах.

Теорема 2.9. Пусть для всякого $x \ge A (A \ge a)$ выполнено неравенство $|f(x)| \le |g(x)|$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ абсолютно сходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, а если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ абсолютно расходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ абсолютно расходится.

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы для всех $A \ge a$ имеем $\int\limits_a^{A} |f(x)|dx \le \int\limits_a^{A} |g(x)|dx$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{\infty} |g(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^{A} |f(x)|dx$ есть монотонно возрастающая ограниченная сверху функция от A, и поэтому имеет предел при $A \to \infty$. Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx$ расходится, то $\lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_a^{A} |f(x)|dx = \infty$, и поэтому $\lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_a^{A} |g(x)|dx = \infty$.

Теорема 2.10. Если $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые в $+\infty$ одного порядка малости, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K\neq 0,\infty$, то интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ либо оба абсолютно сходятся, либо оба абсолютно расходятся.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=|K|$. Возьмем $0<\varepsilon<|K|$. По определению предела существует $M>0$ такое, что для всех $x>M$ выполнено неравенство $|K|-\varepsilon<\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|<|K|+\varepsilon,$ а следовательно, и неравенство $|g(x)|\big(|K|-\varepsilon\big)<|f(x)|<\big(|K|+\varepsilon\big)|g(x)|$. Из последнего неравенства и теоремы 2.9 получаем утверждение теоремы.

Замечание. После изучения теоремы 2.10 может сложиться впечатление, что для сходимости несобственного интеграла первого рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно малой при $x\to\infty$. То, что это не так, показывает следующий пример [15].

Возьмем функцию, график которой состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $\left(n-\dfrac{1}{2^n},0\right)$, $(n,1)$, $\left(n+\dfrac{1}{2^n},0\right)$, $n=1,2,\ldots$. Ее аналитическое выражение имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 2^n x+1-n2^n, & x\in\left[n-\dfrac{1}{2^n},n\right],\\ -2^n x+1+n2^n, & x\in\left[n,n+\dfrac{1}{2^n}\right],\\ 0, & x\notin\left[n-\dfrac{1}{2^n},n+\dfrac{1}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Площадь, заключенная между графиком этой функции и осью OX, равна сумме площадей треугольников с вершинами в точках $\left(n-\frac{1}{2^n},0\right)$, $(n,1)$, $\left(n+\frac{1}{2^n},0\right)$, $n=1,2,\ldots$. Так как площадь каждого такого треугольника равна $\frac{1}{2^n}$, $n=1,2,\ldots$, то $\int\limits_1^\infty f(x)dx=\frac{1}{4}+\frac{0,25}{1-0,5}=\frac{3}{4}$. Заметим, что условие ограниченности функции $f(x)$ несущественно, так как вершины треугольников можно взять, например, в точках $\left(n-\frac{1}{n2^n},0\right)$, (n,n), $\left(n+\frac{1}{n2^n},0\right)$, $n=1,2,\ldots$.

Пример 8. Интегралы $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ и $\int\limits_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ сходятся абсолютно при любом $\alpha>1$. Действительно, $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}$, $\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}$ для всех $x>0$, а интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ – сходящийся, а так как $\frac{1}{x^\alpha}>0$ если $x>0$, то и абсолютно сходящийся при любом $\alpha>1$. Напомним, что если $f(x)\ge 0$, то понятия сходимости и абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ совпадают.

Покажем теперь, что при любом $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится, но не абсолютно. Действительно, $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_\pi^A \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$. Применим к стоящему справа интегралу формулу интегрирования по частям. Положим $U=\frac{1}{x^{\alpha}}$, $dV=\sin x dx$. Тогда $dU=-\frac{\alpha\, dx}{x^{\alpha+1}}$, $\int dV=\int \sin x dx=-\cos x+C$ и можем положить $V=-\cos x$. Далее получаем

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\Bigg|_{\pi}^{A}-\int_{\pi}^{A}\frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}dx\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\Bigg|_{\pi}^{A}\right)-\lim_{A\to\infty}\left(\int_{\pi}^{A}\frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}dx\right).$$

Предел выражения справа существует, так как оба слагаемых имеют конечный предел. Действительно $\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi}^{A}\right)=\frac{1}{\pi}$, а так как интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx$ сходится абсолютно при $\alpha>0$ (показано выше), то существует и конечен предел второго слагаемого. Поэтому существует предел выражения слева и, следовательно, интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ сходящийся. Аналогично показывается, что при любом $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx$ сходится. Покажем теперь, что при любом $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ не является абсолютно сходящимся. Действительно, для всех вещественных чисел выполнено неравенство $\sin^{2} x\le|\sin x|$. Следовательно, можем записать

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx\ge\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{\sin^{2} x}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{1-\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx=$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{dx}{2x^{\alpha}} - \lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx.$$

Так как при $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходящийся и $\frac{1}{x}>0$, то $\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{dx}{2x^{\alpha}}=\infty$. Далее, интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx$ сходящийся, так как можем записать $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx = 2^{\alpha-2}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(2x)^{\alpha}}d(2x) = 2^{\alpha-2}\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos u}{u^{\alpha}}du$, а последний интеграл сходящийся. Следовательно, предел второго слагаемого конечен. Тогда $\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx=\infty$ и поэтому $\int_{\pi}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится.

Заметим, что при $\alpha=1$ эти примеры рассмотрены в [5] и [8].

Пример 9. Выяснить сходимость интеграла $\int_{1}^{\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}dx.$

Так как $\left|\frac{2+\sin x}{x^2}\right| \le \frac{3}{x^2}$ для всех $x\ge 1,$ а интеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{3}{x^2}dx$ сходится, то и исходный интеграл тоже сходится.

Пример 10. Выяснить сходимость интеграла $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{x(x+1)} = \begin{cases} 0, & \text{если}\,\alpha<2; \\ 1, & \text{если}\,\alpha=2; \\ \infty, & \text{если}\,\alpha>2. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 2 и так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то исходный интеграл сходится.

Пример 11. Выяснить сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$ получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{(x+1)\sqrt{x+2}}=\begin{cases}0, & \text{если}\,\alpha<1{,}5;\\ 1, & \text{если}\,\alpha=1{,}5;\\ \infty, & \text{если}\,\alpha>1{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 1,5 и так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1,5}}$ сходится, то исходный интеграл сходится.

Пример12. Выяснить сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}}=\begin{cases}0, & \text{если}\,\alpha<\frac{4}{3};\\ 1, & \text{если}\,\alpha=\frac{4}{3};\\ \infty, & \text{если}\,\alpha>\frac{4}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен $\frac{4}{3}$ и, следовательно, интеграл сходится.

Пример 13. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}\;x^{\alpha}}{x^2+4}=\begin{cases}0, & \text{если}\ \alpha<1{,}5;\\ 1, & \text{если}\ \alpha=1{,}5;\\ \infty, & \text{если}\ \alpha>1{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 1,5 и, следовательно, интеграл сходится.

Пример 14. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x^3+2}}{x^2+5}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}\sqrt{x^3+2}}{x^2+5}=\begin{cases}0, & \text{если}\ \alpha<0{,}5;\\ 1, & \text{если}\ \alpha=0{,}5;\\ \infty, & \text{если}\ \alpha>0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 0,5 и, следовательно, интеграл расходится.

Пример 15. Интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}e^{-x^2}dx$ сходится, так как имеет место оценка $e^{-x^2}\le xe^{-x^2}$ для всех $x\ge 1$, а интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}xe^{-x^2}dx$, как было показано ранее, сходящийся.

Пример 16. Интеграл $\int_e^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$ расходится, так как имеет место оценка $\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\geq\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ для всех $x\geq e$, а интеграл $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, как было показано ранее, расходится.

2.6.2. Несобственные интегралы второго рода

Предположим теперь, что подинтегральная функция $f(x)$ неограничена на промежутке (a,b). Эта особенность может быть в точках a, b или во внутренней точке этого промежутка. Мы рассмотрим случай с особенностью в точке b, то есть в случае, когда функция $f(x)$ неограничена в некоторой окрестности точки b. При этом функцию будем считать заданной на полуинтервале $[a,b)$. Рассмотрим интеграл $\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ от функции $f(x)$ по несколько меньшему отрезку $[a,b-\delta]$, входящему в полуинтервал $[a,b)$. Устремляя в интеграле $\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ верхний предел интегрирования к точке b, то есть при δ стремящемся к нулю, получаем понятие несобственного интеграла второго рода (интеграла от неограниченной функции). Формализация рассмотренной идеи приводит к следующему определению.

Определение. **Пусть $f(x)$ задана на полуинтервале $[a,b)$ и неограничена вблизи точки b (в некоторой окрестности точки b). Пусть далее для всякого $0<\delta<b-a$ существует интеграл $\int_a^{b-\delta} f(x)dx.$ Предел $\lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода (интегралом от не-**

ограниченной функции) и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx.$ **Если** $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ **существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется расходящимся.**

Аналогично определяются несобственные интегралы второго рода в случаях, когда подынтегральная функция неограниченна вблизи точки a, во внутренней точке отрезка $[a,b]$, вблизи точек a и b одновременно. Для удобства изложения мы рассматриваем случай особенности на верхнем пределе. Для остальных вариантов предлагается проделать это самостоятельно.

Пример 1. Рассмотрим $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} =$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \; = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty.$ Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha = 1$ расходится. Пусть теперь $\alpha \neq 1.$ Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_\varepsilon^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha < 1, \\ \infty & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha < 1$ сходится и при $\alpha \geq 1$ расходится. Аналогичные выводы можно сделать про несобственные интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$.

Интегралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ *используются в признаке сравнения в качестве эталонных.*

Пример 2. В интеграле $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$, поэтому $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^e \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0} 2\sqrt{\ln x}\Big|_{1+\delta}^e =$
$\lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{\ln e} - 2\sqrt{\ln(1+\delta)}\right) = 2$.

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 3. В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$, поэтому интеграл разбиваем на сумму двух, например, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} + \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$. Для первого из них $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{0,5} \frac{d\ln x}{\sqrt{-\ln x}} = -\lim\limits_{\delta\to 0} 2\sqrt{-\ln x}\Big|_{\delta}^{0,5} =$
$\lim\limits_{\delta\to 0}\left(-2\sqrt{-\ln 0,5} + 2\sqrt{-\ln\delta}\right) = -\infty$. Следовательно, интеграл расходится, и поэтому исходный интеграл также расходится.

Пример 4. В интеграле $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$, поэтому $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{1/e} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{\delta}^{1/e} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln \frac{1}{e}} + \frac{1}{\ln\delta}\right) = 1$
Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 5. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$.

Поэтому $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \lim\limits_{\delta\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\delta} = \lim\limits_{\delta\to 0} (\arcsin(1-\delta) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$. По определению имеем $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{1+\delta}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\delta}^2\right) 2\sqrt{x-1})\Big|_{1+\delta}^2 = 2$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 7. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=2$. По определению имеем $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim\limits_{\delta\to 0} \left(2\sqrt{2-x}\right)\Big|_1^{2-\delta} = 2$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 8. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=2$. Поэтому разбиваем интеграл на сумму двух $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$. Для первого из них имеем $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = -\lim\limits_{\delta\to 0} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-x)^2}\right)\Bigg|_1^{2-\delta} = \frac{3}{2}$. Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого. Следовательно, исходный интеграл сходится.

Аналогично случаю несобственных интегралов первого рода формулируются и доказываются критерий Коши и признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 2.11.(Критерий Коши). Несобственный интеграл второго рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\delta_1, \delta_2 \le \delta$ выполняется неравенство $\left| \int\limits_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Доказательство этого результата опустим.

Теорема 2.12. Пусть для всякого $b - \delta \le x < b$ выполнено неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Теорема 2.13. Если $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно большие одного порядка роста, то есть $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0, \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Замечание. После изучения теоремы 2.13 может сложиться впечатление, что для сходимости несобственного интеграла второго рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно большой при $x \to b$. То, что это не так, показывает следующий пример.

Пусть функция $f(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность точек интервала (a,b), сходящаяся к точке b. Возьмем функцию $\varphi(x)$, график которой на отрезке $[a, x_1]$ совпадает с графиком функции $f(x)$, а на интервале (x_1, b) состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $(x_{2k-1}, 0)$, $(x_{2k}, f(x_{2k}))$, $(x_{2k+1}, 0)$, $k = 1, 2, \ldots$. Функция $\varphi(x)$ не является бесконечно большой, так как $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x)$ не существует ($\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(x_{2k-1}) = 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(x_{2k}) = \infty$). По теореме 2.12, интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, так как по построению $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$.

Пример 9. Для интеграла $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{3-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 2$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Точки $x = \pm\sqrt{3}$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x-2}$, имеем

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^{\alpha}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{3-x^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 0{,}5; \\ -1, & \text{если } \alpha = 0{,}5; \\ 0, & \text{если } \alpha > 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,5, и интеграл сходится.

Пример 10. В интеграле $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{9-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 1$ и $x = \pm 3$. Точки $x = 1$ и $x = -3$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{3-x}$, имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{9-x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{3+x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если}\ \alpha<\frac{1}{3};\\ \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{6}}, & \text{если}\ \alpha=\frac{1}{3};\\ 0, & \text{если}\ \alpha>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $\frac{1}{3}$, и интеграл сходится.

Пример 11. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{\sin x}}{x^2}dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}=\begin{cases}\infty, & \text{если}\ \alpha<1{,}5;\\ 1, & \text{если}\ \alpha=1{,}5;\\ 0, & \text{если}\ \alpha>1{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 1,5, и интеграл расходится.

Пример 12. В интеграле $\int\limits_0^1\frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x}dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\begin{cases}\infty, & \text{если}\ \alpha<\frac{2}{3};\\ 1, & \text{если}\ \alpha=\frac{2}{3};\\ 0, & \text{если}\ \alpha>\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $\frac{2}{3}$, и интеграл сходится.

Пример 13. Выясним сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)}{x}dx.$

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\cdot x^{\alpha}}{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^4}}=\begin{cases}\infty, & \text{если}\ \alpha<0{,}8;\\ 1, & \text{если}\ \alpha=0{,}8;\\ 0, & \text{если}\ \alpha>0{,}8.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $0{,}8$, и интеграл сходится.

Пример 14. В интеграле $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если}\ \alpha<0{,}5;\\ 1, & \text{если}\ \alpha=0{,}5;\\ 0, & \text{если}\ \alpha>0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $0{,}5$, и интеграл сходится.

Пример 15. Выяснить сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$. Обе входят в промежуток интегрирования. Разбиваем интеграл на два

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}=\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}+\int_{0,5}^1\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

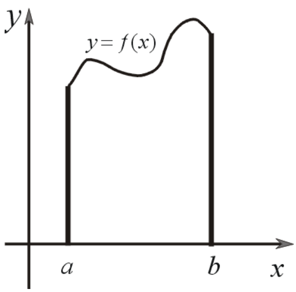
Первый из этих интегралов сходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x \to 0$ относительно $\frac{1}{x}$ равен $\frac{1}{2}$, а второй– расходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x \to 1$ относительно $\frac{1}{1-x}$ равен 1. Поэтому интеграл расходится.

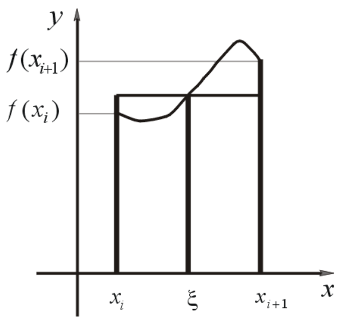
2.7. Приложения определённого интеграла

Материал даётся для справки.

2.7.1. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривыми $y=0, x=a, x=b$, $y=f(x)$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на части точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Заменим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y=0, x=x_i, x=x_{i+1}, y=f(x)$, прямоугольником $y=0, x=x_i, x=x_{i+1}$, $y=f(\xi_i)$. Площадь этого прямоугольника равна $f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=f(\xi_i)\Delta x_i$ и, если f - непрерывная функция, то при достаточно малом Δx_i близка площади заменяемой трапеции. Просуммировав, получим, с одной стороны, приближенное значение площади криволинейной трапеции, с другой стороны, ин-





тегральную сумму $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ для интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при увеличении числа точек разбиения, получаем площадь S исходной криволинейной трапеции $S=\int_a^b f(x)dx$.

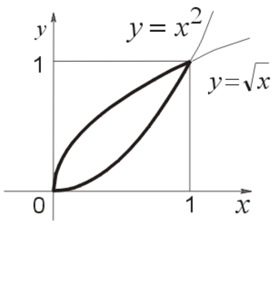
Назовём трапецию простейшей областью, если она ограничена кривыми $x=a, x=b, y=f_1(x), y=f_2(x)$ и для всех $x\in[a,b]$ выполнено неравенство $f_1(x)\le f_2(x)$. Нетрудно видеть, что для простейшей области $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

Аналогично, если $\varphi_1(y)\le\varphi_2(y)$ для всех $y\in[c,d]$, то для криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=c, y=d,\quad x=\varphi_1(y), x=\varphi_2(y)$ (простейшей области второго типа), имеем

$$S=\int_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy.$$

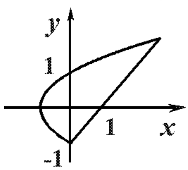
В общем случае плоскую область разбивают на простейшие области рассмотренных выше типов.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $x=y^2$. Эти кривые пересекаются в точках $A(0,0)$ и $B(1,1)$. Поэтому



$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной ли-



ниями $y^2 = 2x+1$ и $x - y - 1 = 0$. Эти кривые пересекаются в точках $A(0,-1)$ и $B(4,3)$. В данном случае лучше рассматривать простейшую область второго типа. Поэтому

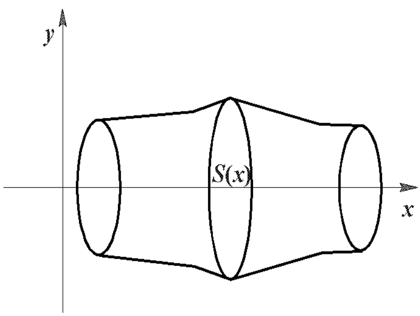
$$S = \int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2}+\frac{3y}{2}-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{16}{3}.$$

Пример 3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=-2$, $x=1$, $y=0$, $y=e^{-|x|}$. В данном случае

$$S = \int_{-2}^{1} e^{-|x|}dx = \int_{-2}^{0} e^{-|x|}dx + \int_{0}^{1} e^{-|x|}dx = \int_{-2}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{1} e^{-x}dx =$$

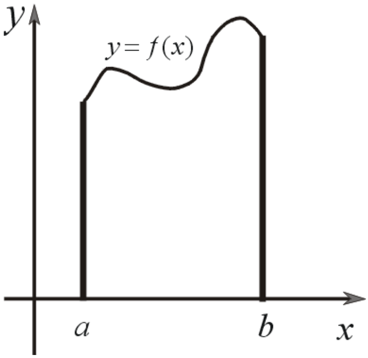
$$= e^{x}\Big|_{-2}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{1} = 1 - e^{-2} - e^{-1} + 1 = 2 - e^{-1} - e^{-2}.$$

2.7.2. Вычисление объёмов



Пусть область такова, что для $\forall x \in [a,b]$ известна площадь $S(x)$ сечения плоскостью $x = const$. Тогда, заменяя объём области, заключенной между плоскостями $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, на объём цилиндра $S(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i - некоторая точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ получаем $V = \int_a^b S(x)dx$.

Для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ вокруг оси OX, имеем



$V = \pi\int\limits_a^b y^2 dx = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$. Если эту трапецию вращать вокруг оси OY, то можно показать, что $V = 2\pi\int\limits_a^b xf(x)dx$.

Аналогично для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $c \le y \le d,\ 0 \le x \le \varphi(y)$ вокруг оси OY, имеем $V = \pi\int\limits_c^d x^2 dy = \pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$. Если эту трапецию вращать вокруг оси OX, то $V = 2\pi\int\limits_c^d y\varphi(y)dy$.

Пример 1. Трапеция ограничена кривыми $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$. Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OX.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = \pi\int\limits_0^1 f^2(x)dx = \pi\int\limits_0^1 xdx = \frac{\pi}{2}$$

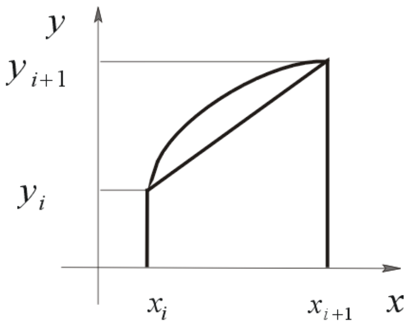
Пример 2. Трапеция ограничена кривыми $y = x, y = 0, x = 1$. Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OY.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = 2\pi\int\limits_0^1 xf(x)dx = 2\pi\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{2\pi}{3}.$$

2.7.3. Вычисление длины дуги кривой

Рассмотрим кривую L. Разделим кривую на части точками $(x_i, y_i), i = 1,\dots,n.$ Заменим дугу кривой между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) хордой, эти точки соединяющей. Тогда для длины дуги Δl_i имеем $\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Просуммировав по всем точкам деления, получаем $l \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.



Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t),\ y(t))^T$. Разделив отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $t_0, t_1, \dots, t_n$ получаем разбиение кривой точками $(x(t_i),\ y(t_i))^T$. Тогда $\Delta l_i \approx \sqrt{\left(x_t'(\tau_i)\right)^2 + \left(y_t'(\tau_i)\right)^2}\,\Delta t_i$, где τ_i - точка, лежащая между t_i и t_{i+1}. Просуммировав по всем точкам деления, получаем $l \approx \sum_{i=1}^{n-1} \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\left(x_t'(\tau_i)\right)^2 + \left(y_t'(\tau_i)\right)^2}\,\Delta t_i$. Переходя в этой сумме к пределу при увеличении числа точек разбиения, имеем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2 + \left(y_t'(t)\right)^2}\,dt. \tag{2.1}$$

Аналогично, для пространственной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t),\ y(t),\ z(t))^T = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, длина кривой равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 + \left(z_t'\right)^2}\, dt\,. \qquad (2.2)$$

Для кривой, заданной явно уравнением $y = f(x)$, формула (2.1) приобретает вид

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx\,. \qquad (2.3)$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} x'_{\varphi} = r'_{\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y'_{\varphi} = r'_{\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{cases}$$

Подставляя в формулу (2.1) для вычисления длины кривой, получаем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r_{\varphi}'\right)^2 + (r)^2}\, d\varphi\,. \qquad (2.4)$$

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{8}$. Так как кривая задана явно, то $l=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$. Делаем замену $t=\sqrt{x^2+1}$. Тогда $x^2=t^2-1$, $2xdx=2tdt$, и поэтому

$$l=\int\limits_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_2^3 dt+\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\int\limits_2^3 dt+\frac{1}{2}\int\limits_2^3\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\limits_2^3\frac{dt}{t+1}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_2^3=1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ заключенной между точками $t_1=0$ и $t_2=2\pi$.

Так как кривая задана параметрически, то $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t, y'_t=3a\sin^2 t\cos t$, и поэтому

$$l=3a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=\frac{3a}{2}\int\limits_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt=$$

$$=6a\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=-6a\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=3a\,.$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой $\rho=2\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ Так как кривая задана в полярной системе координат, $\rho'_\varphi=-2\sin\varphi$, то

$$l=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\,d\varphi=2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi\,.$$

Получился ожидаемый результат, так как уравнение $\rho=2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, определяет окружность радиуса 1 с центром в точке $x=1$, $y=0$.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

3.1. Кривые на плоскости и в пространстве

Рассмотрим вектор-функцию одного аргумента

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - векторы декартова базиса. В случае плоскости эта запись приобретает вид $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Если функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$ и начала всех векторов $r(t)$ поместить в начало координат, то их концы опишут в R^3 некоторую кривую, называемую годографом вектор-функции $r(t)$, а вектор-функцию $r(t)$ называют векторным представлением этой кривой. Эта функция широко используется в физике для описания движения материальной точки М, так как, чтобы знать положение точки в момент времени t, необходимо указать координаты этой точки как функции времени, т.е. задать ее в виде $M(x(t), y(t), z(t))$. Например, функция

$$r(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

определяет движение точки по винтовой линии, а функция

$$r(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$$

- движение точки по окружности. Зафиксировав момент времени $t = t_0$, мы найдем положение точки в этот момент.

Кривую $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ назовем гладкой на $[\alpha, \beta]$, если существует $r'(t)$ и $r'(t) \neq 0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Непрерывную кривую назовем кусочно-гладкой на $[\alpha, \beta]$, если отрезок $[\alpha, \beta]$ можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых кривая гладкая.

Кривую будем обозначать одной из букв Γ, γ, L. Будем говорить, что кривая замкнута, если $r(\alpha) = r(\beta)$. Если существуют значения $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ параметра такие, что $r(t_1) = r(t_2)$, то кривая имеет самопересечения, если таких значений t_1, t_2 нет, то кривая без самопересечений.

3.2. Криволинейные интегралы первого рода

Реализованная выше для скалярной функции скалярного аргумента схема построения интеграла Римана применима и для других классов функций. Покажем, как это делается для некоторых из них.

Функция $f(x, y)$ двух переменных, скалярная или векторная, может быть задана в некоторой плоской области или на кривой, лежащей на плоскости. Аналогично функция трёх переменных может быть задана в некоторой пространственной области, на поверхности или на кривой в пространстве.

Назовём кривую Γ гладкой, если в каждой её точке существует касательная, и кусочно-гладкой, если кривую можно разбить на конечное число участков, на каждом из которых кривая гладкая.

Определение. Пусть задана непрерывная кусочно-гладкая ограниченная кривая L и на L – ограниченная скалярнозначная функция $f(M)$, где $M(x, y, z)$ – некоторая точка кривой. Разобьем L на элементарные участки точками. Внутри каждого полученного элементарного участка кривой выберем по точке $M_0, M_1, ..., M_n$. Вычислим значения $f(M_k)$ функции в этих точках, умножим полученные значения на длину Δl_k данного элементарного участка кривой и просуммируем. Предел полученных сумм, $S_n = \sum_{i=0}^{n} f(M_k)\Delta l_k$, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что длина элементарного участка стремится к нулю, называется криволинейным интегралом первого рода и обозначается $\int_L f(x,y,z)dl$.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится тем или иным способом к вычислению определённых интегралов. Как это делается, показано ниже.

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

$t \in [\alpha, \beta]$, то $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt$, и поэтому криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_L F(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt\ .$$

В случае плоской кривой

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}\ \ (t \in [\alpha, \beta])$$

эта формула приобретает вид

$$\int\limits_L F(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t),y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt\, .$$

Пусть плоская кривая задана явно уравнением $y = f(x), x \in [a,b]$. Всякую такую кривую можно считать заданной параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ взяв в качестве параметра переменную x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_L F(x,y)dl = \int\limits_a^b F(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\, .$$

Теорема. Величина криволинейного интеграла первого рода не изменяется при изменении ориентации кривой, то есть

$$\int\limits_L F(x,y,z)dl = \int\limits_{L-} F(x,y,z)dl$$

Доказательство. Докажем теорему в случае кривой, заданной параметрически. Введем новый параметр τ по формуле $t = t(\tau) = b + a - \tau$. Тогда

$$r(t) = r(b+a-\tau) = x(b+a-\tau)\mathbf{i} + y(b+a-\tau)\mathbf{j} + z(b+a-\tau)\mathbf{k}.$$

Заметим, что когда τ движется от a к b, то t движется от b к a и наоборот. При этом $dt = -d\tau$, и кривая обходится в противоположном направлении. Поэтому

$$\int_{\gamma^-} F(x,y,z)dl = \int_a^b F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))\|r'(t(\tau))\|d\tau =$$

$$= -\int_b^a F(x(t), y(t), z(t))\|r'(t)\|dt = \int_\gamma F(x,y,z)dl,$$

где

$\|r'(t(\tau))\| = \sqrt{(x'(t(\tau))^2 + (y'(t(\tau)))^2 + (z'(t(\tau)))^2}$,

$\|r'(t)\| = \sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ - норма (длина) векторов $r'(t(\tau))$ и $r'(t)$ соответственно. Теорема доказана.

Пример 1. Вычислить $\int_\gamma ydl$, где а) γ – парабола $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$; б) γ – прямая, соединяющая точки (0, 0) и (1, 1).

$$\text{а)} \int_\gamma ydl = \int_0^1 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+((2\sqrt{x})')^2}dx = \int_0^1 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int_0^1 2\sqrt{x+1}dx =$$

$$= \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

$$\text{б)} \int_\gamma ydl = \int_0^1 x\sqrt{1+(1)^2}dx = \sqrt{2}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$ вдоль кривой

$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \end{cases} \text{ если } t \in [0, \pi].$$

Имеем

$$\int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\,dl = \int\limits_0^{\pi} a\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\,dt = \int\limits_0^{\pi} a^2 dt = a^2\pi.$$

3.3. Криволинейные интегралы второго рода

3.3.1. Определение

Будем называть кривую Г ориентированной, если задан порядок следования точек на кривой. Для кривой заданной параметрически ориентацию кривой можно сменить, введя новый параметр, например, по формуле $\tau = \beta + \alpha - t$. Замкнутую кривую на плоскости ориентируют обычно так, чтобы при обходе кривой против часовой стрелки область, ограничиваемая этой кривой, оставалась слева. Если кривая гладкая, то её можно ориентировать с помощью направляющего вектора касательной, так как в этом случае имеет место следующий результат.

Теорема. В каждой точке гладкой кривой существует касательная. Производная $r'(t)$ направлена по этой касательной в сторону возрастания параметра.

Доказательство можно найти в дифференциальном исчислении.

Заметим, что координаты любого единичного вектора равны косинусам углов, образованных этим вектором с соответствующей координатной осью. Таким образом, если $\tau(x, y, z)$ единичный вектор касательной к Г в точке (x, y, z), то $\tau(x, y, z) = (\cos\alpha(x, y, z), \cos\beta(x, y, z), \cos\gamma(x, y, z))$, где α, β, γ – углы, образованные вектором касательной с осями OX, OY, OZ соответственно. Поэтому ориентацию кривой можно задать с помощью косинусов углов между вектором касательной и координатными осями. Если $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ – углы между касательной к кривой в точке $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и осями OX, OY, OZ соответственно, то $\Delta l_k \cos\alpha_k = \Delta x_k$, $\Delta l_k \cos\beta_k = \Delta y_k$, $\Delta l_k \cos\gamma_k = \Delta z_k$.

Определение. Пусть задана ориентированная непрерывная кусочно-гладкая ограниченная кривая L и на L – ограниченная скалярнозначная функция $f(M)$, где $M(x, y, z)$ – некоторая точка кривой. Разобьем L на элементарные участки точками. Внутри каждого полученного элементарного участка кривой выберем по точке $M_0, M_1, ..., M_n$. Вычислим значения $f(M_k)$ функции в этих точках, умножим полученные значения на на $\Delta l_k \cos\alpha_k = \Delta x_k$, $\Delta l_k \cos\beta_k = \Delta y_k$, $\Delta l_k \cos\gamma_k = \Delta z_k$. Полученные суммы

$$S_n^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \cos\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta x_k \,,$$

$$S_n^{\beta} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \cos\beta_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta y_k \,,$$

$$S_n^{\gamma} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \cos\gamma_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta z_k \,,$$

называются интегральными суммами Римана. Предел этих сумм, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что длина элементарного участка стремится к нулю, называется криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам и обозначается соответственно $\int\limits_L f(x,y,z)dx$, $\int\limits_L f(x,y,z)dy$, $\int\limits_L f(x,y,z)dz$.

Пусть теперь на ориентированной непрерывной кусочно-гладкой кривой L задана вектор-функция $f(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Если L – ориентированная кривая, то у нас уже определены криволинейные интегралы второго рода:

$$\int_L P(x,y,z)\cos\alpha dl = \int_L P(x,y,z)dx,$$

$$\int_L Q(x,y,z)\cos\beta dl = \int_L Q(x,y,z)dy,$$

$$\int_L R(x,y,z)\cos\gamma dl = \int_L R(x,y,z)dz,$$

Взяв сумму однотипных интегралов, получаем

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \ -$$

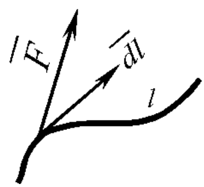
криволинейный интеграл второго рода, который иногда обозначают $\int_L \left(f(x,y,z),\overline{dl}\right)$, где $\overline{dl} = \tau(x,y,z)dl$.

Заметим, что между криволинейными интегралами первого и второго рода существует связь, выражаемая формулой

$$\int_L \left(f(x,y,z),\overline{dl}\right) = \int_L \left(f(x,y,z),\tau(x,y,z)\right)dl.$$

3.3.2. Физический смысл

Пусть $\overline{F}(x,y,z)$ - сила, действующая на материальную



точку, движущуюся под действием этой силы по кривой l. Тогда $(\overline{F},\overline{dl})$ - работа, затраченная на перемещение точки по кривой на участке dl. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу, получаем, что $\int_\gamma (\overline{F}(x,y,z),\overline{dl})$ - работа этой силы по перемещению материальной точки вдоль кривой. ***Если кривая L замкнута, то работа по перемещению точки вдоль L называется циркуляцией***.

3.3.3. Вычисление и свойства

Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Тогда вектор касательной приобретает вид $r'(t) = \left(x'_t, y'_t, z'_t\right)$, а единичный вектор касательной $\tau = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ равен

$$\left(\frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}}, \frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}}, \frac{z'_t}{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}}\right)^T$$

Так как $dl = \|r'(t)\|dt = \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt$, то

$$\overline{dl} = \tau dl = \tfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}\|r'(t)\|dt = r'(t)dt = (x'_t dt,\ y' dt,\ z'_t dt)^T,$$

и для криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\int\limits_\gamma (F(x,y,z), \overline{dl}) =$$

$$= \int\limits_\gamma (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt =$$

$$= \int\limits_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

В случае плоской кривой $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$

получим

$$\int_\gamma (F(x,y,z),\overline{dl}) = \int_\gamma (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)dt =$$

$$= \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = f(x), x \in [a,b]$, то её можно считать заданной параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ взяв в качестве параметра переменную x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int_\gamma (F(x,y,z),\overline{dl}) = \int_a^b P(x, f(x))dx + Q(x, f(x))\,f'(x)dx\,.$$

Заметим, что все формулы для вычисления криволинейного интеграла второго рода получены при соглашении, что направлением обхода кривой считается направление, задаваемое вектором касательной $r'(t)$, если кривая задана параметрически или векторно, и вектором касательной $(1, f'(x))^T$, если кривая задана явно. Если по каким-либо соображениям обходить кривую необходимо в обратном направлении, то все знаки в формулах нужно поменять на противоположные.

Заметим, что для криволинейных интегралов имеют место общие для всех интегралов свойства. Отметим некоторые из них в формулировках, отражающих специфику этих интегралов.

Теорема 1. Криволинейный интеграл 2-го рода зависят от ориентации кривой, точнее,

$$\int_L (F(x,y,z),\overline{dl}) = -\int_{L^-} (F(x,y,z),\overline{dl})\,.$$

Доказательство опустим.

Замечание. Если в качестве ориентированной кривой взять отрезок $[a,b]$ оси OX с направлением обхода от a к b, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно рассматривать как криволинейный интеграл второго рода по этой кривой, а теорему 1 считать обобщением свойства 1 определённого интеграла на случай ориентированного многообразия.

Теорема 2. Пусть $L = L_1 \cup L_2$ и размерность пересечения $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$, то есть составляющие кривой L пересекаются только в конце участка L_1 и начале участка L_2 Тогда

$$\int\limits_{L_1 \cup L_2} (F, \overline{dl}) = \int\limits_{L_1} (F, \overline{dl}) + \int\limits_{L_2} (F, \overline{dl}) .$$

Доказательство. Включив в число точек разбиения в определении криволинейного интеграла второго рода общую границу L_1 с L_2, получаем требуемое.

Теорема 3 (о среднем для криволинейного интеграла). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на гладкой кривой γ, то существует точка (x_0, y_0, z_0) на кривой γ такая, что для криволинейного интеграла второго рода выполнено соотношение

$$\int\limits_{\gamma} (f, \overline{dl}) = (f(x_0, y_0, z_0), \tau(x_0, y_0, z_0)) \cdot L ,$$

где L - длина кривой γ.

Доказательство опустим.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy$ вдоль кривой

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

если $t \in [0, \pi]$, в направлении увеличения параметра.

Имеем

$$\int\limits_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy = \int\limits_{0}^{\pi} (b^2 \sin^2 t(-a\sin t) + a^2 \cos^2 t(b\cos t))dt = -\frac{4}{3}ab^2.$$

Пример 2. Найти работу по перемещению материальной точки под действием силы $f(x, y, z) = (x^3,\ xy,\ (x+z))^T = x^3\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$ вдоль одного витка винтовой линии $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$ в направлении увеличения параметра.

Работа по перемещению материальной точки равна криволинейному интегралу второго рода $\int\limits_L (f,\overline{dl})=\int\limits_L x^3dx+xydy+(x+z)dz$. Так как кривая задана параметрически и $dx=-\sin tdt, dy=\cos tdt, dz=dt$, то

$$\int\limits_L (f,\overline{dl})=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^3 t(-\sin t)+\cos^2 t\sin t+(\cos t+t))dt=$$

$$=\left(\frac{\cos^4 t}{4}-\frac{\cos^3 t}{3}+\sin t+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2.$$

3.4. Элементы теории поля

Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода находят важные применения в теории поля. К её изложению мы и приступаем.

Определение. **Говорят, что в области $G\subset R^3$ ($D\subset R^2$) задано векторное поле, если задана вектор-функция** $f:G\subset R^3\to R^3$

($f:G\subset R^3\to R^2$**,** $f:D\subset R^2\to R^2$**,** $f:D\subset R^2\to R^3$**), то есть функция вида**

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\Q(x,y,z)\\R(x,y,z)\end{pmatrix}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$\left(\ f(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\Q(x,y,z)\end{pmatrix}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j},\right.$$

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j},$$

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\\R(x,y)\end{pmatrix}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}+R(x,y)\mathbf{k}\Bigg)$$

с областью определения $G\subset R^3$ ($D\subset R^2$). Аналогично говорят, что в области $G\subset R^3$ ($D\subset R^2$) задано скалярное поле, если задана скалярнозначная функция $f:G\subset R^3\to R$ ($f:D\subset R^2\to R$) с областью определения $G\subset R^3$ ($D\subset R^2$).

Если областью определения векторного поля является множество точек на плоскости, то поле называют плоским. Векторное поле можно интерпретировать как множество точек, к каждой из которых присоединён вектор. Примерами векторных полей являются: поле скоростей текущей жидкости, электрическое поле точечного заряда, магнитное поле, плотность электрического тока.

Напомним введённые ранее понятия, имеющие отношение к векторным и скалярным полям.

Вектор

$$\mathrm{grad}U=(U')^T=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)^T$$

называется градиентом скалярной функции (скалярного поля).

Скаляр

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{a}}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

называется производной по направлению вектора $\overline{a}$ от скалярной функции векторного аргумента.

Векторное поле или вектор-функцию назовём потенциальным, если существует скалярная функция (скалярное поле) $U(x,y,z)$ такая, что $\mathrm{grad}U=(U')^T=f(x,y,z)=(P,Q,R)^T$. Функцию U назовём при этом потенциалом поля f.

Заметим, что если U - потенциал поля f, то $U+C$ тоже потенциал этого поля.

Критерием потенциальности поля служит следующий результат.

Теорема. Векторное поле $f(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+$
$+R(x,y,z)\mathbf{k}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))^T$ является потенциальным в области $\Omega\subset R^3$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1) криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру L, полностью лежащему в Ω, равен нулю ($\int\limits_L (f,\overline{dl})=0$ для $\forall L\subset\Omega$), или, что то же самое, циркуляция поля по любому замкнутому пути равна нулю;

2) если A_1,A_2 - любые две точки из Ω и $L_1,L_2\subset\Omega$ -две произвольные кривые, их соединяющие, то $\int\limits_{L_1}(f,\overline{dl})=\int\limits_{L_2}(f,\overline{dl})$, то есть криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования.

Если поле потенциально и $U(x,y,z)$ - его потенциал, то

$$\int\limits_L (f,\overline{dl})=U(A_2)-U(A_1).$$

Доказательство. Покажем вначале, что условия 1 и 2 эквивалентны. Пусть выполнено условие 1, A_1,A_2 - две произвольные точки из Ω и $L_1,L_2\subset\Omega$ - две кривые, соединяющие A_1 и A_2. Рассмотрим замкнутый контур $L=L_1^+\cup L_2^-$. Тогда

$$0=\int\limits_L (f,\overline{dl})=\int\limits_{L_1^+}(f,\overline{dl})+\int\limits_{L_2^-}(f,\overline{dl})=\int\limits_{L_1^+}(f,\overline{dl})-\int\limits_{L_2^+}(f,\overline{dl}),$$

откуда и следует требуемое. Пусть теперь выполнено условие 2, L - произвольный замкнутый контур, лежащий в Ω и A_1,A_2 - две произвольные точки, лежащие на контуре L. Точками A_1,A_2 контур L разбивается на два контура $L_1,L_2\subset\Omega$ так, что $L=L_1^+\cup L_2^-$. Тогда, аналогично предыдущему, имеем

$$0=\int_{L_1^+}(f,\overline{dl})-\int_{L_2^+}(f,\overline{dl})=\int_{L_1^+}(f,\overline{dl})+\int_{L_2^-}(f,\overline{dl})=\int_{L}(f,\overline{dl}).$$

Перейдём к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть поле потенциально, то есть существует скалярная функция U такая, что $\operatorname{grad}U=(U')^T=(P,Q,R)^T$, A_1,A_2 - произвольные точки из Ω и $L\subset\Omega$ - произвольный путь, соединяющий A_1,A_2. Пусть кривая L задана параметрически так, что значению параметра t_1 соответствует точка A_1, а значению параметра t_2 соответствует точка A_2. Так как $(U')^T=(U'_x,U'_y,U'_z)^T=(P,Q,R)^T$, то

$$\int_L(f(x,y,z),\overline{dl})=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Подынтегральная функция есть производная $\dfrac{dU}{dt}$ сложной функции $U(x(t),y(t),z(t))$. Поэтому последний интеграл равен

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{dt}dt=U(t_2)-U(t_1)=U(A_2)-U(A_1).$$

Мы получили, что интеграл зависит от конечных точек и не зависит от пути, соединяющего эти точки. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, $A(x,y,z)$ - произвольная точка из Ω, A_0 - фиксированная точка из Ω. Покажем, что функция $U(x,y,z)=\int_{A_0}^{A}(f(x,y,z),\overline{dl})$ есть потенциал поля $f(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$. Для этого достаточно показать, что $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y,z),\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y,z),\ \dfrac{\partial U}{\partial z}=R(x,y,z)$. Возьмём точку

$A_1(x+\Delta x, y, z)$. Тогда $U(x+\Delta x, y, z) = \int\limits_{A_0}^{A_1} (f(x,y,z), \overline{dl})$. В силу независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования последний интеграл равен

$$\int\limits_{A_0}^{A} (f(x,y,z), \overline{dl}) + \int\limits_{A}^{A_1} (f(x,y,z), \overline{dl}) =$$

$$U(x,y,z) + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y,z)dt.$$

По теореме о среднем $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y,z)dt = P(x_1,y,z)\Delta x,$ где x_1 - некоторая точка отрезка $[x, x+\Delta x]$. Заметим, что эту точку можно записать в виде $x_1 = x + \theta\Delta x$, где $0 \le \theta \le 1$ - некоторое число. Поэтому

$$\frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x} = P(x_1, y, z) .$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z).$ Аналогично устанавливается справедливость оставшихся соотношений $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z),$ $\frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z).$ Теорема доказана.

Доказанная теорема даёт возможность восстановить потенциал, если известно, что поле потенциально, но она не даёт практических рецептов выяснения потенциальности поля. Попытаемся получить характеристики, позволяющие установить потенциальность поля.

Введём вектор

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

который назовём ротором (вихрем) вектор-функции $f(x,y,z)$.

Определение. **Поле называется безвихревым, если $\operatorname{rot} f = 0$.**

Между величиной $\operatorname{rot} f$ и потенциальностью поля $f(x, y, z)$ существует связь, выражаемая следующей теоремой.

Теорема. Если поле

$$f(x, y, z) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))^T$$

потенциально и существует непрерывная производная $f'(x, y, z)$, то оно безвихревое (*всякое потенциальное дифференцируемое поле является безвихревым*), то есть $\operatorname{rot} f = 0$.

Доказательство. Если поле потенциально, то существует скалярнозначная функция $U(x, y, z)$ такая, что

$$U'(x, y, z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$$

.

Следовательно, $\frac{\partial U}{\partial x} = P,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial U}{\partial z} = R.$ Тогда

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Теорема доказана.

Обратное утверждение верно лишь при дополнительных ограничениях на область в которой задано векторное поле. Для уточнения формулировок введём некоторые понятия.

Определение. **Множество называется связным, если для любых двух точек из этого множества существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и целиком лежащая в данном множестве.**

Определение. **Точку множества назовём внутренней точкой, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в данном множестве; внешней точкой, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая вне данного множества; граничной, если во всякой окрестности этой точки есть как точки данного множества, так и точки, ему не принадлежащие. Совокупность всех граничных точек данного множества назовём его границей.**

Определение. **Множество назовём односвязным, если его граница есть связное множество.**

Теорема. Если область Ω является односвязной и векторное поле безвихревое ($\operatorname{rot} f = 0$), то оно потенциально.

Доказательство этого результата опустим. Желающие могут познакомиться с ним в [8].

Рассмотрим более подробно плоский случай. Пусть векторное поле задано на плоскости, то есть имеет вид

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}.$$

Тогда

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathbf{k}.$$

Таким образом, для плоского поля условие $\operatorname{rot} f = 0$ эквивалентно условию $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Тогда сформулированные выше результаты о потенциальности поля приобретают следующий вид.

Теорема. Если плоское поле потенциально, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

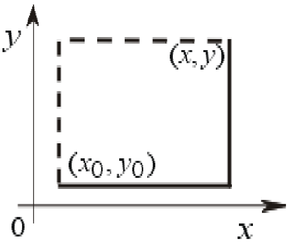
Теорема. Если $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и область односвязная, то плоское поле f потенциально.

Теорема. Если область односвязная, то любой криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ по произвольному контуру L не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Теорема. Если область односвязная, то поле потенциально тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Пример 1. Доказать, что поле $f(x,y)=\begin{pmatrix}2xy\\ x^2\end{pmatrix}=2xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$ потенциально и восстановить его потенциал.

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x,\ \ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x,$ то $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, и поле потенциально во всей плоскости. Следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{A_0}^{A} P\,dx+Q\,dy$ по любому пути, соединяющему две точки,



не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0,0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x,y). Наиболее простыми путями интегрирования являются две возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображённого на рисунке (с учётом того, что $(x_0,y_0)=(0,0)$),

$$U(x,y)=\int\limits_{A_0}^{A}(f,\overline{dl})=\int\limits_{0}^{x}P(x,0)\,dx+\int\limits_{0}^{y}Q(x,y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}(2x\cdot 0)\,dx+\int\limits_{0}^{y}x^2\,dy=x^2y\,.$$

Таким образом, $U(x,y)=x^2y$.

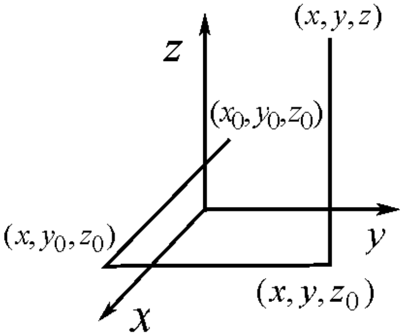
Пример 2. Доказать, что поле

$$f(x,y,z)=\left(y^2z,\ 2xyz,\ xy^2+3z^2\right)^T=$$
$$=y^2z\mathbf{i}+2xyz\mathbf{j}+(xy^2+3z^2)\mathbf{k}=(P,Q,R)^T$$

потенциально и восстановить его потенциал.

Найдём $\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$.

Так как $\frac{\partial R}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial z} = y^2$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2yz$,



$\frac{\partial P}{\partial y} = 2yz$, то $\operatorname{rot} f = 0$, и поле потенциально во всём пространстве. Следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{A_0}^{A} P\,dx + Q\,dy + R dz$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0,0,0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x, y, z). Наиболее простыми путями интегрирования являются возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому, для пути, изображённого на рисунке (с учётом того, что $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$),

$$U(x, y, z) = \int\limits_{A_0}^{A} (f, \overline{dl}) = \int\limits_{0}^{x} P(x,0,0)\,dx + \int\limits_{0}^{y} Q(x, y, 0)\,dy + \int\limits_{0}^{z} R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} (0 \cdot 0)\,dx + \int\limits_{0}^{y} (2xy \cdot 0)\,dy + \int\limits_{0}^{z} (xy^2 + 3z^2)\,dz = xy^2 z + z^3 .$$

Таким образом, $U(x, y, z) = xy^2 z + z^3$.

Введём ещё одну характеристику векторного поля, называемую дивергенцией, или функцией источника, по формуле

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} .$$

Назовём поле соленоидальным или трубчатым, если дивергенция равна нулю в каждой его точке. Соленоидальные поля однородны по структуре. В них нет ни источников ни стоков.

4. Введение в теорию функций комплексного переменного

4.1 Комплексные числа и действия над ними

При решении алгебраических уравнений степени два и выше иногда приходится рассматривать конструкции вида $a+b\cdot\sqrt{-1}$, где a и b – некоторые действительные числа. Например, подставляя формально конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ в не имеющее действительных корней уравнение $x^2-2x+5=0$, получаем $\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)+5$. Действуя в полученном выражении с конструкцией $1+2\cdot\sqrt{-1}$ как с двучленом по правилам алгебры, известным из школы, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$(1)^2+2\cdot2\cdot\sqrt{-1}+\left(2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2-2\cdot2\cdot\sqrt{-1}+5=4+4\cdot(-1)=0.$$

Таким образом, конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ можно считать корнем новой природы (не действительным) уравнения $x^2-2x+5=0$.

Пусть i – некоторый формальный символ, x и y – действительные (вещественные) числа. Конструкции вида $z=x+iy$ назовём комплексными числами, x действительной, а y мнимой частями комплексного числа $z=x+iy$ и будем обозначать их соответственно $x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z$. Число $x-iy$ будем называть сопряжённым (комплексно сопряжённым) к числу $z=x+iy$ и обозначать $\bar{z}$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Заметим, что $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z=2x$, $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}z=2y$, следовательно $x=\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x+0\cdot i$, то складывая и умножая числа $x+0\cdot i$ и $y+0\cdot i$ по приведённым выше формулам, получаем

$$(x+0\cdot i)+(y+0\cdot i)=(x+y)+i\cdot(0+0)=(x+y)+0\cdot i,$$

$$(x+0\cdot i)(y+0\cdot i)=(xy-0\cdot 0)+i(x\cdot 0+y\cdot 0)=xy+0\cdot i.$$

Как видим, операции сложения и умножения комплексных чисел вида $x+0\cdot i$ не выводят за множество чисел этого вида (то есть получаются числа того же вида). Поэтому можно считать, что операции сложения и умножения совпадают с обычными операциями над действительными числами и считать комплексные числа расширением множества действительных чисел. Из введённых выше операций над комплексными числами следует, что для комплексного числа $i=0+i\cdot 1$ получаем

$$i^2=(0+i\cdot 1)(0+i\cdot 1)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)=-1+0\cdot i=-1.$$

Заметим, что операции сложения и умножения комплексных чисел производятся как соответствующие операции над двучленами с раскрытием скобок и приведением подобных и учётом того, что $i\cdot i=-1$. Слагаемые вида 0 и $0\cdot i$ обычно опускаются.

Обратные операции определяются однозначно и задаются формулами:

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{(x_2)^2+(y_2)^2}.$$

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ сопоставим точку (x,y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиус-векторов точек (x,y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиус-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заметим, что $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Далее,

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Числа $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиус-вектором точки (x, y) и осью OX. Поэтому можем записать $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эта форма записи числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным и обозначают его $\arg z$.

Совмещая алгебраическую и тригонометрическую формы комплексного числа z, можем записать

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi.$$

Следовательно, $x = \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$, $y = \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$. Разделив мнимую часть на действительную, получаем $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \dfrac{|z|\sin\varphi}{|z|\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$, или выписывая крайние части соотношения, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Если $x = \operatorname{Re} z > 0$, то есть комплексное число z лежит в правой полуплоскости (в первой или четвёртой четверти), то $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ Если же $x = \operatorname{Re} z < 0$, то есть комплексное число z лежит в левой полуплоскости (во второй или третьей четверти), то $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$. Отметим частные случаи. Если число z действительное и положительное, то есть $x = \operatorname{Re} z > 0$, $y = \operatorname{Im} z = 0$, то $\varphi = 0$, если число z действительное и отрицательное, то есть $x = \operatorname{Re} z < 0$, $y = \operatorname{Im} z = 0$, то $\varphi = \pi$. Если число z мнимое, то есть $x = \operatorname{Re} z = 0$, то в случае $y = \operatorname{Im} z > 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а в случае $y = \operatorname{Im} z < 0$ можно взять либо $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, либо $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Подводя итог вышесказанному, получаем, что при выборе главного значения аргумента из промежутка $[0, 2\pi)$ его находят по формулам

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Удобным также является выбор главного значения аргумента из промежутков $[-\pi, \pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Формулы для нахождения главного значения аргумента при выборе его из промежутков $[-\pi, \pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем записать $z = |z| e^{i\varphi}$. Эта форма записи числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как

$e^{-i\varphi}=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)=\cos\varphi-i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее,

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Поэтому

$$z_1z_2=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=|z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=|z_1|\cdot|z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично можно получить, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов, получаем формулы возведения комплексного числа в степень n и извлечения корня n-ой степени из комплексного числа, называемые формулами Муавра:

$$z^n=|z|^n e^{in\varphi}=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi);$$
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

Заметим, что для любого действительного отрицательного числа главное значение аргумента равно π, для любого действительного положительного числа главное значение аргумента равно 0.

4.2. Отображения. Образы и прообразы линий

Пусть G и D – области на комплексной плоскости. Будем говорить, что задано отображение из G в D ($f:G\to D$), если для всякой точки $z\in G$ по некоторому правилу или закону поставлена в соответствие точка $w\in D$. Точка $w=f(z)$ называется образом точки z, а точка z - прообразом точки w при отображении f. Соответственно, если Γ и L – кривые в комплексной плоскости, то $f(\Gamma)$ - образ кривой Γ, а $f^{-1}(L)=\{z\in C: f(z)\in L\}$ - прообраз кривой L при отображении f.

Так как z и w комплексные числа, то можем написать $w=u+iv=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. Таким образом, отображению $f: C\to C$ комплексной плоскости в комплексную плоскость соответствует отображение $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ действительной плоскости R^2 в действительную плоскость R^2. Тогда графику функции $(z, f(z))$ в $C\times C=C^2$ соответствует график отображения $(x,y,u(x,y),v(x,y))$ в $R^2\times R^2=R^4$. В четырёхмерном пространстве рисовать несколько проблематично. Поэтому для комплекснозначных функций комплексного переменного изучают образы и прообразы областей и кривых, лежащих на комплексной плоскости.

Всякая кривая на плоскости, заданная параметрически, $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$, $t\in[\alpha,\beta]$, может быть записана в комплексной форме $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$. Будем пользоваться той формой записи, которая нам удобна. Пусть кривая в исходной плоскости, назовём её плоскостью z, задана параметрически, $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$. Тогда образом этой кривой в плоскости, которую назовём плоскостью w, будет кривая $\begin{cases} u=u(x(t),y(t)), \\ v=v(x(t),y(t)), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$.

4.3. Некоторые функции комплексного переменного

Перечислим элементарные функции комплексного переменного. Всюду ниже константы a, b, c, d и так далее предполагаются комплексными числами.

Линейное отображение $w=az$ и линейная функция $w=az+b$. Рассмотрим этот оператор немного подробнее. Запишем числа a и z в показательной форме, $a=|a|e^{i\arg a}$, $z=|z|e^{i\arg z}$. Тогда

$$w=az=|a|e^{i\arg a}\cdot|z|e^{i\arg z}=|a|\cdot|z|\cdot e^{i(\arg z+\arg a)},$$

$$w=az+b=|a|e^{i\arg a}\cdot|z|e^{i\arg z}+b=|a|\cdot|z|\cdot e^{i(\arg z+\arg a)}+b$$

Таким образом, при отображении $w=az$ комплексная плоскость в точке z растянулась в $|a|$ раз и повернулась на угол $\arg a$. При отображении $w=az+b$ плоскость ещё и сдвинулась на число b.

Перечислим и некоторые другие функции комплексного переменного.

Дробно-линейная функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Степенная функция $w=z^n$ и её частные случаи при различных n.

Дробно-рациональная функция

$$w=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_1 z+b_0}.$$

Показательная функция $w=e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}$.

Логарифмическая функция

$$w=Lnz=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)=\ln|z|+iArgz$$

и её главное значение

$$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})},\ \mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Гиперболические функции

$$\text{shz} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \text{chz} = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\text{thz} = \frac{\text{shz}}{\text{chz}} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \ \text{cthz} = \frac{\text{chz}}{\text{shz}} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Функции обратные к тригонометрическим и гиперболическим.

Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1.3.7. Решить уравнение $\cos z = 2$;

Так как $\cos z = 2$, то $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$. Следовательно, $e^{iz} + e^{-iz} = 4$. Умножая обе части равенства на e^{iz} получаем $e^{i2z} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Решая его получаем $e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$ или $e^{iz} = 2 - \sqrt{3}$.

Из первого соотношения получаем

$$iz = Ln(2+\sqrt{3}) = \ln\left|2+\sqrt{3}\right| + i(\arg(2+\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$= \ln\left|2+\sqrt{3}\right| + 2k\pi i$. Поэтому $z = 2k\pi - i\ln\left|2+\sqrt{3}\right|$.

Из второго соотношения имеем

$$iz = Ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + i(\arg(2-\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$= \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + 2k\pi i$. Поэтому $z = 2k\pi - i\ln\left|2-\sqrt{3}\right|$.

4.4. Предел функции комплексного переменного, непрерывность

Отметим, что понятие предела функции комплексного переменного совпадает с понятием предела функции действительного переменного и вводится так же.

Понятие непрерывности также совпадает с понятием непрерывности функции действительного переменного.

Отметим, что $|z|$ есть длина радиус-вектора точки z, которая равна расстоянию от точки z до начала координат, следовательно, $|z_1 - z_0|$ есть расстояние между точками z_1 и z_0. Множества на комплексной плоскости заданные соотношениями $|z - z_0| = R$, $|z - z_0| < R$ есть соответственно окружность радиуса R с центром в точке z_0 и внутренность круга радиуса R с центром в точке z_0.

Определение 1. Окрестностью конечной точки z_0 на комплексной плоскости назовем любое множество, содержащее некоторый круг $|z - z_0| < R$.

Окрестность точки z_0 будем обозначать $U(z_0)$.

Определение 2. Окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ в C (обозначаемой $U(\infty)$) назовем внешность некоторого круга, т.е. множество точек, не принадлежащих этому кругу. Симметричной окрестностью точки ∞ назовем внешность симметричного относительно начала координат круга.

Определение 1. Число $A + Bi \in C$ называется пределом функции f при z, стремящемся к z_0 $(z \to z_0)$, если для всякой окрестности $U(A + Bi)$ точки $A + Bi$ существует проколотая окрестность $V^{\Pi}(z_0)$ точки z_0 такая, что для всякой точки z, принадлежащей $V^{\Pi}(z_0)$ $(\forall z \in V^{\Pi}(z_0))$, имеет место включение $f(z) \in U(A + Bi)$ $(f(V^{\Pi}(z_0)) \subseteq U(A + Bi))$.

Определение 3. Число $A + Bi$ называется пределом функции f при $z \to z_0$ ($A + Bi = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует справедливость неравенства $|f(z) - (A + Bi)| < \varepsilon$
($\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - (A + Bi)| < \varepsilon$).

Определение 1. Функция f называется непрерывной в точке z_0, если f определена в этой точке и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Вспоминая определение предела с помощью окрестностей и неравенств, определение непрерывности функции в точке можно записать в следующем виде.

Определение 2. Функция f называется непрерывной в точке z_0, если f определена в этой точке и для всякой окрестности $U(f(z_0))$ точки $f(z_0)$ существует окрестность $V(z_0)$ точки z_0 такая, что для всех $z \in V(z_0)$ имеет место включение $f(z) \in U(f(z_0))$, или, что то же самое, если для всякой окрестности $U(f(z_0))$ точки $f(z_0)$ множество решений включения $f(z) \in U(f(z_0))$ или некоторая его часть содержит окрестность точки z_0.

На языке неравенств это же определение для комплексно-значной функции одной комплексной переменной имеет следующий вид.

Определение 3. Функция f называется непрерывной в точке z_0, если она определена в этой точке и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, или, что то же самое, если для всякого $\varepsilon > 0$ множество решений неравенства $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ или некоторая его часть содержит окрестность точки z_0.

Величину $\Delta z = z - z_0$ называют приращением аргумента, а $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ - приращением функции при переходе из точки z_0 в точку z.

Определение 3 может быть сформулировано и на языке приращений.

Определение 4. Функция f называется непрерывной в точке z_0, если она определена в этой точке и из условия $|\Delta z| \to 0$ следует, что $|\Delta f| \to 0$.

Отметим некоторые результаты, связанные с понятием предела и непрерывности функции комплексного переменного.

Теорема 4.4.1. Для того, чтобы комплексное число $A+Bi$ было пределом функции f при z, стремящемся к z_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \operatorname{Re} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \operatorname{Im} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B.$$

Теорема 4.4.2. Для того, чтобы функция f была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ и $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0).

Аналогичные результаты с некоторыми поправками имеют место для модуля и аргумента функции f.

4.5. Голоморфные (аналитические) функции комплексного переменного, геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть G и D – области на комплексной плоскости и f – отображение из G в D ($f: G \to D$). Говорят, что функция f дифференцируема в точке $z_0 \in G$, если существует число $A+Bi$ такое, что приращение $f(z) - f(z_0)$ функции f можно представить в виде

$$f(z) - f(z_0) = (A+Bi)(z-z_0) + \alpha(z-z_0)$$

для всех z из некоторой окрестности точки z_0, где бесконечно малая функция $\alpha(z-z_0)$ имеет в точке z_0 более высокий порядка малости, чем $z-z_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(z-z_0)}{z-z_0} = 0$. Если f дифференцируема в точке z_0, то, как и в случае функций действительного переменного, $A+Bi$ является производной функции f в точке и $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Так же, как и для действительнозначной функции действительного переменного, справедлив следующий результат.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную в этой точке.

Доказательство повторяет соответствующее доказательство для действительнозначной функции действительного переменного.

Заметим, что для отображений из R^2 в R^2 существование производной не достаточно для дифференцируемости функции, нужно, чтобы производная существовала в некоторой окрестности точки и была непрерывна в этой точке.

Теорема (Коши-Риман). Для того, чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \end{cases}$$

Доказательство. Если f дифференцируема в точке $z_0\in G$, то приращение $f(z)-f(z_0)$ функции f можно представить в виде

$$f(z)-f(z_0)=(A+Bi)(z-z_0)+\alpha(z-z_0)$$

для всех z из некоторой окрестности точки z_0, где бесконечно малая функция $\alpha(z-z_0)$ имеет в точке z_0 более высокий порядка малости, чем $z-z_0$. Вспоминая, что

$$f(z)-f(z_0)=\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)-\big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big)=$$
$$=\big(u(x,y)-u(x_0,y_0)\big)+i\big(v(x,y)-v(x_0,y_0)\big),$$
$$z-z_0=(x+iy)-(x_0+iy_0)=(x-x_0)+i(y-y_0),$$

можем записать

$$f(z)-f(z_0)=\big(u(x,y)-u(x_0,y_0)\big)+i\big(v(x,y)-v(x_0,y_0)\big)=$$
$$=\left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right)+\beta(x-x_0,y-y_0)$$
$$+i\left(\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right)+i\gamma(x-x_0,y-y_0),$$

с одной стороны, и

$$f(z)-f(z_0)=\big(A+Bi\big)(z-z_0)+\alpha(z-z_0)=$$
$$=\big(A+Bi\big)\big((x-x_0)+i(y-y_0)\big)+\alpha(z-z_0)=$$
$$=A(x-x_0)-B(y-y_0)+i\big(B(x-x_0)+A(y-y_0)\big)+\operatorname{Re}\alpha+i\operatorname{Im}\alpha,$$

с другой стороны. Сравнивая крайние части, получаем выполнимость условий Коши-Римана. Предполагая, что имеют место условия Коши-Римана и проделывая вычисления в обратном порядке, получаем, что функция дифференцируема в точке z_0.

Заметим, что функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ формально можно считать функцией переменных z и $\bar{z}$, так как $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, и поэтому можем записать

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

Рассматривая производную $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}$, приходим к выводу, что условие $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$ является эквивалентным условиям Коши-Римана. То есть, функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда производная функции по комплексно сопряженному аргументу равна нулю, то есть $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$.

Определение. Функция f называется голоморфной (аналитической) в точке $z_0\in G$, если f дифференцируема в точке z_0

и в некоторой ее окрестности и производная $f'(z)$ непрерывна в точке z_0.

Отметим некоторые свойства голоморфных (аналитических) функций:

1) Основные элементарные функции голоморфны (аналитические) в своей области определения.
2) Композиция (суперпозиция) и линейная комбинация конечного числа голоморфных (аналитических) функций является голоморфной функцией.
3) Произведение конечного числа аналитических (голоморфных) функций есть функция аналитическая (голоморфная).
4) Если знаменатель отличен от нуля, то отношение голоморфных (аналитических) функций есть функция голоморфная (аналитическая).

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция f дифференцируема в точке z_0. Тогда её приращение может быть записано в виде $f(z)-f(z_0)=f'(z_0)(z-z_0)+\alpha(z-z_0)$, где $\alpha(z-z_0)$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $z-z_0$. Это соотношение можно переписать в виде $f(z)=f'(z_0)z+\left(-f'(z_0)z_0+f(z_0)\right)+\alpha(z-z_0)$. Положим $b=-f'(z_0)z_0+f(z_0)$. Тогда $f(z)=f'(z_0)z+b+\alpha(z-z_0)$. Сравнивая с линейной функцией $w=az+b$ приходим к выводу, что *модуль производной* $|f'(z_0)|$ *есть коэффициент линейного растяжения при отображении* f *в точке* z_0, *а аргумент производной* $\arg f'(z_0)$ *равен углу поворота при отображении* f *любого направления исходящего из точки* z_0.

Гармонические функции. Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической (голоморфной) функции

Функция $u(x,y)$ называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$. Покажем, что действительная и мнимая части голоморфной (аналитической) функции являются гармоническими функциями.

Дифференцируя обе части первого условия Коши-Римана по по x, а второго условия по y, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Складывая первый результат со вторым и учитывая равенство смешанных производных (в случае их непрерывности), получаем, что действительная часть голоморфной функции удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть является функцией гармонической. Аналогично, дифференцируя обе части первого условия Коши-Римана по y, а второго условия по x, и складывая результаты, получаем, что и мнимая часть есть функция гармоническая.

4.5. Интеграл от функции комплексного переменного

Определение. Пусть в комплексной плоскости задана непрерывная кусочно-гладкая кривая L и на L – функция комплексного переменного $f(z)$. Разобьем L на части точками $z_0, z_1, \dots, z_n$ и внутри каждого элементарного участка кривой выберем по точке $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$. Найдем значения функции в точках $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$, умножим полученные значения на $\Delta z_k = z_{k+1}-z_k$ и просуммируем. Предел полученных сумм $\sigma_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k$ по всевозможным разбиениям, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что $\max\limits_{0\le k\le n-1}|\Delta z_k|$ стремится к нулю, называется криволинейным интегралом от функции комплексного переменного и обозначается $\int\limits_L f(z)dz$.

Так как

$\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$, $\Delta z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k$, $f(\zeta_k)=u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)$,

то можем записать

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1}f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=0}^{n-1}\bigl(u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)\bigr)\bigl(\Delta x_k+i\Delta y_k\bigr)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\bigl(u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\bigr)+$$

$$+i\sum_{k=0}^{n-1}\bigl(v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\bigr).$$

Переходя в этом соотношении к пределу по всевозможным разбиениям, получаем что

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int\limits_L v(x,y)dx+u(x,y)dy,$$

то есть интеграл по кривой L от функции f комплексного переменного представляет собой сумму двух криволинейных интегралов 2-го рода от функций действительного переменного.

Пусть кривая L задана параметрически $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[t_1,t_2]$ на вещественной плоскости R^2 и является гладкой или кусочно-гладкой. Тогда интеграл от функции комплексного переменного может быть посчитан по формуле

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_{t_1}^{t_2}\bigl(u(x(t),y(t)x'(t)-v(x(t),y(t)y'(t)\bigr)dt+$$

$$+i\int_{t_1}^{t_2}\left(v(x(t),y(t)x'(t)+u(x(t),y(t)y'(t)\right)dt.$$

Кривую $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[t_1,t_2]$ можно записать в комплексной форме $z(t)=x(t)+iy(t), t\in[t_1,t_2]$. Учитывая, что $dx(t)=x'(t)dt$, $dy(t)=y'(t)dt$, $dz=z'(t)dt=(x'(t)+iy'(t))dt$, формулу для вычисления интеграла от функции комплексного переменного можем записать в виде

$$\int_L f(z)dz=\int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt.$$

Заметим, что, если подынтегральная функция голоморфна (аналитична), то интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точек и, следовательно, для аналитических функций, справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_L f(z)dz=\int_{z_A}^{z_B} f(z)dz=F(z_B)-F(z_A),$$

где L - любая кривая, соединяющая точки z_A и z_B.

Свойства интеграла от комплексной функции комплексного переменного.

1. $\int_L (f(z)\pm g(z))dz=\int_L f(z)dz\pm\int_L g(z)dz$.

2. $\int_L \alpha f(z)dz=\alpha\int_L f(z)dz$.

3. Пусть L кривая на комплексной плоскости, соединяющая точки A и B, тогда $\int_{AB} f(z)dz=-\int_{BA} f(z)dz$.

4. $\left|\int_L f(z)dz\right|\le\int_L |f(z)|ds$, где ds есть дифференциал длины дуги.

5. Если функция f ограничена на L, есть $\left|f(z)\right| \le M$, то $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le M\left|L\right|$, где $\left|L\right|$ длина кривой L.

4.7. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной областей. Интегральная формула Коши

Теорема (Коши для односвязной области). Пусть f голоморфная (аналитическая) функция в односвязной области G. Тогда для любого замкнутого контура C, целиком лежащего в G, $\int\limits_C f(z)dz = 0$. Если в дополнение к сказанному f непрерывна в замыкании $G \cup \partial G$ области G, то вместо контура C можно поставить границу ∂G области G, то есть $\int\limits_{\partial G} f(z)dz = 0$.

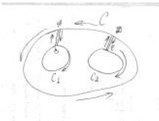
Доказательство. Интеграл от функции комплексного переменного, как показано ранее, имеет вид

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Условия Коши-Римана есть ничто иное, как условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. А так как кривая, по которой ведётся интегрирование, замкнута, то интеграл по этой кривой равен нулю.

Теорема (Коши для многосвязной области). Пусть f голоморфная (аналитическая) функция в многосвязной области G ограниченной контуром C и непересекающимися контурами $C_1, C_2, ..., C_n$, лежащими внутри контура C, и непрерывна в замыкании $G \cup C \cup C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ области G. Тогда $\int\limits_C f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)dz$.

Доказательство. Ограничимся случаем $n=2$. Соединим контур C с контурами C_1 и C_2 линиями AB и DE как показано



на рисунке. Тогда область ограниченная контуром

$$L = AB \cup C_1^- \cup BA \cup AD \cup DE \cup C_2^- \cup ED \cup DA$$

будет односвязной и по интегральной теореме Коши для односвязной области интеграл $\int\limits_L f(z)dz = 0$. Так как интеграл по кривой равен сумме интегралов по её частям, то

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{AB} f(z)dz + \int\limits_{C_1^-} f(z)dz + \int\limits_{BA} f(z)dz + \int\limits_{AD} f(z)dz +$$

$$+ \int\limits_{DE} f(z)dz + \int\limits_{C_2^-} f(z)dz + \int\limits_{ED} f(z)dz + \int\limits_{DA} f(z)dz$$

Далее $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$, $\int\limits_{DE} f(z)dz = -\int\limits_{ED} f(z)dz$, $AD \cup DA = C$, поэтому $\int\limits_C f(z)dz + \int\limits_{C_1^-} f(z)dz + \int\limits_{C_2^-} f(z)dz = 0$, что и завершает доказательство.

Интегральные формулы Коши

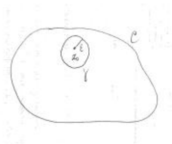
Пусть f голоморфная (аналитическая) функция в односвязной области G и z_0 точка, лежащая внутри G. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \text{ или } \int\limits_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

где C - любой замкнутый контур целиком лежащий в G и содержащий точку z_0 внутри себя. Если в дополнение функция f непрерывна в замыкании G, то вместо C можно поставить границу области G.

Доказательство. Пусть z_0 произвольная точка, лежащая в области G. Пусть γ окружность с центром в точке z_0 и радиуса ε целиком лежащая внутри контура C. Рассмотрим функцию

$\varphi(z)=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Эта функция является аналитической всюду, кроме точки z_0. Так как $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$, то доопределим функцию $\varphi(z)$ в точке z_0 положив $\varphi(z_0)=f'(z_0)$. Так определённая функция будет непрерывна в G, следовательно, ограничена на контуре γ и внутри γ. Так как $\varphi(z)$ аналитическая в двусвязной области, ограниченной контурами C и γ, то по теореме Коши для этой двусвязной области $\int\limits_C\varphi(z)dz=\int\limits_\gamma\varphi(z)dz$. То есть интеграл не зависит от контура γ. С другой стороны, $\left|\int\limits_\gamma\varphi(z)dz\right|\le M2\pi\varepsilon$, где $2\pi\varepsilon$ длина окружности γ. Из последнего следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\int\limits_\gamma\varphi(z)dz\right|=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M2\pi\varepsilon=0$. Это может быть только в случае, если $\int\limits_C\varphi(z)dz=0$. Далее,

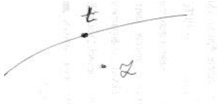


$$0=\int\limits_C\varphi(z)dz=\int\limits_\gamma\varphi(z)dz=\int\limits_\gamma\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=$$

$$=\int\limits_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\int\limits_\gamma\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz=\int\limits_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi i f(z_0).$$

Выписывая крайние части соотношения и учитывая, что по теореме Коши для двусвязной области $\int\limits_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, получаем справедливость теоремы.

Пусть L непрерывная кусочно гладкая кривая и функция f



непрерывна на этой кривой. Функция $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_L \dfrac{f(t)}{t-z}dt$ называется интегралом типа Коши. Покажем, что эта функция голоморфная (аналитическая) во всех точках не лежащих на кривой L. Для этого оценим разность между $\dfrac{F(z+h)-F(z)}{h}$ и $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_L \dfrac{f(t)}{(t-z)^2}dt$. Имеем

$$\Delta=\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{t-z-h}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{t-z}dt\right)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{f(t)}{t-z-h}-\frac{1}{h}\cdot\frac{f(t)}{t-z}-\frac{f(t)}{(t-z)^2}\right)dt\right|$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\Delta=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left(\frac{f(t)\big((t-z)^2-(t-z)(t-z-h)-h(t-z-h)\big)}{h(t-z-h)(t-z)^2}\right)dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left(\frac{f(t)\big((t-z)^2-(t-z)^2+h(t-z)-h(t-z)+h^2\big)}{h(t-z-h)(t-z)^2}\right)dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left(\frac{f(t)h^2}{h(t-z-h)(t-z)^2}\right)dt\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left(\frac{f(t)h}{(t-z-h)(t-z)^2}\right)dt\right|.$$

Получим то же самое, если раскроем в числителе подынтегрального выражения скобки и приведём подобные.

Так как функция f непрерывна на кривой L, то по теореме Вейерштрасса она ограничена на этой кривой. Пусть M константа, ограничивающая f, то есть $|f(t)|\le M$ для всех $t\in L$.

Обозначим через $|L|$ длину кривой L, через $2d$ расстояние от точки z до кривой и возьмём $|h| < d$. Тогда

$$\left|(t-z)^2\right| = 4d^2 ,\ |t-z-h| \geq \big||t-z|-|h|\big| = 2d-|h| > d$$

$$\Delta = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{f(t)h}{(t-z-h)(t-z)^2}\right)dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{|f(t)|\cdot|h|}{4d^3}ds = \frac{M|h|\cdot|L|}{8\pi d^3} .$$

Устремляя h к нулю, получаем

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt .$$

Абсолютно так же показывается, что

$$F''(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h} = \frac{2!}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-z)^3}dt ,$$

$$F^{(n)}(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F^{(n-1)}(z+h)-F^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt .$$

Таким образом, мы получили, что функция определяемая интегралом типа Коши обладает производными любого порядка в каждой точке не лежащей на кривой L и все эти производные есть функции аналитические (голоморфные) в этих точках.

Так как функция определяемая интегральной формулой Коши $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ является частным случаем интеграла типа Коши, то она тоже обладает производными любого порядка во всех точках лежащих внутри контура C которые вычисляются по формулам

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz , \text{ или}$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0) ,$$

где C - любой замкнутый контур целиком лежащий в G и содержащий точку z внутри. Если в дополнение к сказанному f

непрерывна в замыкании $G \cup \partial G$ области G, то вместо контуров C можно поставить границу ∂G области G.

5. Представление функций рядами

5.1. Числовые ряды

Всюду, где введено понятие суммы двух объектов мы можем рассматривать суммы конечного числа элементов. Если операция сложения ассоциативна, то скобки можно опустить, и в таком случае у нас однозначно определено выражение $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Вызывает интерес распространение понятия суммы на бесконечное число слагаемых и выяснения условий сохранения свойств конечных сумм.

Назовём выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рядом, a_n - общим членом ряда. В качестве слагаемых чаще всего рассматривают числа, и тогда ряд называется числовым, функции и тогда ряд называется функциональным. Можно рассматривать так же ряды из векторов, но так как операции сложения векторов сводятся к операциям сложения их координат, принципиально нового не получается. Вначале будем рассматривать числовые ряды.

Вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рассмотрим последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ которая называется последовательностью частичных сумм ряда и составлена из суммы первых n членов ряда.

Определение. Если существует и конечен предел $\lim_{n \to \infty} S_n$ частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ряда, то будем говорить, что ряд сходится и называется сходящимся, если же этот предел не существует или равен ∞, то будем говорить, что ряд расходится и называется расходящимся.

Пример. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

Так как $a_n=\frac{2}{n^2-n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, то $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{n^2-n}=$ $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$. Находя предел частичных сумм, получаем $\lim_{n\to\infty}S_n=1$. Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

Отметим аналог свойства несобственных интегралов, являющегося весьма полезным при изучении рядов.

Теорема. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=p}^{\infty}a_n, p\geq 1$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Говоря другими словами, отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Доказательство. При $p=1$ это один и тот же ряд и доказывать нечего. При $p>1$ обозначим через S_n частичную сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, а через σ_n сумму $\sigma_n=\sum_{k=p}^{n}a_k=a_p+a_{p+1}+\ldots+a_n$. Тогда $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{p-1}a_k+\sum_{k=p}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{p-1}a_k+\sigma_n$. Так как $\sum_{k=1}^{p-1}a_k$ конечное число, то существование предела слева влечёт существование предела справа и наоборот. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда членами ряда являются комплексные числа. Тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{Re}a_k+i\operatorname{Im}a_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}a_k+i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}a_k=\operatorname{Re}S_n+i\operatorname{Im}S_n.$$

Переходя к пределу при n стремящемся к ∞, получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ составленные из действительных и мнимых частей членов ряда и при этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$$

Вспоминая определение предела последовательности на языке неравенств, можем сформулировать определение сходимости ряда с помощью неравенств.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и называется сходящимся, если существует и конечен предел $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ частичных сумм ряда, то есть если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|S - S_n| < \varepsilon$, или, что тоже самое, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon$.

Выражение $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется остатком ряда.

Проводя аналогии с пределом последовательности, можем сформулировать критерий Коши сходимости ряда, который выглядит следующим образом.

Теорема (критерий Коши сходимости ряда). Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$ выполнялось неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$.

Следствие (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то предел общего члена ряда существует и равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Получается из критерия Коши при $p = 1$.

Необходимый признак сходимости ряда является полезным, когда нужно доказать расходимость ряда, так как он эквивалентен следующему результату.

Следствие (необходимый признак сходимости ряда в альтернативной форме). Если предел общего члена ряда не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Следует из того, что утверждение «предложение A влечёт выполнение предложения B» эквивалентно утверждению «отрицание предложения B влечёт выполнение отрицания предложения A» ($(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, через $\neg A$ обозначено отрицание утверждения A).

Утверждение обратное необходимому признаку сходимости неверно, то есть из равенства нулю предела общего члена ряда вовсе не следует его сходимость. Для доказательства достаточно привести пример ряда, общий член которого стремится к нулю при n стремящемся к ∞, а ряд расходится. Классическим примером является гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. Общий член этого ряда $\frac{1}{n}$ стремится к нулю при n стремящемся к ∞. Докажем, что этот ряд расходится. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Заменим в этой сумме все слагаемые на последнее $\frac{1}{2n}$. Так как оно самое маленькое, то сумма от этого только уменьшится, поэтому можно записать $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Далее, $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$,

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{2} = 2, \qquad S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Таким образом, последовательность $S_1, S_2, S_4, \ldots, S_{2^k}, \ldots$ является возрастающей и каждый последующий член этой последовательности больше предыдущего на число большее чем $\frac{1}{2}$ и поэтому предел этой последовательности равен ∞. Таким образом мы доказали, что гармонический ряд расходится.

Риман доказал, что не для всех рядов можно переставлять слагаемые. Выяснение вопроса о том, когда можно переставлять члены ряда приводит нас к необходимости введения нового понятия.

Определение. Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей, то есть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Если ряд сходится абсолютно, то выполнен критерий Коши для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$ выполняется неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$ (внешний знак модуля опущен, так как слагаемы положительны). Так как по свойствам модуля $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$, то критерий Коши выполнен и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, поэтому исходный ряд сходится.

Обратное доказанному утверждению не верно. То есть имеются ряды сходящиеся и не сходящиеся абсолютно. Об этом поговорим несколько позднее.

Определение. Ряд называют условно сходящимся, если он сходится и не сходится абсолютно.

Отметим также, что для знакоположительных рядов с действительными членами понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Для рядов с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n\right)$$

абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна одновременной абсолютной сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ соответственно из действительных и мнимых частей общего члена ряда.

Это следует из цепочки неравенств $|\operatorname{Re} a| \le |a|, |\operatorname{Im} a| \le |a|$, $|a| \le |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|$ и теоремы сравнения, доказываемой ниже.

Достаточные признаки сходимости могут быть сформулированы как в терминах абсолютной сходимости, так и в терминах сходимости знакоположительных рядов с действительными членами.

Признак сравнения. Этот признак имеет непредельную (конечную) и предельную формы.

Непредельная форма признака сравнения. Пусть имеется два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2). Если, начиная с некоторого номера выполняются неравенства $|a_n| \le |b_n|$, то из абсолютной сходимости ряда (2) следует абсолютная сходимость ряда (1) и из абсолютной расходимости ряда (1) следует абсолютная расходимость ряда (2).

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что неравенство $|a_n| \le |b_n|$ выполняется, начиная с $n = 1$. Действительно, отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, поэтому отбросив члены, для которых это неравенство не выполнено и перенумеровав, получаем для новых двух рядов, что соответствующее неравенство выполняется с номера $n=1$. Пусть ряд (2) абсолютно сходится, то есть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$. Обозначим через S_n частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, а через σ_n частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$. В силу выполнения неравенства $|a_n| \le |b_n|$ имеем $S_n = \sum_{k=1}^{n}|a_k| \le \sum_{k=1}^{n}|b_k| = \sigma_n \le \sigma$, где через σ обозначена сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$. Таким образом, последовательность S_n частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ является возрастающей ограниченной сверху последовательностью и поэтому имеет предел. То есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится. С другой стороны, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то, в силу положительности его членов, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и так как $S_n = \sum_{k=1}^{n}|a_k| \le \sum_{k=1}^{n}|b_k| = \sigma_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ расходится. Теорема доказана.

Предельная форма признака сравнения. Пусть имеется два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2). Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = K$, $K \ne 0$, $K \ne \infty$, то либо оба ряда абсолютно сходятся либо абсолютно расходятся.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = K$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\left|\frac{a_n}{b_n}\right|-K\right|<\varepsilon$, или $-\varepsilon<\left|\frac{a_n}{b_n}\right|-K<\varepsilon$, следовательно $K-\varepsilon<\left|\frac{a_n}{b_n}\right|<K+\varepsilon$. Поэтому

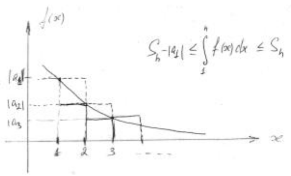
$$(K-\varepsilon)|b_n|<|a_n|<(K+\varepsilon)|b_n| \qquad (4).$$

Дальнейшее следует из теоремы сравнения в непредельной (конечной) форме. Действительно, если ряд (2) абсолютно сходится, то используя правую часть $|a_n|<(K+\varepsilon)|b_n|$ неравенства (4), заключаем, что и ряд (1) абсолютно сходится. Далее, если абсолютно сходится ряд (1), то используя левую часть $(K-\varepsilon)|b_n|<|a_n|$ неравенства (4) заключаем, что и ряд (2) абсолютно сходится. Аналогично, если ряд (2) абсолютно не сходится, то используя левую часть $(K-\varepsilon)|b_n|<|a_n|$ неравенства (4), заключаем, что и ряд (1) не является абсолютно сходящимся. Далее, если ряд (1) абсолютно не сходится то используя правую часть $|a_n|<(K+\varepsilon)|b_n|$ неравенства (4) заключаем, что и ряд (2) абсолютно не сходится. Теорема доказана.

Отметим, что также как и в несобственных интегралах 1-го рода удобно в качестве эталонного ряда применять обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *который при* $\alpha\le 1$ *расходится, а при* $\alpha>1$ *сходится.*

Интегральный признак (Коши). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ удаётся подобрать монотонную действительнозначную функцию f действительного аргумента так, что $f(n)=|a_n|$. Тогда из сходимости интеграла $\int_1^{\infty}f(x)dx$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а их расходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не является абсолютно сходящимся.

Доказательство. Обозначим через S_n частичную сумму ря-



да $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Так как f монотонная и $f(x) \geq 0$, то имеет место оценка $S_n - |a_1| \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_n$. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда из левой части $S_n - |a_1| \leq \int_1^n f(x)dx$ полученной оценки следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то есть из сходимости интеграла следует абсолютная сходимость исходного ряда. Если исходный ряд сходится абсолютно, то есть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то из правой части $\int_1^n f(x)dx \leq S_n$ оценки получаем сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Аналогично, если интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то из правой части $\int_1^n f(x)dx \leq S_n$ полученной оценки следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то есть из расходимости интеграла следует, что исходный ряд не сходится абсолютно. Если исходный ряд не сходится абсолютно, то есть не сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то из левой части $S_n - |a_1| \leq \int_1^n f(x)dx$

оценки получаем расходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$. Теорема доказана.

Признак Даламбера в непредельной форме. Если начиная с некоторого номера $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Если $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$, то $|a_{n+1}| \le q|a_n|$, $|a_n| \le q|a_{n-1}|$, …, $|a_2| \le q|a_1|$. Соединяя вместе, получаем

$$|a_{n+1}| \le q|a_n| \le q^2|a_{n-1}| \le \ldots \le q^n|a_1|.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}|a_1|$ есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $|a_1|$ и знаменателем $0 \le q < 1$, следовательно, сходится. Поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно.

Если $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge q > 1$, то $|a_{n+1}| > |a_n|$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$ и из-за нарушения необходимого признака сходимости ряд расходится.

Признак Даламбера в предельной форме. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, при $q > 1$ ряд расходится (при $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$), при $q = 1$ признак Даламбера ответа не даёт, то есть имеются как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $q = 1$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, то то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q\right| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q < \varepsilon$, следовательно $q - \varepsilon < \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q + \varepsilon$. Если $q < 1$, то можем взять $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $q + \varepsilon$ было меньше 1. Тогда по признаку Даламбера в непредельной (конечной) форме ряд абсолютно сходится. Если $q > 1$, то можем взять $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $q - \varepsilon$ было больше 1. Тогда по признаку Даламбера в непредельной (конечной) форме ряд расходится.

Радикальный признак Коши в непредельной форме. Если начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если $\sqrt[n]{|a_n|} \ge q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Если $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$, то $|a_n| \le q^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $0 \le q < 1$, следовательно, сходится. Поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно. Если $\sqrt[n]{|a_n|} \ge q > 1$, то $|a_n| \ge q^n$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$ и из-за нарушения необходимого признака сходимости ряд расходится.

Радикальный признак Коши в предельной форме. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, при $q > 1$ ряд расходится (при $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$), при $q = 1$ признак Коши ответа не даёт, то есть имеются как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $q = 1$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$, то для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\sqrt[n]{|a_n|}-q\right|<\varepsilon$, или $-\varepsilon<\sqrt[n]{|a_n|}-q<\varepsilon$, следовательно $q-\varepsilon<\sqrt[n]{|a_n|}<q+\varepsilon$. Если $q<1$, то можем взять $\varepsilon>0$ таким, чтобы $q+\varepsilon$ было меньше 1. Тогда по радикальному признаку Коши в непредельной (конечной) форме ряд абсолютно сходится. Если $q>1$, то можем взять $\varepsilon>0$ таким, чтобы $q-\varepsilon$ было больше 1. Тогда по радикальному признаку Коши в непредельной (конечной) форме ряд расходится.

Следствием признака Дирихле является следующий признак.

Признак Лейбница. Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n\ge 0$. Если начиная с некоторого номера $a_n\ge a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд сходится. При этом модуль остатка не превосходит модуля первого отбрасываемого члена и по знаку совпадает с ним.

Доказательство. Рассмотрим чётные и нечётные частичные суммы

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}$$

и

$$S_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}+a_{2n+1}.$$

Так как $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ и $a_{2n+1}\ge 0$, то $S_{2n}\le S_{2n+1}$. Далее, в силу монотонности стремления к нулю общего члена ряда $a_{2n+1}-a_{2n+2}\ge 0$ и поэтому $S_{2n+2}=S_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}\ge S_{2n}$. Следовательно S_{2n} возрастающая последовательность.

$S_{2n+1}=S_{2n-1}-a_{2n}+a_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\le S_{2n-1}$ следовательно S_{2n+1} убывающая последовательность, следовательно $S_{2n+1}\le S_1=a_1$.

Так как $S_{2n} \le S_{2n+1}$, $S_{2n} \le a_1$, то следовательно, S_{2n} возрастающая, ограниченная сверху последовательность, поэтому она имеет предел. Обозначим его S. Так как $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, то $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$.Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится. Рассмотрим остаток ряда. Имеем

$$R_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} - \ldots =$$
$$= a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - \ldots .$$

В силу монотонности $a_{2k} - a_{2k+1} \ge 0$ для любого $k = 1,2,\ldots$. Поэтому, так как мы вычитаем не отрицательные числа, R_{2n} положительно и $R_{2n} \le a_{2n+1}$. Аналогично,

$$R_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = -a_{2n+2} + a_{2n+3} - \ldots =$$
$$= -(a_{2n+2} - (a_{2n+3} - a_{2n+4}) - \ldots .$$

Из последнего заключаем, что R_{2n+1} отрицательно и $|R_{2n+1}| \le a_{2n+2}$. Теорема доказана.

5.2. Функциональные ряды

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется функциональным рядом, $u_n(z)$ - общим членом функционального ряда. Будем обозначать через $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ - частичную сумму ряда, через $S(z)$ - сумму ряда.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится к $S(z)$ в области D, если $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ для всякого z из D.

С другой стороны, при каждом фиксированном z функциональный ряд является числовым. Будем говорить, что ряд сходится в точке z из D, если сходится соответствующий числовой ряд.

Множество тех z, в которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится, назовём областью сходимости функционального ряда.

Множество тех z, в которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ абсолютно сходится, назовём областью абсолютной сходимости функционального ряда. Обычно искать область абсолютной сходимости проще.

Так как при каждом фиксированном z функциональный ряд является числовым, то для исследования сходимости функциональных рядов применяются признаки сходимости числовых рядов.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$.

Найдём область абсолютной сходимости ряда. Используя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} |z| = |z|.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $|z|<1$ и расходится при $|z|>1$. При $|z|=1$ ни с помощью признака Коши, ни с помощью признака Даламбера (показывается также) выяснить сходимость нашего ряда не удаётся. Рассмотрим ряд при $|z|=1$. Так как $|z|=1$, то $z=e^{i\varphi}$, $0\le\varphi<2\pi$. Подставляя в ряд, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{i\varphi}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi}$. Так как $\left|e^{in\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признак сходимости, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\ge 1$.

Естественным образом возникает вопрос о наследовании суммой ряда $S(z)$ свойств членов ряда $u_n(z)$, таких как непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость. Точнее, если члены ряда $u_n(z)$ непрерывны в области D, то будет ли непрерывной сумма ряда $S(z)$; если члены ряда $u_n(z)$ интегрируемы на кривой L, лежащей в области D, то будет ли сумма ряда $S(z)$ интегрируема на этой кривой; если члены ряда $u_n(z)$ дифференцируемы в области D, то будет ли дифференцируема сумма ряда $S(z)$?

Пример. На отрезке $[0,1]$ вещественной прямой рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$. Его частичные суммы есть $S_1(x)=1-x$, $S_2(x)=x^2$, …, $S_n(x)=x^n$, ... Нетрудно видеть, что пределом этой последовательности частичных сумм, а следовательно и суммой ряда, будет функция $S(x)=\begin{cases}0, при\, x\in[0,1)\\ 1, при\, x=0.\end{cases}$ Эта функция терпит разрыв в точке $x=1$, в то время как члены ряда непрерывны на всей вещественной оси, следовательно и на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, чтобы сумма ряда обладала теми же свойствами, что и члены ряда, нужно нечто более жёсткое, чем сходимость ряда. Такими понятиями, как это будет показано ниже, являются понятия равномерной в области сходимости и равномерной внутри области сходимости.

Сформулируем вначале определение сходимости ряда на языке неравенств, которое получается переформулировкой определения сходимости последовательности функций.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится к своей сумме $S(z)$ в области D, если для всякого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon,z)$

такой, что для всех $n > N(\varepsilon, z)$ выполняется неравенство $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$.

Теорема 5.2.1 (критерий Коши сходимости ряда). Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходился в области D, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon, z)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon, z)$ и $p \geq 1$ выполнялось неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < \varepsilon$ для всех z из области D.

Оставим эту теорему без доказательства.

Определение равномерной сходимости выглядит следующим образом.

Определение. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к своей сумме $S(z)$ в области D, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ единый для всех z из области D такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ сразу для всех z из области D.

Определение. Говорят, что ряд сходится равномерно внутри области D, если он сходится равномерно на каждом ограниченном замкнутом подмножестве из множества D.

Как и для сходимости ряда, для равномерной сходимости ряда имеет место критерий Коши.

Теорема 5.2.2 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходился равномерно в области D, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовал единый для всех z из области D номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$ выполнялось неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < \varepsilon$ сразу для всех z из области D.

Оставим эту теорему без доказательства.

Выяснять по определению равномерную и равномерную внутри области сходимости достаточно трудно. Поэтому нужны результаты, позволяющие сделать это легко. Таким результатом является достаточный признак равномерной сходимости, принадлежащий Вейерштрассу. К его изложению мы и приступаем.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ или, что то же самое, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ мажорирует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если, начиная с некоторого номера выполнено неравенство $|a_n| \leq |b_n|$.

Теорема 5.2.3 (Вейерштрасс). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ в области D существует мажорирующий его абсолютно сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в D равномерно.

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то для ряда из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ выполнен критерий Коши, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$ выполняется неравенство

$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|a_k| < \varepsilon$. Далее, так как по условию теоремы для всякого z из D выполнено неравенство $|u_n(z)| \le |a_n|$, то можем написать

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(z)| \le \sum_{k=n}^{n+p} |a_n|.$$

Из полученного неравенства следует, что для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ выполнен критерий Коши равномерной сходимости. Теорема доказана.

Пример. Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ сходится равномерно внутри круга сходимости $|z| < 1$. Пусть G некоторое замкнутое множество, лежащее в круге $|z| < 1$. В силу замкнутости G существует замкнутый круг $|z| \le 1-\delta$ при некотором $\delta > 0$ в котором лежит множество G. Тогда для всякого z из G выполнено неравенство $|z| \le 1-\delta$, а следовательно и неравенства $|z^n| \le (1-\delta)^n$, $n = 1,2,\ldots$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^n$ сходится и является мажорирующим для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ на множестве G следовательно, по теореме Вейерштрасса, ряд сходится на G равномерно. В силу произвольности множества G, ряд сходится равномерно внутри круга сходимости $|z| < 1$.

Теорема 5.2.4. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно на множестве D, и функции $u_n(z)$ непрерывны на множестве D, то сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывна на множестве D.

Доказательство. Пусть z и $z+h$ точки из D. Нам требуется показать, что $\lim\limits_{h\to 0} S(z+h)=S(z)$. Для этого оценим разность $\left|S(z+h)-S(z)\right|$. Имеем

$$\left|S(z+h)-S(z)\right|=$$
$$=\left|\left(S(z+h)-S_n(z+h)\right)-\left(S(z)-S_n(z)\right)+S_n(z+h)-S_n(z)\right|\le$$
$$\le\left|\left(S(z+h)-S_n(z+h)\right)\right|+\left|\left(S(z)-S_n(z)\right)\right|+\left|S_n(z+h)-S_n(z)\right|.$$

Каждое из первых двух слагаемых $\left|\left(S(z+h)-S_n(z+h)\right)\right|$ и $\left|\left(S(z)-S_n(z)\right)\right|$ можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ за счёт равномерной сходимости ряда, третье $\left|S_n(z+h)-S_n(z)\right|$ за счёт непрерывности частичных сумм ряда. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно интегрировать почленно в области D, если для любой кривой L лежащей в D выполнено соотношение

$$\int\limits_L \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right) dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_L u_n(z)dz.$$

Теорема 5.2.5. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно внутри области D, функции $u_n(z)$ и сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ интегрируемы на кривой L, лежащей в D, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно интегрировать почленно.

Доказательство. Отметим, что если члены $u_n(z)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывны в области D и ряд сходится равномерно, то сумма ряда непрерывна и, следовательно, интегрируема. Поэтому в случае непрерывности $u_n(z)$ в D условие интегрируемости суммы ряда можно убрать из формулировки теоремы, так как оно автоматически выполняется. Пусть $S(z)$ сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$. Оценим выражение $\left|\int_L S(z)dz - \sum_{k=1}^{n}\int_L u_k(z)dz\right|$. Имеем

$$\left|\int_L S(z)dz - \sum_{k=1}^{n}\int_L u_k(z)dz\right| = \left|\int_L S(z)dz - \int_L\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(z)\right)dz\right| =$$

$$= \left|\int_L\left(S(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)\right)dz\right| = \left|\int_L R_n(z)dz\right| \le \int_L |R_n(z)|ds.$$

Здесь через $R_n(z)$ обозначен остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, через ds дифференциал длины дуги. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ единый для всех z на кривой L такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{l}$ сразу для всех z из области D. Здесь l длина кривой L. Тогда для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\int_L S(z)dz - \sum_{k=1}^{n}\int_L u_k(z)dz\right| < \varepsilon$, что и означает почленную интегрируемость ряда. Теорема доказана.

Теорема 5.2.6. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно на множестве D, и функция $\varphi(z)$ ограничена на D, то есть существует число $M > 0$ такое, что $|\varphi(z)| \le M$ для всех z из множества D, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z)u_n(z)$ сходится на D равномерно.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на D равномерно, то для него выполняется критерий Коши равномерной сходимости, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует единый для всех z из области D номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$ сразу для всех z из области D. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi(z) u_k(z)\right| = \left|\varphi(z) \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| = |\varphi(z)| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

Поэтому критерий Коши равномерной сходимости выполнен и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) u_n(z)$. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно дифференцировать почленно в области D, если для всех z из области D выполнено соотношение $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z)$.

Теорема 5.2.7. Если ряд сходится равномерно внутри области D и функции $u_n(z)$ голоморфные (аналитические) в области D, то сумма ряда есть функция аналитическая и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.

Доказательство. Пусть $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в области D и z - произвольная точка из D. Пусть, далее, γ окружность радиуса ρ с центром в точке z и целиком лежащая в области D. Её уравнение имеет вид $|t - z| = \rho$. Так как ряд $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в области D, $|t-z|=\rho$, то по теореме 2.2.6 равномерно сходятся на γ ряды

$$\frac{S(t)}{t-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(t)}{t-z},$$

$$\frac{S(t)}{(t-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(t)}{(t-z)^2}, \ldots,$$

$$\frac{S(t)}{(t-z)^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(t)}{(t-z)^k}, \ldots$$

и поэтому их можно почленно интегрировать на γ. В результате получаем

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S(t)}{t-z}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_n(t)}{t-z}dt,$$

$$S'(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)\right)'=\frac{1!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S(t)}{(t-z)^2}dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_n(t)}{(t-z)^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(z), \ldots,$$

$$S^{(k)}(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)\right)^{(k)}=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S(t)}{(t-z)^{k+1}}dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_n(t)}{(t-z)^{k+1}}dt=\sum_{n=1}^{\infty}u^{(k)}{}_n(z), \ldots.$$

Функция и её производные представлены интегралом типа Коши, поэтому являются аналитическими (голоморфными) в D функциями каждую из них можно дифференцировать любое число раз. Теорема доказана.

Заметим, что для функций действительного переменного дифференцируемость функции не влечёт её аналитичности. Для рядов состоящих из функций действительного переменного имеет место следующий результат о почленной дифференцируемости ряда.

Теорема 5.2.8. Если функции $u_n(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно внутри этого интервала, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно дифференцировать почленно, то есть имеет место равенство $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, или, что то же самое, производная суммы исходного ряда равна сумме ряда из производных.

5.3. Степенные ряды

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ называется степенным. Так как этот ряд сдвигом начала координат в точку z_0 может быть преобразован к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то обычно последний и изучают. Имеет место следующий результат.

Теорема (Абель). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке z_1, то он сходится, и притом абсолютно, в любой точке z, для которой $|z| < |z_1|$. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_2, то он расходится и в любой точке z, для которой $|z| > |z_2|$.

Таким образом, степенной ряд имеет круг сходимости. Выражение для нахождения радиуса $R = \dfrac{1}{L}$ круга сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ получают с помощью признака Даламбера $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ или признака Коши $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Нетрудно показать, что степенной ряд сходится равномерно внутри круга сходимости, поэтому его можно интегрировать и дифференцировать внутри этого круга любое число раз. Кроме того, так как функции $(z - z_0)^n$ являются аналитическими (голоморфными) во всей комплексной плоскости и степенной ряд сходится равномерно внутри круга сходимости, то его сумма есть функция аналитическая (голоморфная) внутри круга сходимости.

5.4. Ряды Тейлора и Лорана

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, где интегрирование ведётся по любому замкнутому контуру содержащему точку z_0 внутри себя и не содержащему точек не аналитичности функции $f(z)$, называется рядом Тейлора.

Теорема (Тейлор). Всякая голоморфная (аналитическая) в круге $|z - z_0| < R$ функция есть сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, коэффициенты c_n которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

где интегрирование ведётся по любому замкнутому контуру содержащему точку z_0 внутри себя и целиком лежащему в круге $|z - z_0| < R$. Это представление единственно в том смысле, что если мы получили разложение функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, то это обязательно ряд Тейлора.

Доказательство. По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt .$$

Следовательно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z_0+z_0-z} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)-(z-z_0)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \frac{1}{(t-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \right) (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Здесь обозначено $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Ряд Тейлора разложения функции по степеням z, то есть при $z_0 = 0$ называется рядом Маклорена.

Таблица разложений некоторых функций в ряд Маклорена.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} ;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n;$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n;$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n};$$

$$\mathrm{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}.$$

Степенной ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, называется рядом Лорана. Слагаемое $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется правильной частью ряда Лорана, а слагаемое $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ называется главной частью ряда Лорана.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, сходящийся в кольце $|z| > R$, называется рядом Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки. Слагаемое $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ называют правильной часть ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки, а слагаемое $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ называют главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки.

Теорема (Лоран). Всякая голоморфная (аналитическая) в кольце $r<\left|z-z_0\right|<R$ функция есть сумма степенного ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты c_n которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} dz,$$

где интегрирование ведётся по любому контуру содержащему точку z_0 внутри себя и целиком лежащему в кольце $r<\left|z-z_0\right|<R$. Это представление единственно в том смысле, что если мы получили разложение функции в степенной ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, то это обязательно ряд Лорана.

Кольцо $r<\left|z-z_0\right|<R$ может включать случаи $r=0$ и $R=\infty$, то есть либо иметь вид $0<\left|z-z_0\right|<R$ ($r=0$) либо вид $\left|z-z_0\right|>r$ ($R=\infty$).

5.5. Нули аналитических функций. Особые точки

Определение 2.5.1. Точка z_0 называется нулём функции $f(z)$, если функция в этой точке обращается в нуль, то есть $f(z_0)=0$.

Определение 5.5.2. Точка z_0 называется нулём кратности k функции $f(z)$, если в этой точке обращаются в нуль сама функция и её первые $k-1$ производные, а производная порядка k нулю не равна, то есть

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0,\ f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Теорема 5.5.1. Точка z_0 является нулём кратности k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Тейлора по степеням $(z-z_0)$ имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 есть нуль кратности k функции $f(z)$. Запишем ряд Тейлора для функции $f(z)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

так как

$$f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

Достаточность. Пусть разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-z_0)$ имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Тогда $f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 5.5.2. Точка z_0 является нулём кратности k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её можно записать в виде $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая в окрестности точки z_0 функция, такая что $\varphi(z_0)\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка z_0 является нулём кратности k функции $f(z)$. Тогда, по теореме 2.5.1, её разложение по степеням $(z-z_0)$ имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+...$$

Вынося за скобки $(z-z_0)^k$, имеем

$$f(z)=(z-z_0)^k\left(a_k+a_{k+1}(z-z_0)+...\right)=(z-z_0)^k\sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

Положив $\varphi(z)=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\ldots=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n-k}$, получаем справедливость необходимости.

Достаточность. Пусть $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая в окрестности z_0 функция, такая что $\varphi(z_0)\neq 0$. Раскладывая $\varphi(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-z_0)$, получаем

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\frac{\varphi(z_0)}{0!}+\frac{\varphi'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\ldots.$$

Тогда

$$f(z)=(z-z_0)^k\left(\frac{\varphi(z_0)}{0!}+\frac{\varphi'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\ldots\right)=$$

$$=(z-z_0)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n+k}=$$

$$=\frac{\varphi(z_0)}{0!}(z-z_0)^k+\frac{\varphi'(z_0)}{1!}(z-z_0)^{k+1}+\ldots,$$

что по теореме 2.5.1 означает справедливость достаточности.

Теорема 5.5.3. Если точка z_0 является нулём кратности k функции $f(z)$, то этот нуль изолированный, то есть существует окрестность точки z_0, в которой нет других нулей функции $f(z)$.

Доказательство. Так как точка z_0 является нулём кратности k функции $f(z)$, то по теореме 2.5.2 её можно записать в виде $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая в окрестности z_0 функция, такая что $\varphi(z_0)\neq 0$. Множитель $(z-z_0)^k$ обращается в нуль только в точке z_0. Далее, так как $\varphi(z)$ - аналитическая, следовательно, непрерывная, то $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)$. По определению предела это означает, что для всякого $\varepsilon>0$ существует окрестность $U(z_0)$ точки z_0 такая, что для всех z из $U(z_0)$ выполнено неравенство $\left|\varphi(z)-\varphi(z_0)\right|<\varepsilon$. По свойствам модуля можем записать $\left|\varphi(z)-\varphi(z_0)\right| \geq \left\|\varphi(z)\right|-\left|\varphi(z_0)\right\|$, поэтому для всех z из $U(z_0)$ выполнено неравенство $\left\|\varphi(z)\right|-\left|\varphi(z_0)\right\|<\varepsilon$ или, что то же самое, $-\varepsilon<\left|\varphi(z)\right|-\left|\varphi(z_0)\right|<\varepsilon$. Из последнего соотношения имеем $\left|\varphi(z_0)\right|-\varepsilon<\left|\varphi(z)\right|<\left|\varphi(z_0)\right|+\varepsilon$. Взяв $\varepsilon=\dfrac{\left|\varphi(z_0)\right|}{2}$, что возможно так как $\varphi(z_0)\neq 0$, получаем, что для $\varepsilon=\dfrac{\left|\varphi(z_0)\right|}{2}$ нашлась окрестность $U(z_0)$ точки z_0 такая, что для всех z из $U(z_0)$ выполнено неравенство $\left|\varphi(z)\right|>\left|\varphi(z_0)\right|-\dfrac{\left|\varphi(z_0)\right|}{2}=\dfrac{\left|\varphi(z_0)\right|}{2}$ и поэтому $\varphi(z)\neq 0$ для всех z из $U(z_0)$. Теорема доказана.

Перейдём теперь к рассмотрению особых точек.

Определение 5.5.3. Точка z_0 называется особой точкой функции $f(z)$, если в этой точке нарушается аналитичность функции $f(z)$.

Определение 5.5.4. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, внутри которой нет других особых точек функции $f(z)$.

Определение 5.5.5. Точка z_0 называется регулярной или правильной точкой функции $f(z)$, если она не является особой точкой.

Классификация изолированных особых точек основана на поведении предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Определение 5.5.6. Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и конечен, то точка z_0 называется устранимой особой точкой.

Определение 5.5.7. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и равен бесконечности, то точка z_0 называется полюсом.

Определение 5.5.8. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует, то точка z_0 называется существенно особой точкой.

Теорема 5.5.4. Точка z_0 является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда точка z_0 является нулём функции

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, если z \neq z_0 \\ 0, если z = z_0 \end{cases}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 является полюсом функции $f(z)$, следовательно, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Тогда $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$, поэтому точка z_0 есть нуль функции $g(z)$.

Достаточность. Пусть z_0 является нулём функции $g(z)$, тогда $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{g(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, следовательно, точка z_0 есть полюс функции $f(z)$.

Эта теорема позволяет дать более подробную классификацию полюсов аналитической функции.

Определение 5.5.9. Точка z_0 называется полюсом порядка k функции $f(z)$, если эта точка есть нуль кратности k функции

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, если z \neq z_0 \\ 0, если z = z_0 \end{cases}$$

Полюс порядка 1 обычно называют простым полюсом.

Теорема 5.5.5. Точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её можно записать в виде $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\psi(z)$ - аналитическая в окрестности z_0 функция, такая что $\psi(z_0)\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$. Тогда, по определению полюса порядка k, точка z_0 есть нуль функции кратности k функции $g(z)$. Поэтому, по теореме 2.5.2 функцию $g(z)$ можно записать в виде $g(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^k\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^k}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}.$$

Далее, так как функция $\varphi(z)$ аналитическая в окрестности точки z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$, то функция $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ также аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 и $\dfrac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$. Обозначив $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ через $\psi(z)$, получаем справедливость необходимости.

Достаточность. Пусть $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\psi(z)$ - аналитическая в окрестности z_0 функция, такая что $\psi(z_0)\neq 0$. Тогда

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^k\psi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^k}\cdot\frac{1}{\psi(z)}.$$

Далее, так как функция $\psi(z)$ аналитическая в окрестности точки z_0 и $\psi(z_0)\neq 0$, то функция $\dfrac{1}{\psi(z)}$ также аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 и $\dfrac{1}{\psi(z_0)}\neq 0$. Обозначив $\dfrac{1}{\psi(z)}$

через $\varphi(z)$, получаем справедливость достаточности. Теорема доказана.

Интересна связь между типом изолированной особой точки и видом разложения функции в ряд Лорана в кольце $0<|z-z_0|<R$.

Теорема 5.5.6. Точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$ не содержит главной части, то есть имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, тогда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и конечен. Поэтому существует окрестность точки z_0 в которой функция $f(z)$ ограничена, то есть для всех z из этой окрестности выполнено неравенство $|f(z)|\le M$, где M некоторое действительное число. Оценим коэффициенты при отрицательных степенях разложения $f(z)$ в ряд Лорана. Имеем

$$|c_{-n}|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\right|ds=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{-n+1}}ds\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{M}{|z-z_0|^{-n+1}}ds,$$
$$n=1,2,\ldots$$

В качестве контура C возьмём окружность радиуса ρ с центром в точке z_0. Тогда $|c_{-n}|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_C M\rho^{n-1}ds=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi M\rho^n=M\rho^n$, $n=1,2,\ldots$ Устремляя ρ к нулю, получаем что правая часть стремится к нулю, что может быть только при $c_{-n}=0, n=1,2,\ldots$ Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ не содержит главной части, то есть имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Тогда $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, то есть существует и конечен. Достаточность доказана.

Пример 5.5.1. Пусть $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. В точке $z=0$ знаменатель обращается в нуль, поэтому функция в этой точке не определена и точка $z=0$ является особой для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. Запишем разложение функции $\sin z$ по степеням z. Имеем

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots.$$

Поэтому

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\cdot\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Таким образом, в разложении функции в обобщённый степенной ряд отсутствуют отрицательные степени, то есть нет главной части. Поэтому особая точка является устранимой. Действительно, если мы доопределим нашу функцию в нуле, положив $f(0)=1$, рассматривая вместо исходной функции функцию

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & \text{если } z\neq 0\\ 1, & \text{если } z=0\end{cases},$$

то особенность изчезнет.

Теорема 5.5.7. Точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ содержит в главной части k слагаемых, то есть имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-k}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда, по теореме 2.5.5, $f(z)$ имеет вид $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\psi(z)$ - аналитическая в окрестности z_0 функция, такая что $\psi(z_0)\neq 0$. Раскладывая $\psi(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$, получаем $\psi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.
Тогда

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}=\frac{1}{(z-z_0)^k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^k}\cdot\left(c_0+c_1(z-z_0)+\ldots\right)=\frac{c_0}{(z-z_0)^k}+\frac{c_1}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots,$$

что лишь обозначениями отличается от требуемого.

Достаточность. Пусть разложение в ряд Лорана $f(z)$ по степеням $z-z_0$ содержит в главной части k слагаемых, то есть имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Вынося $\dfrac{1}{(z-z_0)^k}$ за скобки, получаем

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\left(c_{-k}+c_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{k-1}+\ldots\right).$$

Полагая $\psi(z)=c_{-k}+c_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{k-1}+\ldots$, имеем $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\psi(z)$ - аналитическая в окрестности z_0 функция, такая что $\psi(z_0)=c_{-k}\neq 0$. По теореме 2.5.5 точка z_0 есть полюс порядка k функции $f(z)$.

Теорема 5.5.8. Точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть её разложение в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$, содержит бесконечное число членов.

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда главная часть её разложения в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ не может отсутствовать, так как в этом случае точка была бы устранимой, и не может содержать конечного числа членов, так как в этом случае точка была бы полюсом. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть главная часть разложение $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$, содержит бесконечное число членов. Тогда эта точка не может быть устранимой особой точкой, так как в этом случае главная часть должна отсутствовать и не может быть полюсом, так как в случае полюса главная часть должна содержать конечное число членов. Теорема доказана.

В бесконечно удалённой точке та же классификация особых точек. Связь с разложением в ряд Лорана та же с учётом специфики бесконечно удалённой точки. Приведём её.

Теорема 5.5.9. Бесконечно удалённая точка является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки не содержит главной части, то есть имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n = \ldots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 .$$

Теорема 5.5.10. Бесконечно удалённая точка является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки содержит в главной части k слагаемых, то есть имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n + \sum_{n=1}^{k} c_n z^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_k z^k .$$

Теорема 5.5.11. Бесконечно удалённая точка является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть её разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки содержит бесконечное число членов.

5.6. Вычеты

Пусть z_0 конечная точка комплексной плоскости.

Определение 5.6.1. Вычетом $\underset{z=z_0}{res} f(z)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент c_{-1} разложения функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ (в кольце $0<|z-z_0|<R$).

Так как

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz\ ,$$

где L - контур охватывающий точку z_0 и не включающий в себя других особых точек функции $f(z)$, то умея находить вычеты можно попытаться вычислять интегралы от функций комплексного переменного с помощью вычетов.

Зная разложение функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ (в кольце $0<|z-z_0|<R$) всегда можно найти вычет. Имеются результаты, позволяющие находить вычеты не зная разложения функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, в зависимости от вида особой точки. Для конечной точки имеем следующее.

Теорема 5.6.1. Вычет в правильной точке равен нулю.

Доказательство. Если z_0 правильная точка функции $f(z)$, то $f(z)$ раскладывается в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$ и, следовательно, у этого ряда нет главной части. Поэтому $c_{-1}=0$.

Теорема 5.6.2. Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Доказательство. Если z_0 устранимая особая точка функции $f(z)$, то в разложении $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ отсутствует главная часть. Поэтому $c_{-1}=0$.

Теорема 5.6.3. Вычет в простом полюсе вычисляется по формуле

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\, f(z).$$

Доказательство. Так как z_0 простой полюс, то есть полюс порядка 1, то разложение $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots.$$

Умножая обе части на $z-z_0$, получаем

$$(z-z_0)\, f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^{n+1} + \ldots.$$

Переходя к пределу при z стремящемся к z_0, имеем

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\, f(z) = c_{-1} = \underset{z=z_0}{res}\, f(z).$$

Теорема доказана.

Теорема 5.6.4. Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - голоморфные (аналитические) в окрестности z_0 функции, $\varphi(z_0) \neq 0$, а для функции $\psi(z)$ точка z_0 есть нуль кратности 1, то в этом случае точка z_0 является простым полюсом для функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и вычет может быть вычислен по формуле

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Доказательство. Так как z_0 простой полюс и $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, то

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\, f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$

$$= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(z_0)} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\psi(z)-\psi(z_0)}\cdot\varphi(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.6.5. Вычет в полюсе порядка k вычисляется по формуле

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big).$$

Доказательство. Так как точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$, то разложение $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Умножая обе части на $(z-z_0)^k$, получаем

$$(z-z_0)^k f(z) =$$

$$= c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0 (z-z_0)^k + \ldots.$$

Вычислив $k-1$ производную от обеих частей, имеем

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big) = c_{-1}(k-1)! + c_0 (z-z_0) \frac{k!}{1!} + \ldots.$$

Переходя в полученном соотношении к пределу при z стремящемся к z_0, получаем справедливость формулы

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big).$$

Теорема доказана.

В существенно особой точке вычет можно найти, зная разложение функции в ряд Лорана в проколотой окрестности конечной точки (в кольце $0 < |z-z_0| < R$).

Рассмотрим теперь бесконечно удалённую точку.

Определение 5.6.2. Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке называется число $-c_{-1}$, где c_{-1} коэффициент разложения функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки.

Вычет в бесконечно удалённой точке можно найти следующими способами:

1) с помощью разложения функции в ряд Лорана;

2) по формулам М.Р. Куваева

а) в устранимой особой точке по формуле

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2 f(z);$$

б) в полюсе порядка k по формуле

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{k+2}\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} f(z)\right);$$

3) сведением к вычислению вычета в нуле путём замены $z = \dfrac{1}{w}$ по формуле

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -\underset{w=0}{res}\left(f\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\frac{1}{w^2}\right).$$

5.7. Вычисление интегралов с помощью вычетов

Основная теорема о вычетах.

Теорема 5.7.1. Пусть функция $f(z)$ голоморфная (аналитическая) внутри контура L за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащих внутри этого контура и не имеющая особых точек на контуре L. Тогда

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\, f(z)\right).$$

Доказательство. Заключим каждую из точек $z_1, z_2, ..., z_n$ в контур $L_k, k = 1,2,...,n$ так, чтобы все эти контуры лежали внутри контура L и не пересекались между собой. Тогда, по теореме Коши для многосвязной области,

$$\int_L f(z)dz = \left(\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k} f(z)dz\right).$$

Так как внутри контура $L_k, k = 1,2,...,n$ лежит только особая точка $z_k, k = 1,2,...,n$, то $\int\limits_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \underset{z=z_k}{res} f(z), k = 1,2,...,n$, что и доказывает теорему.

Теорема 5.7.2. Пусть функция $f(z)$ голоморфная (аналитическая) во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$. Тогда сумма вычетов во всех особых точках, включая и бесконечно удалённую точку, равна нулю, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z) + \underset{z=\infty}{res} f(z) = 0.$$

Доказательство. Проведём контур L так, чтобы все особые точки попали внутрь этого контура. Тогда, с одной стороны, по теореме 5.7.1 $\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z) \right)$, с другой стороны, $\int\limits_L f(z)dz = -2\pi i \cdot \underset{z=\infty}{res} f(z)$. Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z) = -\underset{z=\infty}{res} f(z)$, что и доказывает теорему.

Эти теоремы и теорема Коши для многосвязной области позволяют вычислять интегралы по различным контурам.

Для несобственных интегралов первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ имеет место следующий результат.

Теорема 5.7.3. Если функция $f(z)$ голоморфна (аналитична) в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек, голоморфна (аналитична) на оси OX и $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$, где $M > 0, \delta > 0$ - некоторые константы, то несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z),$$

где суммирование ведётся по всем особым точкам функции $f(z)$ лежащим в верхней полуплоскости, то есть таким, что $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1,2,...,n$.

Вычисление интегралов $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ или интегралов $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, где $R(\cos t, \sin t)$ есть рациональная функция переменных $\cos t$ и $\sin t$, заменой $z = e^{it}$ сводится к вычислению интеграла $\int_{|z|=1} R_1(z)dz$, где $R_1(z)$ - некоторая другая рациональная функция переменной z. Действительно, если t пробегает полуинтервал $[0,2\pi)$ или полуинтервал $[-\pi,\pi)$, то точка z пробегает единичную окружность. Далее, по формулам Эйлера, получаем

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Кроме того, $dz = ie^{it}dt$, или $dt = \frac{1}{i}e^{-it}dz = \frac{dz}{iz}$. Подставляя полученные выражения для $\cos t$, $\sin t$, dt в выражение $R(\cos t, \sin t)dt$ получаем новую рациональную функцию, но уже переменной z.

6. Ряды Фурье

Рассмотрим множество вещественнозначных функций заданных на отрезке $[a,b]$ и интегрируемых вместе со своим квадратом, то есть таких, что существуют интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$. Такими являются, например, все непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, функции имеющие конечное число точек разрыва 1-го рода отрезке $[a,b]$. Для таких функций конструкция $\int_a^b f(x)g(x)dx$ обладает всеми свойствами скалярного произведения. Поэтому на множестве функций интегрируемых вместе со своим квадратом вводят скалярное произведение по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{6.1}$$

Для комплекснозначных функций действительного переменного интегрируемых со своим квадратом скалярное произведение вводят по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{6.2}$$

Отметим, что как только появилось скалярное произведение, то сразу же можем ввести понятие нормы элемента по формуле $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$. Для действительнозначных функций получаем

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для комплекснозначных функций имеем

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

А так как есть понятие нормы элемента, то есть понятие расстояния между элементами, которое можно ввести по формуле $\rho(f,g) = \|f-g\|$. В нашем случае получаем

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \left(\int_a^b \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

для действительнозначных функций и

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

для комплекснозначных функций.

Откуда в такой форме взялось? Каждая функция, заданная на отрезке $[a,b]$, полностью определяется набором своих значений, то есть если для всякого x из $[a,b]$ можем найти $f(x)$, то функция определена полностью. Не всегда удаётся задать функцию набором своих значений. Поэтому можно попытаться охарактеризовать функцию приближённо набором в конечном числе точек. Пусть $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ такой набор. Тогда этот набор можно считать n-мерным вектором $\left(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \right)^T$. Другую функцию $g(x)$ тоже можно охарактеризовать в тех же точках. Чем больше точек, тем точнее характеристика функции. А теперь повторим схему, реализованную при построении интегральных сумм в интеграле Римана. Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Рассмотрим $\left(f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n) \right)^T$ и $\left(g(\xi_1), g(\xi_2), ..., g(\xi_n) \right)^T$. Скалярное произведение этих n-мерных векторов имеет вид

$$(f,g)_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)=$$
$$=f(\xi_1)g(\xi_1)+f(\xi_2)g(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)g(\xi_n).$$
Увеличивая число точек разбиения, скорее всего, получим, что $(f,g)_n$ стремится к ∞. Например, взяв $f(x)=g(x)=1$ для всякого x из $[a,b]$, получаем, что $f(\xi_k)g(\xi_k)=1$, $(f,g)_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)=n$. Поэтому подправим это скалярное произведение рассмотрением скалярного произведения с весом, взяв в качестве веса Δx_i. Тогда имеем

$$(f,g)_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k=$$
$$=f(\xi_1)g(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)g(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)g(\xi_n)\Delta x_n.$$
В результате получилась интегральная сумма. Переходя к пределу по всевозможным разбиениям, имеем
$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

Аналогичная конструкция может быть реализована и для комплекснозначных функций.

Назовём две функции ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Семейство функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$ назовём ортогональным, если каждые две функции из этого семейства ортогональны между собой.

Ортогональной системой функций является так называемая тригонометрическая система функций
$$1,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\ldots, \tag{6.3}$$
которая ортогональна на отрезке $[-l,l]$. Частным случаем этой системы функций является система
$$1,\cos nx,\sin nx,\ n=1,2,\ldots, \tag{6.4}$$

ортогональная на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Также являются ортогональными системы комплекснозначных функций $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ на отрезке $[-l, l]$ и e^{inx}, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Доказывается просто. Необходимо вычислить скалярное произведение между элементами этих систем.

Конкретные ортогональные семейства функций, отличные от тригонометрической системы, можно найти в [4-6] и других книгах.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ - множество попарно ортогональных функций. Пусть далее функция $f(x)$ представлена в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x). \tag{6.5}$$

Это представление называется разложением функции в обобщённый ряд Фурье. Вычислим при некотором k скалярное произведение $\left(f(x), \varphi_k(x)\right)$ от левой и правой частей данного разложения. В результате получаем

$$\left(f(x), \varphi_k(x)\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x), \varphi_k(x)\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) \cdot \varphi_k(x)\right) dx.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) \cdot \varphi_k(x)$ можно интегрировать почленно, то

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) \cdot \varphi_k(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_k(x) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\varphi_n(x), \varphi_k(x)\right) = \alpha_k \left(\varphi_k(x), \varphi_k(x)\right) = \alpha_k \left\|\varphi_k(x)\right\|^2$$

Следовательно, $\left(f(x), \varphi_k(x)\right) = \alpha_k \left\|\varphi_k(x)\right\|^2$ и получаем коэффициенты разложения функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

$$\alpha_n = \frac{(f(x), \varphi_n(x))}{\|\varphi_n(x)\|^2}. \tag{6.6}$$

Чем хороши ряды Фурье? Для ответа на этот вопрос рассмотрим так называемые полиномы по ортогональной системе $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$, содержащие не более чем n слагаемых, то есть всевозможные линейные комбинации

$$\varphi = \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + ... + \beta_n\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k$$

элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. Оценим квадрат нормы разности элементов f и φ. Имеем

$$\|f - \varphi\|^2 = (f - \varphi, f - \varphi) = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right) =$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k (f, \varphi_k) + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right) =$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \beta_k \beta_p (\varphi_k, \varphi_p).$$

Так как $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ является семейством ортогональных функций, то

$$(\varphi_k, \varphi_p) = \begin{cases} \|\varphi_k\|^2, & \text{если } k = p, \\ 0, & \text{если } k \neq p. \end{cases}$$

Поэтому $\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \beta_k \beta_p (\varphi_k, \varphi_p) = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k)^2 (\varphi_k, \varphi_k)$. Таким образом,

$$\|f - \varphi\|^2 = (f, f) - 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k)^2 (\varphi_k, \varphi_k).$$

Далее, так как $(\varphi_k, \varphi_k) = \|\varphi_k\|^2$, $(f, \varphi_k) = \alpha_k \|\varphi_k(x)\|^2$, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k)^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Вычитая и прибавляя в правой части полученного соотношения $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2$ имеем

$$\|f-\varphi\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2-2\sum_{k=1}^{n}\beta_k\alpha_k\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\beta_k)^2\|\varphi_k\|^2,$$

$$\|f-\varphi\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)^2\|\varphi_k\|^2.$$

В последнем соотношении слагаемые $\|f\|^2$ и $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2$ постоянны, а слагаемое $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)^2\|\varphi_k\|^2$ достигает наименьшего значения и обращается в нуль при $\alpha_k=\beta_k$. Таким образом, $\|f-\varphi\|^2$ достигает минимума, когда

$$\varphi=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_n\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k,$$

то есть является n-ой частичной суммой ряда Фурье. Таким образом, частичные суммы ряда Фурье осуществляют наилучшее среднеквадратичное приближение к исходной функции. Кроме того, так как $\|f-\varphi\|^2\geq 0$, то $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2\leq\|f\|^2$. Устремляя n к бесконечности, получаем неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2\leq\|f\|^2.$$

Из неравенства Бесселя сразу же следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2$ является сходящимся.

Отметим несколько понятий в пространствах со скалярным произведением.

Назовём семейство ортогональных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ полным в пространстве со скалярным произведением H, если не существует в этом пространстве функции ортогональной к каждой из функций семейства $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$.

Если семейство элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ является полным в H, то каждый элемент из H представим своим обобщённым рядом Фурье.

Если в неравенстве Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2 \|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2$ имеет место равенство, то есть $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$ для каждого элемента из H, то система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ называется замкнутой в H, а равенство $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$ называется условием замкнутости или равенством Парсеваля-Стеклова.

Если система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ замкнута в H, то она полна в H.

Доказательство в [4] или других книгах по рядам Фурье.

Применяя формулы вычисления коэффициентов ряда Фурье $a_n = \dfrac{(f(x), \varphi_n(x))}{\|\varphi_n(x)\|^2}$ к тригонометрической системе (6.3), получаем разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (6.7)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \; n = 0,1,2,\ldots, \qquad (6.8)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \; n = 1,2,\ldots. \qquad (6.9)$$

Преобразуем слагаемое $a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ в (3.7). Имеем

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}}\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Положим

$$\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} = A_n\,,\ \frac{a_n}{\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}} = \cos\varphi_n\,,\ \frac{b_n}{\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}} = \sin\varphi_n\,.$$

С учётом этих обозначений имеем

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = A_n\left(\cos\varphi_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right).$$

Поэтому ряд (3.7) может быть записан в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right).$$

Функция $A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right)$ *является периодической с наименьшим периодом* $\frac{2l}{n}$ *и представляет собой гармоническое колебание. Поэтому разложение функций в ряд Фурье называют гармоническим анализом. Величина* A_n *называется амплитудой гармоники,* $\frac{n\pi}{l}$ *частотой гармоники,* φ_n *отклонением от начального положения.*

Величины A_n, $n=1,2,...$ ***называют амплитудным спектром,*** $\frac{n\pi}{l}$ ***- частотным спектром,*** φ_n, $n=1,2,...$ ***- фазовым спектром.***

Заметим, что зная амплитудный, частотный и фазовый спектры, можно восстановить исходную функцию, так как имеет место следующий результат.

Теорема (Дирихле). Всякая кусочно непрерывная и ограниченная на отрезке $[-l,l]$ функция (сигнал) $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье (6.7) который сходится к периодической с периодом $2l$ функции $S(x)$ заданной на числовой прямой и в точках отрезка $[-l,l]$ принимающей значения

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Для чётных функций коэффициенты (3.8), (3.9) разложения функции в ряд Фурье приобретают вид

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{-l}^0 f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2,..., \tag{6.10}$$

$$b_n=0,\ n=1,2,.... \tag{6.11}$$

Аналогично, для нечётных функций имеем

$$a_n=0,\ n=0,1,2,..., \tag{6.12}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{-l}^0 f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,.... \tag{6.13}$$

Функции, заданные на половине периода, можем продолжить на другую половину периода любым образом. Продолжая чётным образом, получаем разложение по косинусам

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{6.14}$$

коэффициенты которого находятся по формулам (6.10), (6.11).

Продолжая нечётным образом, получаем разложение по синусам

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{6.15}$$

коэффициенты которого находятся по формулам (6.12), (6.13).

Разложение (6.7) можно также записать в виде

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \tag{6.16}$$

коэффициенты которого находят по формулам

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,... \tag{6.17}$$

Разложение (6.16) называют рядом Фурье в комплексной форме.

Соответственно $\left|\frac{l}{\pi}c_n\right|$ *есть амплитудный спектр,*

$-\arg\left(\frac{l}{\pi}c_n\right)$ - *фазовый спектр,* $\frac{n\pi}{l}$ - *частотный спектр.*

Интересна функция Хэвисайда, или что то же самое, единичная функция $h(t)=\begin{cases}0, \textit{если}\, t<0,\\ 1, \textit{если}\, t\ge 0\end{cases}$. С помощью этой функции удобно записывается ступенька на отрезке $[t_1,t_2]$ задаваемая формулой $f(t)=\begin{cases}1, \textit{если}\ t\in[t_1,t_2],\\ 0, \textit{если}\ t\notin[t_1,t_2]\end{cases}$ так как $f(t)=h(t-t_1)-h(t-t_2)$.

Запишем условие замкнутости $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2=\|f\|^2$ для тригонометрической системы $1,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n=1,2,...$ и функции $f(x)$ с рядом Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

для неё.

Имеем

$$\frac{(a_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n)^2+(b_n)^2\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx\,.$$

Из этого соотношения сразу получаем, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((a_n)^2+(b_n)^2\right)$ сходятся, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

Пусть $g(x)$ другая функция и

$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\beta_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

её ряд Фурье. Условие замкнутости для функции $f(x)+g(x)$ имеет вид

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f(x)+g(x)\right)^2dx\,.$$

Аналогично для функции $f(x)-g(x)$ условие замкнутости имеет вид

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f(x)-g(x)\right)^2dx\,.$$

Вычитая из первого соотношения второе и сокращая на 4, получаем соотношение

$$\frac{a_0\cdot\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\alpha_n+b_n\cdot\beta_n\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot g(x)dx\,,$$

которое называется обобщённым условием замкнутости.

Пусть теперь $g(x)=\begin{cases}1, & \textit{если}\ x\in[x_1,x_2],\\ 0 & \textit{если}\ x\notin[x_1,x_2].\end{cases}$ Тогда

$$\alpha_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)dx = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{x_2 - x_1}{l},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-x_1}^{x_2} \cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-x_1}^{x_2} \sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot g(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Подставляя полученные выражения для α_0, α_n, β_n в обобщённое условие замкнутости, получаем

$$\frac{a_0}{2}\int_{x_1}^{x_2} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-x_1}^{x_2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-x_1}^{x_2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = \int_{-x_1}^{x_2} f(x)dx,$$

что и означает почленную интегрируемость ряда Фурье для функции $f(x)$. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема. Тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной функции можно интегрировать почленно независимо от характера сходимости.

Для почленной дифференцируемости удаётся доказать лишь следующий результат.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема, то ряд Фурье для производной $f'(x)$ может быть получен почленным дифференцированием ряда Фурье для функции $f(x)$.

Доказательство опустим.

Отметим, что в сформулированной теореме поточечная сходимость ряда Фурье для производной не гарантируется, хотя в среднеквадратичном ряд сходится обязан.

Интересны также условия равномерной сходимости ряда Фурье, которые сформулированы в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-l,l]$ и кусочно дифференцируема на $[-l,l]$. Пусть, кроме того, $f(-l)=f(l)$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно относительно $x\in[-l,l]$.

Доказательство. Для доказательства равномерной сходимости достаточно показать сходимость числового ряда $f(x)=\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ так как он является мажорирующим для ряда Фурье $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ функции $f(x)$.

Пусть a_0', a_n', b_n' коэффициенты ряда Фурье

$$f'(x)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n'\sin\frac{n\pi x}{l}$$

функции $f'(x)$. Установим связь между коэффициентами a_n, b_n и a_n', b_n' функций $f(x)$ и $f'(x)$. Применяя к коэффициентам a_n формулу интегрирования по частям с $u=f(x)$, $dv=\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$, $du=f'(x)dx$, $v=\dfrac{l}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, получаем

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=,$$

$$=f(x)\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l}-\frac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{l}{n\pi}b_n',\ n=0,1,2,\ldots.$$

Аналогично для b_n полагая $u=f(x)$, $dv=\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$, $du=f'(x)dx$, $v=-\dfrac{l}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, получаем

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= -f(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{n\pi}a'_n, \ n = 1,2,\dots .$$

Первое слагаемое равно нулю в силу равенства $f(-l) = f(l)$.

Таким образом, получили

$$|a_n| = \frac{l}{n\pi}|b'_n|, \ |b_n| = \frac{l}{n\pi}|a'_n|, \ n = 1,2,\dots .$$

Докажем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b'_n}{n}\right|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a'_n}{n}\right|$ сходятся. Действительно, из неравенства $(A \pm B)^2 \geq 0$ следует оценка $|AB| \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$.

Положив в этом неравенстве $A = a'_n, B = \frac{1}{n}$ получаем оценку $\left|\frac{a'_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left((a'_n)^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ из которой следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a'_n}{n}\right|$ так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a'_n)^2$ сходится в силу условия замкнутости для функции $f'(x)$. Аналогично $\left|\frac{b'_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left((b'_n)^2 + \frac{1}{n^2}\right)$, откуда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b'_n}{n}\right|$. Следовательно, из $|a_n| = \frac{l}{n\pi}|b'_n|$,

$$|b_n| = \frac{l}{n\pi}|a'_n|, \ n = 1,2,\dots,$$

получаем, что ряд $f(x) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n|$ сходится, а поэтому ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует оценка скорости сходимости к нулю коэффициентов a_n, b_n. Точнее, имеет место следующий результат.

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-l,l]$ и кусочно дифференцируема на $[-l,l]$. Пусть, кроме того, $f(-l)=f(l)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n n = 0$.

Доказательство. Так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n')^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n')^2$ сходится в силу условия замкнутости для функции $f'(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n')^2=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n')^2=0$ по необходимому признаку сходимости. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n'=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n'=0$. Умножая обе части равенств $|a_n|=\dfrac{l}{n\pi}|b_n'|$, $|b_n|=\dfrac{l}{n\pi}|a_n'|$, $n=1,2,\ldots$ на n получаем требуемое. Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть периодическая с периодом $2l$ функция $f(x)$ непрерывна вместе с производными до порядка m включительно, а $(m+1)$-я производная кусочно непрерывна. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{m+1}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n n^{m+1}=0$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)n^k$, $k=1,2,\ldots,m$ сходятся.

Доказательство. Нетрудно показать, что если $f(x)$ периодическая с периодом $2l$ функция, то и все её производные, если они существуют, тоже периодические с периодом $2l$ функции. В силу периодичности $f^{(k)}(-l)=f^{(k)}(-l+2l)=f^{(k)}(l)$, $k=1,2,\ldots,m$. Так как по условию $f^{(m)}(x)$ непрерывна, а $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна, то по следствию 1, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a_n^{(m+1)}}{n}\right|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{b_n^{(m+1)}}{n}\right|$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(m)} n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(m)} n=0$. Далее, ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(m)}\right|$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n^{(m)}\right|$ сходятся и $\lim_{n\to\infty} a_n^{(m-1)}n^2 = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n^{(m-1)}n^2 = 0$. Продолжая, получаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^m$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|n^m$ сходятся, следовательно сходится и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)n^k$, $k=1,2,\dots,m$. Кроме того $\lim_{n\to\infty} a_n^{(m-m)}n^{m+1} = \lim_{n\to\infty} a_n n^{m+1} = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n^{(m-m)}n^{m+1} = \lim_{n\to\infty} b_n n^{m+1} = 0$. Следствие доказано.

7. Интегральные преобразования

Пусть $K(x,s,t)$ – функция переменных x,s,t, которые могут быть многомерными. Пусть $G \subseteq R^n$ - некоторое множество, $U(G)$ – подмножество множества ограниченных на G функций. Оператор A, определённый на $U(G)$ и действующий по формуле $(Af)(s) = \int_G K(x,s,f(x))dx$ назовём интегральным оператором или интегральным преобразованием. Функцию $K(x,s,t)$ назовём ядром интегрального преобразования. Интеграл $\int_G K(x,s,f(x))dx$ есть интеграл, зависящий от параметра и, следовательно, его свойства такие, как предельный переход, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость по параметру, определяются свойствами подынтегральной функции (ядра интегрального преобразования). Мы будем рассматривать частный случай ядра $K(x,s,t) = K(x,s)\cdot t$. Такие ядра называют мультипликативными. В случае этого ядра справедлива теорема.

Теорема. Если $U(G)$ - линейное пространство, то оператор $(Af)(s) = \int_G K(x,s)f(x)dx$, определённый на этом пространстве, линеен, то есть

$$(A(f+g))(s)=(Af)(s)+(Ag)(s),\ (A(\alpha f))(s)=\alpha(Af)(s).$$

Доказательство очевидно из свойства линейности как собственных, так и несобственных интегралов.

Другие свойства интегральных преобразований зависят от ядра $K(x,s)$, размерности переменных x,s и области G.

Наиболее известны преобразования Фурье, синус преобразование Фурье, косинус преобразование Фурье и преобразование Лапласа.

7.1. Преобразование Фурье, интеграл Фурье, синус и косинус преобразования Фурье

Множество G есть числовая прямая, то есть $G=R=(-\infty,+\infty)$, $U(G)$ - совокупность абсолютно интегрируемых на $(-\infty,+\infty)$ функций.

Ядро преобразования Фурье равно $K(x,s)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-isx}$.

Преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi(s)=\Phi\big(f(x)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}dx.$$

Функция $\Phi(s)$ называется также спектральной функцией или спектральной плотностью, $|\Phi(s)|$ называется амплитудным спектром, $-\arg\Phi(s)$ называется фазовым спектром.

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(s)e^{isx}ds.$$

Подставляя в выражение для обратного преобразования Фурье функцию $\Phi(s)$ (результат прямого преобразования Фурье), получаем конструкцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ist}dt\right)e^{isx}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{is(x-t)}dt\right)ds,$$

которая называется интегралом Фурье. Это аналог ряда Фурье.

Имеет место следующий результат.

Теорема. Если $f(x)$ абсолютно интегрируемая на $(-\infty,+\infty)$, кусочно-непрерывная и ограниченная или кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке функция, то

$$\varphi(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{is(x-t)}dt\right)ds.$$

Заметим, что в точках непрерывности

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x).$$

<u>Свойства преобразования Фурье.</u>

1. Линейность. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, $(\Phi g)(s)=\Psi(p)$, то

$$(\Phi(f+g))(s)=(\Phi f)(s)+(\Phi g)(s)=\Phi(s)+\Psi(s),$$

$$(\Phi(\alpha f))(s)=\alpha(\Phi f)(s)=\alpha\Phi(s)$$

или, что то же самое,

$$(\Phi(\alpha f+\beta g))(s)=\alpha(\Phi f)(s)+\beta(\Phi g)(s)=\alpha\Phi(s)+\beta\Psi(s).$$

Доказательство. В общем случае было доказано ранее. Непосредственно следует из определения преобразования Фурье и свойств интеграла. Действительно,

$$(\Phi(f+g))(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)+g(x)\right)e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-isx}dx=$$

$$=(\Phi f)(s)+(\Phi g)(s)=\Phi(s)+\Psi(s),$$

$$(\Phi(\alpha f))(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha f(x)e^{-isx}dx=\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}dx=$$

$$=\alpha(\Phi f)(s)=\alpha\Phi(s).$$

2. Подобие. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

$$\Phi\big(f(\alpha x)\big)(s)=\frac{1}{|\alpha|}\Phi\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $\alpha>0$, то

$$\Phi\big(f(\alpha x)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)e^{-i\frac{s}{\alpha}\alpha x}d\alpha x=\frac{1}{\alpha}\Phi\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Если $\alpha<0$, то сделав замену $t=\alpha x$ имеем $dt=\alpha dx$, $\lim\limits_{x\to-\infty} t=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} t=-\infty$ и тогда $dx=\dfrac{dt}{\alpha}$,

$$\Phi\big(f(\alpha x)\big)(s)=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i\frac{s}{\alpha}t}dt=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{s}{\alpha}t}dt=-\frac{1}{\alpha}\Phi\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Соединяя вместе, получаем требуемое.

3. Запаздывание. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

$$\Phi\big(f(x-\tau)\big)(s)=e^{-is\tau}\Phi(s).$$

Доказательство. Действительно,

$$\Phi\big(f(x-\tau)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)e^{-is(x-\tau+\tau)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)e^{-is(x-\tau)}e^{-is\tau}d(x-\tau)=e^{-is\tau}\Phi(s).$$

4. Дифференцирование функции. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси и $f(x)$ бесконечно малая при $x\to\pm\infty$, то

$$\Phi\big(f'(x)\big)(s)=is\Phi\big(f(x)\big)(s).$$

Доказательство. Действительно,

$$\Phi\big(f'(x)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-isx}dx.$$

Преобразуем интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-isx}dx$ с помощью формулы интегрирования по частям с $u=e^{-isx}$, $dv=f'(x)dx$. Тогда $du=-ise^{-isx}dx$, $v=f(x)$ и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-isx}dx = f(x)e^{-isx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + is\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx =$$

$$= is\Phi\big(f(x)\big)(s),$$

так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)e^{-isx}=0$ как произведение бесконечно малой $f(x)$ на ограниченную e^{-isx}.

5. Дифференцирование образа. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

$$\Phi'\big(f(x)\big)(s)=\Phi\big(-ixf(x)\big)(s).$$

Доказательство. Действительно, дифференцируя выражение $\Phi(s)=\Phi\big(f(x)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx$ по параметру под знаком интеграла, получаем

$$\Phi'\big(f(x)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-isx}dx=\Phi\big(-ixf(x)\big)(s).$$

6. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

а) $\Phi\big(f(x)\cos\alpha x\big)(s)=\frac{1}{2}\big(\Phi(s-\alpha)+\Phi(s+\alpha)\big);$

б) $\Phi\big(f(x)\sin\alpha x\big)(s)=\frac{1}{2i}\big(\Phi(s-\alpha)-\Phi(s+\alpha)\big).$

Доказательство. Действительно,

$$\Phi\big(f(x)\cos\alpha x\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}e^{-isx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s-\alpha)x}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s+\alpha)x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\big(\Phi(s-\alpha)+\Phi(s+\alpha)\big).$$

Аналогично, записывая $\sin\alpha x$ через формулу Эйлера, получаем справедливость б).

Часто рассматривают синус и косинус преобразования Фурье.

Для синус и косинус преобразований Фурье множество G также есть числовая прямая, то есть $G=R=(-\infty,+\infty)$, $U(G)$ - совокупность абсолютно интегрируемых на $(-\infty,+\infty)$ функций.

Ядро синус преобразования Фурье равно $K(x,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin sx$. Синус преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_s(s)=\Phi_s\big(f(x)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx dx.$$

Для нечётных функций синус преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_s(s)=\Phi_s\big(f(x)\big)(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin sx dx$$

Ядро косинус преобразования Фурье равно $K(x,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos sx$. Косинус преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_c(s)=\Phi_c\big(f(x)\big)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx.$$

Для чётных функций косинус преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_c(s)=\Phi_c\big(f(x)\big)(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx$$

7.2. Преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$ - комплекснозначная, кусочно непрерывная (то есть на каждом ограниченном отрезке числовой прямой имеет не более чем конечное число точек разрыва 1-го рода) на полуинтервале $[0,\infty)$, функция. Рассмотрим интеграл $\int_0^{\infty} f(t)e^{-rt}dt$.

Если при некотором r_0 этот интеграл абсолютно сходится, то он абсолютно сходится и при любом r таком, что $\operatorname{Re} r \ge \operatorname{Re} r_0$. Наименьшее действительное r_0 такое, что для всякого r с $\operatorname{Re} r > r_0$, интеграл $\int_0^{\infty} f(t)e^{-rt}dt$ абсолютно сходится, а при $\operatorname{Re} r < r_0$ абсолютно расходится, называется показателем роста функции $f(t)$. Если показатель роста $r_0 < \infty$, то говорят, что функция имеет ограниченный рост. Примером функции ограниченного роста служит функция такая, что $|f(t)| \le Me^{r_0 t}$.

Комплекснозначную функцию $f(t)$ заданную на интервале $(-\infty,\infty)$ назовём оригиналом, если она обладает свойствами

1) $f(t)=0$ для всех $t\in(-\infty,0)$;
2) $f(t)$ кусочно непрерывна, то есть на каждом ограниченном отрезке числовой прямой имеет не более чем конечное число точек разрыва 1-го рода;
3) $f(t)$ ограниченного роста.

Заметим, что любую кусочно непрерывную функцию ограниченного роста можно сделать оригиналом, если умножить её на функцию $h(t)=\begin{cases}0, если\, t<0,\\ 1, если\, t\ge 0\end{cases}$. Функцию $h(t)$ называют единичной или функцией Хэвисайда. С учётом сделанного замечания кусочно непрерывные функции ограниченного роста будем считать оригиналами.

Ядро преобразования Лапласа равно e^{-px}. Преобразование Лапласа определяется для оригиналов и имеет вид

$$F(p)=L(f(t))(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt .$$

Функцию $F(p)$ комплексного переменного p называют изображением функции $f(t)$.

<u>Свойства преобразования Лапласа.</u>

1. Линейность. Если $(Lf)(p)=F(p)$, $(Lg)(p)=G(p)$, то

$$(L(f+g))(p)=(Lf)(p)+(Lg)(p)=F(p)+G(p),$$

$$(L(\alpha f))(p)=\alpha(Lf)(p)=\alpha F(p).$$

Доказательство. В общем случае было доказано ранее. Непосредственно следует из определения преобразования Лапласа и свойств интеграла. Действительно,

$$(L(f+g))(p)=\int_0^{\infty}(f(t)+g(t))e^{-pt}dt=$$

$$=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt+\int_0^{\infty} g(t)e^{-pt}dt=(Lf)(p)+(Lg)(p)=F(p)+G(p).$$

$$(L(\alpha f))(p)=\int_0^{\infty}\alpha f(t)e^{-pt}dt=\alpha\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\alpha(Lf)(p)=\alpha F(p).$$

2. Подобие. Если $(Lf)(p)=F(p)$, то

$$L(f(\alpha t))(p)=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно

$$L\left(f(\alpha t)\right)(p)=\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-\frac{p}{\alpha}(\alpha t)}d(\alpha t)=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Запаздывания. Если $(Lf)(p)=F(p)$, то

$$L\left(f(t-\tau)\right)(p)=e^{-p\tau}L(f(t))(p)=e^{-p\tau}F(p)$$

Доказательство. Действительно

$$L\left(f(t-\tau)\right)(p)=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-p(t-\tau+\tau)}dt=$$

$$=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}e^{-p\tau}dt=e^{-p\tau}L(f(t))(p)=e^{-p\tau}F(p).$$

4. Смещения. Если $(Lf)(p)=F(p)$, то

$$L\left(e^{p_0t}f(t)\right)(p)=F(p-p_0)$$

Доказательство. Действительно

$$L\left(e^{p_0t}f(t)\right)(p)=\int_0^\infty e^{p_0t}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-p_0)t}dt=F(p-p_0).$$

5. Дифференцирования оригинала. Если $(Lf)(p)=F(p)$, и $f'(t)$, $f''(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ оригиналы, то

$$L\left(f'(t)\right)(p)=pF(p)-f(+0),$$

$$L\left(f''(t)\right)(p)=p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0),$$

$$L\left(f^{(n)}(t)\right)(p)=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-...-f^{(n-1)}(+0).$$

Доказательство. Действительно $L\left(f'(t)\right)(p)=\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$.

Преобразуем интеграл $\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$ с помощью формулы интегрирования по частям с $u=e^{-pt}$, $dv=f'(t)dt$. Тогда $du=-pe^{-pt}dt$, $v=f(t)$ и

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=pF(p)-f(+0)\ ,.$$

так как $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-pt}=0$. Далее,

$$L\big(f''(t)\big)(p)=pL\big(f'(t)\big)(p)-f'(+0)=$$

$$=p\big(L\big(f(t)\big)(p)-f(+0)\big)-f'(+0)=p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0).$$

По аналогии

$$L\Big(f^{(n)}(t)\Big)(p)=pL\Big(f^{(n-1)}(t)\Big)(p)-f^{(n-1)}(+0)=$$

$$=p\Big(L\Big(f^{(n-2)}(t)\Big)(p)-f^{(n-2)}(+0)\Big)-f^{(n-1)}(+0)=\ldots=$$

$$=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-\ldots-f^{(n-1)}(+0)$$

6. Дифференцирование изображения. Если $(Lf)(p)=F(p)$, то

$$F'(p)=L(-tf(t))(p),$$

$$F^{(n)}(p)=L((-1)^n t^n f(t))(p).$$

В частности,

$$L\big(t^n\big)(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцируя по параметру под знаком интеграла, получаем

$$F'(p)=\frac{d}{dp}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)\frac{d}{dp}e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}dt=$$

$$=\int_0^\infty(-t)f(t)e^{-pt}dt=L(-tf(t))(p).$$

Далее по индукции.

7. Интегрирование оригинала. Если $(Lf)(p)=F(p)$, то

$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(p)=\frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Так как $f(t)$ оригинал, то $g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ тоже оригинал и $g'(t)=\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)=f(t)$, $g(0)=0$. Поэтому

$$F(p)=L\big(f(t)\big)(p)=L\big(g'(t)\big)=pL\big(g(t)\big)(p)-g(0)=$$
$$=p\int_0^{\infty}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt\,.$$

Разделив крайние части равенства на p, получаем требуемое.

8. Интегрирование изображения Если $(Lf)(p)=F(p)$, и интеграл $\int_p^{\infty}F(p)dp$ абсолютно сходится, то $\frac{f(t)}{t}$ оригинал и

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p)=\int_p^{\infty}F(p)dp\,.$$

Доказательство. Примем эту теорему без доказательства.

Функция $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ называется свёрткой функций $f(t)$ и $g(t)$.

Свойства свёртки.

1. Свёртка симметрична, то есть $(f*g)(t)=(g*f)(t)$.

Доказательство. Действительно, сделав в интеграле $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ замену $s=t-\tau$, получаем $\tau=t-s\,,ds=-d\tau$, $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=-\int_t^0 f(t-s)g(s)ds=\int_0^t f(t-s)g(s)ds$. Крайние части отличаются только обозначениями.

2. Если $(Lf)(p)=F(p)$, $(Lg)(p)=G(p)$, то

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=F(p)G(p).$$

Доказательство. Примем эту теорему без доказательства.

3. Формула Дюамеля

$$L\left(f(0)g(t)+\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)(p)=pF(p)G(p)\,.$$

Доказательство. Примем эту теорему без доказательства.

Таблица оригиналов и изображений

оригинал	изображение
$h(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathrm{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\mathrm{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

Первая теорема обращения. Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то в каждой точке непрерывности $f(t)$

$$f(t)=L^{-1}(F(p))(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{px}dp,$$

где интеграл берётся вдоль любой прямой с $\mathrm{Re}\,p=a>r_0$, а r_0 -показатель роста функции $f(t)$.

Доказательство. Примем эту теорему без доказательства.

Вторая теорема обращения. Если

1) функция $F(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > r_0$, и в полуплоскости $\operatorname{Re} p < r_0$ имеет конечное число полюсов;

2) $\lim\limits_{R\to\infty} \max\limits_{p\in C_R} |F(p)| = 0$, где C_R-дуги окружностей $|p| = R$, $\operatorname{Re} p < r_0$;

3) для любого $a > r_0$ абсолютно сходится интеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$,

то функция $f(t) = L^{-1}(F(p))(t) = h(t)\cdot\left(\sum\limits_k \operatorname*{Res}\limits_{p=p_k} F(p)e^{pt}\right)$ есть оригиналом для $F(p)$.

Доказательство. Примем эту теорему без доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М.А. Евграфова. 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Волковыский Л.И., Лунц Г,Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. –368 с
3. Сборник задач по курсу высшей математики. / Кручкович Г. И., Гутарина Н. И., Дюбюк П. Е. и др. Учебное пособие для втузов. Изд. 3-е, перераб. – М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.
4. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч.1. Общие функциональные ряды и их приложение: Учеб. Пособие для втузов – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.
5. Магазинников Л.И. Высшая математика 3. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2002. – 206 с.
6. Магазинников Л.И., Глазов Г.Н. Высшая математика. Специальные разделы (для автоматизированной технологии обучения). Ч. 1 – Томск: Изд-во Том.ун-та, 1992. – 198 с.
7. Магазинников Л.И., Глазов Г.Н. Высшая математика. Специальные разделы (для автоматизированной технологии обучения). Ч. 2. – Томск: Изд-во Том.ун-та, 1992. – 193 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – СПб.: Лань, 2009.– 800 с.