



РКФ

Радиоконструкторский
факультет

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой РЭТЭМ

_____ **В.И.Туев**

“ ___ ” _____ 2018 г.

Программный комплекс MathCAD в управлении техносферной безопасностью

Лабораторный практикум
по дисциплинам «Информационные технологии в управлении техносферной
безопасностью» 200301 «Техносферная безопасность» (бакалавриат)

Разработчик:

Доцент кафедры РЭТЭМ

_____ **Д.В.Озеркин**

Томск 2018

СОДЕРЖАНИЕ

1	Лабораторная работа №1 – Арифметические вычисления в MathCAD	4
1.1	Цель работы.....	4
1.2	Порядок выполнения лабораторной работы	4
1.3	Отчетность	4
1.4	Контрольные вопросы	5
1.5	Возможности и структура пакета MathCAD.....	5
1.6	Пример для повторения.....	10
1.7	Индивидуальные задания	12
2	Лабораторная работа №2 – Физические вычисления с использованием единиц измерения.....	19
2.1	Цель работы.....	19
2.2	Порядок выполнения работы.....	19
2.3	Отчетность	19
2.4	Контрольные вопросы	20
2.5	Константы, переменные, операторы присваивания и вывода	20
2.6	Пример для повторения.....	23
2.7	Индивидуальные задания.....	24
3	Лабораторная работа №3 – Операции с векторами и матрицами.....	28
3.1	Цель работы.....	28
3.2	Порядок выполнения работы.....	28
3.3	Отчетность	28
3.4	Контрольные вопросы	29
3.5	Массивы в пакете MathCAD.....	29
3.6	Пример для повторения.....	32
3.7	Индивидуальные задания.....	33
4	Лабораторная работа №4 – Аналитические выражения	38
4.1	Цель работы.....	38
4.2	Порядок выполнения работы.....	38
4.3	Отчетность	38
4.4	Контрольные вопросы	39
4.5	Команды символьных вычислений.....	39
4.6	Пример для повторения.....	44
4.7	Индивидуальные задания.....	45
5	Лабораторная работа №5 – Нахождение корней уравнений.....	50
5.1	Цель и задачи работы	50
5.2	Порядок выполнения работы.....	50
5.3	Отчетность	50
5.4	Контрольные вопросы	51
5.5	Способы решения уравнений в среде <i>MathCAD</i>	51
5.6	Пример для повторения.....	56
6	Лабораторная работа №6 – Обработка экспериментальных данных	63
6.1	Цель и задачи работы	63

6.2	Порядок выполнения работы.....	63
6.3	Отчетность.....	63
6.4	Контрольные вопросы.....	64
6.5	Регрессионный анализ.....	64
6.6	Пример для повторения.....	68
6.7	Индивидуальные задания.....	69
7	Лабораторная работа №7 – Построение графиков	71
7.1	Цель и задачи работы	71
7.2	Порядок выполнения работы.....	71
7.3	Отчетность.....	71
7.4	Контрольные вопросы.....	72
7.5	Построение графиков функции одной переменной в декартовой системе координат.....	72
7.6	Пример для повторения.....	76
7.7	Индивидуальное задание	78
8	Лабораторная работа №8 – Построение трехмерных графиков	79
8.1	Цель и задача работы.....	79
8.2	Порядок выполнения работы.....	79
8.3	Отчетность.....	79
8.4	Контрольные вопросы.....	80
8.5	Построение графиков функций двух переменных	80
8.6	Пример для повторения.....	84
8.7	Индивидуальные задания.....	86
9	Лабораторная работа №9 – Решение дифференциальных уравнений.....	88
9.1	Цель и задачи работы	88
9.2	Порядок выполнения работы.....	88
9.3	Отчетность.....	88
9.4	Контрольные вопросы.....	89
9.5	Обыкновенные дифференциальные уравнения.....	89
9.6	Пример для повторения.....	94
9.7	Индивидуальные задания	95
	Список литературы	98

1 Лабораторная работа №1 – Арифметические вычисления в MathCAD

1.1 Цель работы

1. Приобретение начальных навыков работы в программном комплексе автоматизации математических и инженерных расчетов *MathCAD*.

2. Знакомство с интерфейсом среды *MathCAD*.

Задачи работы:

- освоение работы с панелью инструментов *Calculator (Калькулятор)*;

- освоение правил использования операторов присваивания в среде *MathCAD*;

- освоение приёмов создания простейших программ арифметических вычислений в среде *MathCAD*.

1.2 Порядок выполнения лабораторной работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Возможности и структура пакета *MathCAD*». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].

2. Повторить пример из п. 1.6.

3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 1.6.

4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 1.7.

5. Ответить на контрольные вопросы.

6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

1.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.

2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.

3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.

3. Ответы на контрольные вопросы.

4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

– уметь отвечать на контрольные вопросы;

– показать, что выполненное задание работает правильно;

– уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;

– продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

1.4 Контрольные вопросы

1. Основные особенности и возможности математического пакета MathCAD?
2. Что размещается в математической и текстовой областях документа MathCAD?
3. В каких форматах можно сохранить документ MathCAD?
4. Какие панели инструментов присутствуют в пакете MathCAD?
5. С использованием какой панели инструментов можно поменять размер шрифта в документе MathCAD?
6. Определите, какая палитра инструментов содержит наибольшее число кнопок инструментов?

1.5 Возможности и структура пакета MathCAD

Пакет *MathCAD* можно отнести к математически универсальным системам. Объединение этих слов означает, что помимо собственных вычислений (как численных, так и символьных), *MathCAD* позволяет подготавливать качественные тексты, дипломные и курсовые проекты, диссертации, статьи с наглядным графическим представлением результатов вычислений (в том числе и анимации). К безусловным достоинствам пакета следует отнести возможность сохранения документов в формате Web-страниц, причем создание файлов с рисунками происходит автоматически. Применение библиотек и пакетов расширений обеспечивает профессиональную ориентацию *MathCAD* на любую область науки, техники и образования. Пакет *MathCAD*, в отличие от других современных математических пакетов, построен в соответствии с принципом WYSIWYG («What You See Is What You Get» – «Что видите, то и получите»). Он прост в использовании и по принципу обработки документа является программой-интерпретатором, т.е. после редактирования документа происходит его пересчет. Поэтому отсутствуют этапы трансляции, компиляции и загрузки программы. *MathCAD* является интегрированной системой программирования, ориентированной на проведение математических, инженерно-технических, статистических и экономических расчетов. *MathCAD* содержит: текстовый редактор; вычислительный и графический процессор; справочную систему. Текстовый редактор служит для ввода и редактирования текстов. Вычислительный процессор системы *MathCAD* осуществляет численные вычисления по заданным математическим формулам, имеет обширный набор встроенных математических функций, обеспечивает вычисление рядов, сумм и произведений, определенных интегралов и производных. Символьный процессор позволяет получать результаты вычисления в символьном (аналитическом) виде. Например, второй интеграл на рис. 1.1 вычислен в символьном виде.

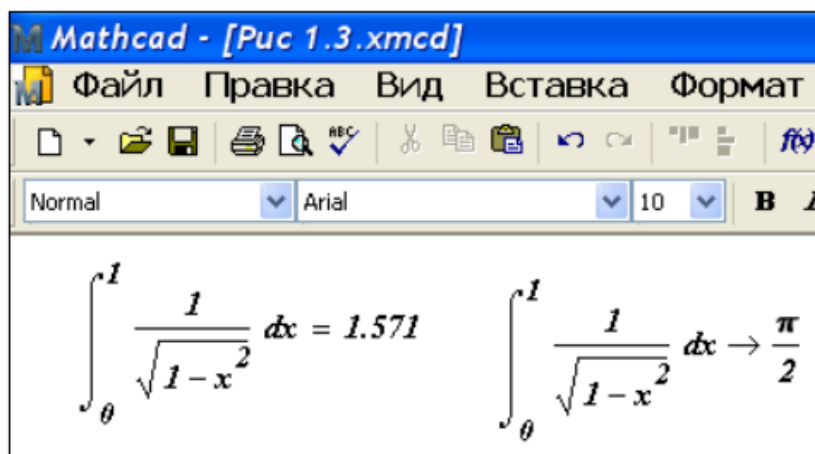


Рис. 1.1 – Вычисление определенного интеграла

Графический процессор служит для создания графиков функций одной и двух переменных. Входной язык пакета *MathCAD* позволяет записывать на экране компьютера формулы в их привычном виде, как они представляются в печатном виде в книгах или как их записываем на листе бумаги. Например, вычисление корня квадратного уравнения в электронной таблице *Excel* записывается в ячейку как:

$$=(-B1+КОРЕНЬ(B1*B1-4*A1*C1))/(2*A1).$$

В *MathCAD* то же самое уравнение выглядит таким, каким оно выглядит в тексте учебника или справочнике:

$$x_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Кроме того, уравнения и графики в *MathCAD* являются действующими. При изменении любых данных, переменных или уравнений *MathCAD* немедленно повторно пересчитает математические выражения и перерисует графики.

Программное окно *MathCAD* оформлено стандартным образом. Программное окно содержит следующие элементы: строка заголовка; строка главного меню; панель инструментов; рабочая область; строка состояния.

Строка заголовка содержит название программного пакета и имя открытого файла *MathCAD*. Если открыт новый документ, то в поле **Имя файла** находится фраза *Untitled* (**Без названия**).

Строка меню располагается в верхней части программного окна ниже строки заголовка. В строке меню представлены следующие пункты:

- *File* (**Файл**) – работа с файлом (создать, открыть, закрыть, сохранить, печатать, отослать по почте);
- *Edit* (**Правка**) – редактирование документа; позволяет вырезать (*cut*), копировать (*copy*) и вставить (*paste*) часть документа, а также отменить (*undo*) предшествующую операцию или повторить (*redo*) отмененную операцию;
- *View* (**Вид**) – способы представления и обработки документа;
- *Format* (**Формат**) – изменение формата документа;

- *Tools* (**Инструменты**) – средства управления вычислениями, анимацией, отладкой;
- *Symbolics* (**Символьные**) – выбор операций символьных вычислений;
- *Window* (**Окно**) – управление расположением окон документа (каскадное, вертикальное, горизонтальное), список открытых документов *MathCAD*;
- *Help* (**Справка**) – работа со справочной базой данных о системе, центром ресурсов и электронными книгами.

Команды пункта *View*. Пункт *View* строки меню содержит следующие команды:

- *Toolbars* (**Панели инструментов**) – список панелей и палитр, которые можно вывести на окно документа и скрыть;
- *Ruler* (**Линейка**) – установка мерной линейки;
- *Status bar* (**Строка состояния**) – установка строки состояния внизу документа;
- *Trace Window* (**Окно трассировки**) – скрывает или отображает окно трассировки в нижней части окна главного листа; используется для отладки программ; окно трассировки можно перемещать с помощью мыши, нажав и удерживая клавишу *Ctrl*;
- *Header and Footer* (**Колонтитулы**) – элементы дизайна документа;
- *Regions* (**Области**) – создает цветной фон (по умолчанию серого цвета), в котором выделяет области документа;
- *Annotations* (**Аннотации**) – отображает цветные скобки вокруг всех областей ввода в документе;
- *Refresh* (**Обновить**) – обновляет содержимое экрана; устраняет остатки графических объектов и линий выделения;
- *Zoom* (**Масштаб**) – увеличивает или уменьшает размер документа при изменении процента масштаба.

Работа со справкой и информационным центром. Команды для работы со справочной системой сосредоточены в меню *Help* (**Справка**), которое показано на рис. 1.2.

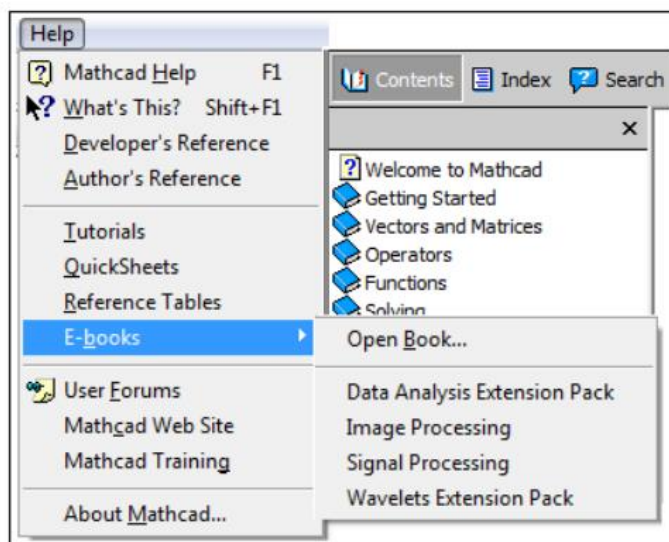


Рис. 1.2 – Позиции строки меню Help

Рабочее поле программного окна *MathCAD* находится под панелями инструментов и в нем располагается одно или несколько окон документов *MathCAD*. При работе с несколькими окнами документов используется пункт *Window* (**Окно**) строки меню. В нижней части программного окна располагается **Строка состояний**, в которой отображаются подсказки о назначении элементов на панели инструментов при подведении к этим элементам курсора мыши, режим вычислений *MathCAD* и номер текущей страницы. В рабочем поле программного окна может находиться одно или несколько окон документов *MathCAD*. Каждый документ *MathCAD* может содержать любое число математических областей и текстовых областей. Математическая область содержит конструкции пакета *MathCAD*, необходимые для реализации того или иного алгоритма решения задачи. В этой же области строятся графики. Курсор в математической области имеет форму красного креста. Текстовая область может включать любые символы (русские, латинские, греческие) в виде комментариев к вычислительным фрагментам. Для создания текстовой области необходимо обратиться к пункту *Insert*, команда *Text Region* (рис. 1.3).

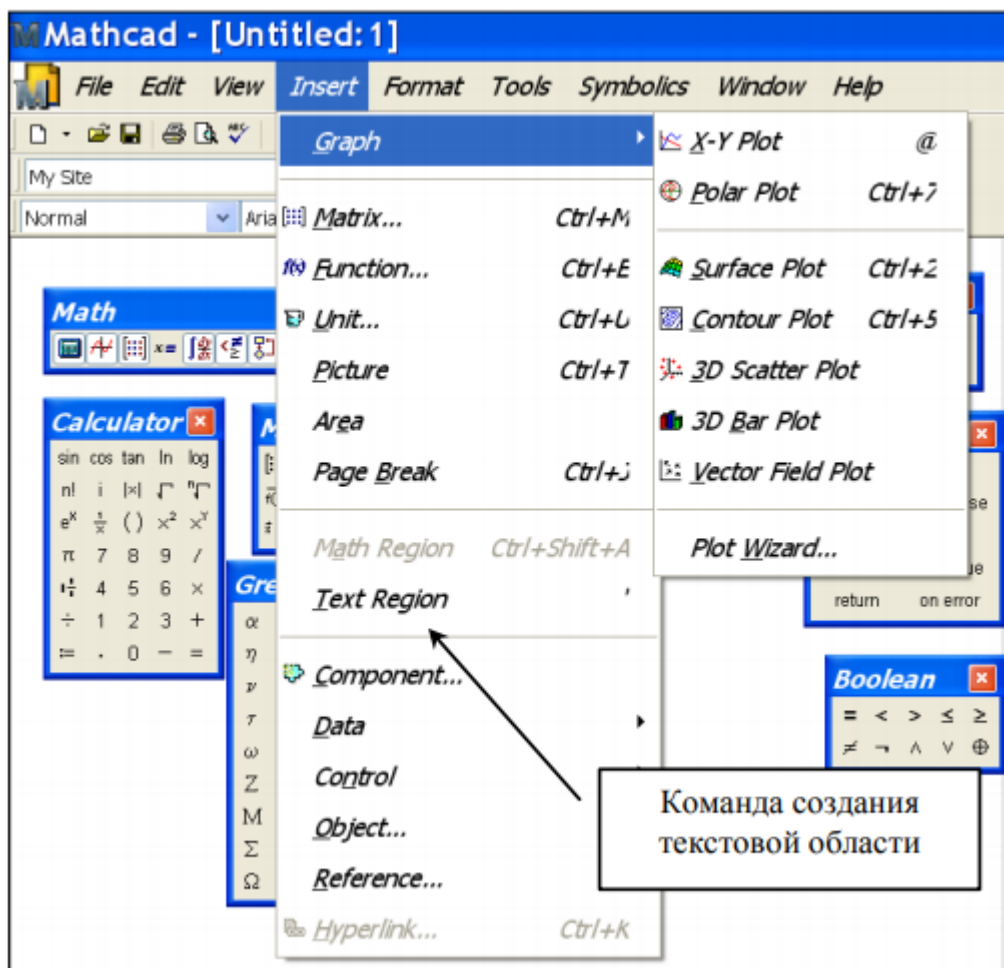


Рис. 1.3 – Создание текстовой области

Работа в текстовой области осуществляется точно также, как и в обычном текстовом редакторе (операции редактирования, форматирования и т.д.).

К панелям инструментов относятся три панели: **Стандартная**, **Форматирования** и панель *Math*. Первые две панели напоминают соответствующие панели текстового процессора *Word* и табличного процессора *Excel*. Если панель *Math* не отображена, она может быть вызвана из строки меню, пункт *View (Вид)*, в которой выполняется команда *Toolbars (Панели инструментов)* и в ней – *Math (Математика)*. Панель инструментов *Math* содержит кнопки для вызова девяти палитр инструментов. Вид кнопок и названия палитр инструментов приведены на рис. 1.4. Каждая палитра инструментов в свою очередь содержит кнопки для вызова конкретной функции или оператора. Например, палитра **Калькулятор** содержит арифметические операторы, а палитра **Матанализ** включает в себя операторы интегрального и дифференциального исчисления и т.д. Используя кнопки панели *Math*, можно оперативно вызвать или убрать с экрана любую палитру инструментов. Значки инструментов всех девяти палитр показаны на рис. 1.5.



Рис. 1.4 – Значки панели инструментов Math

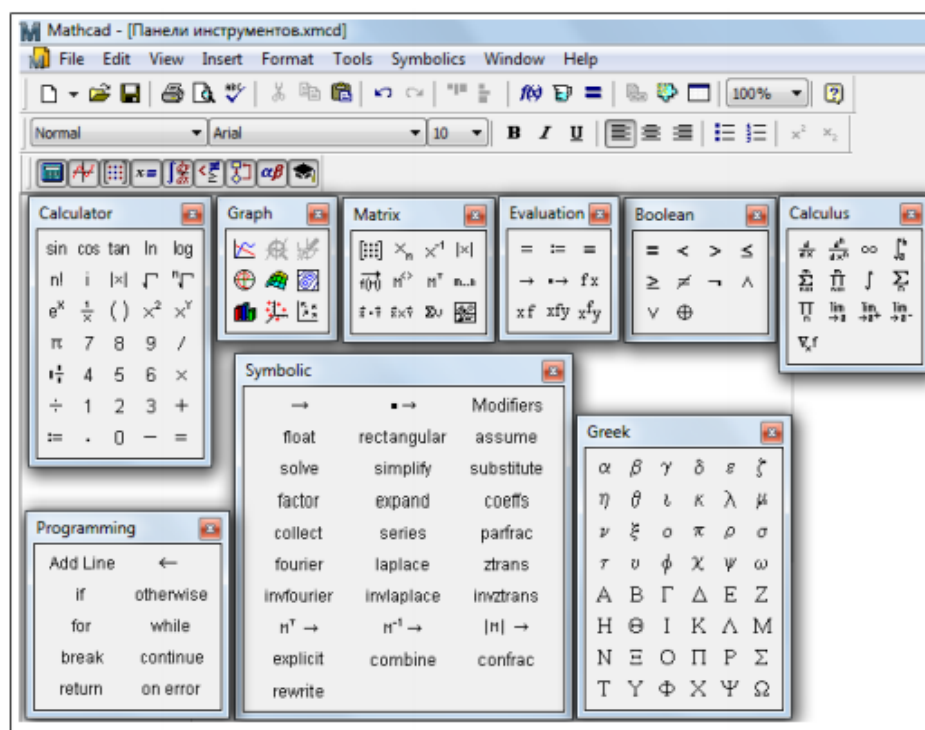


Рис. 1.5 – Палитры инструментов

Заметим, что вызвать любую палитру инструментов можно как через панель инструментов *Math*, так и через команду *Toolbars*. С помощью представленных палитр можно вводить в документы *MathCAD* практически все известные математические символы и операторы. Поскольку их очень много, вывод всех палитр (как показано на рис. 1.5) обычно не нужен, так как в окне редактирования не остается место для подготовки документов. Поэтому рекомендуется неиспользуемые в данное время палитры закрывать.

1.6 Пример для повторения

Задание. Найти ребро куба, равновеликого шару, площадь поверхности которого равна площади боковой поверхности прямого кругового конуса, у которого высота вдвое меньше, чем длина образующей. Объем этого конуса равен 1.

Анализ. Основные геометрические формулы, используемые при расчете. Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Площадь боковой поверхности конуса:

$$S = \pi r l.$$

Соотношение в конусе между радиусом основания, высотой и длиной образующей:

$$r^2 + h^2 = l^2.$$

Площадь поверхности шара:

$$V = 4\pi R^2.$$

Объем шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Объем куба:

$$V = a^3.$$

Реализация в MathCAD.

1. Запустим программу *MathCAD*.
2. Откроем панель инструментов *Calculator* (**Калькулятор**) щелчком на панели инструментов *Math* (**Математика**) или с помощью команды *View / Toolbars / Calculator* (**Вид / Панели инструментов / Калькулятор**).

3. Для удобства расчета будем обозначать каждую из вычисленных величин отдельной переменной. Объем конуса обозначим как V и присвоим ему значение 1. Оператор присваивания вводится символом «:=» или кнопкой *Assign Value* (**Определение :**) на панели инструментов *Calculator* (**Калькулятор**). Итак, надо ввести $V := 1$. В документе появится полноценный оператор присваивания:

$$V := 1.$$

4. Путем несложных преобразований получим, что радиус основания конуса можно вычислить по формуле:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V\sqrt{3}}{\pi}}.$$

Вводить эту формулу следует слева направо. Порядок ввода этой формулы следующий. Сначала вводим знак корня произвольной степени: кнопка *Nth Root* (**N-ый корень**) на панели инструментов *Calculator* (**Калькулятор**) или комбинация клавиш *Ctrl + *. Щелкнем на черном квадратике, стоящем на месте показателя степени и введем цифру 3. Щелкнем на квадратике, замещающем подкоренное выражение, нажмем клавиши *V* и ***. Введем знак квадратного корня: кнопка *Square root* (**Квадратный корень**) на панели инструментов *Calculator* (**Калькулятор**) или клавиша **, затем введем цифру 3. Прежде чем вводить знаменатель, дважды нажмем клавишу **ПРОБЕЛ**. Обратите внимание на синий уголок, который указывает на текущее выражение. Предполагается, что знак операции связывает выбранное выражение со следующим. В данном случае это безразлично, но в целом этот прием позволяет вводить сложные формулы, избегая ручного ввода дополнительных скобок. Нажмем клавишу */*. Чтобы ввести число π , можно воспользоваться комбинацией клавиш *Ctrl + Shift + P* или соответствующей кнопкой на панели инструментов *Calculator* (**Калькулятор**). На экране появится следующая надпись:

$$r := \sqrt[3]{\frac{V \cdot \sqrt{3}}{\pi}}.$$

5. Введем формулы для вычисления длины образующей и площади боковой поверхности конуса:

$$l = \frac{r \cdot 2}{\sqrt{3}}; S = \pi \cdot r \cdot l.$$

Указание знака умножения между переменными обязательно, так как иначе *MathCAD* сочтет, что указана одна переменная с именем из нескольких букв. Здесь и далее мы должны помнить правило: формулы в тексте записываются через знак = (равно), однако при вводе в *MathCAD* знак равно нужно заменить := (оператором присваивания).

6. Для вычисления радиуса шара R введем формулу:

$$R = \sqrt{\frac{S}{4 \cdot \pi}}.$$

7. Для вычисления объема шара введем формулу:

$$W = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3.$$

Использовать переменную V во второй раз не следует, так как теперь мы определяем совершенно другой объем.

8. Заключительная формула $a = \sqrt[3]{W}$ позволяет получить окончательный результат. После этого снова наберем имя переменной a и нажмем клавишу =

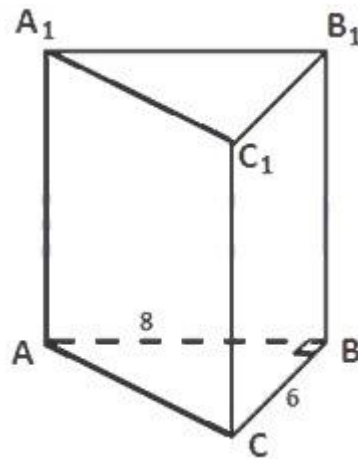
или щелчком на кнопке *Evaluate Expression* (**Вычислить численно =**) на панели инструментов *Calculator* (**Калькулятор**). После формулы появится знак равенства и вычисленный результат.

9. Вернемся к самому первому выражению и отредактируем его. Вместо значения **1** присвоим переменной значение **8**. Сразу же перейдем к последней введенной формуле и обратим внимание, что результат расчета сразу же стал отражать новые начальные данные.

1.7 Индивидуальные задания

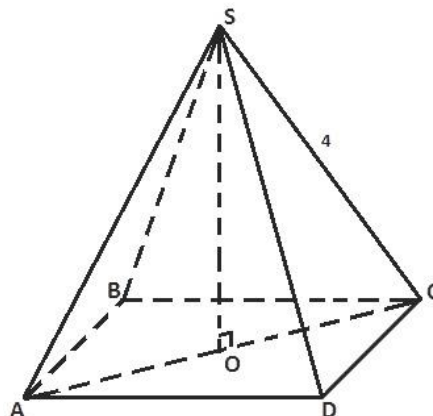
Вариант №1. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Гипотенуза основания призмы равна боковой стороне. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



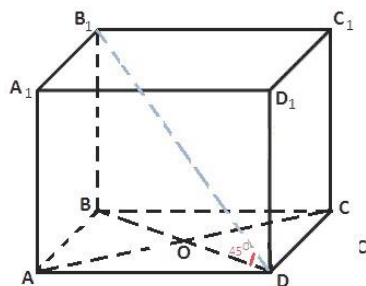
Вариант №2. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 4. Найдите высоту пирамиды, если угол между ребром и плоскостью основания равен 45° .

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



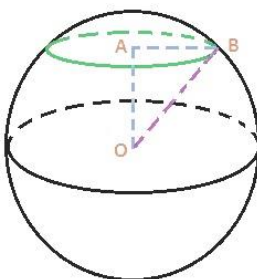
Вариант №3. В основании прямой призмы лежит ромб. Диагонали ромба равны 10 и 24. Найдите площадь полной поверхности призмы, если диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 45° .

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



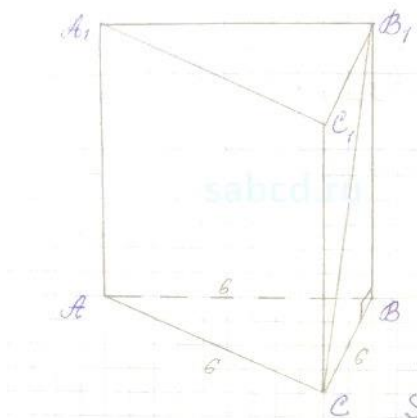
Вариант №4. Площадь сечения шара равна 16π . Расстояние от центра шара до центра сечения равно 3. Найдите площадь поверхности шара.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



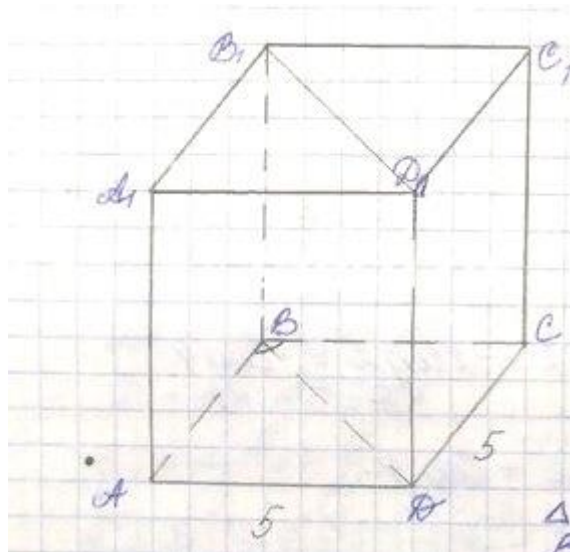
Вариант №5. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6, а диагональ боковой грани равна 10. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



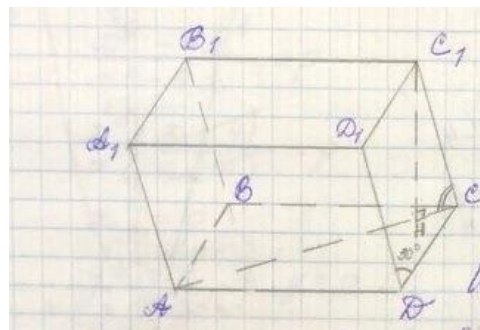
Вариант №6. Основание прямой призмы – ромб со стороной 5 и тупым углом 120° . Боковая поверхность призмы имеет площадь 240. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



Вариант №7. Все боковые грани наклонного параллелепипеда – ромбы с острым углом 30° . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его высота равна $2\sqrt{2}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° .

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

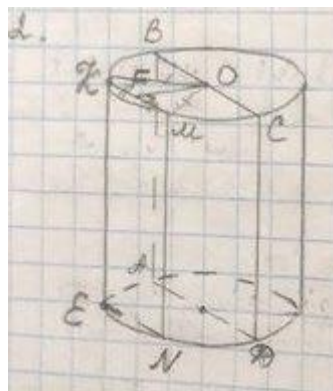


Вариант №8. Высота цилиндра на 2 меньше его радиуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 160π .

а) Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

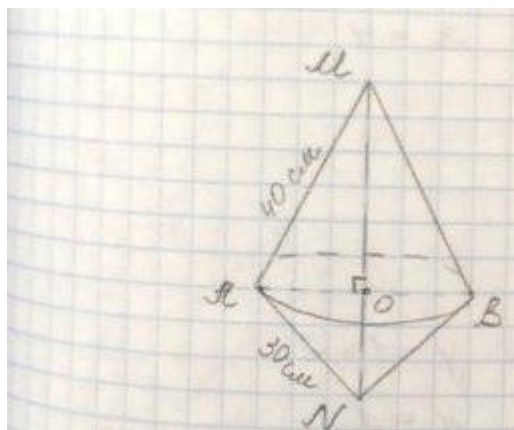
б) Найдите площадь сечения цилиндра, проведённого параллельно его оси на расстоянии 6 от неё.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



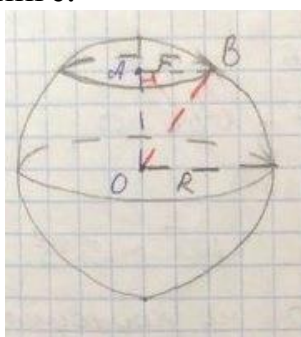
Вариант №9. Прямоугольный треугольник с катетами 30 и 40 вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



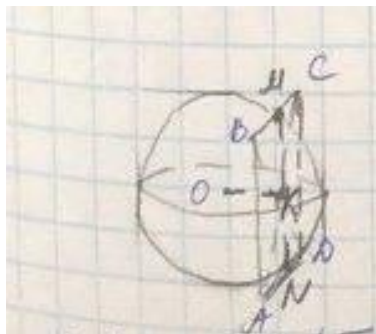
Вариант №10. Длина окружности сечения сферы радиуса 10 равна 16π . Найдите расстояние от центра сферы до плоскости сечения.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



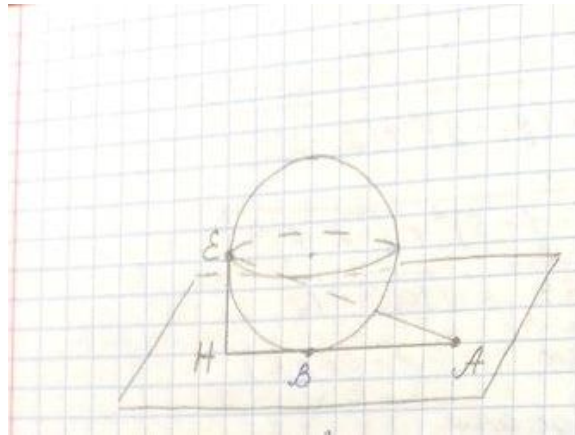
Вариант №11. Все стороны квадрата, периметр которого равен 40, касаются сферы. Найдите площадь сферы, если расстояние от её центра до плоскости квадрата равно 12.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



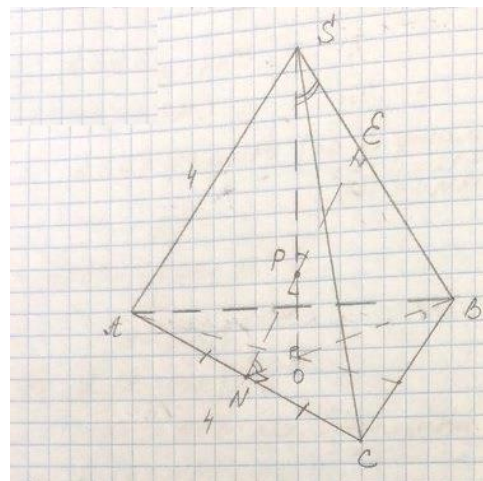
Вариант №12. К сфере с площадью 144π проведена касательная плоскость, на которой выбрана точка А. Расстояние от точки А до наиболее удалённой от неё точки сферы равно 16. Найдите расстояние от точки А до точки касания сферы с плоскостью.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



Вариант №13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N – середина ребра AC , точка O – центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

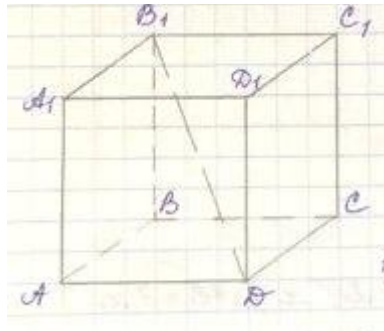


Вариант №14. Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 48. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 4 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №15. Площадь поверхности куба равна 200. Найдите его диагональ.

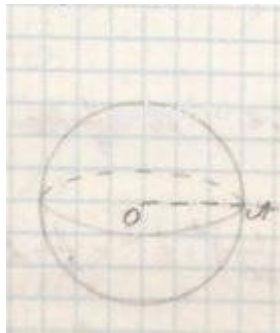
Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



Вариант №16. Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.
 Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи.
 Написать комментарии в листинге.

Вариант №17. Площадь большого круга шара равна 1. Найдите площадь поверхности шара.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи.
 Написать комментарии в листинге.

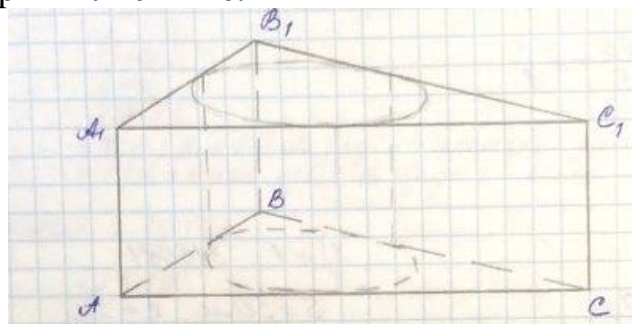


Вариант №18. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 воды и полностью в неё погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 до отметки 27. Чему равен объем детали?

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи.
 Написать комментарии в листинге.

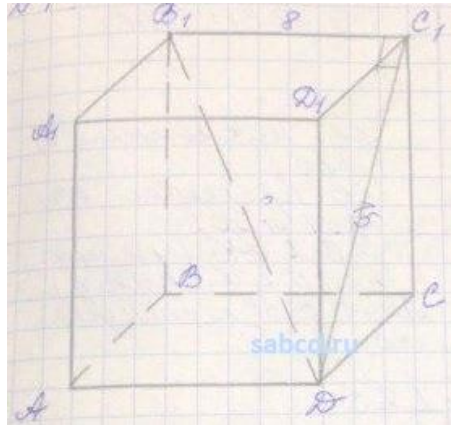
Вариант №19. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи.
 Написать комментарии в листинге.



Вариант №20. Диагональ одной из граней прямоугольного параллелепипеда равна 15, а ребро, перпендикулярное к этой грани, имеет длину 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



2 Лабораторная работа №2 – Физические вычисления с использованием единиц измерения

2.1 Цель работы

Целью работы является приобретение навыков решения задач с использованием единиц измерения в среде *MathCAD*.

Задачи работы:

- знакомство с константами, переменными, операторами присваивания и вывода в среде *MathCAD*;
- освоение технологии ввода размерных переменных в среде *MathCAD*;
- знакомство с понятием «глобальная переменная» в среде *MathCAD*.

2.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Константы, переменные, операторы присваивания и вывода». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 2.6.
3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 2.6.
4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 2.7.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

2.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
 - показать, что выполненное задание работает правильно;
 - уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
 - продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.
-

2.4 Контрольные вопросы

1. Какие переменные можно использовать в алгоритмах, реализованных в пакете *MathCAD*?
2. В чем отличие записи имен переменных *MathCAD* и *Pascal*?
3. Что такое дискретная переменная?
4. Как выглядит задание дискретной переменной, принимающей значения: 0.3, 0.6, ..., 1.8?
5. Какие арифметические операции определены в *MathCAD*?
6. Как записывается и вводится оператор присваивания?

2.5 Константы, переменные, операторы присваивания и вывода

Константы. Входной язык *MathCAD* предусматривает работу со следующими часто используемыми типами констант:

- целочисленные константы (например, **12**, **-24**, **0** и т.д.);
- вещественные числовые константы, которые могут записываться в одной из двух форм: с фиксированной точкой (например, **3.265**) и с десятичным порядком (в экспоненциальной форме), записываемая в виде $a \cdot 10^p$, где a – целочисленная константа или вещественная константа с фиксированной точкой. Точка означает операцию умножения (клавиша *), p – десятичный порядок. Для ввода порядка нажать клавишу ^ (операция возведения в степень);
- комплексные константы, записываемые в виде $a + bi$, причем между величиной мнимой части b и мнимой единицей i не ставится знак операции умножения;
- строковые константы – любая последовательность символов (в том числе – русские и греческие буквы), заключенные в кавычки (например, "Это строковая константа");
- единицы измерения физических величин.

Переменная. В пакете *MathCAD* можно использовать следующие переменные: простые, индексированные (массивы), дискретные, глобальные, системные и размерные.

Каждая переменная *MathCAD* имеет свое оригинальное имя. Имя переменной (идентификатор) – это набор из букв, цифр и символов, но обязательно начинающийся с буквы (латинской или греческой). Использование в имени русских букв, а также пробелов запрещено. Греческие буквы вводятся с палитры инструментов **Греческая**. В конце имени переменной могут стоять нижние индексы, для ввода которых нужно нажать клавишу . (десятичную точку). Использование в имени строчных и прописных букв определяет имена разных переменных. Так, имена X_2 и x_2 соответствуют разным переменным *MathCAD* (часто эта особенность является причиной ошибок). В отличие от алгоритмического языка *Pascal*, переменную в *MathCAD* не нужно предварительно описывать – ее тип определяется автоматически при задании переменной конкретного значения. Незаданные переменные выделяются на

экране красным цветом. Значение переменной можно задать с помощью оператора присваивания ($:=$), имеющего следующий вид:

$$\langle \text{Имя_переменной} \rangle := \langle \text{Выражение} \rangle$$

Для ввода знака присваивания $:=$ следует нажать клавишу с символом двоеточия $:$. Оператор присваивания, задающий значение некоторой переменной, должен стоять в документе левее или выше точки использования этой переменной. Оператор присваивания позволяет переназначить значение переменной. До оператора присваивания переменная в документе может иметь одно значение, а после (правее или ниже) – новое значение. Вывод значения переменной производится оператором вывода $=$.

Простая переменная – переменная, значение которой определяется одной величиной. Например, определение переменной x :

$$x := 2$$

Для вывода значения переменной необходимо набрать:

$$x =$$

Дискретная переменная (в литературе часто используется термин ранжированная переменная) – переменная, принимающая ряд значений, меняющихся по закону арифметической прогрессии. Дискретная переменная определяется заданием начального значения, шага и конечного значения. Если шаг не задан, он предполагается равным 1 или -1 . Например,

$$\langle \text{Name} \rangle := N1..N2$$

где Name – имя переменной; $N1$ – начальное значение; $N2$ – конечное значение.

Символ двоеточия $..$ вводится нажатием клавиши $;$ или кнопкой **m..n** палитры инструментов **Матрица**. Если $N1 < N2$, шаг равен 1; если $N1 > N2$ шаг равен -1 . Задание дискретной переменной с произвольным шагом имеет вид:

$$\langle \text{Имя_переменной} \rangle := \langle \text{Нач_значение} \rangle, \langle \text{След_значение} \rangle .. \langle \text{Кон_значение} \rangle$$

Шаг h задается неявно и вычисляется как:

$$h := \langle \text{След_значение} \rangle - \langle \text{Нач_значение} \rangle$$

Например:

$$x := 0.1, 0.3 .. 1.5. \text{ Здесь шаг равен } 0.2.$$

$i := 1..5 \ j := 5..1$. Здесь шаг у переменной i равен 1, а у переменной j равен -1 .

Для вывода всех значений дискретных переменных необходимо набрать:

$$x =$$
$$i =$$
$$j =$$

Дискретная переменная не является одномерным массивом и поэтому нельзя обратиться только к одному значению дискретной переменной.

Глобальная переменная. Как уже отмечалось, оператор присваивания, задающий значение некоторой простой или дискретной переменной, должен стоять в документе левее или выше точки использования переменной. Однако в *MathCAD* могут использоваться глобальные переменные, доступные в любой точке документа, вне зависимости от того, в каком месте документа они были определены. Задание глобальной переменной имеет вид:

$$\langle \text{Имя_глобальной_переменной} \rangle \equiv \langle \text{Выражение} \rangle$$

Для ввода знака \equiv необходимо нажать клавишу \sim .

Размерные переменные – числовые переменные и функции, обладающие размерностью и содержащие значения в системе измерения СИ физических величин. Сделано это для упрощения инженерных и физических расчетов, которые *MathCAD* выполняет с преобразованием единиц измерения физических величин. В *MathCAD* встроено большое количество единиц измерения, с помощью которых и создаются размерные переменные.

Диалоговое окно (рис. 2.1), в котором можно установить систему единиц измерения физических величин, открывается командой *Insert* (**Добавить**) / *Unit* (**Единицу Измерения**), либо щелчком по соответствующей кнопке с изображением мерного стакана на стандартной панели инструментов, либо с помощью комбинации клавиш *Ctrl + U*. Затем необходимо выбрать вид измерения (список **Измерение** (*Dimension*)) и нужную единицу измерения (список **Единица Измерения** (*Unit*)).

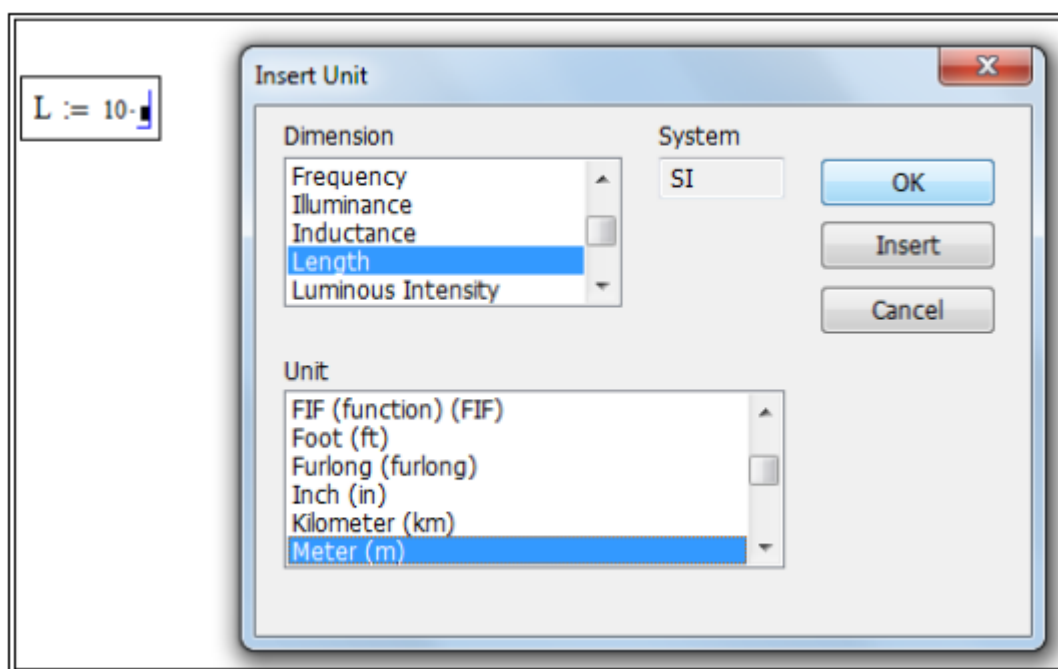


Рис. 2.1 – Диалоговое окно задания единиц измерения

Единицы измерения могут быть введены в математическое выражение и с клавиатуры. Чтобы создать размерную переменную, определяющую, например, длину в метрах, введем выражение, присваивающее переменной *L* значение 10:

$$L := 10$$

Затем введем символ умножения $*$, а потом введем букву *m* либо с клавиатуры, либо из диалогового окна, изображенного на рис. 2.1. Поскольку все символы, обозначающие единицы измерения, зарезервированы и имеют предустановленные значения (связанные с размерностью), то литера *m* будет распознана *MathCAD* как метр. Если ранее вы переопределили переменную *m*, присвоив ей какое-либо значение, то она уже не будет восприниматься как единица длины.

Системные переменные предназначены для хранения значения определенных параметров системы (например, переменная *ORIGIN* задает начальное значение индексных переменных у элементов массива).

2.6 Пример для повторения

Задание. Теплоизолированный космический аппарат, находящийся на орбите Земли, имеет на борту приборы с электрической мощностью, которая может изменяться в ходе работы от $N_1 = 75$ Вт (дежурный режим) до $N_2 = 200$ Вт (сеанс связи). С целью обеспечения предсказуемого теплового режима в теплоизоляции сделано отверстие площадью S_1 , на которое попадает поток солнечной энергии $W = 1400$ Вт/м². Полученная энергия излучается аппаратом через это отверстие, а также через дополнительное отверстие в теплоизоляции с площадью S_2 в режиме черного тела. Каковы должны быть площади отверстий, если допустимый диапазон температур для оборудования, расположенного в аппарате, составляет 20-30 °С?

Анализ задачи. Минимальная температура аппаратуры соответствует режиму минимального тепловыделения. В этом случае поступающая мощность:

$$Q_1 = W \cdot S_1 + N_1.$$

Излучаемая мощность:

$$Q_2 = \sigma T_1^4 (S_1 + S_2),$$

где T_1 – минимальная допустимая температура в градусах Кельвина.

В условиях теплового баланса эти мощности должны быть равны. Режим максимального тепловыделения соответствует максимальной температуре аппаратуры. В этом случае:

$$W \cdot S_1 + N_2 = \sigma T_2^4 (S_1 + S_2).$$

Используя два полученных уравнения, получаем:

$$S_1 = \frac{(N_2 \cdot T_1^4 - N_1 \cdot T_2^4)}{W \cdot (T_2^4 - T_1^4)},$$

$$S_2 = \frac{W \cdot (N_2 - N_1) - \sigma (N_2 \cdot T_1^4 - N_1 \cdot T_2^4)}{\sigma \cdot W \cdot (T_2^4 - T_1^4)}.$$

Реализация в MathCAD.

1. Запустим программу *MathCAD*.
2. Введем значения известных величин, присвоив их переменным с соответствующими именами. Вместо нижних индексов используем просто дополнительную цифру в названии переменной.

$$W := 1400 \cdot \frac{\text{watt}}{\text{m}^2},$$

$$N1 := 75 \cdot \text{watt}, \quad N2 := 200 \cdot \text{watt},$$

$$T1 := (20 + 273) \cdot \text{K}, \quad T2 := (30 + 273) \cdot \text{K}.$$

3. Обозначения физических величин присоединяем к соответствующим значениям через знак умножения. Если нужное обозначение неизвестно, используем команду *Insert / Unit* (**Добавить / Единицу измерения**). Измеряемая величина выбирается в списке *Dimension* (**Измерение**), а нужная единица измерения – в списке *Unit* (**Единица измерения**).

4. Присвоим переменной σ значение постоянной Стефана-Больцмана $\left(5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}\right)$. Чтобы ввести греческую букву, используем панель инструментов *Greek* (**Греческая**) или введем соответствующую латинскую букву (в данном случае *s*) и сразу же нажмем комбинацию клавиш *Ctrl + G*. Так как специальной единицы для размерности этой константы не существует, ее следует составить из стандартных единиц методом умножения и деления.

5. Введем полученные в ходе анализа формулы для вычисления площадей отверстий, присвоив полученные значения переменным *S1* и *S2*:

$$S1 := \frac{(N2 \cdot T1^4 - N1 \cdot T2^4)}{W \cdot (T2^4 - T1^4)}, \quad S2 := \frac{W \cdot (N2 - N1) - \sigma(N2 \cdot T1^4 - N1 \cdot T2^4)}{\sigma \cdot W \cdot (T2^4 - T1^4)}.$$

6. Чтобы увидеть результаты вычислений, введем имя первой из рассчитываемых переменных и нажмем клавишу $=$. Затем проделаем тоже самое со второй переменной.

7. Изменение значений параметров, заданных в условии задачи, приводит к автоматическому перерасчету формул. В частности, исследуем, изменяя значение переменной W , как изменяются требования к такому методу терморегуляции при удалении аппарата от Солнца и приближении к нему (на орбите Венеры $W := 2700 \cdot \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$; и на орбите Марса $W := 500 \cdot \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$).

8. Обратите внимание, что результат содержит единицы измерения в соответствии с системой единиц СИ. Используемая система единиц отображается в диалоговом окне *Insert Unit* (**Вставка единицы измерения**).

9. Чтобы изменить используемую систему единиц, выполним команду **Инструменты / Параметры рабочего листа**. В открывшемся диалоговом окне **Настройки рабочего листа** выберем вкладку **Система единиц измерения**. Выберем систему *CGS* и посмотрим, как изменились результаты (они теперь выражаются в квадратных сантиметрах). Если выбрать американскую систему единиц (*U.S.*), то результат будет выражен в квадратных футах.

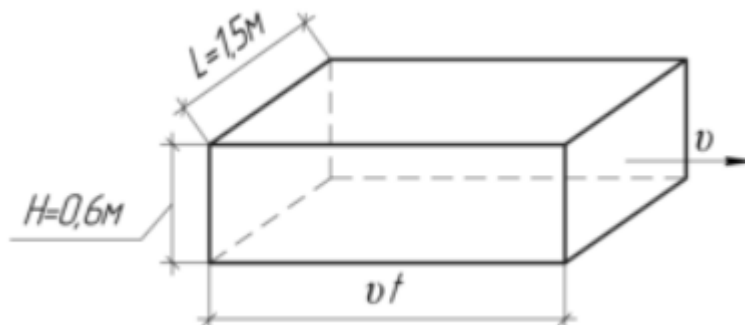
2.7 Индивидуальные задания

Вариант №1. Расстояние между двумя городами автомашина проехала со скоростью 60 км/ч, а обратный путь — со скоростью, вдвое меньшей. Найти среднее значение модуля скорости автомашины за все время движения.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

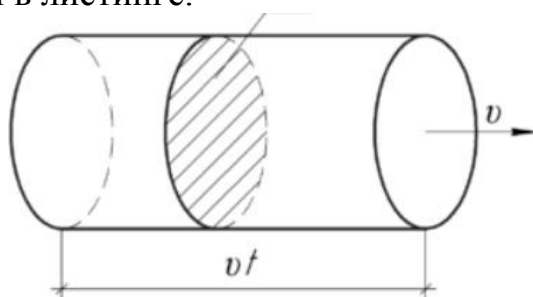
Вариант №2. Расход воды в канале за секунду составляет $0,27 \text{ м}^3$. Найти скорость воды при ширине канала $1,5 \text{ м}$ и глубине воды $0,6 \text{ м}$.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



Вариант №3. В трубопроводе с площадью поперечного сечения 100 см^2 в течение часа протекало 18 м^3 нефти. Найти скорость нефти.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.



Вариант №4. Тело прошло половину пути со скоростью 6 м/с , а другую половину пути со скоростью 4 м/с . Найти среднюю скорость тела на этом пути.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №5. Первую половину пути автомобиль движется со скоростью 60 км/ч , а вторую — со скоростью 40 км/ч . Определить среднюю скорость движения автомобиля на всем пути.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №6. Один автомобиль, двигаясь равномерно со скоростью 12 м/с , в течение 10 с прошел такой же путь, какой второй автомобиль прошел за 15 с . Определить скорость второго автомобиля.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №7. За минуту человек делает сто шагов. Определить скорость движения человека, если ширина шага 90 см .

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №8. Поезд движется на подъеме со скоростью 10 м/с, а на спуске со скоростью 25 м/с. Определить среднюю скорость поезда на всем пути, если длина спуска в два раза больше длины подъема.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №9. Автобус третью часть пути шел со скоростью 20 км/ч, половину оставшегося пути со скоростью 30 км/ч, а остальной путь со скоростью 60 км/ч. Определить среднюю скорость на всем пути.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №10. Поезд первую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза большей, чем вторую половину пути. Какова скорость поезда на каждом участке, если средняя скорость прохождения всего пути равна 12 м/с?

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №11. В парафине на расстоянии 20 см помещены два точечных заряда. На каком расстоянии они должны находиться в воздухе, чтобы сила взаимодействия между ними осталась прежней?

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №12. Два электрических заряда притягиваются друг к другу в керосине с силой 7,8 Н. С какой силой они будут притягиваться, если их поместить в глицерин на расстоянии в два раза меньшем?

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №13. Два шарика, расположенные на расстоянии 10 см друг от друга, имеют одинаковые отрицательные заряды и взаимодействуют с силой 0,23 мН. Найти число избыточных электронов на каждом шарике.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №14. С какой силой ядро атома железа (${}^{56}_{26}\text{Fe}$) притягивает электрон, находящийся на внутренней оболочке атома, расположенной на расстоянии 10^{-12} м?

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №15. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону, причем сила электрического отталкивания капелек уравнивает силу их взаимного тяготения. Каковы радиусы капелек?

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №16. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону, причем сила электрического отталкивания капелек уравнивает силу их взаимного тяготения. Каковы радиусы капелек?

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №17. Два заряженных шара одинакового радиуса, массой 0,3 кг каждый, расположены на таком расстоянии друг от друга, что взаимодействие их зарядов уравнивается силой взаимного тяготения. Найти радиусы шаров, если поверхностная плотность их зарядов равна $1,25 \text{ нКл/м}^2$.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №18. По теории Бора электрон в атоме водорода вращается вокруг ядра по круговой орбите радиусом $0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Определить скорость движения электрона по орбите.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №19. В атоме водорода электрон движется вокруг протона с угловой скоростью 10^{16} рад/с . Найти радиус орбиты электрона.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №20. Два одинаковых шара, массы которых 600 г и радиусы — 20 см, имеют одинаковые заряды. Найти поверхностную плотность электрических зарядов, если известно, что кулоновская сила отталкивания уравнивается силой всемирного тяготения. Расстояние между шарами гораздо больше их радиусов.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

3 Лабораторная работа №3 – Операции с векторами и матрицами

3.1 Цель работы

Целью работы является приобретение навыков работы с векторами и матрицами в среде *MathCAD*.

Задачи работы:

- знакомство с верхними и нижними индексами, применяемыми при описании матриц в среде *MathCAD*;
- освоение технологии ввода векторов и матриц в среде *MathCAD*;
- знакомство с понятием «системная переменная *ORIGIN*» в среде *MathCAD*.

3.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Массивы в пакете *MathCAD*».
- В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 3.6.
 3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 3.6.
 4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 3.7.
 5. Ответить на контрольные вопросы.
 6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

3.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
- показать, что выполненное задание работает правильно;
- уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
- продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

3.4 Контрольные вопросы

1. Как выглядит обращение к элементу массива *MathCAD*?
2. Что обозначают нижние индексы?
3. К какому типу переменных относятся нижние индексы?
4. Какой размерности массив представляет переменная с одним нижним индексом?
5. Какой размерности массив представляет переменная с двумя нижними индексами?
6. Что обозначает верхний индекс в матричных операциях?

3.5 Массивы в пакете MathCAD

При работе с массивами используются такие понятия, как скаляр, вектор и матрица. Одиночное число называется скаляром (в программировании – простая переменная). Общий термин для вектора или матрицы – массив. В одномерном массиве (векторе) положение элемента определяется одним индексом (например, x_i). В двумерном массиве (матрице), который имеет вид прямоугольной таблицы, положение элемента определяется двумя индексами (например, $A_{i,j}$). Первый индекс определяет номер строки, а второй – номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы. Вектор можно рассматривать как матрицу, содержащую один столбец. Для обращения к элементу массива вводится имя массива, нажимается клавиша «левая квадратная скобка» (т.е. [) или кнопка x_n в палитре инструментов *Matrix* (рис. 3.2), а затем вводятся нужные индексы (или индексные выражения). После ввода индексов нужно выйти из строки нижних индексов, нажав клавишу \rightarrow .

Системная переменная ORIGIN. Вектор и элементы матрицы обычно нумеруются, начиная с нулевой строки и нулевого столбца. Начальное значение нумерации хранится в системной переменной *ORIGIN*, которая по умолчанию равна нулю. Обычно в матричной алгебре значения индексов начинается с 1. Замену нулевого значения на другое можно выполнить несколькими способами. Рассмотрим два способа.

Способ 1. Заменить значения *ORIGIN* во всем документе с помощью оператора глобального присвоения (\equiv). Для этого в любом месте рабочего документа надо ввести оператор присваивания:

$$ORIGIN \equiv N$$

где N – начальное значение нумерации массива.


Например, если введем $ORIGIN \equiv 1$, то *MathCAD* будет вести отсчет номеров строк и столбцов от 1 по всему документу.

Способ 2. Переопределить *ORIGIN* можно с помощью оператора присвоения ($:=$). В этом случае новое значение будет действовать левее и ниже этого оператора присваивания до следующего переопределения переменной *ORIGIN*. Этот способ иллюстрируется рис. 3.1.

$$\begin{array}{l}
 \text{ORIGIN} := 1 \quad x_2 := 10 \quad A_{2,3} := 30 \\
 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 3.1 – Формирование массивов с $ORIGIN = 1$

Для работы с векторами и матрицами система *MathCAD* использует палитру инструментов *Matrix* (**Матрицы**), изображенную на рис. 3.2. Назначение инструментов палитры:

-  – создание массива;
- x_n – задание индекса у элемента массива;
- x^{-1} – вычисление обратной матрицы;
- $M^{<>}$ – выделение столбца матрицы;
- $|x|$ – вычисление длины вектора или определителя матрицы;
- M^T – транспонирование вектора или матрицы;
- $\vec{f}(M)$ – оператор векторизации, т.е. поэлементная обработка массива;
- Σv – суммирование элементов вектора;
- $\vec{a} \cdot \vec{v}$ – вычисление скалярного произведения;
- $\vec{a} \times \vec{v}$ – вычисление векторного произведения.

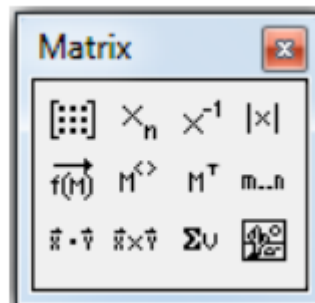




Рис. 3.2 – Панель инструментов *Matrix*

В пакете *MathCAD* максимальное число индексов у элементов массива не превосходит 2. Однако каждый элемент массива может являться в свою очередь вектором или матрицей. Это позволяет создавать массивы практически любой размерности.

Создание массива с использованием шаблона. Первоначально вводится имя создаваемого массива (которое аналогично имени простой переменной), знак присваивания и, используя инструмент , вызывается окно *Insert Matrix* (**Вставка матрицы**), в котором указывается размер создаваемого массива. Напомним, что при создании вектора число столбцов (параметр *columns*) задается равным 1. После нажатия кнопки *OK* в документе появляется шаблон массива, в поля которого вводятся соответствующие элементы массива. Например, чтобы определить матрицу, необходимо выполнить следующее:

- ввести имя матрицы и знак присваивания (двоеточие);

- щелкнуть по значку  в палитре инструментов Matrix. В появившемся диалоговом окне введите число строк и столбцов матрицы (рис. 3.3);
- щелкнуть на кнопке ОК и ввести в поля шаблона нужные значения элементов массива.

Переход от одного поля шаблона к другому осуществляется с помощью клавиши *Tab* или щелчком мыши непосредственно на нужном поле. Значением элемента матрицы может быть число или выражение. При выводе элементов массива введенные выражения вычисляются. На рис. 3.3 показано задание размера 3×3 матрицы *A* и заполнение шаблона соответствующего размера.

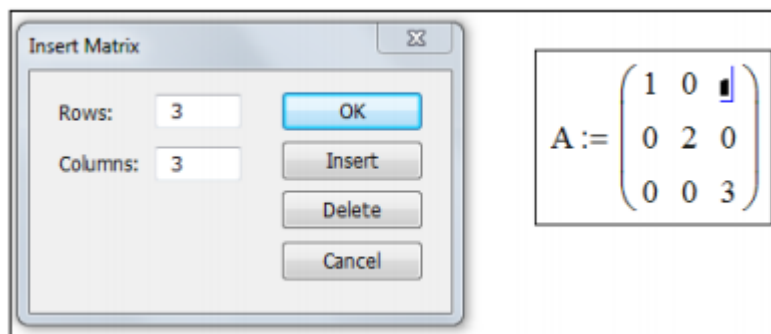



Рис. 3.3 - Создание и заполнение шаблона матрицы

Создание массива вводом его элементов с клавиатуры. Ввод элементов вектора осуществляется в цикле, параметром которого является дискретная переменная. Ввод элементов матрицы осуществляется в двойном цикле с соответствующими параметрами внешнего и внутреннего цикла. Ввод элементов осуществляется через запятую.

В некоторых задачах обработки массивов возникает необходимость выделить определенный столбец. Для эффективного выполнения такого выделения массивы *MathCAD* могут иметь верхний индекс. Верхний индекс позволяет обращаться к отдельному столбцу массива.

Чтобы ввести верхний индекс, необходимо ввести имя массива, а затем нажать клавиши *Ctrl + b* или щелкнуть на кнопке  палитры инструментов *Matrix*. Затем в появившихся угловых скобках ввести номер выделяемого столбца (с учетом значения системной переменной *ORIGIN*).

Пакет *MathCAD* содержит большой набор встроенных функций, позволяющих возвращать различные характеристики массивов, создавать новые матрицы и преобразовывать существующие, обрабатывать массивы. Все это облегчает решение широкого круга задач линейной алгебры. Вызов функций осуществляется выполнением пунктов меню *Insert (Добавить) / Functions (Функцию)* и в появившемся диалоговом окне выбирается нужная категория функций (для обработки массивов – это *Vector and Matrix (Векторы и матрицы)*). Затем из правого списка *Function Name (Имя функции)* выбирается конкретная функция обработки массива (рис. 3.4). В нижней части окна выводится краткая информация о параметрах выбранной функции и ее назначении. Заметим, что обращение к функции можно ввести с клавиатуры.

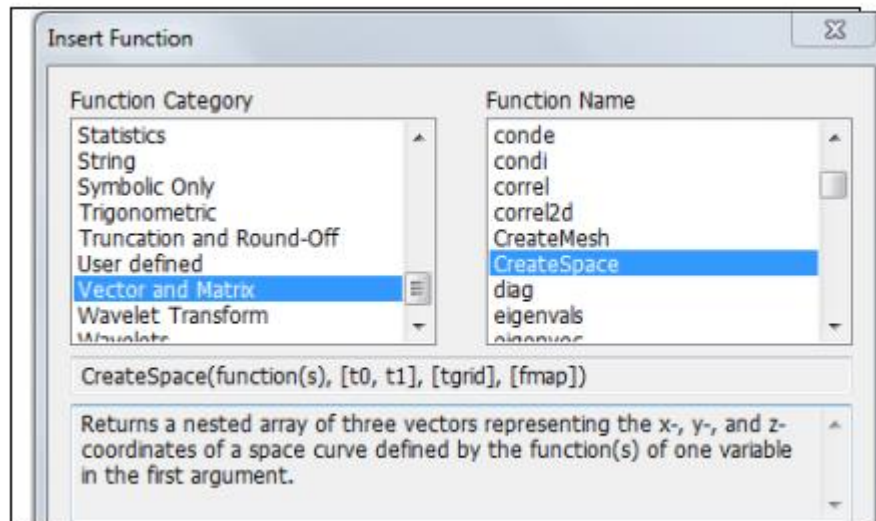


Рис. 3.4 – Встроенные векторные и матричные функции

3.6 Пример для повторения

Задание. Разложить вектор $\vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ по нормированным собственным

векторам матрицы $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Анализ. Первый этап решения задачи состоит в нахождении собственных векторов данной матрицы. Затем необходимо найти вектор \vec{T} , такой что $S \cdot \vec{T} = \vec{V}$, где S – матрица, столбцы которой представляют собой собственные вектора матрицы M .

Реализация в *MathCAD*.

1. Запустим программу *MathCAD*.
2. Создадим матрицу M . Начнем с записи оператора присваивания, а для ввода правой части нажмем комбинацию клавиш *Ctrl + M*. Такого же результата можно достичь командой *Insert / Matrix (Добавить / Матрицу)*, либо щелчком на кнопке *Matrix or Vector (Матрица или вектор)* на панели инструментов *Matrix (Матрица)*.
3. В открывшемся диалоговом окне *Insert Matrix (Вставка матрицы)* укажем число строк и столбцов (по три) и щелкните на кнопке **ОК**.
4. Введем значения элементов матрицы в шаблон.
5. Аналогичным образом сформируем вектор \vec{V} . Он будет представлять собой матрицу, имеющую только один столбец.
6. Собственные значения квадратной матрицы можно получить при помощи функции *eigenvals*. Результатом ее работы является вектор собственных значений, присвоим его переменной L .

7. Функция *eigenvec* позволяет получить собственный вектор, соответствующий данному собственному значению. Ей нужны два параметра: матрица, для которой ищется собственный вектор, и собственное значение, которому он соответствует. Чтобы записать собственные вектора в качестве столбцов матрицы **S**, надо присвоить вычисленное значение столбцу матрицы. Столбцы матрицы в программе *MathCAD* выбираются специальным верхним индексом, заключенным в угловые скобки. Чтобы ввести номер столбца, нажмем комбинацию клавиш *Ctrl + b* или щелкнем на кнопке *Matrix Column* (**Столбец матрицы**) на панели инструментов *Matrix* (**Матрица**), после чего введем номер нужного столбца матрицы. Будьте внимательны – столбцы и строки матрицы нумеруются начиная с нуля $S^{<0>}$.

8. В правой части оператора присваивания надо указать собственное значение матрицы. Собственные значения являются элементами вектора *L*. Номер элемента указывается как нижний индекс. Для ввода нижнего индекса нажмем клавишу [, либо воспользуемся кнопкой *Subscript* (**Нижний индекс**) на панели инструментов *Matrix*. Итоговый оператор для первого собственного вектора будет выглядеть следующим образом:

$$S^{<0>} := \text{eigenvec}(M, L_0).$$

Аналогично зададим операторы для второго и третьего собственных значений.

9. Для нахождения коэффициента при собственных векторах в разложении необходимо решить систему линейных уравнений. Ее удобно записать в матричной форме. Создадим вектор **T** с тремя элементами. Величины этих элементов значения не имеют.

10. Запишем ключевое слово *given*.

11. Ниже запишем матричное уравнение $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{V}$. Знак логического равенства введем с помощью комбинаций клавиш *Ctrl + =*.

12. Найдем коэффициенты в разложении при помощи функции *lsolve*:

$$\text{lsolve}(S, V) =$$

3.7 Индивидуальные задания

Вариант №1. Выполнить указанные действия над матрицами:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 5, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(A) = ?$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №2. Вычислить определитель, используя свойства определителей и теорему о разложении по элементам строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №3. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера:

$$\left. \begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 &= 36. \end{aligned} \right\}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №4. Найти матрицу, обратную данной и результат проверить умножением:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №5. Исследовать данную систему на совместность и, в случае совместности, решить ее:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №6. Решить данное матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №7. Найти ранг матрицы A в зависимости от значения параметра α :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №8. Построить фундаментальную систему решений данной однородной системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{array} \right\}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №9. Выполнить указанные действия над матрицами:

$$f(x) = x^2 - 8x + 7, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad f(A) = ?$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №10. Вычислить определитель, используя свойства определителей и теорему о разложении по элементам строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №11. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{array} \right\}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №12. Найти матрицу, обратную данной и результат проверить умножением:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №13. Исследовать данную систему на совместность и, в случае совместности, решить ее:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -2. \end{aligned} \right\}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №14. Решить данное матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №15. Найти ранг матрицы A в зависимости от значения параметра α :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & -2 & \alpha & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №16. Построить фундаментальную систему решений данной однородной системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №17. Выполнить указанные действия над матрицами:

$$f(x) = x^2 - 4x - 9, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = ?$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №18. Вычислить определитель, используя свойства определителей и теорему о разложении по элементам строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №19. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16. \end{aligned} \right\}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

Вариант №20. Найти матрицу, обратную данной и результат проверить умножением:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи. Написать комментарии в листинге.

4 Лабораторная работа №4 – Аналитические выражения

4.1 Цель работы

Целью работы является приобретение навыков работы в символьном процессоре *MathCAD*.

Задачи работы:

- знакомство с командами строки меню *Symbolics* (**Символика**);
- знакомство с оператором символьного вывода \rightarrow и командами палитры инструментов *Symbolic* (**Символьная**);
- освоение технологии аналитических вычислений в среде *MathCAD*.

4.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Команды символьных вычислений». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 4.6.
3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 4.6.
4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 4.7.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

4.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
- показать, что выполненное задание работает правильно;
- уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
- продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

4.4 Контрольные вопросы

1. Что такое символьные вычисления в пакете *MathCAD*?
2. С помощью каких средств интерфейса пакета *MathCAD* можно осуществить символьные вычисления?
3. Какие символьные преобразования и вычисления осуществляет команда: *evaluate*?
4. Какие символьные преобразования и вычисления осуществляет команда *simplify*?
5. Какие символьные преобразования и вычисления осуществляет команда *expand*?
6. Какие символьные преобразования и вычисления осуществляет команда *factor*?
7. Какие символьные преобразования и вычисления осуществляет команда *collect*?
8. Какие символьные преобразования и вычисления осуществляет команда *polynomial coefficients*?

4.5 Команды символьных вычислений

Пакет *MathCAD* позволяет получать результат некоторых вычислений в символьном виде, т.е. в виде аналитического выражения. Такие вычисления называются символьными. В отличие от численных вычислений, которые дают частный (численный) результат, при символьных вычислениях полученные аналитические выражения обладают высокой общностью результатов. Символьные вычисления можно осуществлять с помощью:

- команд строки меню *Symbolics* (**Символика**);
- оператора символьного вывода \rightarrow и команд символьного процессора, которые вводятся с палитры инструментов *Symbolic* (**Символьная**).

Команды меню *Symbolics* (**Символика**) (рис. 4.1) более удобны для отображения аналитического результата выражения в целом или его части, не сохраняя сам ход вычислений. Чтобы символьные команды выполнялись, необходимо выделить ту часть выражения, над которым будем производить преобразование, или выделить переменную, относительно которой выполняется символьная операция.

Команды, выполняемые при выделении выражения:

- *Evaluate* (**Вычислить**) – преобразовать выражение с выбором вида преобразования (см. рис. 4.1);
- *Simplify* (**Упростить**) – упростить выделенное выражение;
- *Expand* (**Развернуть**) – разложить выражение по степеням;

- *Factor* (**Коэффициент**) – разложить выражение по степеням на множители;
- *Collect* (**Собрать**) – собрать слагаемые, подобные выделенному выражению;
- *Polynomial Coefficients* (**Полиномиальные коэффициенты**) – найти коэффициенты полинома по заданной переменной.

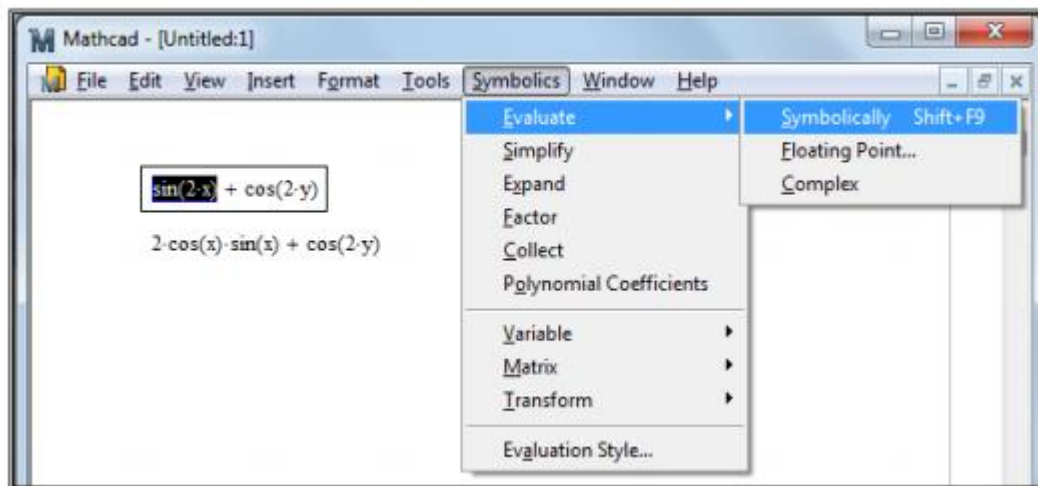


Рис. 4.1 – Команды строки меню *Symbolics* (**Символика**)

Команды, выполняемые при выделении выражения:

- *Evaluate* (**Вычислить**) – преобразовать выражение с выбором вида преобразования (см. рис. 4.1);
- *Simplify* (**Упростить**) – упростить выделенное выражение;
- *Expand* (**Развернуть**) – разложить выражение по степеням;
- *Factor* (**Коэффициент**) – разложить выражение по степеням на множители;
- *Collect* (**Собрать**) – собрать слагаемые, подобные выделенному выражению;
- *Polynomial Coefficients* (**Полиномиальные коэффициенты**) – найти коэффициенты полинома по заданной переменной.

Команды, выполняемые при выделении переменной. Эти команды находятся в подменю *Variable* (**Переменная**) пункта *Symbolics* (**Символика**) и они показаны на рис. 4.2.

Приведем эти команды:

- *Solve* (**Решить**) – решить уравнение или неравенство относительно выделенной переменной;
- *Substitute* (**Заменить**) – заменить выделенную переменную значением из буфера обмена;
- *Differentiate* (**Дифференцировать**) – дифференцировать выражение относительно выделенной переменной;

- *Integrate* (**Интегрировать**) – интегрировать выражение по выделенной переменной;
- *Expand to Series* (**Расширить до ряда**) – разложить выражение в ряд Тейлора относительно выделенной переменной;
- *Convert to Partial Fraction* (**Преобразовать в элементарную дробь**) – разложить выражение на элементарные дроби.

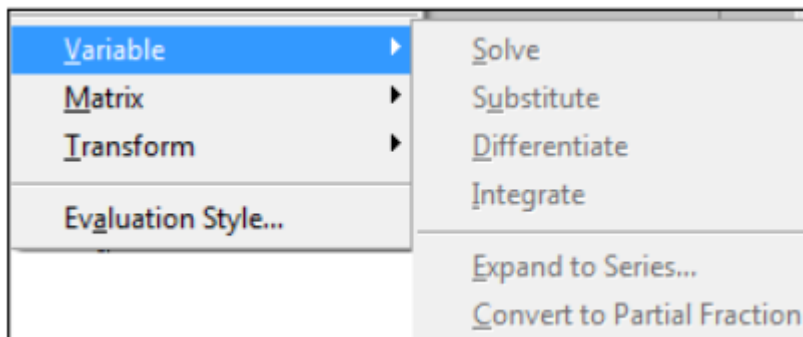


Рис. 4.2 – Команды подменю *Variable* (**Переменная**)

Команды, выполняемые с выделенными матрицами. Эти команды находятся в подменю команды *Matrix* (**Матрицы**) (см. рис. 4.3):

- *Transpose* (**Транспонировать**) – получить транспонированную матрицу;
- *Invert* (**Обратить**) – получить обратную матрицу;
- *Determinant* (**Определитель**) – вычислить определитель матрицы.

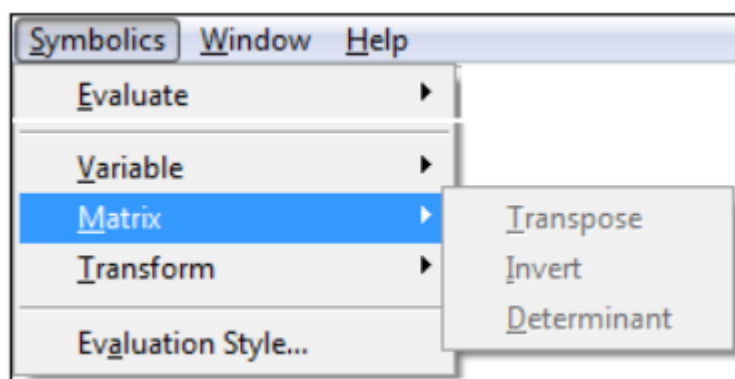


Рис. 4.3 – Подменю команды *Matrix*

Команды выполнения интегральных преобразований. Эти команды находятся в подменю команды *Transform* (**Преобразования**) и они показаны на рис. 4.4. Приведем эти команды:

- *Fourier* (**Фурье**) – выполнить прямое преобразование Фурье относительно выделенной переменной;
- *Inverse Fourier* (**Обратное Фурье**) – выполнить обратное преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

- *Laplace* (**Лаплас**) – выполнить прямое преобразование Лапласа относительно выделенной переменной;
- *Inverse Laplace* (**Обратное Лапласа**) – выполнить обратное преобразование Лапласа относительно выделенной переменной;
- *Z* – выполнить прямое Z-преобразование относительно выделенной переменной;
- *Inverse Z* (**Обратное Z**) – выполнить обратное Z-преобразование относительно выделенной переменной.

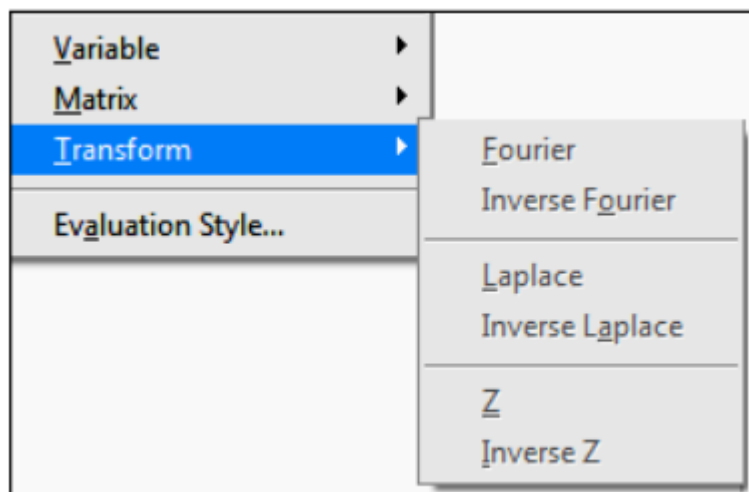


Рис. 4.4 – Подменю *Transform*

Прямое преобразование Фурье позволяет получить в аналитическом виде функцию частоты $F(\omega)$ от временной функции $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Соответственно, обратное преобразование Фурье позволяет по функции $F(\omega)$ найти функцию $f(t)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Прямое преобразование Лапласа позволяет получить передаточную функцию $F(s)$ от временной функции $f(t)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

где s – параметр интегрального преобразования, который в общем случае является комплексной величиной $s = \sigma + i\omega$.

Обратное преобразование Лапласа позволяет по передаточной функции $F(s)$ найти временную функцию $f(t)$:

$$f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

Z-преобразованием называют преобразование дискретного сигнала $f(n)$ (последовательность вещественных чисел) в аналитическую функцию комплексной частоты $z = e^{i\omega n}$. Прямое Z-преобразование реализуется выражением:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n}$$

Обратное Z-преобразование вычисляется контурным интегралом:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Способ с использованием оператора символьного вывода « \rightarrow » и команд, которые вводятся с палитры инструментов *Symbolic* (**Символьная**) (рис. 4.5), более нагляден, так как позволяет записывать выражения в традиционной математической форме и сохранять символьные вычисления в документах *MathCAD*.

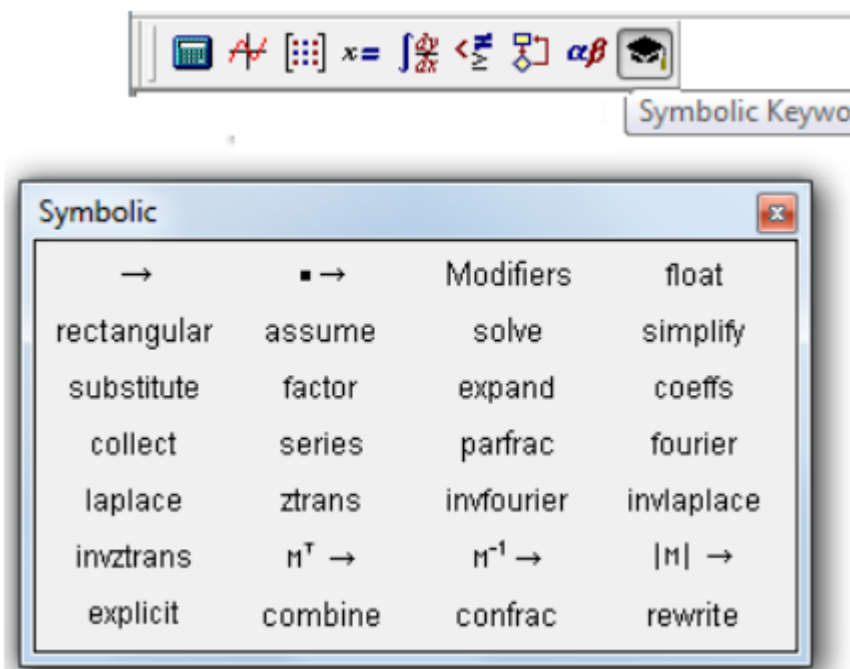


Рис. 4.5 – Палитра инструментов *Symbolic* (**Символьная**)

Палитра инструментов *Symbolic* (**Символьная**) вызывается из панели инструментов *Math* (**Математика**). В палитре *Symbolic* находятся кнопки, соответствующие специфическим командам символьных преобразований. В состав палитры *Symbolic* также входят команды, аналогичные командам меню *Symbolics*, рассмотренные выше. Команды вводятся после вычисляемого выражения. Команда заканчивается оператором символьного вывода \rightarrow и может иметь пустое поле, которое отделяется от команды запятой. В этом поле задает имя переменной, относительно которой выполняется то или иное символьное преобразование.

4.6 Пример для повторения

Задание. На приведенной схеме сопротивление RR является переменным. Определить, как меняется ток между точками A и B в зависимости от величины этого сопротивления.

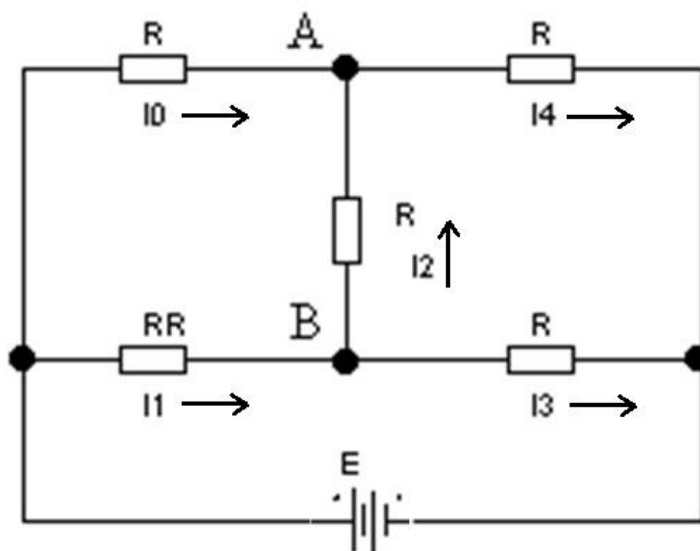


Рис. 4.6 – Электрическая схема

Анализ. Обозначим токи в ветвях и воспользуемся законами Кирхгофа, чтобы получить систему уравнений:

$$\begin{cases} I_0 + I_2 = I_4 \\ I_1 = I_2 + I_3 \\ RR \cdot I_1 + R \cdot I_2 - R \cdot I_0 = 0 \\ R \cdot I_2 + R \cdot I_4 - R \cdot I_3 = 0 \\ R \cdot I_0 + R \cdot I_4 = E \end{cases}$$

Эту систему надо решить, не подставляя конкретных значений вместо параметров R , RR , E .

Реализация в MathCAD.

1. Запустим программу *MathCAD*.
2. Введем ключевое слово *given*.
3. Введем уравнения системы, полученные в ходе анализа. Обозначим неизвестные токи переменными I_0 , I_1 , I_2 , I_3 , I_4 . Фиксированное сопротивление R обозначим переменной $R0$. Обратите внимание, что присваивать начальные значения токов или задавать значения переменных $R0$, RR и E не требуется.

4. Введем функцию *find*, перечислив в качестве параметров неизвестные I_0 , I_1 , I_2 , I_3 , I_4 . Затем введем оператор аналитического вычисления, который выглядит как стрелка, направленная вправо. Этот оператор вводится либо комбинацией клавиш *Ctrl* + . (точка), либо кнопкой *Evaluation Symbolically* (**Вычислить символически**) на панели инструментов *Evaluation* (**Вычисление**).

5. Щелкнем за пределами данного блока, и программа *MathCAD* произведет аналитическое решение системы уравнений.

$$\text{find}(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4) \rightarrow \begin{bmatrix} E \cdot \frac{(3 \cdot RR + R0)}{(R0 \cdot (5 \cdot RR + 3 \cdot R0))} \\ 4 \cdot \frac{E}{(5 \cdot RR + 3 \cdot R0)} \\ -E \cdot \frac{(RR - R0)}{(R0 \cdot (5 \cdot RR + 3 \cdot R0))} \\ E \cdot \frac{(RR + 3 \cdot R0)}{(R0 \cdot (5 \cdot RR + 3 \cdot R0))} \\ 2 \cdot E \cdot \frac{(RR + R0)}{(R0 \cdot (5 \cdot RR + 3 \cdot R0))} \end{bmatrix}.$$

Полученный результат позволяет провести полный анализ схемы.

4.7 Индивидуальные задания

Вариант №1. Упростить выражение:

$$\frac{x-3}{4 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 36} \cdot \left(\frac{x}{3 \cdot x - 9} - \frac{3}{x^2 + 3 \cdot x} + \frac{x^2 + 9}{27 - 3 \cdot x^2} \right)^{-1}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (**Символика**) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (**Символьная**). Написать комментарии в листинге.

Вариант №2. Упростить выражение:

$$\frac{3 \cdot x^2 - 2 \cdot x}{6 - 7 \cdot x - 3 \cdot x^2}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (**Символика**) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (**Символьная**). Написать комментарии в листинге.

Вариант №3. Упростить выражение:

$$\frac{a - \frac{4 \cdot a - 4}{a}}{\frac{2}{a} - 1}.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символьная) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №4. Разложить на множители выражение:

$$x^4 - 10 \cdot x^3 + 35 \cdot x^2 - 50 \cdot x + 24$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №5. Разложить на множители выражение:

$$24 \cdot a^3 \cdot b - 6 \cdot a \cdot b \cdot x^3 - 8 \cdot a^3 \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x^5 - 12 \cdot x \cdot b \cdot a^2 + \\ + 3 \cdot x^4 \cdot b + 4 \cdot x^3 \cdot a^2 - x^6.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №6. Разложить на простейшие дроби:

$$\frac{(5 \cdot x^4 + 6 \cdot x^3) \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot (x - 3)}{(x^2 + x + 4) \cdot (x - 6) \cdot (3 \cdot x - 2)}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №7. Выполнить операцию «Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые»:

$$(2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №8. Выполнить операцию «Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые»:

$$(a \cdot x^2 + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1) \cdot (a \cdot x + b \cdot x^2) - a \cdot x^3.$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с

помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №9. Определить коэффициенты полинома:

$$3 \cdot b \cdot x^4 - \pi \cdot x^2 + \frac{2}{3} \cdot x - 3 \cdot a \cdot b \text{ относительно переменной } x$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №10. Определить коэффициенты полинома:

$$\sin(x) + 2 \cdot \sin(x)^2 \text{ относительно } \sin(x).$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №11. Выполнить разложение на элементарные дроби:

$$\frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8}{x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 23x^2 + 36}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №12. Выполнить разложение на элементарные дроби:

$$\frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6}{x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №13. Выполнить разложение на элементарные дроби:

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{x^5 + 4x^4 + 14x^3 + 38x^2 + 45x + 18}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №14. Разложить в ряд Тейлора функцию косинуса с точностью до 7 степени.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №15. Разложить в ряд Тейлора функцию тангенса с точностью до 7 степени.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №16. Выразить из равенства переменную R :

$$S = 4\pi r^2 + \pi(R + r)l$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №17. Выразить из равенства угол β :

$$\frac{Mu^2}{2} = Mgh(1 - \cos \beta)$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №18. Выразить угол φ из уравнения:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \varphi$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (Символика) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (Символьная). Написать комментарии в листинге.

Вариант №19. Выразить из равенства переменную m :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(\rho_2 - \rho_1)gS}}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (**Символика**) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (**Символьная**). Написать комментарии в листинге.

Вариант №20. Выразить переменную m из уравнения:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + E$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение задачи двумя способами: с помощью команд строки меню *Symbolics* (**Символика**) и с помощью палитры инструментов *Symbolic* (**Символьная**). Написать комментарии в листинге.

5 Лабораторная работа №5 – Нахождение корней уравнений

5.1 Цель и задачи работы

Целью работы является изучение способов решения уравнений и систем уравнений в среде *MathCAD*.

Задачи работы:

- знакомство с технологией численного решения уравнений;
- знакомство с технологией символьного решения уравнений;
- приобретение навыков решения систем линейных и нелинейных уравнений.

5.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Способы решения уравнений в среде *MathCAD*». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 5.6.
3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 5.6.
4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 5.7.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

5.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
- показать, что выполненное задание работает правильно;
- уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
- продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

5.4 Контрольные вопросы

1. Как можно решить нелинейное уравнение в *MathCAD*?
2. Как найти начальное приближение корня уравнения?
3. Для чего используется функция *polyroots*?
4. Как можно решить систему линейных уравнений?
5. Как можно решить систему нелинейных уравнений?

5.5 Способы решения уравнений в среде *MathCAD*

Огромное количество практических инженерных задач связано с решением уравнений, а также систем таких уравнений. При этом необходимость решения уравнений возникает зачастую на промежуточных шагах, при реализации фрагментов более сложных алгоритмов (к примеру, при расчетах дифференциальных уравнений при помощи разностных схем и т. п.).

Способ 1 - численное решение нелинейного уравнения. Алгоритм приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ состоит из двух этапов:

1. Нахождения промежутка, содержащего корень уравнения (или начальных приближений для корня).
2. Получения приближенного решения с заданной точностью с помощью функции *root*. Если после многих итераций *MathCAD* не находит подходящего приближения, то появится сообщение *Can't converge to a solution* (отсутствует сходимость).

Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- уравнение не имеет корней;
- корни уравнения расположены далеко от начального приближения;
- выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, можно исследовать график $f(x)$. Он поможет выяснить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, то определить приблизительно их значения (рис. 5.1). Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее функция *root* найдет решение.

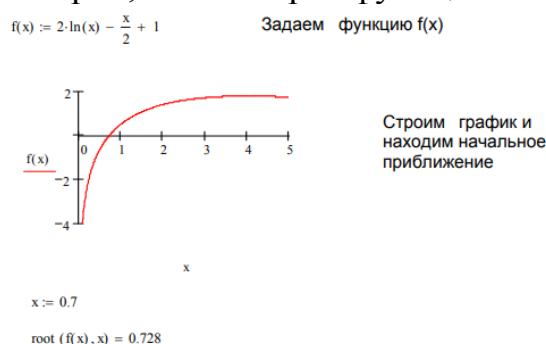


Рис. 5.1 – Решение уравнения с помощью функции *root*

Способ 2 – нахождение корней полинома. Для нахождения корней выражения, имеющего вид $v_0 + v_1x + \dots + v^{n-1}x^{n-1} + v^n x^n$, лучше использовать

функцию *polyroots*, нежели *root*. В отличие от функции *root*, функция *polyroots* не требует начального приближения и находит сразу все корни, как вещественные, так и комплексные. Таким образом, функция *Polyroots(v)* находит корни полинома степени *n*. Коэффициенты полинома задаются в векторе *v* длины *n + 1*. В результате вычислений функция выводит вектор длины *n*, состоящий из корней полинома (рис. 5.2).

$$0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5$$

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \\ .75 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -3.542 \\ 0.651 \\ 2.892 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.2 – Решение уравнения с помощью функции *polyroots*

Способ 3 - решение систем уравнений матричным методом. Рассмотрим систему *n* линейных алгебраических уравнений относительно *n* неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система линейных уравнений может быть записана в матричном виде:

$$Ax = b,$$

где:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Если $\det A \neq 0$, то система или эквивалентное ей матричное уравнение имеет единственное решение (рис. 5.3).

*Способ 4 - решение систем уравнений с помощью функции *lsolve*.* Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции *lsolve*. Функция *lsolve(A, b)* находит вектор решения *x* такой, что $Ax = b$ (рис. 5.3).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

Запишем в матричном виде:

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{b}} := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4$$

$$\underline{\underline{x}} := A^{-1} \cdot \underline{\underline{b}} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{x}} := \text{Isolve}(A, \underline{\underline{b}})$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.3 – Решение системы уравнений матричным методом и с помощью функции *Isolve*

Способ 5 - решение системы уравнений методом Гаусса. Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему уравнений приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей. В матричной записи это означает, что сначала (прямой ход метода Гаусса) элементарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, а затем (обратный ход метода Гаусса) эту ступенчатую матрицу преобразуют так, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица. Последний, $(n + 1)$ столбец этой матрицы содержит решение системы. В *MathCAD* прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция *rref(A)* (рис. 5.4).

Способ 6 - решение систем уравнений с помощью функций Find. Для решения системы уравнений с помощью функции *Find* необходимо выполнить следующее:

1. Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений (*MathCAD* решает систему с помощью итерационных методов).

2. Напечатать ключевое слово *Given*. Оно указывает *MathCAD*, что далее следует система уравнений.

3. Ввести уравнения или неравенства в любом порядке. Используется сочетание клавиш *Ctrl + =* для печати символа $=$. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов $<$, $>$, \geq и \leq .

4. Ввести любое выражение, которое включает функцию *Find*, например: $x := \text{Find}(x, y)$.

Ключевое слово *Given*, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию *Find*, называют блоком решения уравнений (рис. 5.5).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases} \quad \underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{b}} := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ORIGIN := 1

Формирование расширенной матрицы системы:

$$A1 := \text{augment}(A, b) \quad A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Приведение расширенной матрицы к ступенчатому виду (прямой и обратный ходы метода Гаусса)

$$A2 := \text{rref}(A1) \quad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{x}} := \text{submatrix}(A2, 1, 4, 5, 5) \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Проверка:} \quad A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.4 – Решение системы уравнений с помощью функции *rref*

$$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0 \quad x4 := 0 \quad \text{Начальные приближения}$$

Given

$$\begin{aligned} x1 + 2x2 + 3x3 + 4x4 &= 30 \\ -x1 + 2x2 - 3x3 + 4x4 &= 10 \\ x2 - x3 + x4 &= 3 \\ x1 + x2 + x3 + x4 &= 10 \end{aligned}$$

$$\text{Find}(x1, x2, x3, x4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.5 – Решение системы уравнений с помощью функций *Find*

Способ 7 - решение систем уравнений с помощью функций *Minerr*. Функция *Minerr* очень похожа на функцию *Find* (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, *Minerr* возвращает это приближение. Функция *Find* в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции *Minerr* такие же, как и функции *Find*.

Функция $Minerr(x1, x2, \dots)$ – возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Способ 8 - символьное решение уравнений. Имеются некоторые задачи, для которых возможности *MathCAD* позволяют находить решения в символьном (аналитическом) виде. Решение уравнений в символьном виде позволяет найти точные или приближенные корни уравнения:

- если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Поэтому вместо того чтобы решать уравнение для каждого нового значения параметра, можно просто заменять его значение в найденном символьном решении;

- если нужно найти все комплексные корни полинома со степенью меньше или равной 4, символьное решение даст их точные значения в одном векторе либо в аналитическом, либо цифровом виде.

Команда **Символика / Переменная / Решить** позволяет решить уравнение относительно некоторой переменной и выразить его корни через остальные параметры уравнения.

Чтобы решить уравнение символьно, необходимо:

1. Набрать выражение (для ввода знака равенства используется сочетание клавиш *Ctrl + =*).

2. Выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение, щелкнув на ней мышью.

3. Выбрать пункт меню **Символика / Переменная / Решить**.

Нет необходимости приравнивать выражение нулю. Если *MathCAD* не находит знака равенства, он предполагает, что требуется приравнять выражение нулю.

Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

1. Набрать ключевое слово *Given*.

2. Набрать уравнения в любом порядке ниже слова *Given*. По-прежнему для ввода знака = используется сочетание *Ctrl + =*.

3. Набрать функцию *Find*, соответствующую системе уравнений.

4. Нажать сочетание клавиш *Ctrl + .* (клавиша *Ctrl*, сопровождаемая точкой). *MathCAD* отобразит символьный знак равенства \rightarrow .

5. Щелкнуть мышью на функции *Find* (рис. 5.6).

$$\begin{array}{l} \text{Given} \\ x + 2 \cdot \pi \cdot y = a \\ 4 \cdot x + y = b \\ \text{Find}(x, y) \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2 \cdot \pi \cdot b - a}{-1 + 8 \cdot \pi} \\ \frac{-(-4 \cdot a + b)}{-1 + 8 \cdot \pi} \end{array} \right] \end{array}$$

Рис. 5.6 – Решение системы уравнений с помощью символьного процессора

5.6 Пример для повторения

Задание. Найти все корни уравнения:

$$(1 + y - y^2)^2 + y = 2.$$

Анализ. Это уравнение четвертого порядка. Легко подобрать один корень ($y = 1$). Поиск других корней этого уравнения – дело непростое. Неясно даже, сколько еще действительных корней имеет данное уравнение. Результаты численного решения зависят от подбора начального приближения и поэтому не гарантируют отыскания всех корней уравнения. Мы же решим это уравнение аналитически.

Реализация в MathCAD.

1. Введем заданное уравнение. Чтобы раскрыть скобки, выполним команду *Symbolics / Expand* (**Символика / Развернуть**).

$$y^4 - 2y^3 - y^2 + 3y + 1 = 2$$

2. Выделим в полученном уравнении независимую переменную (в данном случае y) и выполним команду *Symbolics / Variable / Solve* (**Символика / Переменная / Решить**). Программа *MathCAD* выдаст вектор, элементами которого являются корни данного уравнения.

$$\left[\begin{array}{c} \frac{7}{9 \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}} + \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{\left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}}{2} - \frac{7}{18 \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{7\sqrt{3}}{18 \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}} \right] i + \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}} \cdot i \\ \frac{1}{3} - \frac{7}{18 \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}}{2} \left[\frac{\sqrt{3} \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}}{2} \right] i + \left[\frac{\frac{7}{18} \sqrt{3}}{\left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}} \right] i \end{array} \right]$$

3. Полученный результат содержит сложные комплексные радикалы и его невозможно применить с пользой (нельзя даже сказать, являются ли корни действительными или комплексными). Выделим первый корень, скопируем его в буфер обмена и вставим ниже на пустое место.

$$\frac{7}{9 \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}}} + \left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} i \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}$$

Чтобы разделить действительную и мнимую части, выделим корень целиком и выполним команду *Symbolics / Evaluate / Complex* (**Символика /**

Вычислить / Комплексно). В результате запись станет разделенной, но результат все-таки останется трудным для восприятия.

$$\frac{7 \cdot \operatorname{Re} \left[\left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} \cdot i \right)^{\frac{-1}{3}} \right]}{9} + \operatorname{Re} \left[\left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} \cdot i \right)^{\frac{1}{3}} \right] + \frac{1}{3} + \left[\frac{7}{9} \cdot \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} \cdot i \right)^{\frac{1}{3}}} \right] + \operatorname{Im} \left[\left(-\frac{7}{54} + \frac{7}{18} \sqrt{3} \cdot i \right)^{\frac{1}{3}} \right] \right] \cdot i$$

4. Следующий шаг – преобразование выражения к тригонометрическому виду. Для этого выделим полученное выражение целиком и повторно выполним команду *Symbolics / Evaluate / Complex* (**Символика / Вычислить / Комплексно**). Только теперь станет ясно, что корень уравнения – действительный (все мнимые компоненты сократились). Это наилучшая точная запись решения, которую можно получить с помощью программы *MathCAD*.

$$\frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} + \frac{1}{3}$$

5. Аналогично действиям, рассмотренным в п. 3 и 4, проведем преобразования для второго и третьего корней. В итоге получим:

$$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} - \frac{\sqrt{7} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} - \frac{\sqrt{7} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} + \frac{1}{3}$$

6. Чтобы получить результат в числовом виде, достаточно сформировать вектор из найденных корней и выполнить команду вычисления (=).

$$\begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} - \frac{\sqrt{7} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} \\ \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} - \frac{\sqrt{7} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\operatorname{atan}(3 \cdot \sqrt{3})}{3} \right)}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.802 \\ -1.247 \\ 0.445 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.7 Индивидуальные задания

Вариант №1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №3. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №4. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №5. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №6. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №7. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №8. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №9. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №10. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72 \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №11. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №12. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №13. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №14. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №15. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №16. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №17. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 - 8x_4 = -5, \\ 10x_1 - 18x_2 + 2x_3 - 23x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №18. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №19. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 = 2. \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

Вариант №20. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение четырьмя способами: матричным способом; с помощью функции *lsolve*; методом Гаусса; с помощью функции *find*. Написать комментарии в листинге.

6 Лабораторная работа №6 – Обработка экспериментальных данных

6.1 Цель и задачи работы

Целью работы является изучение аппроксимации экспериментальных данных в среде *MathCAD*.

Задачи работы:

- приобретение навыков аппроксимации с помощью линейной регрессии;
- приобретение навыков аппроксимации с помощью полиномиальной регрессии;
- приобретение навыков аппроксимации с помощью нелинейной регрессии общего вида.

6.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Регрессионный анализ». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 6.6.
3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 6.6.
4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 6.7.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

6.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
- показать, что выполненное задание работает правильно;
- уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
- продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

6.4 Контрольные вопросы

1. Приведите общую постановку задачи регрессионного анализа.
2. Приведите практический пример задачи регрессионного анализа.
3. В чём состоит задача парной линейной регрессии?
4. Что такое остатки регрессии?
5. Как можно использовать линейную регрессию для построения прогнозов?
6. Запишите выражение для суммы квадратов отклонений от линии регрессии, когда искомая функциональная зависимость – многочлен второй степени.

6.5 Регрессионный анализ

Наиболее часто статистические методы используются для обработки и графического представления данных. Например, на практике часто возможно задание достаточно большого числа узловых точек аппроксимируемой функции. Например, в физических экспериментах для этого достаточно порой повторить цикл измерений несколько раз (а порою и сотни раз). Если подвергнуть такие данные хотя бы простейшей статистической обработке, то можно заметно уменьшить случайную погрешность измерений.

Это и реализуется в задачах регрессии. Мы рассмотрим те из них, при которых аппроксимирующая функция подбирается так, чтобы ее график проходил в облаке узловых точек исходной функции, и чтобы суммарная среднеквадратичная погрешность для всех точек была минимальной. Таким образом мы реализуем метод наименьших квадратов.

Математически постановка задачи регрессии сводится к следующему. Пусть есть набор точно определенных значений x_i и соответствующих им неточных значений y_i . Допустим, мы предполагаем, что существует некоторая зависимость $f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$, которая может рассматриваться как приближение к зависимости $y(x)$, чьи точки представлены как $y_i(x_i)$. Таким образом, мы вправе записать:

$$y_i = f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k) + s_i.$$

Здесь s_i – независимые случайные величины с некоторым (чаще всего нормальным) законом распределения, определяющие погрешность задания y_i . Обычно их считают следствием ошибок эксперимента. Задача регрессии заключается в том, чтобы найти параметры a_0, a_1, \dots, a_k такими, при которых представление $y(x)$ нашей функцией $f(x)$ имело бы наименьшую среднеквадратичную погрешность. Для этого нужно минимизировать функцию:

$$\Phi(a_0, a_1) = \sum (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i)^2.$$

Если приравнять $\frac{\partial \Phi}{\partial a_0}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$ к нулю, то для линейной регрессии можно найти ее параметры a_0 и a_1 в явной форме:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Аналогичным образом можно получить выражения и для других видов регрессии: полиномиальной, экспоненциальной, логарифмической и т.д. Ввиду сложности соответствующих выражений они не приводятся. Многие задачи нелинейной регрессии можно свести к рассмотренной выше линейной, используя соответствующие линеаризирующие преобразования.

Для проведения линейной регрессии (приближения выражением $F(x) = a + b \cdot x$) в систему *MathCAD* встроены следующие функции:

- $corr(VX, VY)$ – возвращает коэффициент корреляции Пирсона;
- $intercept(VX, VY)$ – возвращает значение параметра a (смещение линии регрессии $a + b \cdot x = a_0 + a_1 \cdot x$ по вертикали);
- $slope(VX, VY)$ – возвращает значение параметра b (крутизна линии регрессии).

Как видно на рис. 6.1, прямая регрессии проходит в «облаке» исходных точек с минимальным среднеквадратичным отклонением от них. Чем ближе коэффициент корреляции к 1, тем точнее представленная исходными точками зависимость приближается к линейной.



Рис. 6.1 – Линейная регрессия

В *MathCAD* реализована возможность выполнения и линейной регрессии общего вида. При ней заданная совокупность точек приближается функцией вида:

$$F(x, K_1, K_2, \dots, K_n) = K_1 \cdot F_1(x) + K_2 \cdot F_2(x) + \dots + K_n \cdot F_n(x).$$

Таким образом, функция регрессии является линейной комбинацией функций $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$, причем сами эти функции могут быть нелинейными, что резко расширяет возможности такой аппроксимации и распространяет ее на многие нелинейные функции.

Для реализации линейной регрессии общего вида используется функция $linfit(VX, VY, F)$, которая возвращает вектор коэффициентов линейной регрессии общего вида \mathbf{K} , при котором среднеквадратичная погрешность приближения «облака» исходных точек, координаты которых хранятся в векторах \mathbf{VX} и \mathbf{VY} , оказывается минимальной. Вектор \mathbf{F} должен содержать функции $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$, записанные в символьном виде.

Расположение координат точек исходного массива может быть любым, но вектор \mathbf{VX} должен содержать координаты, упорядоченные в порядке их возрастания. Вектор \mathbf{VY} должен содержать ординаты, соответствующие абсциссам в векторе \mathbf{VX} (рис. 6.2).

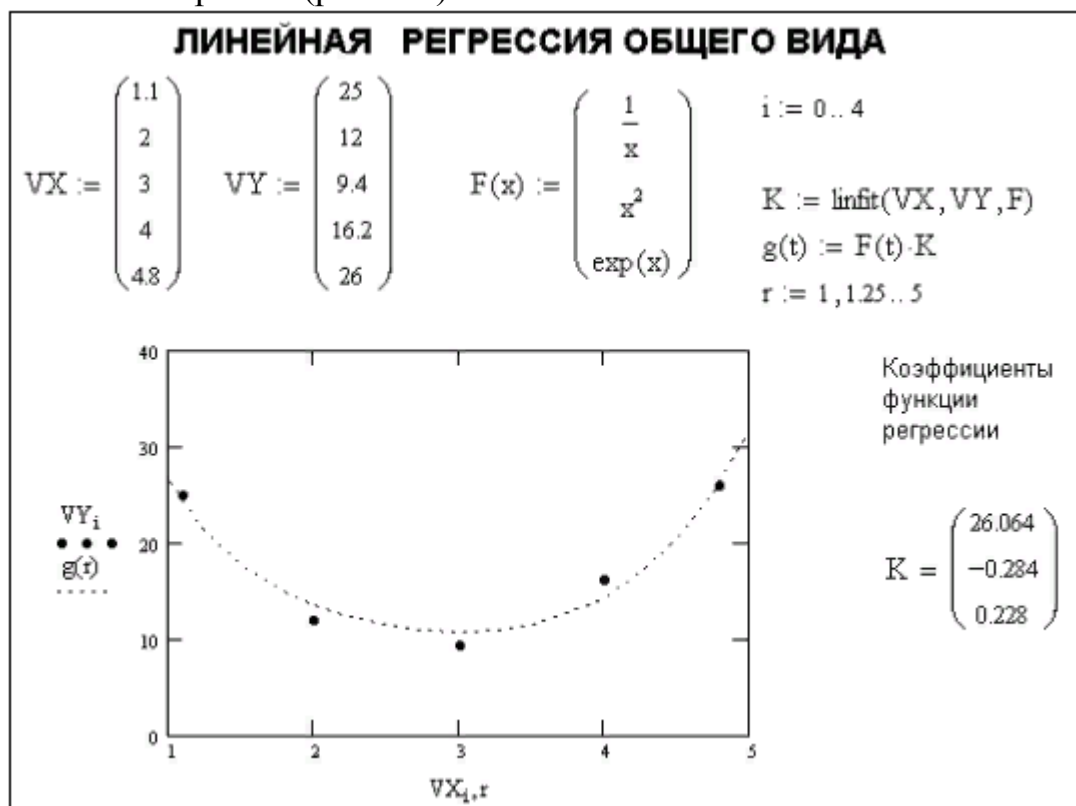


Рис. 6.2 – Линейная регрессия общего вида

В *MathCAD* введена и функция для обеспечения полиномиальной регрессии при произвольной степени полинома регрессии $regress(VX, VY, n)$. Она возвращает вектор \mathbf{VS} , запрашиваемый функцией $interp(VS, VX, VY, x)$, содержащий коэффициенты многочлена n -й степени, который наилучшим образом приближает «облако» точек с координатами, хранящимися в векторах \mathbf{VX} и \mathbf{VY} (рис. 6.3).

На практике не рекомендуется делать степень аппроксимирующего полинома выше 5-6, поскольку погрешности реализации регрессии сильно возрастают. Впрочем, они сильно зависят от заданной значением переменной *TOL* погрешности вычислений. Функция *regress* создает единственный приближающий полином, коэффициенты которого вычисляются по всей совокупности заданных точек, то есть глобально. Иногда полезна другая функция полиномиальной регрессии *loess*, дающая локальные приближения отрезками полиномов второй степени.



Рис. 6.3 – Полиномиальная регрессия

Под нелинейной регрессией общего вида подразумевается нахождение вектора **K** параметров произвольной функции $F(x, K_1, K_2, \dots, K_n)$, при котором обеспечивается минимальная среднеквадратичная погрешность приближения «облака» исходных точек.

Для проведения нелинейной регрессии общего вида используется функция $genfit(VX, VY, VS, F)$. Она возвращает вектор **K** параметров функции **F**, дающий минимальную среднеквадратичную погрешность приближения функцией $F(x, K_1, K_2, \dots, K_n)$ исходных данных. **F** должен быть вектором с символьными элементами, причем они должны содержать уравнение исходной функции и ее производных по всем параметрам. Вектор **VS** должен содержать начальные значения элементов вектора **K**, необходимые для решения системы нелинейных уравнений регрессии итерационным методом.

При решении этой задачи возникают две проблемы. Во-первых, надо вычислить значения производных по переменным a и b . В документе на рис. 6.4 это сделано с помощью символьных операций (первая строка документа после титульной надписи), что наглядно показывает пользу от таких операций.

Вторая проблема связана с необходимостью применения функции $genfit$ в ее стандартном виде. Поэтому пришлось заменить параметр a на k_1 , а параметр b на k_2 . В остальных операциях в примере на рис. 6.4 достаточно очевидны.

MathCAD позволяет выполнять также многомерную регрессию. Самый типичный случай ее – приближение трехмерных поверхностей. Многомерная регрессия применяется сравнительно редко из-за сложности сбора исходных данных.

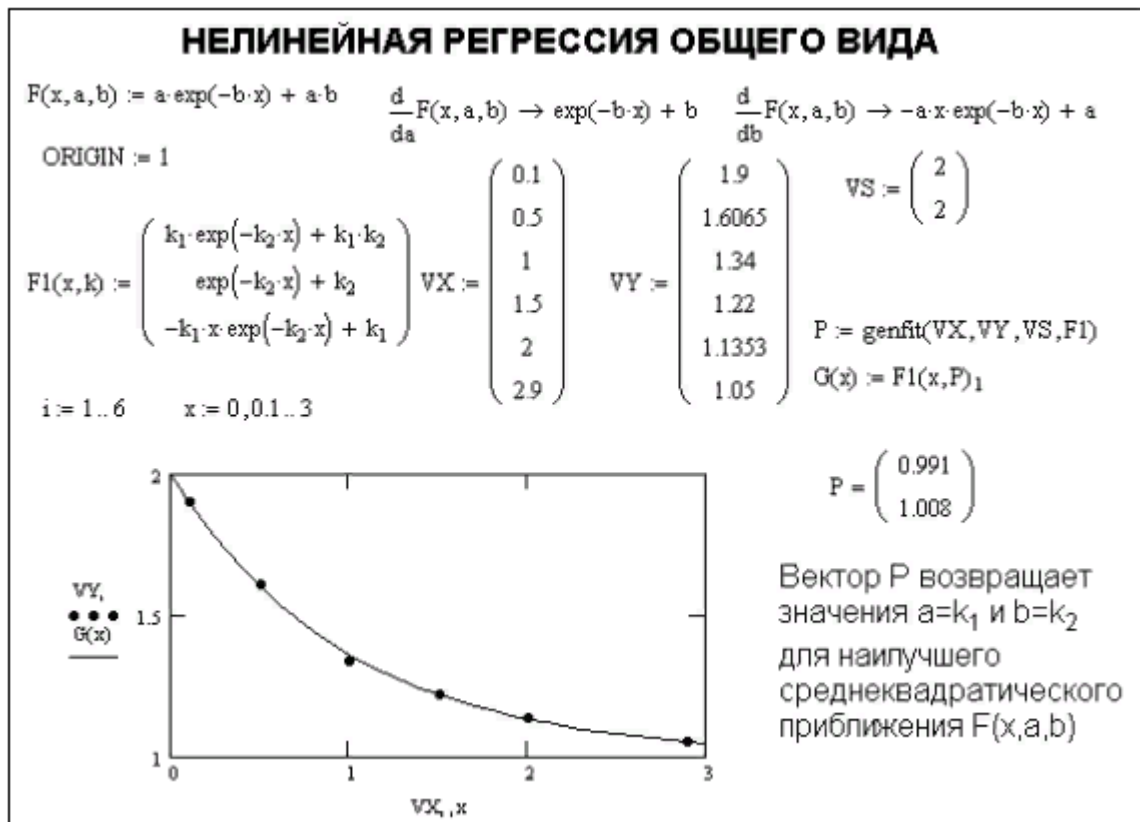


Рис. 6.4 – Нелинейная регрессия общего вида

6.6 Пример для повторения

Задание. К пружине последовательно подвешивали грузы массой 1, 2, 3, ..., 20 кг. В результате был получен список величин удлинения пружины (в миллиметрах, таблица 6.1). Определить основные статистические параметры полученного набора измерений. Рассчитать жесткость пружины k и массу узла m_0 , использованного для крепления грузов к пружине, воспользовавшись методом наименьших квадратов.

Таблица 6.1 – Результаты измерений

Масса, кг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Растяжение, мм	3.4	6.8	9.1	12.2	13.4	17.2	22.1	24.2	27.8	29.5	31.7	37.6	39.5	42.8	45.5	46.5	52.1	52.4	56.6	62.4

Анализ. Для решения этой задачи достаточно использовать стандартные средства статистических вычислений, имеющиеся в программе *MathCAD*. Теоретически растяжение пружины определяется формулой $k \cdot x = (m + m_0) \cdot g$, где $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Если определить статистическими методами коэффициенты a и b в уравнении $x = a \cdot m + b$, то получим:

$$k = \frac{g}{a}, \quad m_0 = \frac{b \cdot k}{g}.$$

Реализация в MathCAD.

1. Запустим программу *MathCAD*.

2. Введем таблицу данных, предназначенных для статистического анализа, как матрицу с двумя столбцами, первый из которых содержит массу грузов, а второй – значения растяжения пружины. Ввод значений растяжения пружины производим в системе СИ: $3.4 \cdot 10^{-3}$; $6.8 \cdot 10^{-3}$ и т.д.

3. Определим число точек в наборах данных с помощью функции *rows*:

$$n := \text{rows}(\text{data}) \quad n = 20.$$

4. Вычислим среднее растяжение пружины в ходе эксперимента с помощью функции *mean*:

$$Y := \text{data}^{<1>} \quad \text{mean}(Y) = 0.032.$$

5. Вычислим медиану значений растяжения пружины при помощи функции *median*:

$$\text{median}(Y) = 0.031.$$

6. Вычислим среднеквадратическое отклонение и дисперсию величины растяжения пружины при помощи функции *stdev*:

$$\text{stdev}(Y) = 0.017 \quad \text{stdev}(Y)^2 = 3.03 \cdot 10^{-4}.$$

7. Определим коэффициенты линейного уравнения являющегося наилучшим приближением для данных наборов данных. Функция *slope* позволяет вычислить коэффициент наклона прямой, а функция *intercept* – свободный член:

$$\begin{aligned} X &:= \text{data}^{<0>} \\ b_0 &:= \text{intercept}(X, Y) \quad b_0 = 1.053 \cdot 10^{-6} \\ b_1 &:= \text{slope}(X, Y) \quad b_1 = 3.013 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

8. Определим жесткость пружины:

$$g := 9.8 \quad k := \frac{g}{b_1} \quad k = 3.252 \cdot 10^3 \text{ (Н/м)}.$$

9. Определим массу узла крепления:

$$m_0 := \frac{b_0 \cdot k}{g} \quad m_0 = 3.493 \cdot 10^{-4} \text{ (кг)}.$$

10. Сохраним созданный документ для использования в следующей лабораторной работе.

6.7 Индивидуальные задания

Найти коэффициенты регрессии на основе экспериментальных данных по своему варианту заданию (таблицы 6.2 и 6.3):

- для линейного уравнения;
- для полинома третьего порядка;
- для экспоненты вида $y = a \cdot e^{-bx} + a \cdot b$.

Во всех вариантах аргумент изменяется в диапазоне [1..19] с шагом 1.

Провести анализ задания. Реализовать в *MathCAD* решение. Написать комментарии в листинге.

Таблица 6.2 – Варианты задания

Номер варианта									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-1,680	-2,424	-1,457	-3,131	-0,449	-2,537	1,800	-3,381	-4,818	-5,300
-1,568	-1,384	-1,450	-2,236	0,013	-2,495	2,150	-3,118	-2,331	-2,564
-1,382	-0,834	-1,332	-1,249	0,180	-1,943	2,576	-3,016	-1,091	-1,200
-0,985	-0,817	-0,679	-1,173	0,996	-1,847	2,822	-1,993	-0,666	-0,733
-0,752	-0,754	0,033	-0,394	1,036	-1,265	3,250	-1,942	-0,309	-0,340
-0,414	-0,445	1,280	-0,384	2,018	-0,198	4,012	-0,917	-0,002	-0,002
-0,097	-0,250	1,751	-0,057	2,306	0,420	7,347	2,168	0,392	0,431
-0,061	0,189	2,138	0,225	3,503	0,698	7,489	2,392	2,715	2,986
0,107	0,241	2,452	0,953	3,640	0,972	8,593	3,621	3,711	4,082
0,744	0,999	2,538	1,142	4,164	1,476	8,627	4,779	4,428	4,871
1,045	1,260	2,747	1,564	5,132	1,951	9,040	5,483	4,632	5,095
1,048	1,601	2,759	1,869	5,426	2,037	9,548	6,408	4,992	5,491
1,691	1,769	3,505	2,505	5,539	2,586	9,986	7,073	5,422	5,964
3,148	2,998	4,273	3,105	5,789	2,716	10,440	8,707	5,707	6,278
3,319	3,842	5,572	3,459	6,451	2,869	10,450	9,658	5,784	6,363
3,354	4,173	5,905	3,599	6,502	2,988	10,740	11,030	6,458	7,103
3,527	4,182	6,883	5,148	7,706	3,319	13,010	11,550	7,894	8,683
3,535	4,529	6,948	6,359	7,875	4,450	13,370	12,270	10,430	11,470
4,193	5,156	7,095	7,849	9,705	4,688	14,030	12,870	15,530	17,090

Таблица 6.3 – Варианты задания

Номер варианта									
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
-2,510	-0,527	-8,670	-3,755	-13,300	-15,510	-15,220	2,509	-12,430	-20,790
-2,473	1,375	-8,567	-2,647	-12,120	-15,040	-14,590	3,219	-11,480	-20,540
-2,204	4,288	-5,425	-2,613	-10,490	-13,880	-11,030	5,613	-10,510	-15,930
-0,943	5,113	-4,935	-2,036	-9,840	-13,560	-10,970	5,873	-10,460	-13,380
-0,665	5,841	-0,246	-1,689	-6,882	-11,350	-9,920	9,055	-6,214	-11,740
-0,402	9,295	0,755	4,631	-6,411	-10,820	-8,522	11,630	-5,074	-10,320
-0,348	9,806	2,512	4,847	-5,437	-10,220	-6,558	11,980	-4,856	-9,590
0,721	10,900	5,936	10,730	-5,077	-9,736	1,805	12,560	-4,197	-9,097
5,352	11,170	6,299	17,470	-3,223	-7,750	8,442	12,840	-1,680	-7,756
9,322	11,480	6,923	17,640	-0,676	-5,183	8,858	19,540	-1,218	-7,592
12,220	13,100	11,910	20,400	0,527	-4,840	13,890	27,260	-0,584	-3,122
12,370	13,980	13,600	20,870	1,443	-4,685	18,770	29,190	2,246	-1,738
12,820	14,690	14,700	22,350	2,934	-3,480	19,640	30,410	10,790	3,969
14,580	15,750	15,120	22,610	5,642	-0,430	20,680	33,670	11,400	7,860
14,660	16,360	15,300	23,850	5,804	1,975	22,030	36,440	15,050	11,340
14,990	16,600	15,660	24,420	6,426	3,129	26,400	36,660	15,780	13,580
17,020	17,280	15,750	24,950	10,020	10,140	27,410	37,310	15,990	14,050
17,250	20,680	17,080	25,310	18,370	10,700	27,840	40,130	18,960	14,410
18,140	21,220	17,160	29,050	18,820	11,820	27,860	40,920	19,330	15,360
19,950	25,940	19,970	32,270	20,310	13,190	28,300	40,950	23,400	15,540

7 Лабораторная работа №7 – Построение графиков

7.1 Цель и задачи работы

Целью работы является овладение навыками построения графиков в среде *MathCAD*.

Задачи работы:

- умение применять различные способы построения двумерных графиков;
- знакомство со стилями оформления графической информации в среде *MathCAD*;
- выполнение анализа экспериментальных данных на основе полученной графической информации.

7.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Построение графиков функции одной переменной в декартовой системе координат». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 7.6.
3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 7.6.
4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 7.7.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

7.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
- показать, что выполненное задание работает правильно;
- уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
- продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

7.4 Контрольные вопросы

1. Как построить график в среде *MathCAD*?
2. Как построить несколько графиков в одной системе координат?
3. Как изменить масштаб графика?
4. Как отформатировать построенный график?
5. Как построить гистограмму?
6. Как определить координату точки на графике?
7. Какие средства имеются для управления отображением линий на графике?

7.5 Построение графиков функции одной переменной в декартовой системе координат

Построение графика одной переменной включает следующие этапы:

1. Задается функция или выражение, значение которого будет представлено графиком (например, $f(x):=\sin(x)^3$). Используя дискретную переменную, задается значения аргумента в нужном диапазоне (например, $x:=0,0.1 .. 10$). Чем меньше шаг дискретной переменной, тем более плавной будет кривая графика.

2. Вводится шаблон графика с помощью щелчка по кнопке палитры инструментов *Graph* (**График**). На экране появляется шаблон с шестью полями (рис. 7.1): в поле 1 вводятся аргументы; в поле 2 – обращения к функциям или выражениям, зависящим от указанных аргументов. Поля 3, 4 содержат границы интервала значений по оси абсцисс, поля 5, 6 – границы по оси ординат.

3. После того как заполнены поля 1 и 2, нужно щелкнуть мышью в любом месте документа вне графика. Поля 3–6 будут использованы позже. Построенный график будет иметь вид, показанный на рис. 7.2.

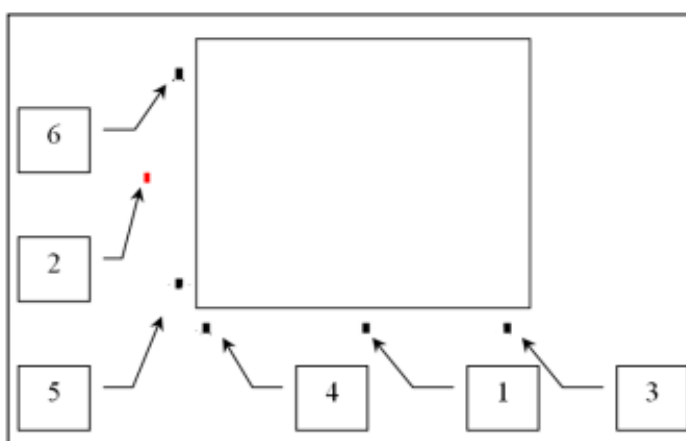


Рис. 7.1 – Поля шаблона графика функции одной переменной

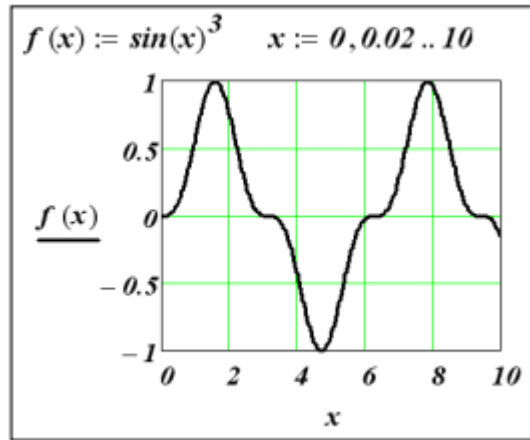


Рис. 7.2 – Построение графика функции одной переменной

Изменение диапазонов по оси X и Y позволяет изменять масштаб, чтобы представить график в удобном для пользователя виде. Для этого достаточно щелкнуть левой кнопкой мыши на построенном графике и изменить значения полей 3–6, задав нужные значения границ диапазонов. Например, для просмотра поведения функции в области, определяемой прямоугольником со сторонами: по оси X [2.0,4.0], а по оси Y [-0.25,0.25] график перестроен следующим образом (см. рис. 7.3). Обратите внимание, как изменились значения полей 3–6, в которых задаются границы соответствующих диапазонов.

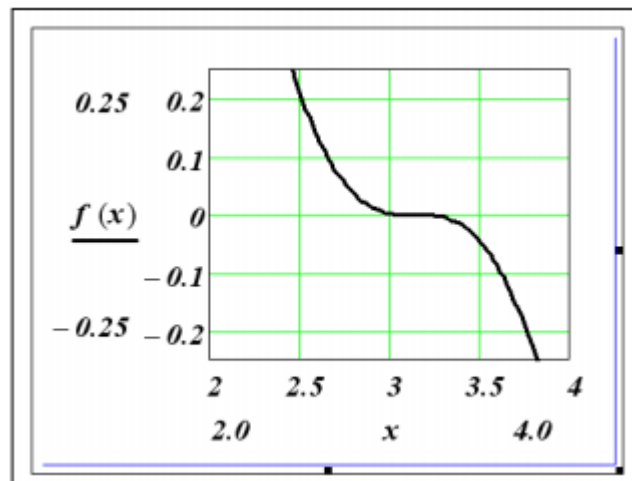


Рис. 7.3 – Масштабирование графика

Форматирование графиков. Другие свойства графика могут быть установлены в диалоговом окне форматирования, которое можно вызвать командой *Format (Формат)* контекстного меню или сделать двойной щелчок левой кнопкой на построенном графике. Окно форматирования показано на рис. 7.4.

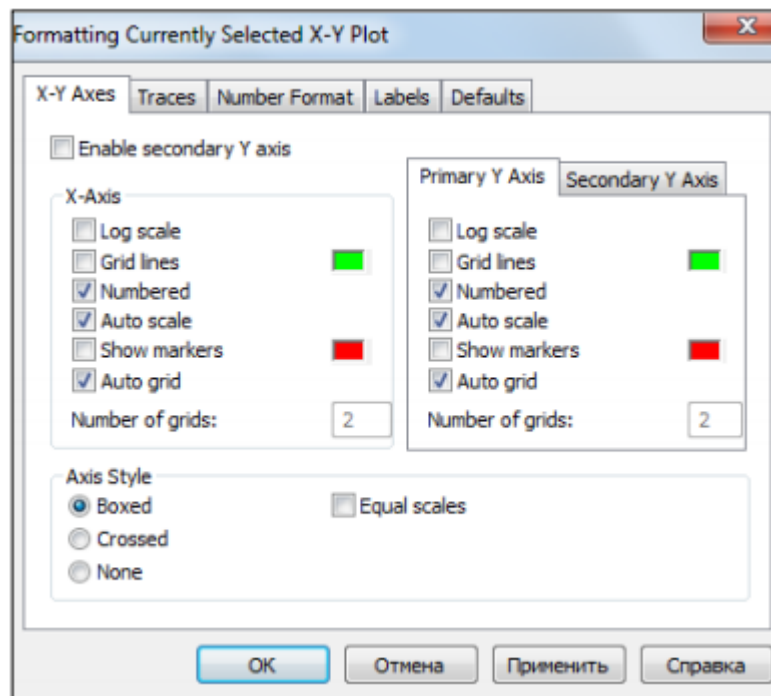


Рис. 7.4 – Окно форматирования графика

Как видно на рисунке, окно форматирования имеет следующие вкладки:

- *X-Y Axis* (**Оси X-Y**) – задание параметров форматирования осей;
- *Traces* (**Графики**) – задание параметров форматирования линий графика;
- *Number Format* (**Формат чисел**) – форматы представления чисел на графике;
- *Labels* (**Подписи**) – задание параметров форматирования меток осей (установление надписей);
- *Defaults* (**Умолчания**) – назначение установленных параметров форматирования параметрами по умолчанию.

На вкладке *X-Y Axis* (**Оси X-Y**) содержатся следующие основные параметры, относящиеся к осям *X* и *Y* (*Axis X* и *Axis Y*):

- *Log scale* (**Логарифмическая шкала**) – задание логарифмического масштаба оси;
- *Grid Lines* (**Линии сетки**) – проведение линий масштабной сетки;
- *Numbered* (**Нумерованная**) – оцифровка оси;
- *Auto scale* (**Автомасштабирование**) – автоматическое масштабирование графика;
- *Show markers* (**Показать маркеры**) – установка делений по осям;
- *Auto grid* (**Автосетка**) – автоматическая установка масштабных линий;
- *Number of grids* (**Число линий сетки**) – установка заданного числа масштабных линий.

Группа *Axis Style* (**Стиль осей**) позволяет задать стиль отображения координатных осей:

- *Boxed* (**Рамка**) – оси в виде прямоугольника;
- *Crossed* (**Пересекающиеся**) – оси в виде креста;

- *None* (**Нет**) – отсутствие осей;
- *Equal scale* (**Равные масштабы**) – установка одинакового масштаба по осям графика.

Вкладка *Traces* (**Графики**) служит для управления отображением линий, из которых строится график. На этой вкладке представлены следующие параметры:

- *Legend Label* (**Метка легенды**) – название линии в легенде;
- *Symbol Frequency* (**Символ Частота**) – задает частоту отрисовки символа, из которого строится график. Например, если задать **2**, то будет отрисовываться каждая вторая точка графика;
- *Symbol* – выбор символа, который помещается на линию, для отметки базовых точек графика;
- *Symbol Weight* (**Символ Вес**) – установка толщины символа;
- *Line* (**Линия**) – установка типа линии;
- *Line Weight* (**Линия Вес**) – установка толщины линии;
- *Color* (**Цвет**) – установка цвета линии и базовых точек;
- *Type* (**Тип**) – установка типа графика.

Узловые точки (точки, для которых вычисляются координаты) графиков часто требуется выделить какой-нибудь фигурой. Список столбца *Symbol* позволяет выбрать отметки для базовых точек графика каждой из функций такие как: *пусто* (без отметки); *x* (наклонный крестик); *+* (прямой крестик) и т.д.

Список в столбце *Line* (**Линия**) позволяет выбрать типы линий: непрерывная, пунктирная, штрихпунктирная и др.

Раскрывающийся список столбца *Type* (**Тип**) позволяет выбрать следующие типы линий графика:

- *line* (**линии**) – построение линиями;
- *points* (**точек**) – построение точками;
- *bar* (**полоса**) – построение в виде столбцов гистограммы;
- *step* (**шаг**) – построение ступенчатой линией;
- *stem* (**основа**) – построение вертикальными черточками с кружком на месте значения;
- *solidbar* (**панель заливок**) – построение в виде закрашенных столбцов гистограммы.

Вкладка *Labels* (**Подписи**) позволяет вводить в график дополнительные надписи. Для установки надписей служат поля ввода:

- *Title* (**Заголовок**) – установка титульной надписи к рисунку;
- *X-Axis* (**Ось X**) – установка надписи по оси *X*;
- *Y-Axis* (**Ось Y**) – установка надписи по оси *Y*.

В группе **Заголовок** имеются переключатели *above* (**Сверху**) и *below* (**Снизу**) для установки титульной надписи либо над графиком, либо под ним. Вкладка *Default* (**Умолчания**) позволяет назначить установленные на других вкладках параметры форматирования в качестве параметров по умолчанию. Для этого служит флажок установки **Использовать по умолчанию**.

Построение нескольких графиков на одном рисунке. В *MathCAD* можно на одном рисунке отобразить несколько функций. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

– в поле 2 шаблона (см. рис. 7.1) вводятся имена функций через запятую. При этом первое выражение уходит вверх, а под ним появляется место ввода для следующей функции;

– в поле 1 шаблона ввести имена независимых переменных функций через запятую в той же последовательности, как введены функции; если у всех функций одинаковая переменная, то достаточно ввести ее один раз.

Графическое представление элементов одномерных массивов (проекций вектора). Для этого в поле 1 вводится переменная, являющаяся индексом у элемента одномерного массива, а в поле 2 стоит обращение к элементу соответствующего массива.

7.6 Пример для повторения

Задание. Используя результаты, полученные в п. 6.6 предыдущей лабораторной работы, построить график, отображающий экспериментальные данные и аппроксимирующую зависимость. Построить другой график, отображающий величину отклонения экспериментальных значений от аппроксимирующей прямой.

Анализ. Для построения графика можно использовать функцию, заданную набором данных или формулой. Формулы для функций, полученных в результате проделанных расчетов, необходимо определить, прежде чем их можно будет использовать при построении графика.

Реализация в MathCAD.

1. Запустим программу *MathCAD*.
2. Загрузим документ, созданный в п. 6.6 предыдущей лабораторной работы.
3. Переместим точку ввода в нижнюю часть документа.
4. Зададим диапазон изменения значений аргумента для построения графика:

$$x := 0..20$$

5. Запишем формулу функции $r(x)$ для определения координат точек, лежащих на аппроксимирующей прямой. Коэффициенты соответствующего уравнения были получены в п. 6.6 предыдущей лабораторной работы:

$$r(x) := b_0 + b_1 \cdot x.$$

6. Нажмем клавишу @, либо щелкнем на кнопке **X-Y Plot (X-Y график)** на панели инструментов *Graph (График)*, либо выполним команду *Insert / Graph / X-Y Plot (Добавить / Графики / X-Y график)*. В документе появится область для создания графика.

7. Вместо заполнителя в нижней части графика укажем в качестве независимой переменной первый столбец матрицы $data^{<0>}$ и аргумент x . В качестве разделителя используется запятая.

8. Вместо заполнителя слева от графика укажем, что по вертикальной оси откладываются значения из второго столбца матрицы $data^{<1>}$ и определенная выше линейная функция $r(x)$. В качестве разделителя используется запятая. Диапазон значений по оси ординат выбирается программой *MathCAD* автоматически.

9. Чтобы изменить вид автоматически построенного графика, дважды щелкнем внутри него. Откроется диалоговое окно *Formatting Currently Selected X-Y Plot (Форматирование выбранного графика X-Y)*. Первая запись в списке на вкладке *Traces (Графики)* соответствует первой отображенной кривой. Для изменения записи используются поля под списком (рис. 7.5).

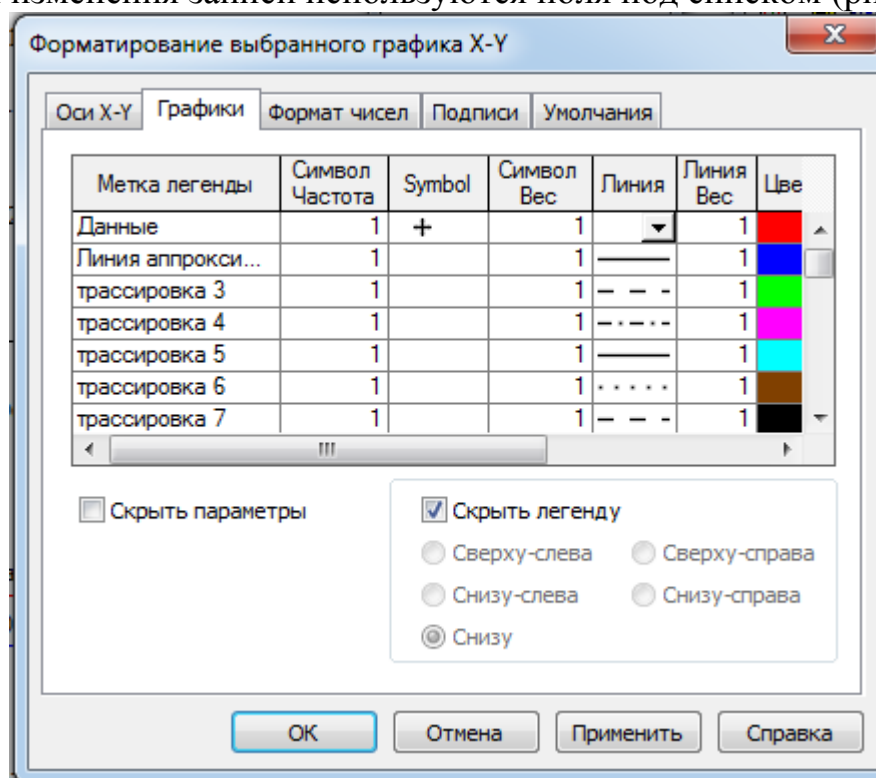


Рисунок 7.5 – Задание способа отображения линий графика

10. Под столбцом *Legend Label (Метка легенды)* введем название графика **Данные**.

11. В раскрывающемся списке под столбцом *Symbol (Маркер)* выберем способ обозначения для отдельных точек (+).

12. Под столбцом *Type (Линия)* выберем вариант с пустым местом. Это нужно для того, чтобы экспериментальные точки не соединялись между собой.

13. Выберем в списке вторую кривую и настроим ее отображение так, как показано на рис. 7.6.

14. Установим флажок *Hide Arguments (Скрыть параметры)*, чтобы не отображать названия осей.

15. Сбросим флажок *Hide Legend (Скрыть легенду)*, чтобы включить отображение под графиком заданных подписей кривых.

16. В поле *Title (Заголовок)* на вкладке *Labels (Подписи)* зададим название графика **Линейная регрессия** и включим режим его отображения: флажок *Show Title (Показать название)*. Результат представлен на рис. 7.6.

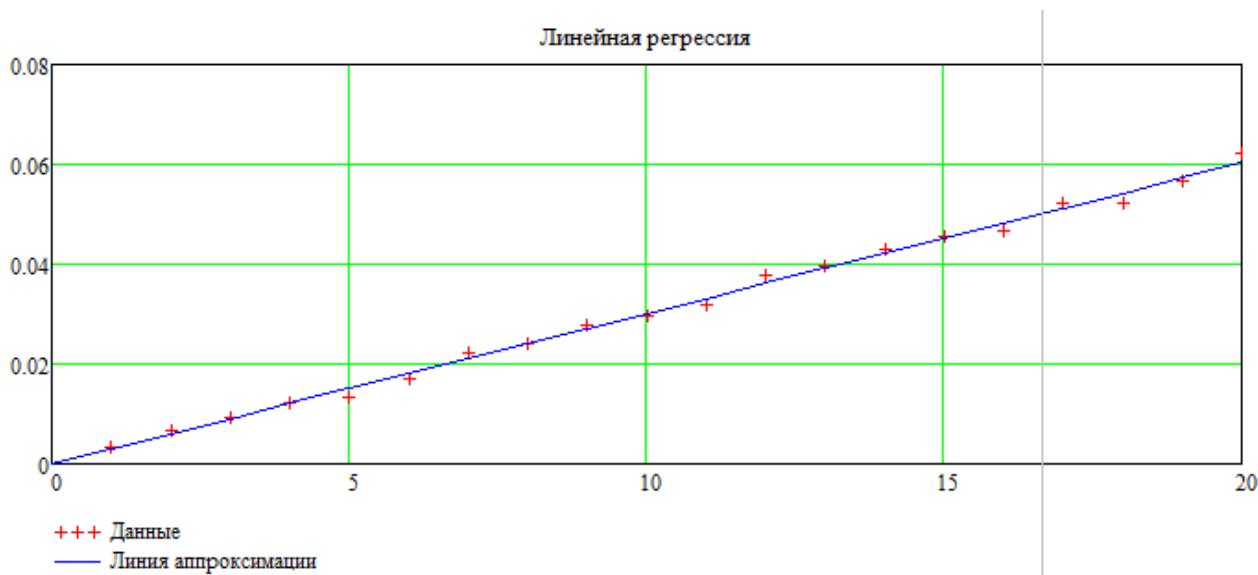


Рис. 7.6 – График экспериментальных точек и аппроксимирующей прямой

17. Самостоятельно постройте еще один график, на котором отображалась бы величина отклонения точек от линии приближения ($b_0 + b_1 \cdot X - Y$). Отформатируйте его, используя те же средства, что и в предыдущем случае.

7.7 Индивидуальное задание

Используя данные своего варианта задания по лабораторной работе №6, построить шесть графиков:

1. График экспериментальных точек совместно с линейной регрессией.
2. График отклонений экспериментальных точек от линейной регрессии.
3. График экспериментальных точек совместно с полиномиальной регрессией третьего порядка.
4. График отклонений экспериментальных точек от полиномиальной регрессии.
5. График экспериментальных точек совместно с нелинейной регрессией общего вида $y = a \cdot e^{-bx} + a \cdot b$.
6. График отклонений экспериментальных точек от нелинейной регрессии общего вида.

Стиль оформления графиков выполнить аналогично рис. 7.6.

8 Лабораторная работа №8 – Построение трехмерных графиков

8.1 Цель и задача работы

Целью работы является овладение навыками построения трехмерных графиков в среде *MathCAD*.

Задачи работы:

- умение формировать матрицы значений узлов прямоугольной сетки, предваряющей построение поверхностей в среде *MathCAD*;
- знакомство с функцией *CreateMesh* построения поверхностей без предварительного вычисления матрицы значений;
- умение изменять формат построенного трехмерного графика.

8.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Построение графиков функций двух переменных». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 8.6.
3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 8.6.
4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 8.7.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

8.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.


Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
- показать, что выполненное задание работает правильно;
- уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
- продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

8.4 Контрольные вопросы

1. Что необходимо задать для построения трехмерного графика?
2. Для чего используется функция *CreateMesh*?
3. Какие типы трехмерных графиков Вы знаете? Чем они отличаются?
4. Можно ли изменить формат трехмерного графика? Как это сделать?
5. Можно ли сменить тип трехмерного графика? Как это сделать?

8.5 Построение графиков функций двух переменных

Для создания графика функции двух переменных (3D-графика) необходимо щелкнуть на одной из следующих кнопок  палитры *Graph* (**График**) с изображением требуемого типа графика. В документе появится шаблон графика с тремя осями и пустым полем. В это поле вводится либо имя массива, либо имя функции двух переменных. В первом случае предварительно необходимо сформировать матрицу из значений функции в узлах прямоугольной сетки (рис. 8.1, левый рисунок). Этот способ позволяет отобразить элементы матрицы, содержащей результаты вычислений, например, значения температурного поля в разных точках плоскости. Во втором случае предварительно надо описать функцию от двух переменных.

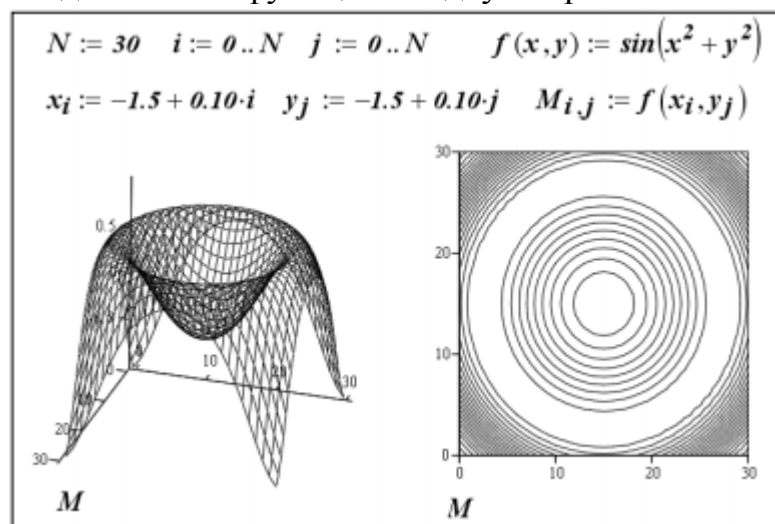


Рис. 8.1 – Графики функции двух переменных

Форматирование графиков. Для вызова окна форматирования необходимо щелкнуть по графику правой кнопкой мыши и в контекстном меню выбрать *Properties* (**Свойства**). Окно форматирования (рис. 8.2) имеет следующие вкладки:

- *General* (**Общие**) – установка общих параметров форматирования;
- *Axis* (**Оси**) – установка параметров форматирования координатных осей;
- *Appearance* (**Вид**) – установка вида графика;
- *Lighting* (**Освещение**) – задание условий освещения и выбор схемы освещения;

- *Title* (**Заголовок**) – задание титульных надписей и их параметров;
- *Backplanes* (**Задние планы**) – установка параметров форматирования граней;
- *Special* (**Специальные**) – задание специальных эффектов форматирования;
- *Advanced* (**Другие**) – установка дополнительных параметров;
- *QuickPlotData* (**Данные QuickPlot**) – параметры быстрого построения графика.

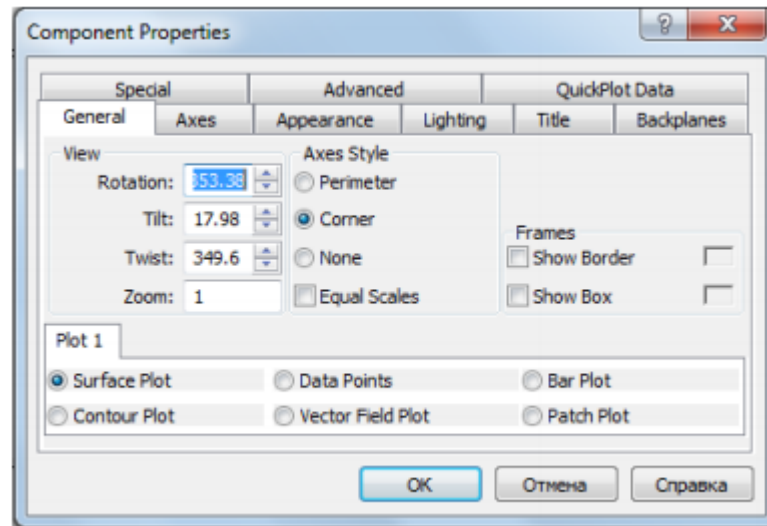


Рис. 8.2 – Окно форматирования графика

Описание вкладок окна форматирования. Каждая из вкладок состоит из разделов, устанавливающих характеристики графика.

1. Вкладка *General* (**Общие**) содержит параметры углов представления фигуры, стили осей и внешнее оформление. В разделе *View* (**Вид**) имеются следующие поля:

- **Поворот** – задание угла поворота (от 0 до 360 градусов);
- **Наклон** – задание угла наклона (от 0 до 180 градусов);
- **Кручение** – задание угла вращения (от 0 до 360 градусов);
- **Масштаб** – задание относительного размера.

Раздел *Axis Style* (**Стиль осей**) позволяет задать стиль отображения осей:

- **По периметру**;
- **В углу**;
- **Нет** – без вывода осей;
- **Равные шкалы** – равные масштабы по всем осям.

В разделе *Frames* (**Рамки**) устанавливаются параметры рисунка:

- **Показать границы** – показать рамку вокруг рисунка;
- **Показать области** – показать обрамляющий рисунок в виде параллелепипеда.

В разделе *Plot1* (**График 1**) устанавливается тип графика:

- *SurfacePlot* (**График поверхности**);
- *ContourPlot* (**Контурный график**);
- *DataPoints* (**Точечные данные**);

- *VectorFieldPlot* (**Векторное поле**);

- **График полосы**;

- **График исправления**.

2. Вкладка *Axis* (**Оси**) служит для установки параметров координатных осей трехмерного графика. Внутри этой вкладки имеются еще три идентичные вкладки **Ось X**, **Ось Y**, **Ось Z**, которые позволяют установить параметры каждой из координатных осей *X*, *Y*, *Z*.

Раздел *Grids* (**Сетки**) устанавливает формат координатной сетки:

- **Провести линии** – вывод линий сетки;

- **Показ метки** – вывод делений на осях;

- **Автосетка** – автоматический выбор числа линий;

- **Цвет линии** – вывод цветных линий сетки (при включенной опции

Провести линии);

- **Номер** – установка количества делений;

- **Толщина** – установка ширины линий сетки.

Раздел **Формат осей** устанавливает параметры самих координатных осей.

Раздел **Пределы осей** задает пределы изменения координат:

- **Автомасштаб** – автоматическая установка масштаба;

- **Min значение** – минимальное значение координаты;

- **Max значение** – максимальное значение координаты.

3. Вкладка **Вид** включает в себя три раздела:

- **Настройка заливки** – установка параметров заливки поверхностей;

- **Настройка линии** – установка режима отображения линий и их окраска;

- **Настройка точки** – установка режима отображения точек разными символами и их окраска.

Как отмечалось, построение графика функции двух переменных можно осуществить без явного формирования матрицы, имя которой указывается в поле шаблона. Для этого достаточно в поле шаблона задать только имя функции. Однако этот способ построения обладает одним недостатком: по умолчанию график строится на прямоугольной области $[-5, 5] \times [-5, 5]$ с числом узлов по каждой переменной 20 (рис. 8.3, левый график). Для изменения этих параметров построения необходимо открыть окно форматирования и активизировать вкладку *QuickPlotData* (см. рис. 8.4) и изменить границы области и число узлов по осям (рис. 8.3, правый график).

Функция *CreateMesh* (*Создать сетку*). Эта функция позволяет построить график функции двух переменных без вычисления матрицы с предварительным заданием диапазонов изменений аргументов и нужного числа узлов. Обращение к функции имеет вид:

$$\text{CreateMesh}(f, x_n, x_k, y_n, y_k, N_x, N_y),$$

где *f* – имя функции; *x_n*, *x_k* – границы интервала изменения аргумента *x*; *y_n*, *y_k* – границы интервала изменения аргумента *y*; *N_x*, *N_y* – количество узлов по *x* и *y* соответственно. Результатом работы является матрица, имя которой вводится в поле шаблона (рис. 8.5).

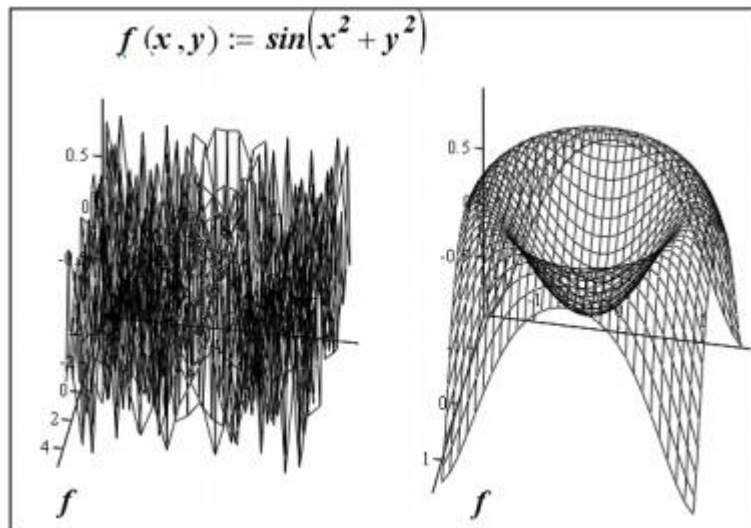


Рис. 8.3 – Построение графиков без формирования матрицы

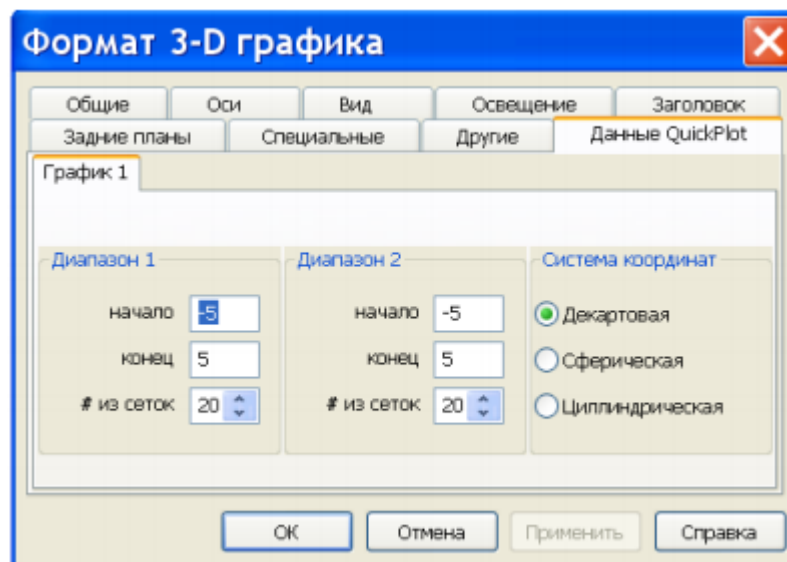


Рис. 8.4 – Изменение параметров вкладки *QuickPlotData*

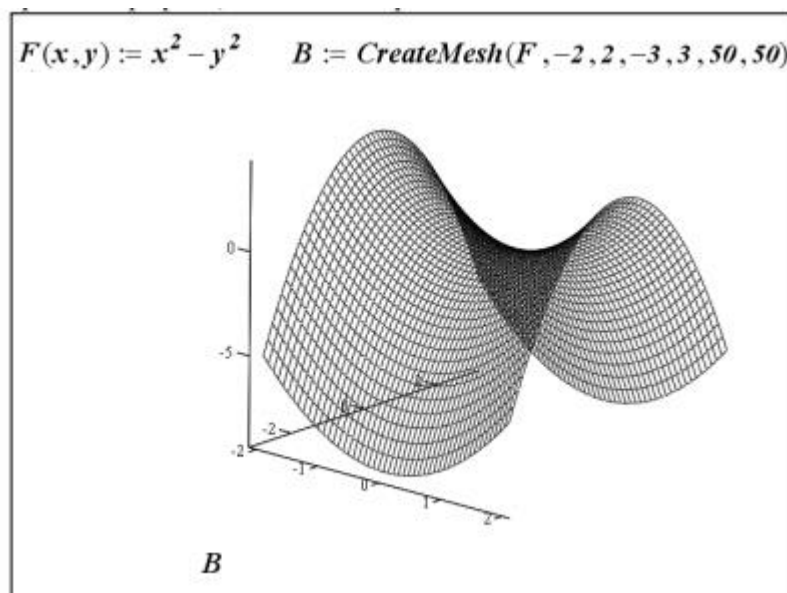


Рис. 8.5 – Построение графика с помощью функции *CreateMesh*

Вращение трехмерных графиков. Вид трехмерной фигуры сильно зависит от того, под какими углами относительно осей X , Y и Z ее рассматривают. Вращая фигуру, можно заглянуть внутрь впадины или посмотреть, что находится за пиком. Для этого надо просто поместить указатель мыши в область графика, нажать левую кнопку мыши и, удерживая ее, начать перемещать мышь в том или ином направлении. Если при этом еще удерживать клавишу *Ctrl*, то объект можно удалять или приближать к наблюдателю. Если же проделать те же действия с нажатой клавишей *Shift*, то после отпускания левой кнопки можно вообще наблюдать анимированную (живую) картину вращения объекта в любом предварительно заданном направлении. Для остановки вращения надо щелкнуть левой кнопкой мыши.

8.6 Пример для повторения

Задание. Изобразить на графике приблизительную форму электронных облаков в атомах.

Анализ. По современным представлениям электронные уровни в атоме определяются четырьмя квантовыми числами. Форма электронного облака определяется двумя из этих чисел:

- число l определяет тип орбитали (значения 0-3 соответствуют s -, p -, d - и f -орбиталиям);

- число m определяет магнитный момент электрона и может изменяться в диапазоне от $-l$ до l .

При $m = 0$ форма электронного облака определяется на основе многочленов Лежандра первого рода:

$$P(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

где l - степень многочлена.

В этом случае:

$$Y(\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot |P(\cos\phi)|.$$

Параметрическое задание соответствующей поверхности имеет следующий вид:

$$x(\theta, \phi) = Y(\phi) \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta;$$

$$y(\theta, \phi) = Y(\phi) \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta;$$

$$z(\theta, \phi) = Y(\phi) \cdot \cos\phi.$$

Углы θ , ϕ изменяются в диапазоне от 0 до 2π .

Реализация в MathCAD.

1. Запустим программу *MathCAD*.

2. Определим переменную l , которая укажет тип орбитали:

$$l := 3.$$

4. Построение поверхности будем производить по точкам. Зададим два диапазона, которые будут определять изменение параметров θ , ϕ ,

определяющих поверхность. Удобно определить границы диапазона в целых числах, а затем произвести перемасштабирование на отрезок $[0, 2\pi]$:

$$i := 0..100 \quad j := 0..100$$

$$\theta_i := i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{100} \quad \phi_j := j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{100}$$

5. Определим двумерные матрицы, определяющие значения координат x , y и z в зависимости от значения параметров. Используем названия переменных $X0$, $Y0$ и $Z0$:

$$P(x) := \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$Y(\phi) := \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{4 \cdot \pi}} \cdot |P(\cos \phi)|$$

$$X0_{i,j} := Y(\phi_j) \cdot \sin(\phi_j) \cdot \cos(\theta_j)$$

$$Y0_{i,j} := Y(\phi_j) \cdot \sin(\phi_j) \cdot \sin(\theta_j)$$

$$Z0_{i,j} := Y(\phi_j) \cdot \cos(\phi_j)$$

6. Выполним команду *Insert / Graph / Surface Plot* (**Добавить / Графики / График поверхности**), либо воспользуемся кнопкой *Surface Plot* (**График плоскости**) на панели инструментов *Graph* (**График**).

7. В появившейся области графика (рис. 8.6) вместо заполнителя укажем имена отображаемых матриц через запятую, заключив все их в скобки: ($X0$, $Y0$, $Z0$).

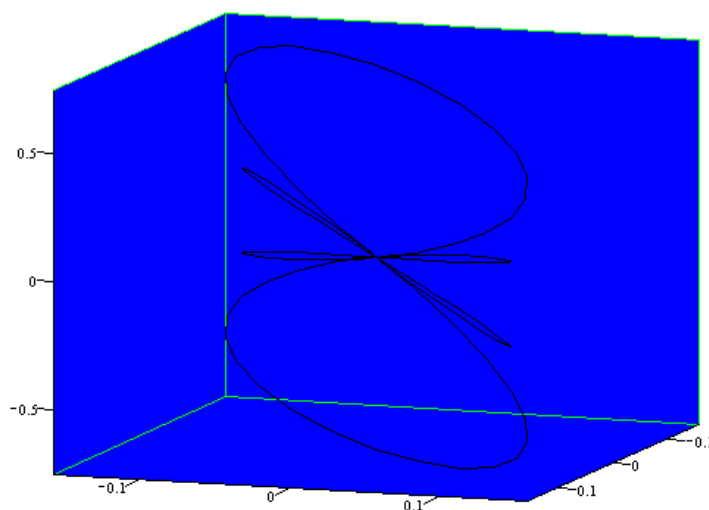


Рисунок 8.6 – Трехмерное изображение электронной f-орбитали

8. Чтобы изменить формат построенного графика, дважды щелкнем на его области. Откроется диалоговое окно *3-D Plot Format* (**Формат 3-D графика**).

9. На вкладке *General* (**Общие**) установим флажок *Equal Scales* (**Равные шкалы**), чтобы обеспечить одинаковый масштаб по осям координат.

10. На вкладке *Appearance* (**Вид**) установим переключатель *Fill Surface* (**Заливка поверхности**), чтобы обеспечить заливку построенной поверхности.

11. На вкладке *Lightning* (**Освещение**) включим режим освещения поверхности. Установим флажок *Enable Lightning* (**Включить освещение**), отключим все источники света, кроме первого.

12. На панели *Light Location* (**Направление освещения**) зададим координаты источника света. Используем кнопку **Применить**, чтобы сразу видеть последствия сделанных настроек. По окончании настройки закройте диалоговое окно щелчком на кнопке **ОК**.

13. Путем протягивания мыши в области графика изменим направление осей координат, чтобы изображение было видно наиболее отчетливо.

14. Изменяя значение l , можно увидеть форму электронных облаков для разных орбиталей, в том числе и не встречающихся в природе.

8.7 Индивидуальные задания

1. Построить поверхность по матрице аппликат A порядка n ($n = 10$), элементы которой a_{ij} определяются с помощью функции $f(x_i, y_j)$ по своему варианту задания. Во всех вариантах:

$$i := 0..n; \quad j := 0..n; \quad x_i := i; \quad y_j := j.$$

Для построения поверхности используйте следующие типы графиков: *Surface Plot* (**График поверхности**), *Contour Plot* (**Контурный график**), *3D Scatter Plot* (**Точечные данные**), *3D Bar Chart* (**График полосы**), *Vector Field Plot* (**Векторное поле**). Выберите график, который наилучшим образом характеризует поверхность.

Вариант №1. $f(x, y) = x + 2 \cdot y$.

Вариант №2. $f(x, y) = x + 10 \cdot y$.

Вариант №3. $f(x, y) = 2 \cdot x + 3 \cdot y$.

Вариант №4. $f(x, y) = 10 \cdot x + y$.

Вариант №5. $f(x, y) = 2 - x + 10 \cdot y$.

Вариант №6. $f(x, y) = x - y \cdot y + x \cdot y$.

Вариант №7. $f(x, y) = x \cdot x - (y - 2) \cdot (y - 2)$.

Вариант №8. $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot x - 3 \cdot y \cdot y$.

Вариант №9. $f(x, y) = (x - 1) \cdot (y + 3)$.

Вариант №10. $f(x, y) = (x + 2) \cdot (y - 4)$.

Вариант №11. $f(x, y) = x^3 + y$.

Вариант №12. $f(x, y) = (x - 2) \cdot (y - 2)$.

Вариант №13. $f(x, y) = x - 2 \cdot y$.

Вариант №14. $f(x, y) = x - 10 \cdot y$.

Вариант №15. $f(x, y) = 2 \cdot x - 3 \cdot y$.

Вариант №16. $f(x, y) = 10 \cdot x - y$.

Вариант №17. $f(x, y) = 2 + x - 10 \cdot y$.

Вариант №18. $f(x, y) = x + y \cdot y - x \cdot y$.

Вариант №19. $f(x, y) = x \cdot x + (y + 2) \cdot (y + 2)$.

Вариант №20. $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot x + 3 \cdot y \cdot y$.

2. Построить трехмерный график с применением функции *CreateMesh*. Во всех вариантах задания функция имеет следующие параметры:

$$\text{CreateMesh}(F, -2, 2, -3, 3, 50, 50).$$

Для построения поверхности используйте следующие типы графиков: *Surface Plot* (**График поверхности**), *Contour Plot* (**Контурный график**), *3D Scatter Plot* (**Точечные данные**), *3D Bar Chart* (**График полосы**), *Vector Field Plot* (**Векторное поле**). Выберите график, который наилучшим образом характеризует поверхность.

Вариант №1. $z = \sin(x) \cdot \cos(y)$

Вариант №2. $z = x^2 + y + x \cdot y^2$

Вариант №3. $z = x^2 + y^2$

Вариант №4. $z = e^{\sin(x)} \cdot \cos(y)$

Вариант №5. $z = x \cdot e^y$

Вариант №6. $z = x^2 \cdot \sin(y)$

Вариант №7. $z = x^2 \cdot y^2$

Вариант №8. $z = x^2 \cdot \cos(y)$

Вариант №9. $z = 2 \cdot x^2 - y^3$

Вариант №10. $z = x \cdot \cos(x) + y \cdot \sin(x)$

Вариант №11. $z = e^x \cdot \sin(y)$

Вариант №12. $z = x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(x)$

Вариант №13. $z = \sin(x) / \cos(y)$

Вариант №14. $z = x^2 - y - x \cdot y^2$

Вариант №15. $z = x^2 - y^2$

Вариант №16. $z = e^{\sin(x)} / \cos(y)$

Вариант №17. $z = x / e^y$

Вариант №18. $z = x^2 / \sin(y)$

Вариант №19. $z = x^2 / y^2$

Вариант №20. $z = x^2 / \cos(y)$

9 Лабораторная работа №9 – Решение дифференциальных уравнений

9.1 Цель и задачи работы

Целью работы является овладение навыками численного решения систем дифференциальных уравнений в среде *MathCAD*.

Задачи работы:

- умение использовать вычислительный блок *given/odesolve* для решения дифференциальных уравнений;
- умение использовать встроенную функцию *rkfixed* для решения дифференциальных уравнений;
- знакомство с понятием фазового портрета дифференциального уравнения.

9.2 Порядок выполнения работы

Перед выполнением этой работы следует:

1. Ознакомиться с теоретической частью «Обыкновенные дифференциальные уравнения». В качестве дополнительного источника знаний можно использовать [1 - 8].
2. Повторить пример из п. 9.6.
3. Написать комментарии на русском языке в листинге по повторенному примеру из п. 9.6.
4. Выполнить индивидуальное задание по своему варианту из п. 9.7.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчёт и защитить его у преподавателя.

9.3 Отчетность

Отчёт должен быть выполнен в соответствии с [9] и состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного индивидуального задания (в электронном виде) с комментариями.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

Для получения зачёта студент должен:

- уметь отвечать на контрольные вопросы;
- показать, что выполненное задание работает правильно;
- уметь пояснить назначение элементов интерфейса в среде *MathCAD*;
- продемонстрировать навыки работы в среде *MathCAD*.

9.4 Контрольные вопросы

1. Какие дифференциальные уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка? Высшего порядка?
2. Что такое нормальная форма обыкновенного дифференциального уравнения первого и высшего порядка?
3. К чему сводятся обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка при решении?
4. Можно ли решить дифференциальные уравнения в *MathCAD* символично?
5. Как решаются обыкновенные дифференциальные уравнения с помощью вычислительного блока *given/odesolve*?
6. Какой метод решения реализует функция *odesolve*?
7. Как решаются обыкновенные дифференциальные уравнения с помощью встроенной функции *rkfixed*?
8. Как вставить символ дифференцирования в решающем блоке?

9.5 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Решение обыкновенного дифференциального уравнения с помощью вычислительного блока *given/odesolve*. Применение вычислительного блока *given/odesolve* предпочтительнее из соображений наглядности представления задачи и результатов.

Вычислительный блок для решения одного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), реализующий численный метод Рунге-Кутты, состоит из трех частей:

1. *given* – ключевое слово;
2. ОДУ и начальное условие, записанное с помощью логических операторов, причем начальное условие должно быть в форме $y(t_0) = b$;
3. *odesolve(t, t₁)* – встроенная функция для решения ОДУ относительно переменной t на интервале (t_0, t_1) .

Допустимо, и даже часто предпочтительнее, задание функции *odesolve(t, t_b, step)* с тремя параметрами, где *step* – внутренний параметр численного метода, определяющий количество шагов, в которых метод Рунге-Кутты, будет рассчитывать решение дифференциального уравнения. Чем больше значение *step*, тем с лучшей точностью будет получен результат, но тем больше времени будет затрачено на его поиск. Подбором этого параметра можно заметно (в несколько раз) ускорить расчеты без существенного ухудшения их точности.

Пример решения задачи Коши для ОДУ первого порядка $y' = y - y^2$ посредством вычислительного блока *given/odesolve* приведен ниже (рис. 9.1).

Логическому знаку равенства соответствует сочетание клавиш *Ctrl + =*. Символ производной можно ввести как средствами панели *Calculus (Исчисление)*, как это сделано в примере, так и в виде штриха, набрав его с помощью сочетания клавиш *Ctrl + F7*. Результатом применения блока *given/odesolve* является функция $y(t)$, определенная на промежутке (t_0, t_1) .

Следует воспользоваться обычными средствами *MathCAD*, чтобы построить ее график или получить значение функции в какой-либо точке указанного интервала, например: $y(3) = 0.691$.

```
given  
 $\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - y(t)^2$   
 $y(0) = 0.1$   
 $y := \text{odesolve}(t,10)$ 
```

Рис. 9.1 – Листинг решения ОДУ с помощью блока *given/odesolve*

Логическому знаку равенства соответствует сочетание клавиш *Ctrl + =*. Символ производной можно ввести как средствами панели *Calculus (Исчисление)*, как это сделано в примере, так и в виде штриха, набрав его с помощью сочетания клавиш *Ctrl + F7*. Результатом применения блока *given/odesolve* является функция $y(t)$, определенная на промежутке (t_0, t_1) . Следует воспользоваться обычными средствами *MathCAD*, чтобы построить ее график или получить значение функции в какой-либо точке указанного интервала, например: $y(3) = 0.691$.

Трассировка графиков. Трассировка позволяет очень точно изучить строение графика. Для того чтобы включить режим трассировки, следует щелкнуть в области графика правой кнопкой мыши и выбрать в контекстном меню пункт *Trace (Трассировка)*. В результате появится окно трассировки (рис. 9.2 – представлено решением дифференциального уравнения из предыдущего примера), а в поле графика можно видеть две пересекающиеся пунктирные линии.

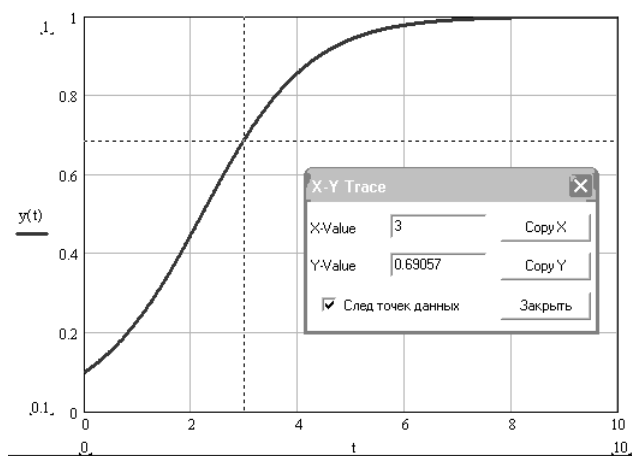


Рис. 9.2 – Трассировка графика функции

Перемещая указатель мыши по графику, можно тем самым передвигать точку пересечения линий трассировки. При этом координаты точки указываются с высокой точностью в окне трассировки в полях *X-Value (X-Значение)* и *Y-Value (Y-Значение)*. Нажатие кнопки *Сору X (Копировать X)* или *Сору Y (Копировать Y)* копирует соответствующее число в буфер обмена. В дальнейшем его можно вставить в любое место документа, нажав клавиши

Ctrl + V. Если установлен флажок **Маркер точки данных**, как это показано на рис. 9.1, то линии трассировки следуют точно вдоль графика. Если нет, то они могут перемещаться по всей области графика.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка с использованием встроенной функции *rkfixed*. Альтернативный метод решения ОДУ заключается в использовании одной из встроенных функций, например *rkfixed*. Этот способ несколько проигрывает способу, рассмотренному в предыдущем примере, в простоте и наглядности. Однако его применение вызвано необходимостью нахождения не только нулевой, но и старших производных.

Указанный способ решения связан со сведением ОДУ высшего порядка к эквивалентной системе ОДУ первого порядка. Покажем это на примере ОДУ

второго порядка $\frac{d^2y}{dt^2} + 0.1 \frac{dy}{dt} + y = 0$. Если формально обозначить $y = y_0$ и

$\frac{dy_0}{dt} = y_1$, то $\frac{dy_1}{dt} = -0.1 \cdot y_1 - y_0$; при этом исходное уравнение можно записать

через функции $\frac{dy_0}{dt}$ и $\frac{dy_1}{dt}$ в виде системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dt} = y_1; \\ \frac{dy_1}{dt} = -0.1y_1 - y_0, \end{cases}$$

Таким образом, любое ОДУ n -го порядка, линейное относительно высшей производной, можно свести к эквивалентной системе n дифференциальных уравнений.

Встроенная функция *rkfixed* позволяет решать поставленную задачу Коши численным методом Рунге-Кутты с фиксированным шагом. Обязательно следует соблюдать регистр первой буквы (строчная) при написании функции *rkfixed*, т.к. это влияет на выбор алгоритма счета. Для поиска решения необходимо задать:

- начальные условия;
- дифференциальное уравнение, представляемое в виде уравнений первого порядка согласно;
- значения всех постоянных коэффициентов, входящих в эти уравнения;
- набор точек, в которых следует найти решение.

В функцию *rkfixed*(y_0 , t_0 , t_l , N , D) входят следующие параметры:

- y_0 – вектор начальных условий в точке t_0 с размерностью, соответствующей порядку k дифференциального уравнения или числу уравнений первого порядка;

- t_0 – начальная точка расчета;

- t_l – конечная точка расчета;

- N – число фиксированных шагов или точек, в которых численный метод находит решение;

- D – вектор, в котором записаны правые части дифференциальных уравнений.

Пример решения задачи Коши для ОДУ второго порядка $\frac{d^2y}{dt^2} + 0.1\frac{dy}{dt} + y = 0$ посредством встроенной функции *rkfixed* приведен на рис. 9.3.

```

D(t,y) := (
    y1
    -0.1 y1 - y0
)

y0 := (
    0.1
    0
)


t0 := 0    t1 := 50    N := 100

u := rkfixed(y0,t0,t1,N,D)

```

Рис. 9.3 – Листинг решения ОДУ с помощью функции *rkfixed*

Самая важная – это первая строка примера, в которой, собственно, определяется система ОДУ. Функция $D(t, y)$, входящая в число параметров встроенной функции *rkfixed*, должна быть функцией обязательно двух аргументов. Размерность вектора начальных значений y_0 (он определен во второй строке примера) должна совпадать с размерностью векторной функции $D(t, y)$. В третьей строке примера определены начальная и конечная точки расчета, а также число шагов, на которых рассчитывается решение. Последняя строка присваивает матричной переменной u результат действия функции *rkfixed*. Решение системы ОДУ будет осуществлено на промежутке $[0, 50]$.

Правые части $D(t, x)$ и y_0 вводятся как вектора нажатием кнопки  на панели *Matrix* (**Матрица**) с последующим указанием размера: строки **2**, столбцы **1**. Индексы в обозначении нулевой и первой производной y_0, y_1 вводятся с помощью клавиши [(квадратная скобка).

В результате решения получается матрица (рис. 9.4), содержащая $(k + 1)$ столбцов и $(N + 1)$ строк; где k – порядок исходного дифференциального уравнения, N – число фиксированных шагов. В первом столбце содержатся фиксированные значения аргумента $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$; во втором столбце – соответствующие им значения искомой функции $y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)$; в третьем столбце – значения первых производных в тех же узлах и т.д.

Просмотреть все компоненты матрицы u , которые не помещаются на экране, можно с помощью вертикальной полосы прокрутки. На рис. 9.4 отмечено выделением расчетное значение на 10-ом шаге $u_{10,1} = 0.018$. Это соответствует, с математической точки зрения, найденному значению $y_0(5) = 0.018$.

Чтобы построить график решения, надо отложить соответствующие компоненты матрицы решения по координатным осям: значения аргумента $u^{<0>}$ – вдоль оси x , а $u^{<1>}$ и $u^{<2>}$ – вдоль оси y (рис. 9.5). Символ выделения столбца из матрицы (угловые скобки) вводится сочетанием клавиш *Ctrl* + *б*. Чтобы

построить на графике еще одну кривую, необходимо выполнить следующие действия:

1. Угловым маркером целиком выделить выражение, стоящее в надписи координатной оси u .
2. Нажать клавишу $,$ (запятая).
3. В результате появится местозаполнитель, в который нужно ввести выражение для второй кривой.
4. Щелкнуть в любом месте вне этого выражения (на графике или вне его).

	0	1	2	
0	0	0.1	0	
1	0.5	0.088	-0.047	
2	1	0.056	-0.08	
3	1.5	0.011	-0.093	
4	2	-0.033	-0.082	
5	2.5	-0.068	-0.053	
6	3	-0.084	-0.013	
7	3.5	-0.08	0.029	
8	4	-0.057	0.062	
9	4.5	-0.021	0.078	
10	5	0.018	0.075	
11	5.5	0.051	0.054	
12	6	0.07	0.021	
13	6.5	0.071	-0.015	
14	7	0.056	-0.046	
15	7.5	0.028	-0.064	

Рис. 9.4 – Матрица решения ОДУ

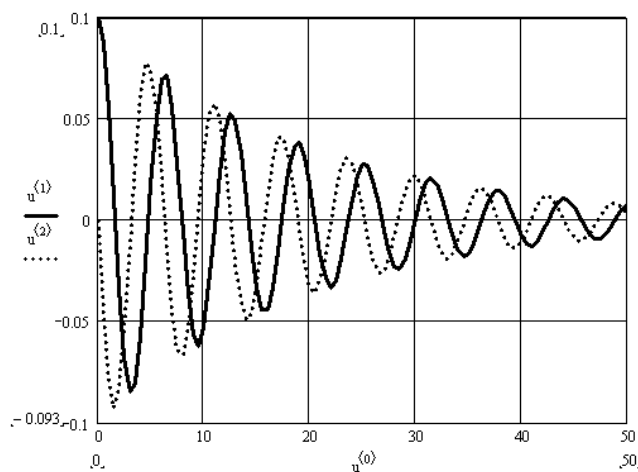


Рис. 9.5 – График решения ОДУ второго порядка

Построение фазового портрета дифференциального уравнения. Как известно, решение ОДУ часто удобнее изображать в фазовом пространстве, по каждой из осей которого откладываются значения найденных функций. При этом аргумент входит в них лишь параметрически. Для рассмотренного выше ОДУ второго порядка такой график – фазовый портрет системы – является кривой на фазовой плоскости и поэтому особенно нагляден. Он изображен на рис. 9.6, и можно заметить, что для его построения потребовалось лишь поменять метки осей – по оси абсцисс отложена нулевая производная $u^{<1>}$, а по оси ординат отложена первая производная $u^{<2>}$.

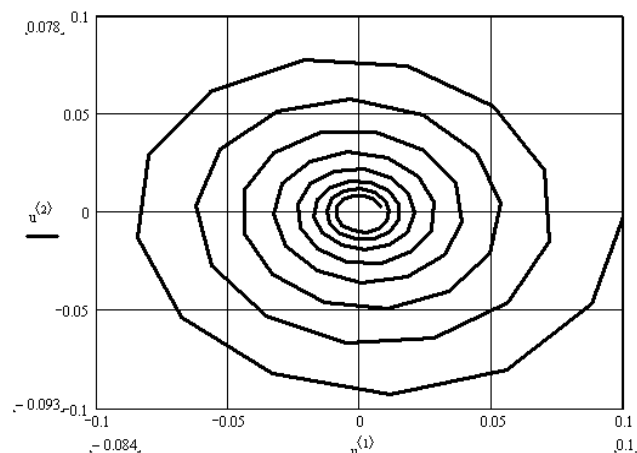


Рис. 9.6 – Фазовый портрет решения ОДУ второго порядка

Фазовый портрет типа, изображенного на рис. 9.6, имеет одну стационарную точку (аттрактор), на которую «накручивается» решение. В теории динамических систем аттрактор такого типа называется фокусом. В общем случае, если система состоит из n ОДУ, то фазовое пространство является n -мерным. При $n > 3$ наглядность теряется и для визуализации фазового портрета приходится строить его различные проекции.

9.6 Пример для повторения

Задание. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} + y = x \cdot \cos x$ и имеющую значение 0 при $x = 0$.

Анализ. Это простое дифференциальное уравнение допускает точное аналитическое решение, однако в данном случае предполагается использование стандартной функции программы *MathCAD*, осуществляющей численное решение данного уравнения. Результат вычислений можно после этого сравнить с точным решением.

Реализация в MathCAD.

1. Запустим программу *MathCAD*.

2. Зададим начальное значение функции как элемент вектора y , размерность которого соответствует числу решаемых уравнений (в данном случае единице):

$$y_0 := 0$$

3. Создадим функцию $T(x, y)$, которая вычисляет значение производной при заданных значениях независимой переменной и неизвестной функции:

$$T(x, y) := -y_0 + x \cdot \cos(x)$$

4. Определим начальное (точка 0) и конечное значение отрезка интегрирования:

$$a := 0 \quad b := 12 \cdot \pi$$

5. Укажем число шагов интегрирования:

$$K := 20$$

6. Найдем численное решение уравнения при помощи функции *rkfixed* (рис. 9.x):

$$Z := rkfixed(y, a, b, K, T)$$

Результат вычислений – матрица Z с двумя столбцами, первый из которых содержит значения независимой переменной, а второй – соответствующие значения функции.

7. Определим аналитическое решение данного уравнения при тех же начальных условиях:

$$x := 0, 0.1..40 \quad q(x) := \frac{1}{2} \cdot x \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sin(x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$$

8. Построим графики численного и аналитического решения (рис. 9.x).

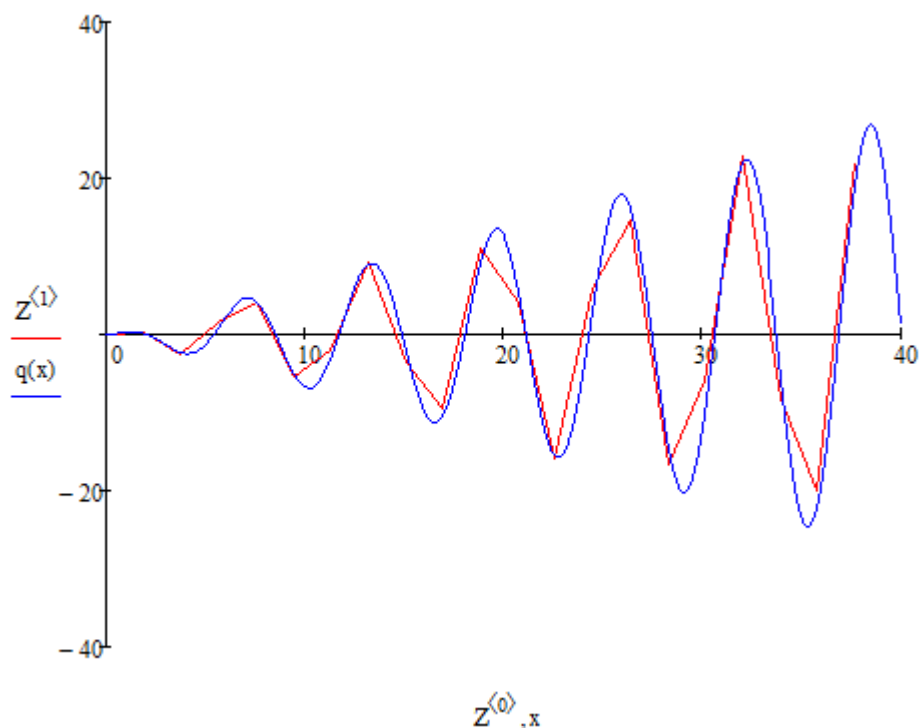


Рис. 9.x – Графики численного и точного решения дифференциального уравнения

9. Изменим число шагов K , на которые делится отрезок интегрирования, и исследуем, как изменяется результат расчета при уменьшении и увеличении этого параметра.

9.7 Индивидуальные задания

По своему варианту задания (таблица 9.1) проделать следующее:

1. Найти решение ОДУ с помощью функции *rkfixed*.
2. Построить фазовый портрет решения.
3. Найти значение функции $x(t)$ для пяти аргументов: $t_1 = 10$; $t_2 = 20$; $t_3 = 30$; $t_4 = 40$; $t_5 = 50$.

Во всех вариантах задания одинаковыми являются следующие данные:

- нулевые начальные условия;

- интервал значений аргумента $[0, 50]$;
- число шагов интегрирования $K = 100$.

Таблица 9.1 – Варианты задания

№ варианта	ОДУ
1	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.2 \frac{dx}{dt} + 3x = 0.02$
2	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.002 \frac{dx}{dt} - 0.003x = 0.002$
3	$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.02 \frac{dx}{dt} + 0.3x = 0.2$
4	$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.002 \frac{dx}{dt} - 0.003x = 0.002$
5	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0 \frac{dx}{dt} + 0.03x = 0.02$
6	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0 \frac{dx}{dt} - 0.03x = 0.02$
7	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.002 \frac{dx}{dt} + 0x = 0.002$
8	$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.02 \frac{dx}{dt} + 0x = 0.002$
9	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0 \frac{dx}{dt} + 0x = 0.002$
10	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.1 \frac{dx}{dt} + 1.5x = 8$
11	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.004 \frac{dx}{dt} - 0.006x = 0.001$
12	$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.06 \frac{dx}{dt} + 0.1x = 0.1$
13	$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.004 \frac{dx}{dt} - 0.001x = 0.005$
14	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0 \frac{dx}{dt} + 0.1x = 0.2$
15	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0 \frac{dx}{dt} - 0.009x = 0.001$
16	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.001 \frac{dx}{dt} + 0x = 0.007$

17	$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.05\frac{dx}{dt} + 0x = 0.003$
18	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0\frac{dx}{dt} + 0x = 0.006$
19	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.3\frac{dx}{dt} + 0.5x = 0.8$
20	$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.007\frac{dx}{dt} - 0.005x = 0.003$

Список литературы

1. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. - СПб.: БХВ-Петербург, 2007. - 368 с.
2. Каганов В.И. Радиотехника + компьютер + Mathcad. - М.: Горячая линия - Телеком, 2001. - 416 с.
3. Поршнева С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе MathCAD. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 464 с.
4. Панферов А.И., Лопарев А.В., Пономарев В.К. Применение Mathcad в инженерных расчетах: Учеб. пособие. - СПб.: СПбГУАП, 2004. - 88 с.
5. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в Mathcad 12. - СПб.: Питер, 2006. - 544 с.
6. Васильев А.Н. Mathcad 13 на примерах. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006. - 528 с.
7. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В., Пеньков А.А.. Новые информационные технологии: Учебное пособие. Часть 3. Основы математики и математическое моделирование. - Смоленск: СГПУ, 2003. - 192 с.
8. Фриск В.В. Основы теории цепей. Расчеты и моделирование с помощью пакета компьютерной математики MathCAD. - М.: СОЛОН-Пресс, 2006. - 88 с.
9. ОС ТУСУР 01-2013 (СТО 02069326.1.01-2013). Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления. - Томск: ТУСУР, 2013. – 57 с.