

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

В.И.Смагин

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть. 2

Учебное пособие

Томск
2018

УДК 519.6

Смагин В.И.

Вычислительная математика. Часть.2. Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2018. – 130 с.

В учебном пособии рассматриваются изучаются алгоритмы численного интегрирования, методы решения нелинейных и линейных уравнений, а также методы решения дифференциальных уравнений. Приводятся контрольные вопросы и задания.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Информатика и вычислительная техника».

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ	6
1.1. Общая интерполяционная квадратура	6
1.2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса	10
1.2.1. Квадратурные формулы прямоугольников.....	13
1.2.2. Квадратурная формула трапеций	18
1.2.3. Квадратурная формула Симпсона (парабол).....	19
1.2.4. Квадратурная формула “трех восьмых” (формула Ньютона)	21
1.3. Метод Рунге оценки погрешности	23
1.4. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности.....	26
1.5. Частные случаи квадратурного правила наивысшей алгебраической степени точности	35
1.6. Приближенное вычисление несобственных интегралов	42
1.7. Приближенное вычисление неопределенных интегралов.....	45
1.9. Задания к главе 1	51
2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	52
2.1. Решение нелинейных уравнений	53
2.1.1. Табличный метод	54
2.1.2. Графический метод.....	54
2.1.3. Метод деления отрезка пополам	55
2.1.4. Метод хорд	55
2.1.5. Метод простой итерации	56
2.1.6. Метод Ньютона.....	60
2.2. Метод Лобачевского.....	65
2.3. Решение систем нелинейных уравнений	72
2.4. Контрольные вопросы	75
2.5. Задания к главе 2.....	77
3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ.....	78
3.1. Некоторые понятия матричной алгебры.....	78
3.2. Обусловленность систем и матриц.....	83
3.3. Метод Гаусса.....	87
3.4. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	90
3.4.1. Метод простой итерации (последовательных приближений)	91
3.4.2. Метод Зейделя.....	92

3.5. Метод Данилевского решения полной проблемы собственных значений.....	93
3.6. Контрольные вопросы	97
3.7. Задания к главе 3.....	98
4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	99
4.1. Методы Эйлера и Рунге-Кутты	99
4.1.1. Формула Эйлера.....	101
4.1.2. Формула Рунге-Кутта	103
4.2. Правило Рунге.....	105
4.3. Решении задачи Коши для систем дифференциальных уравнений	107
4.5. Метод Адамса	108
4.5.1. Экстраполяционная формула Адамса	110
4.5.2. Интерполяционная формула Адамса	110
4.6. Метод сеток решения линейных краевых задач.....	111
4.7. Метод коллокации решения краевых задач.....	114
4.8. Контрольные вопросы	118
4.9. Задания к главе 4.....	120
5. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРИАНТЫ К ЗАДАНИЯМ	121
5.1. Варианты к заданиям 1.1, 1.2.....	121
5.2. Варианты к заданию 2.1 – 2.3.....	123
5.3. Варианты к заданиям 3.1, 3.2.....	124
5.4. Варианты к заданию 4.1, 4.2	126
ЛИТЕРАТУРА.....	130

В настоящее учебное пособие является второй частью пособия «Основы вычислительной математики», в нем рассматриваются следующие разделы:

- численное интегрирование;
- методы решения нелинейных уравнений;
- методы решения матричной алгебры;
- численные методы решения дифференциальных уравнений;
- приложение.

В разделах 1-4 учебного пособия приведены контрольные вопросы и задания, которые выполняются студентами в дисплейном классе с использованием пакетов прикладных программ Mathcad и Matlab.

Предполагается, что студенты, приступающие к изучению курса «Численные методы», знакомы с такими разделами высшей математики как дифференциальное и интегральное исчисление, линейная алгебра, а также владеют навыками работы с компьютером в объеме курса «Информатика».

1. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Вычисление интегралов необходимо применять при решении многих практических задач. Например, если для функциональной зависимости, заданной в виде таблицы, необходимо оценить некоторый интегральный показатель. Такая проблема может возникнуть в различных предметных областях, таких как физика, техника, медицина, экономика и др. Примером интегрирования в экономике может служить задача вычисления общего количества востребованного товара за определенный период времени в зависимости от интенсивности спроса. В этом случае решением задачи является интеграл:

$$S(T) = \int_0^T s(t) dt,$$

где $s(t)$ – интенсивность спроса в момент времени t .

Известно также, что для некоторых функций, заданных аналитически, невозможно вычислить определенный интеграл, используя понятие первообразной функции. Однако эту задачу можно решить, с помощью численных методов.

1.1. Общая интерполяционная квадратура

Рассмотрим задачу вычисления интеграла при помощи некоторого числа значений интегрируемой функции. Достоинство этого метода состоит в его простоте и универсальности.

Пусть $[a, b]$ любой конечный или бесконечный отрезок числовой оси. Требуется найти приближенное значение интеграла

$$I = \int_a^b F(x) dx$$

по n значениям функции $F(x)$ в точках $x_i, i = \overline{0, n}$.

Многие правила численного интегрирования основаны на замене интегрируемой функции $F(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ или на его частях на более простую функцию, близкую к $F(x)$, легко интегрируемую точно и принимающую в точках $x_i, i = \overline{0, n}$ те же значения, что и $F(x)$. В качестве такой функции достаточно часто используют алгебраический многочлен или рациональную функцию. В том случае, если интегрируемая функция $F(x)$ является достаточно гладкой, то можно рассчитывать хорошо приблизить ее многочленом невысокой степени или несложной рациональной функцией. Если же сама функция $F(x)$ имеет особенности, то это затруднит такое приближение или сделает его вообще невозможным. В этом случае заранее освобождаются от этих особенностей путем их выделения. Для этого функцию $F(x)$ представляют в виде произведения двух функций:

$$F(x) = p(x)f(x),$$

где $p(x)$ имеет те же особенности, что и $F(x)$, и называется *весовой функцией* или *весом*, а $f(x)$ является достаточно гладкой функцией. Тогда задача заключается в вычислении интеграла вида:

$$I = \int_a^b p(x)f(x)dx. \quad (1.1)$$

Правила вычисления интегралов в большинстве своем являются специализированными, предназначенными для численного интегрирования функций, имеющих те же особенности, что и весовая функция $p(x)$. Поэтому при вычислении интеграла (1.1) функция $p(x)$ считается фиксированной, а $f(x)$ – любой достаточно гладкой функцией на $[a, b]$.

Общая интерполяционная квадратура заключается в том, что вычисление интеграла заменяют вычислением некоторой суммы

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k). \quad (1.2)$$

Формула (1.2) называется *квадратурной формулой*, сумма в (1.2) – *квадратурной суммой*, $x_k, A_k, k = \overline{0, n}$, – *квадратурными узлами и коэффициентами*.

При построении интерполяционной квадратурной формулы функцию $f(x)$ представляют в виде суммы интерполяционного многочлена Лагранжа и его остаточного члена

$$f(x) = L_n(x) + r_n(x),$$

где

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)},$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x),$$

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

ξ – некоторая точка интервала $[a, b]$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &= \int_a^b p(x)L_n(x)dx + \int_a^b p(x)r_n(x)dx = \\ &= \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \end{aligned}$$

где

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)} dx, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \\ &= \int_a^b p(x)r_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)p(x)\omega_n(x)dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Квадратурное формула, коэффициенты которой вычисляются согласно (1.3), называется *интерполяционной*. Величина $R_n(f)$ (формула (4.4)) является *остаточным членом* или погрешностью квадратурной формулы.

Теорема 4.1. Для того чтобы квадратурная формула (1.2) была точной для всех алгебраических многочленов степени n , необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной.

Доказательство. Необходимость. Любой алгебраический многочлен степени n можно единственным образом представить в виде многочлена Лагранжа, то есть если $f(x)$ многочлен степени n , то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega'_n(x_k)}.$$

Так как квадратурное правило (4.2) является точным для всех алгебраических многочленов степени n , то

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &= \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \\ &= \int_a^b p(x) \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega'_n(x_k)} dx = \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega'_n(x_k)} dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega'_n(x_k)} dx$$

и квадратурное правило является интерполяционным.

Достаточность. Пусть $f(x)$ – произвольный многочлен степени n , квадратурная формула (1.2) является интерполяционной. Тогда величина $r_n \equiv 0$ и остаточный член квадратурной формулы $R_n(f)$ также будет нулевой, и квадратурная формула будет точной. Теорема доказана.

Говорят, что квадратурная формула имеет *алгебраическую степень точности* n , если максимальная степень алгебраического многочлена, для которого квадратурная формула является точной, равна n . Из теоремы 1.1 следует, что степень точности интерполяционного квадратурного правила равна n .

1.2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Частными случаями интерполяционного квадратурного правила являются правила Ньютона-Котеса. Эти правила с равноотстоящими узлами были предложены Ньютоном, а Котесом была составлена таблица коэффициентов для случая постоянной весовой функции при $n = \overline{1,10}$.

Квадратурное правило Ньютона-Котеса записывается в виде:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(x_k), \quad (1.5)$$

где $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $k = \overline{0, n}$.

Коэффициенты B_k^n в (1.5), учитывая выражение (1.3) для A_k , вычисляются по формуле:

$$B_k^n = \frac{A_k}{b-a} \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{(x-a-kh)\omega_n'(a+kh)} dx.$$

Если ввести новую переменную t , положив $x = a + th$, то

$$\omega_n(x) = h^{n+1} t(t-1)\dots(t-n),$$

$$\omega_n'(a+kh) = (-1)^{n-k} h^n k!(n-k)!,$$

якобиан преобразования равен h , $\frac{h}{b-a} = \frac{1}{n}$ и выражение для

коэффициентов B_k^n примет вид

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n p(a+th) \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt. \quad (1.6)$$

В случае постоянной весовой функции ($p(x) \equiv 1$) выражение (4.6) примет вид

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt \quad (1.7)$$

и формула для остатка квадратуры Ньютона-Котеса запишется следующим образом:

$$R_n(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)\dots(t-n) dt. \quad (1.8)$$

Для $n = 1, 2, \dots$, коэффициенты B_k^n принимают конкретные значения:

$$n = 1, B_0^1 = B_1^1 = \frac{1}{2},$$

$$n = 2, B_0^2 = B_2^2 = \frac{1}{6}, B_1^2 = \frac{4}{6},$$

$$n = 3, B_0^3 = B_3^3 = \frac{1}{8}, B_1^3 = B_2^3 = \frac{3}{8},$$

$$n = 4, B_0^4 = B_3^4 = \frac{7}{90}, B_1^4 = B_2^4 = \frac{32}{90}, B_4^4 = \frac{12}{90},$$

и т.д.

Коэффициенты B_k^n являются рациональными числами и обладают следующими свойствами:

1) при каждом $n \sum_{k=0}^n B_k^n = 1$, в чем легко убедиться, если в (1.5)

положить $f(x) \equiv 1$ и учесть, что в этом случае $R_n(f) = 0$;

2) из первого свойства следует, что при $n = 0$ $B_0^0 = 1$;

3) $B_j^n = B_{n-j}^n$;

4) при $n = 8$ и для всех $n \geq 10$ среди B_k^n встречаются отрицательные, причем абсолютные величины значений B_k^n быстро растут с ростом n .

Последнее свойство коэффициентов B_k^n является существенным при определении погрешности вычисления интеграла с помощью квадратурной суммы. Так, если значения подынтегральной функции $f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$, известны с абсолютной погрешностью ε , то неустранимая погрешность вычисления интеграла с помощью квадратурной суммы

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(a+kh) \quad (1.9)$$

может быть оценена величиной

$$\Delta_H = \varepsilon(b-a) \sum_{k=0}^n |B_k^n|,$$

при этом значения $\sum_{k=0}^n |B_k^n|$ при увеличении n быстро растут.

Например,

$$\sum_{k=0}^{10} |B_k^{10}| \approx 3,1, \quad \sum_{k=0}^{15} |B_k^{15}| \approx 8,5, \quad \sum_{k=0}^{20} |B_k^{20}| \approx 560.$$

Поэтому при больших значениях n незначительные погрешности в значениях функций $f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$, могут привести к большой погрешности в квадратурной сумме (1.9). В связи с этим формулы Ньютона-Котеса используются только при малых значениях n . Для уменьшения погрешности результата отрезок $[a, b]$ разбивают на m отрезков. К каждому полученному отрезку применяют квадратурную формулу с малым числом узлов и результаты суммируют. При этом, так как погрешность метода для формулы Ньютона-Котеса можно представить в виде $(b-a)^P C(a, b)$, где $C(a, b)$ – медленно изменяющаяся функ-

ция на $[a, b]$, а погрешность той же формулы, примененной к отрезку длиной $\frac{b-a}{m}$, равна $\left(\frac{b-a}{m}\right)^p C(a, b)$, то в результате суммирования погрешностей получим

$$\Delta_M = \frac{(b-a)^p}{m^{p-1}} C(a, b).$$

Таким образом, погрешность вычисления интеграла за счет деления интервала интегрирования на m частей, уменьшилось в m^{p-1} раз.

Заметим, что если середина интервала $[a, b]$ является узлом квадратурного правила, то точность правила увеличивается на единицу.

Получим конкретные формулы Ньютона-Котеса для $n = 0, 1, 2, 3$, которые используются чаще всего. При этом, приведем и соответствующие *обобщенные формулы*, которые получаются путем деления отрезка $[a, b]$ на m частей и суммирования значений интегралов, вычисленных на каждой из этих частей.

1.2.1. Квадратурные формулы прямоугольников

Коэффициент квадратурного правила $B_0^0 = 1$. В качестве узла квадратурного правила на интервале $[a, b]$ можно выбрать любую точку. Обычно выбирают среднюю или крайние точки и в соответствии с этим получают различные квадратурные формулы.

1. Формула левых прямоугольников.

В качестве узла квадратурного правила выбирается левый конец интервала $[a, b]$, т.е. точка a . Тогда квадратурная формула называется формулой *левых прямоугольников* и записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + R_{0,лев.}(f), \quad (1.10)$$

где

$$R_{0,лев.}(f) = \int_a^b (x-a)f'(\xi)dx$$

и ξ – некоторая точка интервала $[a, b]$.

Формула (1.10) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(a)$.

В силу теоремы о среднем, так как множитель $(x-a)$ не меняет знак на $[a, b]$ и $f'(x)$ предполагается непрерывной на $[a, b]$, существует точка $\eta \in [a, b]$, такая, что

$$R_{0,лев.}(f) = f'(\eta) \int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta).$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на m отрезков длиной $h = \frac{b-a}{m}$ и к каждому отрезку применим формулу левых прямоугольников. Тогда

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx \approx hf(a+kh),$$

$$R_{0,лев.}^{(k)}(f) = \frac{h^2}{2} f'(\eta_k), \quad \eta_k \in [a+kh, a+(k+1)h],$$

$$k = \overline{0, m-1}.$$

Просуммировав результаты по всем отрезкам, получим обобщенную формулу левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}(f_0 + f_1 + \dots + f_{m-1}), \quad (1.11)$$

где $f_k = f(a + kh)$, $k = \overline{0, m-1}$. При этом погрешности также суммируются, то есть

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} R_{0,лев.}^{(k)}(f) = \frac{(b-a)^2}{2m^2} \sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k).$$

В силу предположения о непрерывности $f'(x)$ на $[a, b]$ и согласно теореме о среднем, существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k) = f'(\xi).$$

Тогда погрешность обобщенной формулы левых прямоугольников примет вид

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = \frac{(b-a)^2}{2m} f'(\xi).$$

2. Формула правых прямоугольников.

В качестве узла квадратурного правила выбирается правый конец интервала $[a, b]$, т.е. точка b . Тогда квадратурная формула называется формулой *правых прямоугольников* и записывается в виде

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(b) + R_{0,пр.}(f), \quad (1.12)$$

где

$$R_{0,пр.}(f) = \int_a^b (x-b)f'(\xi) dx = -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta).$$

Формула (1.12) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(b)$.

Разделив отрезок $[a, b]$ на m отрезков длиной $h = \frac{b-a}{m}$, применив к каждому отрезку формулу правых прямоугольников

и просуммировав результаты, получим *обобщенную формулу правых прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}(f_1 + f_2 + \dots + f_m). \quad (1.13)$$

Погрешность формулы (1.13) запишется в виде

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^2}{2m} f'(\xi).$$

3. Формула средних прямоугольников.

В качестве узла квадратурного правила выбирается средняя точка интервала $[a, b]$, то есть точка $\frac{a+b}{2}$. Тогда квадратурная формула называется формулой *средних прямоугольников* и имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_{0,сп.}(f) \quad (1.14)$$

Формула (1.14) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Так как середина интервала $[a, b]$ является узлом квадратурной формулы, то эта формула будет точной для всех многочленов первой степени. Тогда функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = P_1(x) + r(x),$$

где $P_1(x)$ — многочлен Тейлора первой степени, удовлетворяющий условиям

$$P_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad P_1'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Остаточный член при кратном интерполировании в предположении, что $f(x)$ имеет непрерывные производные второго порядка, имеет вид

$$r(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f''(\xi),$$

где ξ – некоторая точка интервала $[a, b]$. Тогда

$$R_{0,cp.}(f) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f''(\xi) dx.$$

Так как множитель $\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \geq 0$ и $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, согласно теореме о среднем, существует такая точка $\eta \in [a, b]$, что

$$R_{0,cp.}(f) = \frac{1}{2} f''(\eta) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta).$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на m частей длиной $h = \frac{b-a}{m}$ и к каждому отрезку применим формулу средних прямоугольников (1.14). Тогда

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx \approx hf \left(a + \frac{2k+1}{2} h \right)$$

$$R_{0,cp.}^{(k)}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\eta_k), \quad \eta_k \in [a + kh, a + (k+1)h],$$

$$k = \overline{0, m-1}.$$

Просуммировав результаты по всем отрезкам, получим обобщенную формулу средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{m} \left[f \left(a + \frac{h}{2} \right) + f \left(a + \frac{3h}{2} \right) + \dots + f \left(a + \frac{(2m-1)h}{2} \right) \right]. \quad (1.15)$$

Погрешность формулы (4.15) можно записать, просуммировав $R_{0,ср.}^{(k)}(f)$ по всем отрезкам, то есть

$$R_{0,ср.}^{(об.)}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} R_{0,ср.}^{(k)}(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^3} \sum_{k=0}^{m-1} f''(\eta_k).$$

Согласно теореме о среднем и в предположении о непрерывности $f''(x)$ на $[a, b]$, погрешность обобщенной формулы средних прямоугольников запишется в виде

$$R_{0,ср.}^{(об.)}(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\xi). \quad (1.16)$$

1.2.2. Квадратурная формула трапеций

Для формулы трапеций $B_0^1 = B_1^1 = \frac{1}{2}$. Два равноотстоящих узла на $[a, b]$ образуют точки a и b . Формула трапеций и выражение для погрешности имеют вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \quad (1.17)$$

$$R_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2} (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta).$$

Последнее выражение для $R_1(f)$ получается в предположении, что $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и произведение $(x-a)(x-b)$ не меняет знак на $[a, b]$.

Геометрически формула (1.17) означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$, заменяется площадью трапеции с основанием $(b-a)$ и высотой $\frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Разделив отрезок $[a, b]$ на m частей, применив к каждой части формулу трапеций и просуммировав результаты, получим обобщенную формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2m} [f_0 + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1}) + f_m] . \quad (1.18)$$

Погрешность обобщенной формулы трапеций имеет вид

$$R_1^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi) .$$

1.2.3. Квадратурная формула Симпсона (парабол)

В этом случае $B_0^2 = B_2^2 = \frac{1}{6}$, $B_1^2 = \frac{4}{6}$. Три равноотстоящих узла на $[a, b]$ образуют точки $a, \frac{a+b}{2}, b$. Квадратурная формула Симпсона имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] . \quad (1.20)$$

Геометрически формула (4.20) означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$, заменяется площадью, ограниченной параболой, построенной на $[a, b]$ по трем точкам $a, \frac{a+b}{2}, b$.

Так как средняя точка интервала $[a, b]$ является узлом квадратурного правила, то формула (1.20) является точной для многочленов третьей степени. Для нахождения погрешности квадратурной формулы Симпсона построим многочлен Эрмита третьей степени $P_3(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned} P_3(a) &= f(a), \\ P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad P_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \\ P_3(b) &= f(b). \end{aligned}$$

Остаточный член многочлена Эрмита $P_3(x)$ имеет вид:

$$r_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b).$$

Тогда остаточный член квадратурного правила Симпсона можно вычислить следующим образом:

$$R_2(f) = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) dx.$$

Так как множитель $(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b)$ не меняет

знак на $[a, b]$ и, в предположении о непрерывности $f^{(4)}(x)$ на $[a, b]$, существует точка $\eta \in [a, b]$ такая, что

$$R_2(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) dx = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\eta).$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на четное число m частей длиной $h = \frac{b-a}{m}$ и к сдвоенному отрезку $[a + (k-1)h, a + (k+1)h]$ применим формулу (1.20). Тогда

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}].$$

Просуммировав результаты по всем сдвоенным отрезкам на $[a, b]$, получим *обобщенную формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3m} [f_0 + f_m +$$

$$+ 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{m-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{m-1})], \quad (1.21)$$

погрешность которой можно представить в виде

$$R_2^{(об.)}(f) = -\frac{1}{90} h^5 [f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_3) + \dots + f^{(4)}(\eta_{m-1})],$$

где $\eta_k \in [a + (k-1)h, a + (k+1)h]$, $k = \overline{1, m-1}$.

Ввиду предположения о непрерывности $f^{(4)}(x)$ на $[a, b]$, и, согласно теореме о среднем, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\frac{2}{m} [f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_3) + \dots + f^{(4)}(\eta_{m-1})] = f^{(4)}(\xi).$$

Тогда выражение для погрешности квадратурной формулы (4.21) примет вид

$$R_2^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{(4)}(\xi). \quad (1.22)$$

1.2.4. Квадратурная формула “трех восьмых” (формула Ньютона)

Квадратурные коэффициенты формулы “трех восьмых” равны

$$B_0^3 = B_3^3 = \frac{1}{8}, \quad B_1^3 = B_2^3 = \frac{3}{8}.$$

Четыре равноотстоящих узла на $[a, b]$ образуют точки $a, a + \frac{b-a}{3}, a + 2\frac{b-a}{3}, b$. В этом случае квадратурная формула

“трех восьмых” и ее погрешность имеют вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right],$$

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\eta).$$

Геометрически эта формула означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$, заменяется площадью, ограниченной многочленом, который построен на $[a, b]$ по четырем

точкам $a, a + \frac{b-a}{3}, a + 2\frac{b-a}{3}, b$.

Разделив отрезок $[a, b]$ на число частей m , кратное трем, применив к построенным отрезкам формулу “трех восьмых” и

просуммировав результаты, получим *обобщенную формулу “трех восьмых”*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3(b-a)}{8} \frac{1}{m} [f_0 + f_m + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \dots + f_{m-2} + f_{m-1}) + 2(f_3 + f_6 + \dots + f_{m-3})]. \quad (1.23)$$

Погрешность квадратурной формулы “трех восьмых” определяется выражением

$$R_3^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{80m^4} f^{(4)}(\xi). \quad (1.24)$$

Пример 4.1. При вычислении интеграла

$$I = \int_1^5 \frac{e^x - 5}{x^2 + 1} dx$$

по обобщенным формулам Ньютона-Котеса для различных m получаются следующие результаты (таблица 4.1)

Таблица 4.1.

N	Квадратурная формула	$m = 12$	$m = 48$	$m = 6000$
1	левых прямоугольников	5,9006533	6,7233212	6,997838
2	правых прямоугольников	8,1195699	7,2780504	7,0022759
3	средних прямоугольников	6,9950321	6,9997426	7,0000569
4	трапеций	7,1548715	7,0791071	7,0008164
5	Симпсона	7,0000437	7,0000571	7,0000569
6	«трех восьмых»	6,9999482	7,0000573	7,0000569

Полученные результаты показывают, что, при вычислении интеграла с заданной точностью ε , для каждой квадратурной формулы необходимо задавать свое значение m .

1.3. Метод Рунге оценки погрешности

Говорят, что квадратурная формула имеет *порядок точности* p , если погрешность квадратурной формулы на всем отрезке интегрирования есть величина порядка малости p по отношению к шагу.

Пример. 4.2. Погрешность формулы Симпсона (1.22) можно записать в виде

$$R_2^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Поэтому формула Симпсона имеет четвертый порядок точности, т. е. $p = 4$.

Рассмотренные формулы Ньютона-Котеса можно упорядочить в порядке убывания точности следующим образом:

1) формула Симпсона (четвертый порядок точности ($p = 4$));

2) формула “трех восьмых” (четвертый порядок точности ($p = 4$), но погрешность этой формулы превосходит погрешность формулы Симпсона почти вдвое);

3) формула средних прямоугольников (второй порядок точности ($p = 2$));

4) формула трапеций (второй порядок точности ($p = 2$), но погрешность этой формулы вдвое превосходит погрешность формулы средних прямоугольников);

5) формулы левых и правых (крайних) прямоугольников (первый порядок точности ($p = 1$)).

Чаще всего требуется вычислить значение интеграла с заданной точностью ε . При этом погрешность квадратурной

формулы зависит от числа узлов m в квадратурной сумме или, что то же самое, от величины шага $h = \frac{b-a}{m}$.

Если обозначить

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

то для определения точности квадратурной формулы можно воспользоваться *априорной* оценкой

$$|R_n(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) dx \right| \leq \varepsilon,$$

из которой определяется величина шага h или число узлов m .

Пример. 4.3. Для формулы Симпсона из неравенства

$$\frac{M_4(b-a)h^4}{180} \leq \varepsilon$$

следует, что для достижения точности квадратурной формулы необходимо выполнения неравенства

$$h \leq 4 \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}}.$$

На практике такой оценкой пользоваться сложно из-за трудностей оценки четвертой производной. Поэтому обычно используют *апостериорные* оценки, например, *метод Рунге (принцип двойного счета)*.

Суть метода Рунге состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Воспользовавшись какой-либо формулой Ньютона-Котеса, получим значение интеграла I_h с шагом h . Тогда

$$I = I_h + R^{(h)}(f).$$

Погрешность $R^{(h)}(f)$ можно представить в виде

$$R^{(h)}(f) = Ch^p + O(h^p),$$

где C – некоторая константа, p – порядок точности квадратурной формулы, Ch^p – главный член погрешности, $O(h^p)$ – величина более высокого порядка малости, чем h^p . Если интеграл вычислить с шагом $h/2$, то учитывая, что константа C изменяется незначительно, можно записать

$$I = I_{h/2} + R^{(h/2)}(f) = I_{h/2} + C(h/2)^p + O((h/2)^{p+1}).$$

Приравнявая значения интегралов, вычисленных с шагом h и $h/2$, и, отбрасывая малые величины, получим

$$C \approx \frac{I_h - I_{h/2}}{(h/2)^p (1 - 2^p)}$$

и

$$I \approx I_{h/2} + \frac{I_h - I_{h/2}}{1 - 2^p}.$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить интеграл с точностью ε , то есть, чтобы для некоторого шага h выполнялось неравенство

$$|I - I_{h/2}| \leq \varepsilon,$$

необходимо, чтобы выполнилось неравенство

$$\left| \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1} \right| \leq \varepsilon.$$

Пример 4.4. Так как для формулы Симпсона $p = 4$, то строится последовательность значений интегралов, путем деления пополам некоторого начального шага, до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\left| \frac{I_h - I_{h/2}}{15} \right| \leq \varepsilon.$$

Замечание 4.1. При реализации алгоритмов вычисления интегралов по формулам Ньютона-Котеса нет необходимости каждый раз вычислять заново значения подынтегральной функции в узловых точках,

достаточно вычислять значения во вновь появляющихся за счет уменьшения шага узлах.

1.4. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности

Пусть в квадратурном правиле

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (1.25)$$

$[a, b]$ есть любой конечный или бесконечный отрезок и весовая функция $p(x)$ такова, что ее произведение на любую неотрицательную степень x абсолютно интегрируемо на $[a, b]$:

$$\int_a^b |p(x)x^i| dx < \infty.$$

Кроме того, будем считать функцию $p(x)$ не эквивалентной нулю, т. е.

$$\int_a^b p(x)dx > 0.$$

Квадратурное правило (1.25) при фиксированном n содержит $2n$ параметров: $x_k, A_k, k = \overline{1, n}$, и выбрать их можно так, чтобы равенство (1.25) выполнялось точно для всех алгебраических многочленов степени не выше $2n - 1$ или, что равносильно, чтобы выполнялись равенства:

$$\int_a^b p(x)x^i dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^i, \quad i = \overline{0, 2n - 1}. \quad (1.26)$$

Равенства (1.26) образуют систему из $2n$ уравнений относительно $2n$ неизвестных $x_k, A_k, k = \overline{1, n}$, но в силу того, что данная система является нелинейной, ее решение весьма затруднительно.

Введем многочлен

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n),$$

корнями которого являются узлы квадратурного правила, и выясним условия, при которых формула (1.25) выполняется точно для всех многочленов степени не выше $2n - 1$.

Теорема 4.2. *Для того, чтобы квадратурное правило (1.25) было точным для всех алгебраических многочленов степени не выше $2n - 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

- правило было интерполяционным, то есть коэффициенты A_k определялись по формулам:

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad (1.27)$$

- многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на $[a, b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени меньшей n :

$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx = 0.$$

Доказательство.

Необходимость. Необходимость первого условия очевидна: если равенство (1.25) верно для всякого многочлена степени не выше $2n - 1$, то оно верно и для многочленов степени не выше n и, следовательно, должно быть интерполяционным согласно теореме 4.1.

Докажем необходимость второго условия. Пусть $Q(x)$ любой многочлен степени меньше n . Положим $f(x) = \omega(x)Q(x)$. Так как $f(x)$ – многочлен степени меньше $2n$, то для него правило (1.25) должно быть точным, но в силу того, что $\omega(x_k) = 0$, $k = \overline{1, n}$, получаем

$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega(x_k)Q(x_k) = 0.$$

Достаточность. Пусть $f(x)$ – произвольный многочлен степени меньше $2n$. Разделив $f(x)$ на $\omega(x)$, получим

$$f(x) = \omega(x)Q(x) + \rho(x),$$

где $Q(x)$ и $\rho(x)$ многочлены степени меньше n . Кроме того, так как $\omega(x_k) = 0$, то $f(x_k) = \rho(x_k)$, $k = \overline{1, n}$, и

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx + \int_a^b p(x)\rho(x)dx.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю по второму условию теоремы и, так как по первому условию правило (1.25) является интерполяционным, то верно равенство

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\rho(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k \rho(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

что доказывает достаточные условия теоремы.

Таким образом, доказанная теорема сводит вопрос о возможности построения правила (1.25), точного для всех многочленов степени меньше $2n$, к вопросу о существовании многочлена $\omega(x)$, обладающего свойством ортогональности по весу $p(x)$ ко всякому многочлену степени меньше n на $[a, b]$.

Теорема 4.3. *Если весовая функция $p(x)$ не меняет знак на $[a, b]$ (например $p(x) \geq 0$), то существует и при этом единственный многочлен $\omega(x)$ ортогональный на $[a, b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени меньшей n .*

Доказательство. Запишем многочлен $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Условие ортогональности $\omega(x)$ можно записать в виде

$$\int_a^b p(x)[x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n]x^i dx = 0, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (1.28)$$

Равенства (1.28) представляют собой неоднородную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных a_1, a_2, \dots, a_n , которая имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля. Запишем соответствующую однородную систему

$$\int_a^b p(x)[a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n]x^i dx = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Достаточно убедиться в том, что однородная система имеет только нулевое решение, так как отсюда следует, что определитель соответствующей неоднородной системы отличен от нуля, и она имеет единственное решение. Если выписать уравнения однородной системы для $i = 0, 1, \dots, n-1$, умножить их последовательно на a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 и сложить, то получится равенство

$$\int_a^b p(x)[a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n]^2 dx = 0. \quad (1.29)$$

Если бы многочлен $a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ не был бы тождественным нулем, он мог бы обращаться в нуль не более чем в $n-1$ точках и равенство (1.29) не могло бы выполняться, так как

$$p(x) \geq 0, \quad \int_a^b p(x) > 0.$$

Значит многочлен $a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \equiv 0$, все его коэффициенты тождественно равны нулю и однородная система имеет только нулевое решение. Следовательно, определитель системы (1.29) и совпадающий с ним определитель системы (1.28) отличен от нуля. Тогда система (1.28) имеет единственное решение и, следовательно, существует единственный многочлен $\omega(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, ортогональный на $[a, b]$ по весу $p(x)$ любому многочлену степени меньше n .

Теорема 4.4. Если весовая функция $p(x)$ не меняет знак на $[a, b]$ и многочлен $\omega(x)$ ортогонален на $[a, b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени, меньшей n , то все корни многочлена $\omega(x)$ действительные, различные и лежат внутри $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ – корни многочлена $\omega(x)$, которые имеют нечетную кратность и лежат внутри $[a, b]$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $m = n$, так как отсюда следует, что никаких других корней у многочлена $\omega(x)$ нет и все корни – действительные, простые и принадлежат $[a, b]$.

Предположим, что $m < n$ и покажем, что это противоречит свойству ортогональности многочлена $\omega(x)$. Составим многочлен

$$\rho(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m).$$

Так как степень $\rho(x)$ меньше n , то для него должно выполняться равенство

$$\int_a^b p(x)\omega(x)\rho(x)dx = 0.$$

Это равенство не может быть выполнено, так как $\omega(x)$ и $\rho(x)$ имеют внутри $[a, b]$ одинаковые точки перемены знака и произведение $\omega(x)\rho(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$. Кроме того, произведение $\omega(x)\rho(x)$ обращается в нуль только в конечном числе точек, так как $\omega(x)$ и $\rho(x)$ отличны от тождественного нуля. Ввиду того, что вес $p(x)$ также сохраняет знак на $[a, b]$ и

не эквивалентен нулю, интеграл $\int_a^b p(x)\omega(x)\rho(x)dx$ должен

быть отличен от нуля, а это противоречит предыдущему.

Теорема 4.5. Если весовая функция $p(x)$ не меняет знак на $[a, b]$, то ни при каком выборе x_k и A_k равенство (1.25) не может быть верным для всех многочленов степени $2n$.

Доказательство. Для проверки правильности утверждения теоремы достаточно построить многочлен степени $2n$, для которого квадратурное правило (1.25) не может быть выполнено

точно. Положим $f(x) = \omega^2(x)$. Это положительный многочлен степени $2n$. Для него

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \neq 0,$$

а сумма

$$\sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k \omega^2(x_k) = 0$$

так как $\omega(x_k) = 0, k = \overline{1, n}$. Отсюда следует, что при знакопостоянной весовой функции $p(x)$ степень точности $2n - 1$ действительно является наивысшей возможной.

Теорема 4.6. Если $p(x) \geq 0$ и квадратурное правило (1.25) верно для всех многочленов степени $2n - 2$, то все коэффициенты A_k в нем положительны.

Доказательство. Положим

$$f(x) = \left[\frac{\omega(x)}{x - x_i} \right]^2.$$

Это есть многочлен степени $2n - 2$ и для него выполняется равенство

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Но

$$f(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ (\omega'(x_k))^2, & k = i \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\int_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{x - x_i} \right]^2 dx = A_i (\omega'(x_i))^2,$$

$$A_i = \int_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} \right]^2 dx > 0.$$

Теорема доказана.

Для вычисления коэффициентов $A_k, k = \overline{1, n}$, ранее было получено выражение (1.27). Если систему многочленов, ортогональных на $[a, b]$ по весу $p(x)$, записать в виде

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

то путем некоторых преобразований можно получить более удобное для вычислений выражение

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{1}{P_n'(x_k) P_{n-1}(x_k)}.$$

Теорема 4.7. Если $p(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$ и $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n$ на $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что для остатка

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

квадратурного правила наивысшей алгебраической степени точности верно равенство

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $H(x)$ – интерполяционный многочлен степени не выше $2n - 1$, удовлетворяющий условиям

$$H(x_k) = f(x_k), \quad H'(x_k) = f'(x_k).$$

В предположении о непрерывности $f^{(2n)}(x)$, погрешность интерполирования может быть представлена в форме (остаточный член многочлена Эрмита)

$$r_n(x) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta) \omega^2(x),$$

где η – некоторая точка отрезка, содержащего x и x_k , $k = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)H(x)dx + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x)f^{(2n)}(\eta)\omega^2(x)dx.$$

Так как квадратурное правило является точным для всех алгебраических многочленов степени не выше $2n - 1$, то

$$\int_a^b p(x)H(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k H(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

и погрешность квадратурного правила $R_n(f)$ определяется выражением

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b f^{(2n)}(\eta)p(x)\omega^2(x)dx.$$

Так как $p(x)$ и $\omega^2(x)$ не меняют знаков на $[a, b]$ и $f^{(2n)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, согласно теореме о среднем, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b p(x)\omega^2(x)dx.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос сходимости квадратурного правила наивысшей алгебраической степени точности.

Пусть весовая функция $p(x)$ неотрицательна. Квадратурное правило наивысшей алгебраической степени точности может быть построено для любого $n = 1, 2, \dots$. Узлы и коэффициенты правила будут иметь свои значения для каждого n . Обозначим их x_k^n, A_k^n . Тогда можно записать квадратурное правило следующим образом:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n(f).$$

Квадратурный процесс сходится для функции $f(x)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx$$

Теорема 4.8. Если $p(x) \geq 0$, отрезок $[a, b]$ конечный и замкнутый и функция $f(x)$ непрерывна на нем, то квадратурный процесс наивысшей алгебраической степени точности сходится.

Доказательство. Ввиду непрерывности функции $f(x)$, при всяком $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P(x)$ такой, что при любом $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) \right| < \left| \int_a^b p(x)f(x)dx - \int_a^b p(x)P(x)dx \right| + \\ & + \left| \int_a^b p(x)P(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k^n P(x_k^n) \right| + \left| \sum_{k=1}^n A_k^n [P(x_k^n) - f(x_k^n)] \right|. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b p(x)f(x)dx - \int_a^b p(x)P(x)dx \right| = \\ & = \left| \int_a^b p(x)[f(x) - P(x)]dx \right| < \varepsilon \int_a^b p(x)dx. \end{aligned}$$

Кроме того, так как

$$\int_a^b p(x) \cdot 1 dx = \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^n,$$

то

$$\left| \sum_{k=1}^n A_k^n [P(x_k^n) - f(x_k^n)] \right| < \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^n = \varepsilon \int_a^b p(x)dx.$$

Если m есть степень многочлена $P(x)$, то при $2n - 1 \geq m$

$$\int_a^b p(x)P(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k^n P(x_k^n)$$

и для каких n

$$\left| \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) \right| < 2\varepsilon \int_a^b p(x)dx,$$

что доказывает теорему.

1.5. Частные случаи квадратурного правила наивысшей алгебраической степени точности

Приведенные теоремы доказывают справедливость следующего утверждения: если весовая функция $p(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, то квадратурное правило (1.25), верное для всех многочленов степени не выше $2n - 1$, существует при всех n и является единственным для каждого n . При этом для знакопостоянной весовой функции $p(x)$ степень точности $2n - 1$ является наивысшей возможной. Таким образом, для конкретной весовой функции $p(x)$ существует единственный многочлен $\omega(x)$ ортогональный по весу $p(x)$ на $[a, b]$ любому многочлену степени меньше n , корни которого являются узлами квадратурного правила, а выражение (1.28) определяет коэффициенты этого правила.

I. Интегралы вида $\int_a^b f(t)dt$

Пусть $[a, b]$ – произвольный конечный отрезок. Тогда, с помощью линейной замены переменной

$$t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x,$$

где $t \in [a, b]$, $x \in [-1, 1]$, интеграл

$$\int_a^b f(t) dt$$

и соответствующая квадратурная формула, преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x\right) dx \approx \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_k\right). \end{aligned}$$

Поэтому будем считать, что исходный интеграл приведен к виду

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Систему многочленов, ортогональную на $[-1, 1]$ с весом $p(x) \equiv 1$, образуют *многочлены Лежандра*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n :$$

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2},$$

...

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} [(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)].$$

Соответствующая квадратурная формула называется *формулой Гаусса* и имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f),$$

где коэффициенты A_k , $k = \overline{1, n}$, вычисляются следующим образом

$$A_k = \frac{2}{[1 - x_k^2][P'_n(x_k)]^2},$$

а погрешность, в предположении, что $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n$ на $[-1, 1]$, равна

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [-1, 1].$$

Узлы x_k , $k = \overline{1, n}$, должны располагаться в корнях многочлена Лежандра степени n , для которых нет общей формулы.

В таблице 4.2. приведены значения узлов x_k и соответствующих коэффициентов A_k квадратурной формулы Гаусса для значений $n = \overline{1, 7}$.

Таблица 4.2.

n	$A_k, k = \overline{1, n}.$	$x_k, k = \overline{1, n}.$
$n = 1$	$A_1 = 2,0000000$	$x_1 = +0,0000000$
$n = 2$	$A_1 = 1,0000000$ $A_2 = 1,0000000$	$x_1 = -0,5773502$ $x_2 = +0,5773502$
$n = 3$	$A_1 = 0,5555555$ $A_2 = 0,8888888$ $A_3 = 0,5555555$	$x_1 = -0,7745966$ $x_2 = +0,0000000$ $x_3 = +0,7745966$

$n = 4$	$A_1 = 0,3478548$ $A_2 = 0,6521451$ $A_3 = 0,6521451$ $A_4 = 0,3478548$	$x_1 = -0,8611363$ $x_2 = -0,3399810$ $x_3 = +0,3399810$ $x_4 = +0,8611363$
$n = 5$	$A_1 = 0,2369268$ $A_2 = 0,4786286$ $A_3 = 0,5688888$ $A_4 = 0,4786286$ $A_5 = 0,2369268$	$x_1 = -0,9061798$ $x_2 = -0,5384693$ $x_3 = +0,0000000$ $x_4 = +0,5384693$ $x_5 = +0,9061798$
$n = 6$	$A_1 = 0,1713244$ $A_2 = 0,3607615$ $A_3 = 0,4679139$ $A_4 = 0,4679139$ $A_5 = 0,3607615$ $A_6 = 0,1713244$	$x_1 = -0,9324695$ $x_2 = -0,6612093$ $x_3 = -0,2386191$ $x_4 = +0,2386191$ $x_5 = +0,6612093$ $x_6 = +0,9324695$
$n = 7$	$A_1 = 0,1294849$ $A_2 = 0,2797053$ $A_3 = 0,3818300$ $A_4 = 0,4179591$ $A_5 = 0,3818300$ $A_6 = 0,2797053$ $A_7 = 0,1294849$	$x_1 = -0,9491079$ $x_2 = -0,7415311$ $x_3 = -0,4058451$ $x_4 = 0,0000000$ $x_5 = 0,4058451$ $x_6 = 0,7415311$ $x_7 = 0,9491079$

Пример 4.5. Вычислим методом Гаусса интеграл

$$I = \int_1^5 \frac{e^t - 5}{t^2 + 1} dt.$$

С помощью замены переменной

$$t = 3 + 2x$$

интеграл и соответствующая квадратурная формула преобразуются к виду

$$I = 2 \int_{-1}^1 \frac{e^{3+2x} - 5}{4x^2 + 12x + 10} dx = 2 \sum_{k=1}^n A_k \frac{e^{3+2x_k}}{4x_k^2 + 12x_k + 10}.$$

Если вычислять интеграл при $n = 5$, используя узлы и коэффициенты квадратурной формулы $x_k, A_k, k = \overline{1, n}$, из таблицы 4.2., то получим $I = 6,9998716$. Вычисляя интеграл при тех же значениях $x_k, A_k, k = \overline{1, n}$, путем деления интервала $[1, 5]$ на две части ($m = 2$), получим $I = 7,0000535$, а при $m = 3 - I = 7,0000555$.

II. Интегралы вида $\int_a^\infty e^{-t} f(t) dt$

С помощью замены переменной $t = x + a$, где $t \in [a; \infty), x \in [0; \infty)$, интеграл и соответствующее квадратурное правило, можно привести к виду

$$\int_a^\infty e^{-t} f(t) dt = e^{-a} \int_0^\infty e^{-x} f(x + a) dx \approx e^{-a} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k + a).$$

Поэтому будем считать, что исходный интеграл задан в виде

$$I = \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx.$$

На луче $[0, \infty)$ свойством ортогональности с весом $p(x) = e^{-x}$ обладают многочлены Лагерра

$$L_n^{(0)} = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x};$$

$$L_0^{(0)} = 1;$$

$$L_1^{(0)} = x - 1;$$

$$L_2^{(0)} = x^2 - 2x + 2;$$

$$L_3^{(0)} = x^3 - 9x^2 + 18x + 6;$$

...

$$L_{n+1}^{(0)} = (x - 2n - 1)L_n^{(0)}(x) - n^2 L_{n-1}^{(0)}(x).$$

В квадратурной формуле наивысшей степени точности

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f)$$

узлы x_k являются корнями многочлена Лагерра $L_n^{(0)}(x)$, коэффициенты A_k вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{(n!)^2}{n+1} \cdot \frac{1}{x_k \left[L_n^{(0)'}(x_k) \right]^2},$$

а погрешность $R_n(f)$ определяется соотношением

$$R_n(f) = \frac{(n!)^2}{(n+1)(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [0, \infty).$$

Для корней многочлена Лагерра не существует общей формулы, поэтому они либо определяются из решения соответствующего алгебраического уравнения, либо из таблиц.

Пример. 4.6. При $n = 2$ квадратурная формула вычисления интеграла имеет вид

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} [(2 + \sqrt{2})f(2 - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})f(2 + \sqrt{2})] + \frac{1}{6} f^{(4)}(\xi).$$

V. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$

На интервале $(-\infty, \infty)$ свойством ортогональности с весом $p(x) = e^{-x^2}$ обладают *полиномы Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} :$$

$$H_0(x) = 1;$$

$$H_1(x) = 2x;$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2;$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x;$$

...

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

В квадратурной формуле наивысшей степени точности

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f)$$

узлы x_k являются корнями многочлена Эрмита $H_n(x)$, коэффициенты A_k вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2},$$

а погрешность $R_n(f)$ определяется соотношением

$$R_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^2 (2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Для корней многочлена Эрмита не существует общей формулы, поэтому они либо определяются из решения соответствующего алгебраического уравнения, либо из таблиц.

Пример. 4.7. При $n = 2$ квадратурная формула Эрмита имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{48} f^{(4)}(\xi).$$

1.6. Приближенное вычисление несобственных интегралов

Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *собственным*, если:

- промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен;
- подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

В противном случае интеграл называется *несобственным*.

Пусть промежуток интегрирования бесконечен. Достаточно рассмотреть вычисление несобственного интеграла вида

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \quad (1.30)$$

где функция $f(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$.

Интеграл (1.30) называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1.31)$$

и по определению полагают

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если предел (1.31) не существует, то интеграл (1.30) называется *расходящимся* и считается лишенным смысла. Поэтому прежде чем приступить к вычислению несобственного интеграла, необходимо предварительно убедиться, что этот интеграл сходится.

Чтобы вычислить сходящийся несобственный интеграл (1.30) с заданной точностью ε , представляют его в виде

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx.$$

В силу сходимости интеграла, число b необходимо выбрать столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_b^{\infty} f(x)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Собственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно вычислить по одной из квадратурных формул. Пусть S – приближенное значение этого интеграла, вычисленное с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\left| \int_a^{\infty} f(x)dx - S \right| \leq \left| \int_a^b f(x)dx - S \right| + \left| \int_b^{\infty} f(x)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и поставленная задача решена.

Предположим, что промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен и подынтегральная функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва на $[a, b]$. Так как всегда можно промежуток интегрирования разбить на частичные промежутки с единственной точкой разрыва подынтегральной функции, то достаточно рассмотреть случай, когда на $[a, b]$ имеется единственная точка разрыва функции $f(x)$.

Пусть в точке c функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, т.е. существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow c, x < c} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x \rightarrow c, x > c} f(x) = f(c+0),$$

В этом случае можно положить

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx,$$

где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a \leq x < c, \\ f(c-0), & \text{если } x = c, \end{cases}$$

и

$$f_2(x) = \begin{cases} f(c+0), & \text{если } x = c, \\ f(x), & \text{если } c < x \leq b. \end{cases}$$

Так как функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ являются непрерывными соответственно на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$, то исходный интеграл сводится к сумме двух собственных интегралов.

Пусть в точке c функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода. Если точка c есть внутренняя точка отрезка $[a, b]$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} \left\{ \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx \right\} \quad (1.32)$$

и в случае существования этого предела интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Аналогично определяется сходимое несобственное интеграла, если точка разрыва c функции $f(x)$ совпадает с одним из концов промежутка интегрирования $[a, b]$.

Для приближенного вычисления с заданной точностью ε сходящегося несобственного интеграла (1.32) задают положительные числа δ_1, δ_2 столь малыми, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем по известным квадратурным формулам приближенно вычисляют собственные интегралы

$$\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$$

и, если S_1, S_2 – приближенные значения этих интегралов, вычисленные с точностью $\frac{\varepsilon}{4}$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2$$

с точностью ε .

1.7. Приближенное вычисление неопределенных интегралов

Рассмотрим задачу вычисления неопределенного интеграла

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx \tag{1.33}$$

в точках x_0, x_1, \dots, x_n . В общем случае, когда узлы неравноотстоящие, эту задачу можно решить, вычислив определенные интегралы

$$y(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx, \quad y(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx, \quad \dots \quad y(x_n) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx.$$

В случае равноотстоящих узлов, $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, $i = \overline{1, n}$, для решения поставленной задачи существуют простые рекуррентные формулы вида

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx. \quad (1.34)$$

Обозначим $y_k = y(x_k)$, $f_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$.

При построении начала таблицы неопределенного интеграла, необходимо функцию $f(x)$ аппроксимировать с помощью

1-ой формулы Ньютона при $t = \frac{x - x_0}{h}$

$$f(x_0 + th) \approx N(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-1)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots, \quad (1.35)$$

где Δf_0 , $\Delta^2 f_0$, $\Delta^3 f_0$ – конечные разности соответствующих порядков. Тогда, при вычислении интеграла (1.34), получим:

$$y_1 = y_0 + h \int_0^1 N(x_0 + th) dt, \quad (1.36)$$

при этом из (1.33) следует, что $y_0 = 0$.

Ошибку вычисления интеграла (1.36) можно оценить, вычислив интеграл

$$h \int_0^1 R(x_0 + th) dt,$$

где $R(x_0 + th)$ – остаточный член 1-ой формулы Ньютона. Подставив в (1.36) формулу (1.34), получим расчетную формулу

$$y_1 = h \left(f_0 + \frac{\Delta f_0}{2} - \frac{\Delta^2 f_0}{12} + \frac{\Delta^3 f_0}{24} + \dots \right). \quad (1.37)$$

Далее вычисляется y_2 по формуле

$$y_2 = y_1 + h \int_0^1 f(x_1 + th) dt =$$

$$= y_1 + h \left(f_1 + \frac{\Delta f_1}{2} - \frac{\Delta^2 f_1}{12} + \frac{\Delta^3 f_1}{24} + \dots \right). \quad (1.38)$$

Выполнив несколько шагов (обычно 2 или 3), можно для аппроксимации подынтегральной функции в (1.34) перейти к формуле Бесселя при $t = \frac{x - x_k}{h}$:

$$f(x_k + th) \approx B(x_k + th) = \frac{f_k + f_{k+1}}{2} + \frac{(t - 0,5)}{1!} \Delta f_k + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{(\Delta^2 f_{k-1} + \Delta^2 f_k)}{2} + \frac{(t-0,5)t(t-1)}{3!} \Delta^3 f_{k-1} + \dots \quad (1.39)$$

Подставив в (1.39) формулу (1.34), получим расчетную формулу

$$y_{k+1} = y_k + h \left(\frac{f_k + f_{k+1}}{2} - \frac{\Delta^2 f_{k-1} + \Delta^2 f_k}{12} + \dots \right). \quad (1.40)$$

Ошибку вычисления по формуле (1.40) можно оценить, вычислив интеграл

$$h \int_0^1 R(x_k + th) dt,$$

где $R(x_k + th)$ – остаточный член формулы Бесселя.

Когда k начнет приближаться к значениям, близким к n , необходимо, при аппроксимации подынтегральной функции, перейти ко 2-ой формуле Ньютона.

Таким образом, рассмотренный метод вычисления неопределенного интеграла при равноотстоящих узлах, сводится к простым рекуррентным формулам.

1.8. Контрольные вопросы

1. Какова алгебраическая точность общей интерполяционной квадратурной формулы, если число квадратурных узлов равно n :

- 1) n ;
- 2) $n + 1$;
- 3) $n - 1$.

2. Чему равен порядок алгебраической точности квадратурной формулы Ньютона-Котеса, если число квадратурных узлов n – четное:

- 1) n ;
- 2) $n + 1$;
- 3) $n - 2$;
- 4) $n - 1$.

3. Чему равен порядок алгебраической точности квадратурной формулы Ньютона-Котеса, если число квадратурных узлов n – нечетное:

- 1) n ;
- 2) $n + 1$;
- 3) $n - 2$;
- 4) $n - 1$.

4. Укажите квадратурную формулу трапеций для вычисления определенного интеграла:

$$1) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) ;$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)) ;$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) .$$

5. Укажите квадратурную формулу левых прямоугольников для вычисления определенного интеграла:

$$1) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) ;$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b));$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a).$$

6. Укажите квадратурную формулу Симпсона (парабол) для вычисления определенного интеграла:

$$1) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b));$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b));$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2});$$

$$4) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{8}(f(a) + 6f(\frac{a+b}{2}) + f(b)).$$

7. Укажите квадратурную формулу средних прямоугольников для вычисления определенного интеграла:

$$1) \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2});$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b));$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b));$$

$$4) \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{8}(f(a) + 6f(\frac{a+b}{2}) + f(b)).$$

8. Чему равен порядок алгебраической точности средних прямоугольников:

- 1) 2;
- 2) 0;
- 3) 1;
- 4) 3.

9. Чему равен порядок алгебраической точности левых прямоугольников:

- 1) 2;
- 2) 0;
- 3) 1;

4) 3.

10. Чему равен порядок алгебраической точности формулы трапеций:

1) 2;

2) 0;

3) 1;

4) 3.

11. Чему равен порядок алгебраической точности формулы Симпсона:

1) 2;

2) 4;

3) 1;

4) 3.

12. Чему равен порядок алгебраической точности формулы «трех восьмых»:

1) 2;

2) 4;

3) 1;

4) 3.

13. Чему равен порядок алгебраической точности квадратурной формулы наивысшая алгебраическая степень точности, если число квадратурных узлов равно n :

1) $n - 2$;

2) $2n + 1$;

3) $2n - 2$;

4) $2n - 1$.

14. Как определяются коэффициенты и узлы в квадратурной формуле наивысшей алгебраической степени точности:

1) корни многочлена Чебышева;

2) корни ортогонального многочлена;

3) корни ортогонального многочлена с весом $p(x)$.

15. Как вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ с помощью квадратурного правила наивысшей алгебраической степени точности:

- 1) используя квадратурную формулу Ньютона-Котеса;
- 2) используя квадратурную формулу Гаусса;
- 3) используя квадратурную формулу Симпсона.

1.9. Задания к главе 1

Задание 1.1. Вычислить $I = \int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$ методами:

- 1) левых прямоугольников;
- 2) средних прямоугольников;
- 3) правых прямоугольников;
- 4) трапеций;
- 5) Симпсона;
- 6) “трех восьмых”.

Процесс вычисления интеграла организовать без пересчета значений подынтегральной функции в узлах и при использовании метода Рунге.

Вывести значение интеграла и количество узлов, которое потребовалось для вычисления значения интеграла с заданной точностью.

Варианты исходных данных приведены в п.5.1.

Задание 1.2. Вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ методом Гаусса при $n = 6$ и $n = 7$. Сравнить полученные результаты.
Варианты исходных данных приведены в п.5.1.

2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Во многих инженерных и научных задачах возникает необходимость решения уравнений или систем вида:

$$F(x, p_1, p_2, \dots, p_k) = 0, \quad (2.1)$$

где F – заданная функция либо вектор-функция $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$, x – неизвестная переменная либо вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, p_1, p_2, \dots, p_k – параметры задачи. Как правило, при моделировании возникает необходимость определения решения в зависимости от параметров. При этом каждому фиксированному набору параметров, в соответствии с физическим смыслом конкретной задачи, соответствует либо конечное, либо бесконечное множество решений.

Так, например, в электродинамике при математическом моделировании электромагнитных волновых колебательных процессов в линиях передачи и резонаторах получают так называемое дисперсионное уравнение вида (2.1). В этом случае параметрами p_1, p_2, \dots, p_k являются: частота колебаний, геометрические параметры системы и включений, пространственное распределение диэлектрической и магнитной проницаемостей в электродинамической структуре и т.д. В качестве неизвестного x могут быть выбраны коэффициенты распространения и затухания электромагнитных волн в линиях передачи либо собственные частоты и добротности колебательной системы. Бесконечное множество решений дисперсионного уравнения будет соответствовать бесконечному числу собственных типов волн (колебаний) в исследуемой системе.

Только для простейших нелинейных уравнений и систем удастся найти решение в аналитическом виде. В большинстве случаев приходится решать уравнения и системы вида (2.1) численными методами.

2.1 Решение нелинейных уравнений

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (2.2)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $[a, b]$. Всякое значение x^* , обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что $f(x^*) = 0$, называется *корнем уравнения (2.2)* или *нулем функции $f(x)$* .

Будем предполагать, что уравнение (2.2) имеет лишь *изолированные корни*, т.е. такие корни x^* , для которых существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Численное решение уравнения (2.2) обычно проводят в два этапа:

- 1) *отделение корней* – определение таких интервалов изменения переменной x , где находится только один корень;
- 2) определение корня уравнения с заданной точностью ε .

Для отделения корней, т.е. для определения отрезка $[\alpha, \beta]$, содержащего только один корень, полезна следующая теорема математического анализа.

Теорема 2.1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по крайней мере, один корень уравнения $f(x) = 0$, т.е. найдется хотя бы одно число $x^* \in [\alpha, \beta]$, такое, что $f(x^*) = 0$. Корень x^* будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри этого отрезка.

Для определения начального приближения x_0 для реализации итерационных методов нахождения корней или для определения корня уравнения с невысокой точностью можно использовать следующие методы.

2.1.1. Табличный метод

Сначала определяются знаки функции $f(x)$ в граничных точках интервала $[a, b]$, затем определяют знаки функции $f(x)$ в ряде промежуточных точек этого интервала $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, выбор которых учитывает особенности функции $f(x)$. Если окажется, что для некоторой пары точек α_k, α_{k+1} выполняется неравенство:

$$f(\alpha_k)f(\alpha_{k+1}) < 0,$$

то в силу приведенной выше теоремы в интервале $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ имеется хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$. Затем нужно тем или иным способом убедиться, является ли корень единственным. После чего в качестве начального значения x_0 можно взять любую точку интервала $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.

2.1.2. Графический метод

Начальное приближение x_0 можно определить графически как точку пересечения функцией $y = f(x)$ оси абсцисс. Если $f(x)$ сложная функция, то $f(x)$ представляется в виде разности двух функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, т.е.

$$f(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x),$$

каждую из которых можно достаточно просто изобразить графически. Тогда за x_0 принимают абсциссу точки пересечения функций $y = \psi_1(x)$ и $y = \psi_2(x)$.

Самыми распространенными методами решения нелинейных уравнений являются методы простой итерации и метод Ньютона.

2.1.3. Метод деления отрезка пополам

В методе деления отрезка пополам или методе половинного деления интервал $[a, b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков, делят пополам и из двух полученных интервалов $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ выбирают тот, на концах которого $f(x)$ имеет значения разных знаков. Затем делят пополам выбранный интервал и т.д. Деление интервала продолжается до тех пор, пока длина последнего выбранного интервала не будет превышать заданное значение ε . Число делений интервала k определяется формулой:

$$k = \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2},$$

и в качестве x_0 можно взять любую точку последнего выбранного интервала. Этот метод также называют методом дихотомии.

2.1.4. Метод хорд

Этот метод применяют, если функция $f(x)$ на концах $[a, b]$ принимает значения разных знаков, и, кроме того, $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют постоянные знаки на $[a, b]$. В этом методе за точку деления отрезка $[a, b]$ берут точку

$$x_1 = a_1 - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a),$$

которая является нулем функции

$$f_1(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)].$$

Эта функция является линейным приближением функции $f(x)$ на $[a, b]$, а x_1 – это точка пересечения функцией $f_1(x)$ оси абсцисс. Затем рассматривают отрезки $[a, x_1]$ и $[x_1, a]$ и выбирают тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки. На выбранном отрезке строят функцию $f_2(x)$ и находят нуль этой функции и т.д. Если требуется найти корень уравнения с невысокой точностью ε , то деление отрезков продолжается до тех пор, пока длина очередного выбранного отрезка не будет меньше ε или не выполнится неравенство:

$$|f(x_i)| < \varepsilon,$$

где x_i – очередная точка деления отрезка на два. Эти же критерии можно использовать и для определения начального приближения x_0 .

2.1.5. Метод простой итерации

Сначала требуется привести заданное уравнение $f(x) = 0$ к канонической форме:

$$x = \varphi(x), \quad (2.3)$$

причем для одного уравнения можно построить несколько канонических форм.

Пример 2.1. Пусть исходное уравнение имеет вид:

$$\cos(x) + x - \ln(x) = 0.$$

Функции $\varphi(x)$ канонических форм для этого уравнения будут следующими:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \ln(x) - \cos(x), \\ \varphi_2(x) &= \arccos(\ln(x) - x), \\ \varphi_3(x) &= \exp(\cos(x) + x). \end{aligned}$$

Итерационное правило метода простых итераций имеет вид:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Геометрически это правило означает следующее (см. рис 2.1). Точное решение x^* является точкой пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с биссектрисой $y = x$. За очередное приближение x_{n+1} берется точка, значение которой равно $\varphi(x_n)$. Это значение получается следующим образом: на кривой $y = \varphi(x)$ отмечается точка с координатами $(x_n, \varphi(x_n))$ и проводится прямая параллельная оси абсцисс до пересечения с биссектрисой. Учитывая, что биссектриса – это множество точек, равноудаленных от осей, опускают перпендикуляр на ось абсцисс и находят точку x_{n+1} .

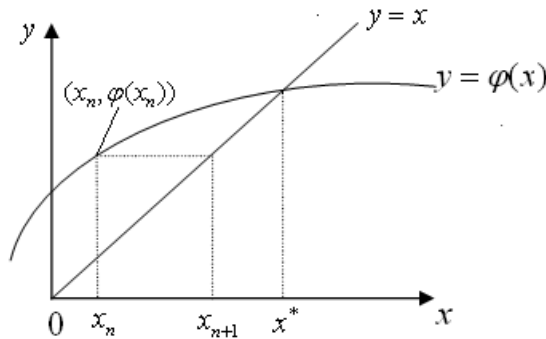


Рис. 2.1- Графическая иллюстрация к методу простой итерации

Для проверки сходимости метода простых итераций используются следующие теоремы.

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия:

- 1) функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$;
- 2) непрерывна там и удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом q , меньшим единицы, т.е. для любых точек $x_1, x_2 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|, \quad 0 \leq q < 1; \quad (2.5)$$

- 3) для начального значения x_0 верно неравенство:

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leq m; \quad (2.6)$$

4) для чисел δ, q и m выполнено требование:

$$\frac{m}{1-q} \leq \delta. \quad (2.7)$$

Тогда

1) уравнение $x = \varphi(x)$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ имеет решение;

2) итерационная последовательность приближений x_n , $n = 1, 2, \dots$ может быть построена, принадлежит отрезку $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и является сходящейся, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, при этом x^* является решением уравнения $x = \varphi(x)$;

3) для x_n выполняется неравенство:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{m}{1-q} q^n,$$

которое характеризует скорость сходимости метода простой итерации.

Теорема 2.3. (о единственности решения). Уравнение $x = \varphi(x)$ на всяком множестве точек, на котором для $\varphi(x)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < |x_1 - x_2|, \quad (x_1 \neq x_2), \quad (2.8)$$

может иметь не более одного решения.

При практическом применении метода простой итерации часто проверяют достаточные условия сходимости итерационного процесса.

Теорема 2.4. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем все ее значения принадлежат этому отрезку. Тогда, если существует q такое, что

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (2.9)$$

для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то

- итерационный метод (2.3) сходится независимо от начального приближения $x_0 \in [\alpha, \beta]$;

- предельное значение $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Замечание 2.1. Зависимость погрешности на $(n+1)$ -м шаге ε_{n+1} от погрешности на n -м шаге ε_n выражается соотношением

$$\varepsilon_{n+1} \approx \varphi'(x^*)\varepsilon_n,$$

поэтому говорят, что метод простой итерации сходится почти со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |\varphi'(x)|.$$

Замечание 2.2. Метод простой итерации является одношаговым, т.е. для построения итерационного правила достаточно одного приближения x_0 .

Отметим, итерационный процесс метода простой итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений не будет выполнено следующее неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon,$$

где ε - заданная погрешность вычисления корня уравнения.

Замечание 2.3. Можно построить каноническую форму таким образом, чтобы выполнялись условия сходимости итерационного процесса. Представим функцию $\varphi(x)$ в виде:

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x),$$

где параметр λ нужно определить таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |\varphi'(x)| = q < 1.$$

Введем следующие обозначения:

$$M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)|, \quad m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)|.$$

Тогда параметр λ можно определить следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{M} \text{sign}(f'(x_0)), \text{ при этом } 0 \leq \varphi'(x) < 1;$$

или

$$\lambda = \frac{2}{M} \text{sing}(f'(x_0)), \text{ при этом } -1 < \varphi'(x) < 1.$$

Действительно, так как $\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$, то в первом случае $q = 1 - \frac{m}{M} < 1$, а во втором $q = 1 - \frac{2m}{M} < 1$.

Существуют видоизменения метода простой итерации. Наиболее известными, увеличивающими скорость сходимости, являются следующие:

метод секущих (правило линейной интерполяции)

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\varphi(x_n) - x_n\varphi(x_{n-1})}{\varphi(x_n) - x_n - \varphi(x_{n-1}) + x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (2.10)$$

метод Стеффенсена

$$x_{n+1} = \frac{x_n\varphi[\varphi(x_n)] - \varphi^2(x_n)}{\varphi[\varphi(x_n)] - 2\varphi(x_n) + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

2.1.6. Метод Ньютона

Метод Ньютона применим к решению широкого класса нелинейных уравнений. Идея этого метода заключается в том, что он позволяет решение нелинейного уравнения свести к решению последовательности линейных задач.

Пусть требуется найти точное решение x^* уравнения $f(x) = 0$ при заданном начальном приближении x_0 . Итерационное правило Ньютона имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

Геометрически метод Ньютона означает следующее (см. рис. 2.2): точное решение x^* является точкой пересечения кри-

вой $y = f(x)$ с осью абсцисс. За очередное приближение x_{n+1} принимается точка пересечения касательной к кривой в точке $(x_n, f(x_n))$ с осью абсцисс.

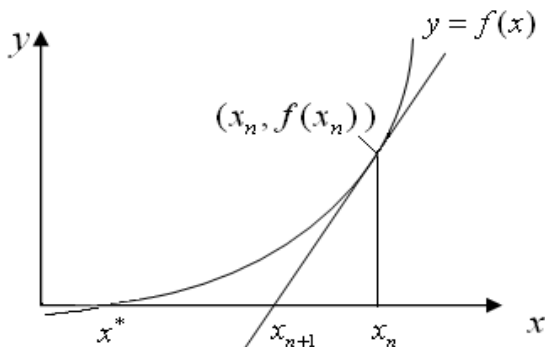


Рис. 2.1- Графическая иллюстрация к методу Ньютона

Для проверки сходимости метода Ньютона используются следующие теоремы.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, при этом $|f''(x)| \leq K$ для всех x на этом отрезке;

2) $f'(x_0) \neq 0$ и $\frac{1}{|f'(x_0)|} \leq B$;

3) $\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \eta$;

4) для B, K, η соблюдено условие

$$h = BK\eta \leq \frac{1}{2};$$

5) верно неравенство

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq \delta.$$

Тогда:

$$\text{- последовательность } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$ может быть построена и является сходящейся, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$;

- предельное значение x^* есть решение уравнения $f(x) = 0$;

- верна оценка скорости сходимости:

$$|x^* - x_n| \leq t^* - t_n,$$

где t_n – последовательность приближений

$$t_{n+1} = t_n - \frac{P(t_n)}{P'(t_n)}$$

к меньшему корню t^* уравнения

$$P(t) = \frac{1}{2} Kt^2 - \frac{1}{B}t + \frac{\eta}{B} = 0,$$

построенная при $t_0 = 0$.

Теорема 2.6. При соблюдении условий предыдущей теоремы о сходимости метода Ньютона для разности $x^* - x_n$ верна оценка:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h)^{2^{n-1}} \eta. \quad (2.13)$$

При практическом использовании метода Ньютона часто проверяют достаточные условия сходимости, определяемые следующей теоремой.

Теорема 2.7. Если $f(x)$ определена, дважды дифференцируема в $[\alpha, \beta]$ и принимает значения разных знаков на концах интервала $[\alpha, \beta]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки на $[\alpha, \beta]$, то, используя начальное приближение $x_0 \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющего неравенству

$$f(x_0)f''(x_0) > 0,$$

получим сходящийся итерационный процесс (2.12) для определения единственного корня x^* уравнения $f(x) = 0$ с любой степенью точности.

Эта теорема дает достаточные условия сходимости метода Ньютона.

Замечание 2.4. Зависимость погрешности на $(n + 1)$ -м шаге ε_{n+1} от погрешности на n -м шаге ε_n в методе Ньютона выражается соотношением

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \varepsilon_n^2,$$

поэтому говорят, что сходимость метода Ньютона является почти квадратичной.

Наиболее известными видоизменениями метода Ньютона, которые уменьшают объем вычислений, являются следующие.

- *метод секущих*

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (2.14)$$

- видоизменение с *постоянным значением производной*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Пример 2.2. Найти корень уравнения $f(x) = 0$ для функции $f(x)$ вида:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 7x - \sqrt{x} + 12.$$

Выполнив отделение корней (это можно сделать построив график функции $y = f(x)$) найдем интервал, которому принадлежит только один корень уравнения. В качестве этого интервала можно взять следующий:

$$[1.5, 1.75].$$

За начальное приближение примем значение $x_0 = 1.7$, которое принадлежит выбранному интервалу. Проверим достаточные условия сходимости метода Ньютона (см. теорему 2.7).

а. Функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на $[1.5, 1.75]$:

$$f'(x) = x - 7 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ и } f''(x) = 1 + \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}.$$

б. На интервале $[1.5, 1.75]$ производные $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки.

с. Произведение положительно $f(x_0)f''(x_0) = 0.26836 > 0$.

Согласно теореме 2.7, можно применять метод Ньютона для нахождения решения уравнения.

Для нахождения решения уравнения $f(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$, используем формулы метода Ньютона, метода секущих и метода, использующего постоянное значение производной. Результаты вычислений приведены в таблице

Метод	x_n	n
Ньютона	1,742609	4
Секущих	1,742631	7
С использованием постоянного значения производной	1,742608	10

Из полученных результатов, видно, что самой высокой скоростью сходимости ($n=4$) обладает метод Ньютона, затем идет секущих ($n=6$) и самой малую скорость имеет метод с постоянным значением производной ($n=10$).

2.2. Метод Лобачевского

Особое место среди нелинейных уравнений занимают алгебраические уравнения или полиномы n -ой степени, которые можно представить в виде:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.16)$$

Для нахождения корней алгебраического уравнения можно использовать методы простой итерации и Ньютона, но, во-первых, эти методы предназначены для отыскания действительных простых корней и, во-вторых, даже если нужно найти только действительные корни необходимо для каждого корня указать интервалы, содержащие изолированные корни и определить начальные приближения.

Для нахождения корней полиномов существует метод Лобачевского. Он не требует определения начальных приближений для корней и позволяет одновременно найти все корни полинома (2.16). Недостатком этого метода является тот факт, что при вычислениях приходится иметь дело с числами, которые сильно различаются по порядкам величин.

Пусть коэффициенты полинома (2.16) a_0, a_1, \dots, a_n являются действительными числами, а корни пронумерованы в следующем порядке:

$$|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_n|. \quad (2.17)$$

Кроме того, будем предполагать, что все корни являются действительными и различными. В основание метода Лобачевского положены следующие соотношения между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения (равенства Виетта):

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_1}{a_0}, \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_2}{a_0}, \\
x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_3}{a_0}, \\
&\dots \\
x_1x_2x_3\dots x_n &= (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Будем говорить, что корни x_i , $i = \overline{1, n}$ *сильно разделены в смысле отношения их модулей*, если модуль предыдущего корня во много раз больше модуля последующего корня:

$$\left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right| \gg 1, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{2.19}$$

Если выполняются соотношения (2.19), то равенства Виетта (2.18) значительно упрощаются. Так, первое уравнение в (2.18) можно записать в виде:

$$x_1 \left(1 + \frac{x_2}{x_1} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right) = -\frac{a_1}{a_0},$$

и, так как для корней выполняется соотношение (2.19), то все отношения, стоящие в скобках, будут величинами, пренебрежимо малыми в сравнении с единицей, и ими можно пренебречь. Тогда получим

$$x_1 \approx -\frac{a_1}{a_0}.$$

Аналогичное будет иметь место и для всех остальных равенств Виетта и (2.18) можно заменить следующей системой приближенных равенств, верных лишь в принятой точности вычислений:

$$\begin{aligned}
x_1 &\approx -\frac{a_1}{a_0}, \\
x_1 x_2 &\approx \frac{a_2}{a_0}, \\
x_1 x_2 x_3 &\approx -\frac{a_3}{a_0}, \\
&\dots \\
x_1 x_2 \dots x_n &\approx (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Тогда из (2.20) следует, что

$$x_1 \approx -\frac{a_1}{a_0}, \quad x_2 \approx -\frac{a_2}{a_1}, \quad x_3 \approx -\frac{a_3}{a_2}, \dots, x_n \approx -\frac{a_n}{a_{n-1}}. \tag{2.21}$$

Таким образом найти сильно разделенные корни алгебраического уравнения достаточно просто. Поэтому решение уравнения (2.16) необходимо начинать с разделения корней. Для этого можно воспользоваться *процессом квадрирования*, то есть построением последовательности таких полиномов, у которых корни последующего равны квадратам соответствующих корней предыдущего. Это равносильно вычислению коэффициентов для последовательности полиномов по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}
a_0^{(k+1)} &= (a_0^{(k)})^2, \\
a_1^{(k+1)} &= (a_1^{(k)})^2 - 2a_0^{(k)} a_2^{(k)}, \\
a_2^{(k+1)} &= (a_2^{(k)})^2 - 2a_1^{(k)} a_3^{(k)} + 2a_0^{(k)} a_4^{(k)}, \\
&\dots \\
a_n^{(k+1)} &= (a_n^{(k)})^2.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Процесс квадрирования можно прекратить, если в пределах принятой точности выполняются соотношения:

$$a_i^{(k+1)} \approx \overline{(a_i^{(k)})^2}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{2.23}$$

Тогда для полинома

$$P^{(k)}(x) = a_0^{(k)} x^n + a_1^{(k)} x^{n-1} + \dots + a_n^{(k)}, \tag{2.24}$$

в силу разделенности его корней, выполняются соотношения аналогичные (2.21), а модули приближенных значений корней исходного уравнения (2.16) можно определить из следующих равенств:

$$|x_1|^m = \left| \frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right|, \quad |x_2|^m = \left| \frac{a_2^{(k)}}{a_1^{(k)}} \right|, \dots, |x_n|^m = \left| \frac{a_n^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}} \right|, \quad (2.25)$$

где $m = 2^k$, при этом знаки корней определяются подстановкой в исходное уравнение.

Если корни уравнения (2.16) все действительные и среди них есть равные по абсолютной величине, например, x_2 и x_3 , то для уравнения (2.24), полученного после квадрирования, будут справедливы следующие приближенные равенства:

$$\begin{aligned} x_1^m &\approx -\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ 2x_1^m x_2^m &\approx -\frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^m x_2^{2m} &\approx -\frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ &\dots \\ x_1^m x_2^{2m} \dots x_n^m &\approx (-1)^n \frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тогда из второго равенства в (2.26) следует, что

$$|x_2|^m = \frac{1}{2} \left| \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right|,$$

а из третьего –

$$|x_2|^{2m} = \left| \frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right|,$$

и любое из этих равенств можно использовать для определения модулей корней x_2 и x_3 , знаки которых, как и ранее, определяются подстановкой в исходное уравнение.

Если уравнение имеет комплексные корни, то они будут попарно сопряжены, так как все коэффициенты уравнения действительные. Пусть, например, x_2 и x_3 – пара комплексно сопряженные корней. Эти корни можно представить в виде:

$$x_2 = re^{i\varphi}, \quad x_3 = re^{-i\varphi}. \quad (2.27)$$

Так как $x_2^m + x_3^m = 2r^m \cos(m\varphi)$ и $x_2^m x_3^m = r^{2m}$, то для уравнения (2.24), полученного после квадрирования, будут справедливы следующие приближенные равенства:

$$\begin{aligned} x_1^m &\approx -\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ 2x_1^m r^m \cos(m\varphi) &\approx \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^m r^{2m} &\approx -\frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^m r^{2m} x_4^m &\approx \frac{a_4^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ &\dots \\ x_1^m r^{2m} \dots x_n^m &\approx (-1)^n \frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тогда модуль комплексных чисел можно определить из соотношения:

$$r^{2m} = \left| \frac{a_3^{(k)}}{a_1^{(k)}} \right|, \quad (2.29)$$

а для определения аргумента можно воспользоваться первым соотношением Виетта в (2.18), которое в данном случае будет иметь вид:

$$x_1 + 2r \cos(\varphi) + x_4 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}. \quad (2.30)$$

Отсюда определяется значение $\cos(\varphi)$, а $\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$.

Таким образом, решение алгебраического уравнения методом Лобачевского осуществляется в несколько этапов.

1. Разделение корней путем квадрирования, при этом по поведению коэффициентов, получаемых в процессе квадрирования, делается вывод о том, какими являются корни уравнения:

- если все коэффициенты стремятся к квадратам соответствующих коэффициентов, полученных на предыдущем шаге процесса квадрирования, то все корни действительные и различные;

- если какой-то коэффициент стремится к квадрату соответствующего коэффициента, деленному на целое число, то номер этого коэффициента указывает на номер первого из равных по модулю корней уравнения в соответствии с нумерацией (2.17), а целое число указывает на количество таких корней;

- если какой-то коэффициент меняет знак в процессе квадрирования, то это указывает на наличие комплексно сопряженных корней, причем номер этого коэффициента указывает на первый из таких корней.

2. Вычисление значений корней по формулам, которые соответствуют сделанным выводам о виде корней.

Пример 2.3. С помощью метода Лобачевского найти корни уравнения вида:

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

для следующих значений коэффициентов:

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = -1.$$

Разделяем корни путем квадрирования, для этого воспользуемся формулой (2.22):

k	a_0^k	a_1^k	a_2^k	a_3^k
0		3	-1	-1
1		11	7	1
2		107	27	1
3		11395	515	1
4		129844995	242435	1

Прекращаем процесс квадрирования при выполнении условия $a_i^{(k+1)} \approx (a_i^{(k)})^2$, $i = \overline{0,3}$.

$$k = 4, m = 2^k = 2^4 = 16$$

Так как все коэффициенты стремятся к квадратам соответствующих коэффициентов, полученных на предыдущем шаге процесса квадрирования, то все корни действительные и различные.

Подставив найденные значения в формулу (2.25) найдем модули корней уравнения:

$ x_1^* $	$ x_2^* $	$ x_3^* $
3,214	0,67522	0,46075

Для определения знака значения корней уравнения подставим их в исходное уравнение:

$$P(x) = 1 \cdot x^3 + 3x^2 - 1 \cdot x - 1 = 0.$$

В результате получим следующую таблицу:

	x_1^*	x_2^*	x_3^*
	-3,214	0,67522	-0,46075
$P(x)$	0	0	0

2.3. Решение систем нелинейных уравнений

Пусть требуется найти решение $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\
 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\
 &\dots \\
 f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Введем следующие обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T.$$

Тогда система (2.31) запишется в виде:

$$f(x) = 0, \tag{2.32}$$

Для решения систем нелинейных уравнений используются методы *простой итерации* и *Ньютона*, которые являются естественным распространением этих методов для решения уравнений на многомерный случай.

Для метода простой итерации систему (2.32) необходимо привести к канонической форме

$$x = \varphi(x), \tag{2.33}$$

где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$. Итерационное правило простой итерации записывается в виде:

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \tag{2.34}$$

Для проверки сходимости метода простых итераций используются следующие теоремы.

Теорема 2.8. Пусть выполняются условия:

- функции $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ определены и непрерывно дифференцируемы в области

$$\max_i |x_i - x_i^{(0)}| \leq \delta, \quad (2.35)$$

где $i = \overline{1, n}$;

- удовлетворяют в этой области неравенствам

$$\max_i \max_x \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \leq q < 1, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.36)$$

- для начального приближения $x^{(0)}$ выполняется условие:

$$|x_i^{(0)} - \varphi_i(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| \leq m, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.37)$$

- для чисел δ, q и m соблюдается неравенство:

$$\frac{m}{1-q} \leq \delta. \quad (2.38)$$

Тогда система уравнений в области (2.35) имеет решение $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, к которому сходится итерационная последовательность приближений $x^{(k)}$, при этом скорость сходимости неравенством:

$$\max_i |x_i^* - x_i^{(k)}| \leq \frac{m}{1-q} q^k, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.39)$$

Замечание 2.5. Если задана требуемая точность ε решения системы нелинейных уравнений, то количество необходимых итераций может быть найдено в силу неравенства (2.39) по формуле

$$n = \frac{\ln \frac{(1-q)\varepsilon}{m}}{\ln q}.$$

Пример 2.4. Требуется для системы двух уравнений

$$f_1(x_1, x_2) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0,$$

где $f_1(x_1, x_2) = \sin x_1 + 4x_2 - 2$ и $f_2(x_1, x_2) = \cos(x_2 - 1) + 3x_1 - 1$, подобрать каноническую форму и для заданных начальных

приближений проверить условия сходимости метода простой итерации.

Каноническую форму представим в виде

$$x_1 = \varphi_1(x_1, x_2),$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1, x_2),$$

где

$$\varphi_1(x_2) = \frac{1 - \cos(x_2 - 1)}{3},$$

$$\varphi_2(x_1) = \frac{2 - \sin(x_1)}{4}.$$

Начальное приближение $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ примем равным $(1, 1)$. Для проверки условия сходимости метода простых итераций воспользуемся теоремой 2.8. Функции $\varphi_1(x_2)$ и $\varphi_2(x_1)$ определены и непрерывно дифференцируемы в области:

$$\max_i |x_i - x_i^{(0)}| \leq \delta, \quad i = \overline{1, n},$$

при значении $\delta = 2$.

В этой области для функций $\varphi_1(x_2)$ и $\varphi_2(x_1)$ справедливы неравенства вида (2.36):

$$\max_{x_2} \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} \right| \right\} = \max_{x_2} \left| \frac{1}{3} \sin(1 - x_2) \right| = \frac{1}{3},$$

$$\max_{x_1} \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_2(x_1)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2(x_1)}{\partial x_2} \right| \right\} = \max_{x_1} \left| -\frac{1}{4} \cos(x_1) \right| = \frac{1}{4}.$$

Для того чтобы неравенства (2.36) выполнялись всегда достаточно выбрать в качестве параметра $q = \frac{1}{3} < 1$. Легко можно убедиться, что для начального приближения $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (1, 1)$ условие (2.37) выполняется при $m = 1$. Для чисел δ, q и m соблюдается неравенство (2.38):

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1,5 < \delta = 2.$$

Тогда согласно теореме 2.8, система в области $x_1 \in [-1,3]$ и $x_2 \in [-1,3]$ имеет решение $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, к которому сходится последовательность приближений (2.34).

Итерационное правило метода Ньютона имеет вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [f'(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.40)$$

где $[f'(x^{(k)})]^{-1}$ – обратная матрица к матрице Якоби вида:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Для реализации этих методов необходимо отделить корни и задать начальное приближение $x^{(0)}$. Проверка сходимости метода Ньютона в общем случае достаточно сложна.

2.4. Контрольные вопросы

1. Укажите условия, при выполнении которых корень x уравнения $f(x) = 0$ считается отделённым на отрезке $[a, b]$:

- 1) если на этом отрезке функция $f(x)$ выпуклая;
- 2) если на этом отрезке функция не имеет других корней;
- 3) если на этом отрезке функция $f(x)$ монотонная и на концах отрезка принимает значения с различными знаками;
- 4) если на этом отрезке функция $f(x)$ монотонная и на концах отрезка принимает значения с одинаковыми знаками.

2. Корень нелинейного уравнения вида $x = \varphi(x)$ или $f(x) = x - \varphi(x) = 0$ вычисляется методом Ньютона, укажите правильную запись этого метода:

1) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$;

2) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;

3) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

3. Корень нелинейного уравнения вида $x = \varphi(x)$ или $f(x) = x - \varphi(x) = 0$ вычисляется методом простой итерации, укажите правильную запись этого метода:

1) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$;

2) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;

3) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

4. Укажите каноническую форму, используемую в методе простой итерации, если уравнение представлено в виде $f(x) = 0$:

1) $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$;

2) $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x^2 - \lambda f(x)$;

3) $x^2 = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x - (\lambda + f(x))$.

5. Укажите как определяется правило остановки итерационного процесса в методе простой итерации:

1) $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q}{1-q} \varepsilon$;

2) $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q-1}{q} \varepsilon$;

$$3) |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon.$$

6. Метод Лобачевского определяет корни уравнения

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0:$$

- 1) только вещественные корни;
- 2) только один корень вещественный или комплексный;
- 3) сразу все n корней.

2.5. Задания к главе 2

Задание 2.1. Отделить корни уравнения $f(x) = 0$ графически и уточнить. Один из корней уравнения вычислить с помощью метода простой итерации с точностью до $\varepsilon = 0,00005$. Проверить условие сходимости (теорема 2.2). Варианты исходных данных приведены в п.5.2.

Задание 2.2. Отделить корни уравнения $f(x) = 0$ графически и уточнить. Один из корней уравнения вычислить с помощью метода Ньютона с точностью до $\varepsilon = 0,00005$. Проверить достаточное условие сходимости (теорема 2.7). Варианты исходных данных приведены в п.5.2.

Задание 2.3. С помощью метода Лобачевского определить корни уравнения с точностью $\varepsilon = 0,00005$. Варианты исходных данных приведены в п.5.2.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

В матричной алгебре рассматриваются четыре класса основных задач: решение систем линейных алгебраических уравнений, вычисление определителей, нахождение обратных матриц, определение собственных значений и собственных векторов матриц. Все эти задачи имеют важное прикладное значение при моделировании в различных областях науки и техники. Кроме того, задачи матричной алгебры являются вспомогательными при реализации многих алгоритмов вычислительной математики, математической физики, обработки результатов экспериментальных исследований.

3.1. Некоторые понятия матричной алгебры

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ – вектор n -мерного пространства, $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ – матрица порядка n .

Одним из важных понятий матричной алгебры является понятие нормы векторов и матриц.

Нормой вектора x называется действительное число, обозначаемое $\|x\|$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$ и $\|0\| = 0$;
- 2) $\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|$, при любом численном множителе C ;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Из такого определения нормы вектора непосредственно следует, что $\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$.

Говорят, что последовательность векторов $x^{(k)}$ сходится к вектору x по норме, если $\|x - x^{(k)}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Вводить норму вектора можно различными способами, но при этом должны выполняться условия 1) – 3) определения нормы.

Наиболее часто используются следующие определения нормы вектора.

1. *Первая (кубическая) норма:*

$$\|x\|_I = \max_i |x_i|. \quad (3.1)$$

Множество векторов вещественного пространства, для которых $\|x\|_I \leq 1$ заполняет единичный куб.

2. *Вторая (октаэдрическая) норма:*

$$\|x\|_{II} = \sum_{i=0}^n |x_i|. \quad (3.2)$$

Множество векторов вещественного пространства, для которых $\|x\|_{II} \leq 1$, заполняет n -мерный аналог октаэдра (восьмиугольника).

3. *Третья (сферическая или евклидова) норма:*

$$\|x\|_{III} = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=0}^n |x_i|^2}. \quad (3.3)$$

Это длина вектора. Совокупность векторов, для которых $\|x\|_{III} \leq 1$, заполняет шар единичного радиуса.

Скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ вводится по формуле:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

где \bar{y}_i – компоненты вектора, комплексно сопряженного вектору y .

Норма вектора может быть определена многими способами в зависимости от условий задачи и целей исследования, но при всяком определении она должна удовлетворять трем условиям, которые являются аксиомами общей или абстрактной нормы.

Нормой матрицы A называют число $\|A\|$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\|A\| = 0$, если $A = 0$ и $\|0\| = 0$;
- 2) $\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$ для всякого числового множителя c ;
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Для нормы матрицы верно неравенство:

$$\|A - B\| \geq \left| \|A\| - \|B\| \right|.$$

В большинстве случаев приходится одновременно рассматривать матрицы и векторы, потому их нормы рационально вводить так, чтобы они были в какой-то мере согласованными. Обычно говорят, что норма матрицы A согласована с нормой вектора, если для всякого вектора x размерности n выполняется неравенство:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|. \quad (3.4)$$

Среди согласованных норм матрицы часто (особенно при получении оценок, чтобы сделать их точными) выбирают наименьшую. Так как случай нулевого вектора интереса не имеет, то неравенство (7.6.4) можно записать в виде $\|Ay\| \leq \|A\|$, где $y = \frac{x}{\|x\|}$, т.е. $\|y\| = 1$.

Последнее означает, что согласованная норма матрицы должна быть верхней границей норм векторов Ay , при условии, что $\|y\| = 1$. Наименьшей согласованной нормой будет точная верхняя граница множества значений $\|Ay\|$ при $\|y\| = 1$, т.е.

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (3.5)$$

Эта норма называется нормой матрицы, подчиненной норме вектора.

Наиболее распространенными подчиненными нормами матриц являются следующие определения норм матриц.

1. *Первая (кубическая) норма:*

$$\|A\|_I = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (3.6)$$

2. *Вторая (октаэдрическая) норма:*

$$\|A\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (3.7)$$

3. *Третья (сферическая или евклидова) норма:*

$$\|A\|_{III} = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = \sqrt{\mu_1}, \quad (3.8)$$

где μ_1 – наибольшее по модулю собственное значение матрицы A^*A , где A^* – матрица, сопряженная A .

Важным понятием матричной алгебры является понятие собственного значения матрицы. *Собственным значением* (или *характеристическим числом*) квадратной матрицы A называется такое число λ , что для некоторого ненулевого вектора x имеет место равенство:

$$Ax = \lambda x. \quad (3.9)$$

Любой ненулевой вектор x , удовлетворяющий этому равенству, называется *собственным вектором* матрицы A , соответствующим (или *принадлежащим*) собственному значению λ . Все собственные векторы матриц определены с точностью до числового множителя.

Представим систему (3.9) в виде:

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad (3.10)$$

где E – единичная матрица соответствующей размерности.

Условием существования для однородной системы ненулевого решения является равенство нулю ее определителя, т.е.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.11)$$

Это уравнение обычно называют *вековым* или *характеристическим уравнением* матрицы A .

Левая часть векового уравнения

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) \quad (3.12)$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A . Многочлен $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n, \quad (3.13)$$

отличающийся от характеристического множителем $(-1)^n$, называется *собственным многочленом* матрицы A . Собственные значения матрицы являются корнями собственного многочлена. Совокупность всех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A , где каждое собственное значение выписано столько раз, какова его кратность как корня собственного многочлена, называется *спектром* матрицы A . Собственными векторами x_i матрицы A являются нетривиальные решения однородной системы (7.6.10), в которой вместо λ подставлены собственные значения λ_i , $i = \overline{1, n}$.

Нахождение всех собственных значений и соответствующих собственных векторов матрицы называется решением *полной проблемы собственных значений*, нахождение части собственных значений (чаще всего это максимальное по модулю собственное значение) называется *частичной проблемой собственных значений*.

Полезно знать следующие соотношения между элементами матрицы A и ее собственными значениями:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr}A, \quad (3.14)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|, \quad (3.15)$$

где $\text{tr}A$ обозначает *след матрицы*, который равен сумме ее диагональных элементов. Из (3.15), в частности, следует, что матрица A имеет хотя бы одно собственное значение, равное нулю, если определитель этой матрицы равен нулю, т.е. если она *особенная*.

3.2. Обусловленность систем и матриц

Большое значение при решении задач матричной алгебры имеет понятие *обусловленности систем и матриц*.

Пусть δ – погрешность исходных данных, а ε – погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений. Оценим зависимость погрешности решения от погрешности исходных данных неравенством:

$$\varepsilon \leq k \delta. \quad (3.16)$$

Число k характеризует зависимость максимально возможных ошибок решения от ошибок исходных данных задачи, и, зная его, можно разумно выбрать допустимую погрешность метода и необходимую точность проведения вычислений. Действительно, если исходные данные известны с погрешностью δ , то нецелесообразно искать решение задачи с точностью, намного превосходящей $k \delta$.

Если k «не очень велико», то будем говорить, что система *хорошо обусловлена*, если k «велико» – то система *плохо обусловлена*. Из (7.6.16) видно, что в плохо обусловленной задаче малым погрешностям исходных данных отвечают большие погрешности в решении.

Пусть система линейных алгебраических уравнений задана в виде:

$$Ax = b, \quad (3.17)$$

где A – невырожденная вещественная матрица.

Обозначим δA и δb соответственно матрицу и вектор малых погрешностей элементов матрицы A и вектора свободных членов b , δx – вектор погрешностей решения. Тогда для относительной погрешности решения справедлива следующая оценка:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}} \left\{ \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right\}, \quad (3.18)$$

где μ_1 и μ_n – максимальное и минимальное собственные значения матрицы A^*A . Таким образом, обусловленность системы (7.6.17) зависит от величины отношения $\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}}$.

Замечание 3.1. Если матрица A симметрическая, то собственные значения матрицы A^*A равны квадратам собственных значений матрицы A , т.е.

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \quad (3.19)$$

где λ_1, λ_n – соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы A .

Пусть δ – величина *невязки* (результат подстановки найденного решения в исходную систему), т.е.

$$\delta = Ax - b. \quad (3.20)$$

Если (3.20) переписать в виде:

$$Ax = b + \delta, \quad (3.21)$$

то, если система плохо обусловлена, малым δ может соответствовать большая погрешность в решении. Таким образом, *оценка точности решения системы по невязкам применима только к хорошо обусловленным системам*. В то же время проверка точности определения обратной матрицы не зависит от ее обусловленности. Действительно, если \tilde{A}^{-1} – приближенное значение обратной к A матрицы, тогда невязка решения задачи обращения матрицы δ равна:

$$\delta = A\tilde{A}^{-1} - E \quad (3.22)$$

и

$$\frac{\|\delta A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \delta, \quad (3.23)$$

где $\delta A^{-1} = \tilde{A}^{-1} - A^{-1}$ – погрешность вычисления обратной матрицы.

Из геометрической интерпретации решения системы линейных алгебраических уравнений, где рассматривается решение системы как точка пересечения гиперплоскостей $L_i = \{A_i x - b_i = 0, \quad i = \overline{1, n}\}$, следует, что если

$$|\det A| \approx \prod_{i=1}^n \|A_i\|, \quad (3.24)$$

то система хорошо обусловлена, если

$$\frac{\prod_{i=1}^n \|A_i\|}{|\det A|} \gg 1, \quad (3.25)$$

то система плохо обусловлена. Здесь A_i – вектор, являющийся i -ой вектор-строкой матрицы A .

Для проверки обусловленности системы и матрицы A можно использовать *число обусловленности* матрицы A :

$$\nu = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что если матрица A близка к особенной, то число ν будет велико, и матрица A будет плохо обусловленной, если ν мало, то матрица A будет хорошо обусловленной. Как правило, *система с плохо обусловленной матрицей будет плохо обусловленной системой и наоборот*.

Значение числа ν зависит от выбора нормы матрицы A . Если A – вещественная матрица и используется третье определение нормы, то

$$\nu_{III} = \|A\|_{III} \cdot \|A^{-1}\|_{III} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}}. \quad (3.27)$$

Ввиду важности понятия обусловленности систем и матриц приведем численный пример.

Пример 3.1. Пусть дана система

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 16 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 39 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Точное решение системы: $x^* = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$.

Точное значение обратной матрицы:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12,065 & -8,097 & -0,548 & 0,129 \\ -8,097 & 5,645 & 6,323 & -0,194 \\ -0,548 & 6,323 & 0,101 & -0,097 \\ 0,129 & -0,194 & -0,097 & 0,258 \end{pmatrix}.$$

Если внести погрешность $\delta_1 = 0,01$ только в один элемент a_{11} матрицы A , то значение обратной матрицы будет равно

$$A^{-1} + \delta A^{-1} = \begin{pmatrix} 10,766 & -7,225 & -0,489 & 0,115 \\ -7,225 & 5,060 & 0,283 & -0,184 \\ -0,489 & 0,283 & 0,159 & 0,096 \\ 0,115 & -0,184 & 0,096 & 0,258 \end{pmatrix}.$$

Решение системы также изменится и будет равно:

$$(A^{-1} + \delta A^{-1})b = (0,892 \ 1,072 \ 1,005 \ 0,225)^T$$

Если внести погрешность $\delta_2 = 0,01$ в вектор свободных членов, т.е. $(b + \delta b) = (23 + \delta_2 \ 32 - \delta_2 \ 39 - \delta_2 \ 31 - \delta_2)^T$, то решение системы будет следующим:

$$A^{-1}(b + \delta b) = (1,206 \ 0,861 \ 0,991 \ 1,002)^T.$$

Собственные числа матрицы A равны: 5,468; 0,057; 3,08; 32,398, а отношение максимального собственного значения к минимальному есть 568,386. Число обусловленности матрицы A , вычисленное по третьей норме, приблизительно равно 580.

Таким образом, обусловленность системы и обусловленность задачи отыскания обратной матрицы тесно связаны, а именно: *из хорошей обусловленности системы следует хорошая обусловленность задачи отыскания обратной матрицы и,*

наоборот, из плохой обусловленности системы следует плохая обусловленность задачи отыскания обратной матрицы.

Приведенные результаты получены в системе Mathcad, которая осуществляет все вычисления с 15 знаками после запятой, т.е. погрешность округления не оказала влияния на результат.

Если система является плохо обусловленной, то необходимо осуществлять ее решение специальными методами, например, методами регуляризации, которые предназначены для решения плохо обусловленных систем.

3.3. Метод Гаусса

Достаточно часто для решения систем с действительными элементами используется *метод Гаусса (метод исключения неизвестных)*. Этот метод осуществляет приведение исходной системы к эквивалентной системе с правой треугольной матрицей (*схема единственного деления*) или с диагональной матрицей (*схема оптимального исключения*). При этом не требуется заранее определять, имеет или нет решение данная система.

Рассмотрим схему единственного деления. Систему $Ax = b$ представим в виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Будем считать выбор порядка преобразования, в котором исключаются неизвестные, произвольным. Выберем какое-либо уравнение и неизвестное в этом уравнении. Единственное условие, которое должно быть выполнено при этом выборе, состоит в том, что коэффициент при выбранном неизвестном должен быть отличным от нуля. Переставляя, если необходимо, уравнения и меняя местами неизвестные, можно считать, что выбрано первое уравнение, неизвестное x_1 , и при этом $a_{11} \neq 0$. Разделив выбранное уравнение на a_{11} , приведем его к виду:

$$x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = q_1, \tag{3.29}$$

где

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad q_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Исключим x_1 из остальных уравнений системы. Для этого умножим (3.29) последовательно на $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ и вычтем из второго, третьего и т.д. последнего уравнения системы. Преобразованные уравнения будут иметь вид:

$$a_{22.1}x_2 + a_{23.1}x_3 + \dots + a_{2n.1}x_n = b_{2.1}, \quad (3.30)$$

...

$$a_{n2.1}x_2 + a_{n3.1}x_3 + \dots + a_{nn.1}x_n = b_{n.1},$$

где $a_{ij.1} = a_{ij} - b_{1j}a_{i1}$, $i, j = \overline{2, n}$, $b_{i.1} = b_i - a_{i1}q_1$.

К полученной системе применим такое же преобразование, т.е. выберем уравнение и неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, приведем этот коэффициент к единице, исключим неизвестное из прочих уравнений и так до тех пор, пока такие преобразования возможны.

В результате придем к одной из двух ситуаций.

1. После n шагов преобразований получим систему вида:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n &= q_1, \\ x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n &= q_2, \\ &\dots \\ x_n &= q_n. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Решение полученной системы осуществляется снизу вверх следующим образом:

$$\begin{aligned} x_n &= q_n, \\ x_i &= q_i - \sum_{j=n}^{i-1} b_{ij}x_j, \quad i = \overline{n-1, 1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

2. После шага преобразований $m < n$ система приняла вид:

$$\begin{aligned}
 x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n &= q_1, \\
 x_m + b_{m\ m+1}x_{m+1} + \dots + b_{m\ n}x_n &= q_m, \\
 0 &= b_{m+1\ n}, \\
 &\dots \\
 0 &= b_{m\ n}.
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Тогда, если среди элементов $b_{m+1\ n}, \dots, b_{m\ n}$ есть отличные от нуля, то система (3.28) не имеет решения, если все, $b_{j\ m} = 0$, $j = \overline{m+1, n}$, то система имеет бесчисленное множество решений (неизвестные x_{m+1}, \dots, x_n могут принимать любые значения, а x_1, \dots, x_m выражаются через них).

Приведение системы к виду (3.31) называется *прямым ходом метода Гаусса*, а нахождение ее решения (3.32) – *обратным*. Заметим, что на каждом шаге прямого хода метода Гаусса выбирается уравнение и неизвестное, подлежащие исключению из прочих уравнений. Это равносильно выбору коэффициента для очередного шага преобразований. Этот коэффициент называется *ведущим* и он должен быть отличным от нуля. Во избежание большой потери точности рекомендуется осуществлять такую перестановку уравнений, чтобы ведущий коэффициент являлся либо максимальным по модулю коэффициентом во всей системе, либо максимальным по модулю коэффициентом в выбранном уравнении. Такая процедура называется *методом Гаусса с выбором главного элемента*.

Метод Гаусса применим к вычислению определителей и обратных матриц. Так, значение определителя D матрицы A равно произведению ведущих коэффициентов:

$$D = a_{11}a_{22.1} \cdots a_{nn.n-1}, \tag{3.34}$$

а вычисление обратной матрицы осуществляется одновременным решением n систем:

$$Ax^{(k)} = e_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{3.35}$$

где e_k – единичный вектор (вектор, у которого все элементы, кроме k -го, равны нулю, а k -ый равен единице), $x^{(k)}$ – k -ый стол-

бец матрицы A^{-1} . Невозможность вычисления обратной матрицы проявляется в невозможности решения какой-либо системы из (3.35).

3.4. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Эти методы дают решение системы в виде предела последовательности некоторых векторов, построение которых осуществляется посредством единообразного процесса, называемого процессом итераций. В современной литературе описано большое количество итерационных методов, основанных на различных принципах. Как правило, вычислительные схемы таких методов просты и удобны для реализации на ЭВМ. Однако каждый итерационный процесс имеет свою ограниченную область применения, так как:

- процесс итераций может оказаться расходящимся для данной системы;
- сходимость процесса итераций для данной системы может быть настолько медленной, что практически невозможно достичь удовлетворительной близости к точному решению за приемлемое время.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f \quad (3.36)$$

с неособенной матрицей A . Точное решение системы x^* является пределом последовательности векторов $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$, которые строятся по рекуррентным формулам:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + H^{(k)}(f - Ax^{(k-1)}) \quad (3.37)$$

или

$$x^{(k)} = C^{(k)}x^{(k-1)} + z^{(k)}, \quad (3.38)$$

где $H^{(k)}, C^{(k)}$ – последовательности матриц, $z^{(k)}$ – последовательности векторов, $k = 0, 1, \dots$. При этом для линейных систем в качестве начального приближения $x^{(0)}$ можно взять любой вектор соответствующей размерности.

Итерационные процессы, протекающие по формулам (3.37) и (3.38), обладают тем свойством, что для каждого из них точное решение x^* является неподвижной точкой. Это значит, что если за начальное приближение $x^{(0)}$ взято x^* , то все последующие приближения будут также равны x^* .

Простейшими среди итерационных процессов являются стационарные, в которых матрицы в (3.37) и (3.38) не зависят от номера шага k .

3.4.1. Метод простой итерации (последовательных приближений)

Под процессом последовательных приближений понимается следующий итерационный процесс. Система уравнений (3.36) записывается в виде:

$$x = Bx + g,$$

где $B = E - A$, E – единичная матрица соответствующего порядка, $g = f$, и последовательные приближения вычисляются по формуле:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g. \quad (3.39)$$

Сходимость метода последовательных приближений определяется следующими теоремами.

Теорема 3.1. Для сходимости метода последовательных приближений (3.39) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.

Теорема 3.2. Для сходимости метода последовательных приближений достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы B была меньше единицы.

Таким образом, для сходимости метода последовательных приближений достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

$$\max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1,$$

$$\max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1,$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 < 1,$$

где b_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ – элементы матрицы B .

3.4.2. Метод Зейделя

Пусть система (3.36) представлена в виде:

$$x = Bx + g, \quad (3.45)$$

где $B = E - A$, $g = f$.

Одношаговый циклический процесс, называемый методом Зейделя, отличается от процесса последовательных приближений тем, что при вычислении k -го приближения для i -ой компоненты учитываются вычисленные ранее k -е приближения для компонент $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$. Таким образом, вычисления ведутся по формулам:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.46)$$

Представим систему (3.45) в матричном виде:

$$x = (M + N)x + g, \quad (3.47)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда итерационное правило (3.46) можно представить в матричной форме в виде:

$$x^{(k)} = Mx^{(k)} + Nx^{(k-1)} + g \quad (3.48)$$

или

$$x^{(k)} = (E - M)^{-1} N x^{(k-1)} + (E - M)^{-1} g. \quad (3.49)$$

Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $(E - M)^{-1} N$ были по модулю меньше единицы или, что то же самое, чтобы корни уравнения

$$|N - (E - M)t| = \begin{vmatrix} b_{11} - t & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ b_{21}t & b_{22} - t & \dots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}t & b_{n2}t & \dots & b_{nn-1}t & b_{nn} - t \end{vmatrix} = 0$$

были по модулю меньше единицы. Достаточное условие сходимости состоит в том, чтобы правая или вторая норма матрицы B были меньше единицы.

3.5. Метод Данилевского решения полной проблемы собственных значений

Метод Данилевского решения полной проблемы собственных значений основан на том, что преобразование подобия не изменяет характеристического многочлена матрицы. Целью преобразования подобия является приведение исходной матрицы A к канонической форме Фробениуса:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

по виду которой можно достаточно просто построить ее собственный многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n, \quad (3.51)$$

так как коэффициенты собственного многочлена являются элементами последнего столбца матрицы Фробениуса.

Для получения матрицы Фробениуса строится последовательность матриц $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)}$ по следующему правилу:

$$A^{(i)} = S_i^{-1} A^{(i-1)} S_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (3.52)$$

где каждая последующая матрица $A^{(i)}$ получается из предыдущей $A^{(i-1)}$ преобразованием подобия с помощью матрицы S_i :

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}^{(i-1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}^{(i-1)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{3n}^{(i-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{mn}^{(i-1)} \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Обратная к S_i матрица имеет вид:

$$S_i^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{2n}^{(i-1)}}{a_{1n}^{(i-1)}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{3n}^{(i-1)}}{a_{1n}^{(i-1)}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{mn}^{(i-1)}}{a_{1n}^{(i-1)}} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{a_{1n}^{(i-1)}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

где $a_{jn}^{(i-1)}$, $j = \overline{1, n}$ – элементы последнего столбца матрицы $A^{(i-1)}$ и $A^{(0)} = A$. Тогда, если все элементы $a_{1n}^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{0, n-2}$ (*регулярный случай*), то матрица

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{3n}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{mn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

будет иметь форму Фробениуса.

Если при построении матрицы $A^{(j+1)}$ элемент $a_{1n}^{(j)} = 0$, то имеем *нерегулярный случай*, так как $A^{(j)}$ имеет вид:

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(j)} & a_{1,2}^{(j)} & \dots & a_{1,n-j-1}^{(j)} & \vdots & 0 & \dots & 0 & a_{1,n}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-j-1,1}^{(j)} & a_{n-j-1,2}^{(j)} & \dots & a_{n-j-1,n-j-1}^{(j)} & \vdots & 0 & \dots & 0 & a_{n-j-1,n}^{(j)} \\ \hline a_{n-j,1}^{(j)} & a_{n-j,2}^{(j)} & \dots & a_{n-j,n-j-1}^{(j)} & \vdots & 0 & \dots & 0 & a_{n-j,n}^{(j)} \\ a_{n-j+1,1}^{(j)} & a_{n-j+1,2}^{(j)} & \dots & a_{n-j+1,n-j-1}^{(j)} & \vdots & 1 & \dots & 0 & a_{n-j+1,n}^{(j)} \\ a_{n-j+2,1}^{(j)} & a_{n-j+2,2}^{(j)} & \dots & a_{n-j+2,n-j-1}^{(j)} & \vdots & 0 & \dots & 0 & a_{n-j+2,n}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}^{(j)} & a_{n,2}^{(j)} & \dots & a_{n,n-j-1}^{(j)} & \vdots & 0 & \dots & 1 & a_{n,n}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

В этом случае возможны две ситуации.

1. Среди элементов $a_{2n}^{(j)}, a_{3n}^{(j)}, \dots, a_{n-jn}^{(j)}$ имеется хотя бы один, отличный от нуля, например, $a_{kn}^{(j)} \neq 0$, $k = \overline{2, n-j}$. Тогда можно прийти к регулярному случаю, если в матрице $A^{(j)}$ поменять местами первую и k -ую строки и столбцы. Такое преобразование матрицы $A^{(j)}$ будет подобным, и, кроме того, столбцы, уже имеющие нужный вид не будут испорчены.

2. Все элементы $a_{kn}^{(j)} = 0$, $k = \overline{2, n-j}$, т.е. матрица $A^{(j)}$ имеет блочный вид:

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & \Phi_{j+1} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

где Φ_{j+1} – квадратная матрица порядка $j+1$, имеющая каноническую форму Фробениуса, B – квадратная матрица порядка $n-j-1$, 0 – нулевая матрица. Тогда, на основании теоремы Лапласа, можно записать:

$$\left| A^{(j)} - \lambda E \right| = \left| B - \lambda E_{n-j-1} \right| \cdot \left| \Phi_{j+1} - \lambda E_{j+1} \right|,$$

т.е. характеристический многочлен матрицы Φ_{j+1} является делителем характеристического многочлена матрицы A . Для отыскания характеристического многочлена матрицы A нужно найти характеристический многочлен матрицы B , что можно сделать путем приведения B к форме Фробениуса.

Таким образом, построив собственный многочлен матрицы A , можно найти собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ этой матрицы, которые являются корнями ее собственного многочлена.

Если удалось привести A к виду (3.55), то собственный вектор $x^{(i)}$ матрицы A будет равен:

$$x^{(i)} = Sy^{(i)}, \quad (3.58)$$

где $S = S_1 S_2 \cdots S_{n-1}$ – произведение матриц преобразования, а $y^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})^T$ – собственный вектор матрицы (3.55), соответствующий собственному значению λ_i , компоненты которого $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} y_n^{(i)} &= 1, \\ y_{n-1}^{(i)} &= \lambda_i - p_1, \\ y_{n-2}^{(i)} &= \lambda_i^2 - p_1 \lambda_i - p_2, \\ &\dots \\ y_1^{(i)} &= \lambda_i^{n-1} - p_1 \lambda_i^{n-2} - \dots - p_{n-1}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где $p_j = a_{n-j+1, n}^{(n-1)}$, $j = \overline{1, n}$.

Если не удалось привести матрицу A к виду (3.55), то для отыскания собственных векторов необходимо решить системы линейных алгебраических уравнений:

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.60)$$

где $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^T$. Так как системы (3.58) решаются с точностью до постоянного множителя, то одну из компонент вектора $x^{(i)}$ можно приравнять некоторому числу.

3.6. Контрольные вопросы

1. Укажите правильное выражение кубической нормы матрицы A :

$$1) \|A\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

$$2) \|A\|_{III} = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = \sqrt{\mu_1};$$

$$3) \|A\|_I = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

2. Число обусловленности матрицы A определяется по формуле:

$$1) \|A\| \cdot \|A^{-1}\|;$$

$$2) \|A^{-1}\| \cdot \|A\|;$$

$$3) \|A\| + \|A^{-1}\|.$$

3. Укажите необходимые и достаточные условия сходимости метода простой итерации для решения линейного алгебраического уравнения $Ax = b$, для его решения используется каноническая форма вида $x = Bx + f$ (x - n -мерный вектор):

$$1) \lambda_i < 1, i = \overline{1, n} \text{ (} \lambda_i \text{ - собственные числа матрицы } B \text{);}$$

$$2) \max_j \sum_{i=1}^n |B_{ij}| < 1;$$

$$3) \max_i \sum_{j=1}^n |B_{ij}| < 1;$$

$$4) |\lambda_i| < 1, i = \overline{1, n} \text{ (} \lambda_i \text{ - собственные числа матрицы } B \text{);}$$

$$5) \max_i \sum_{j=1}^n B_{ij} < 1.$$

4. Укажите достаточные условия сходимости метода простой итерации для решения линейного алгебраического

уравнения $Ax = b$, для его решения используется каноническая форма вида $x = Bx + f$ (x - n -мерный вектор):

1) $\lambda_i < 1, i = \overline{1, n}$ (λ_i - собственные числа матрицы B);

2) $\max_j \sum_{i=1}^n |B_{ij}| < 1$;

3) $\max_i \sum_{j=1}^n |B_{ij}| < 1$;

4) $|\lambda_i| < 1, i = \overline{1, n}$ (λ_i - собственные числа матрицы B);

5) $\max_i \sum_{j=1}^n B_{ij} < 1$.

5. В основу метода Гаусса решения системы линейных алгебраических $Ax = b$ положено:

- 1) вычисление обратной матрицы A ;
- 2) приведение матрицы A к диагональному виду;
- 3) приведение матрицы A к треугольному виду.

6. Метод Данилевского решения полной проблемы собственной проблемы использует матрицу:

- 1) Вандермонда;
- 2) Фробениуса;
- 3) Лежандра.

3.7. Задания к главе 3

Задание 3.1. С помощью метода Гаусса найти решение системы линейных уравнений $Ax = b$. Варианты значений матриц A и вектора b приведены в приложении п. 5.3.

Задание 3.2. С помощью метода Данилевского найти собственные числа и собственные векторы матрицы A . Варианты значений матриц A приведены в приложении п. 5.3.

4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Среди задач, с которыми приходится иметь дело при моделировании, значительную часть составляют различные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают как непосредственно при моделировании многих реальных процессов, так и в качестве промежуточных при решении более сложных математических задач. При этом, как правило, точное решение рассматриваемой задачи не удастся выразить через элементарные функции. Доля задач, решаемых в явном виде в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, ничтожно мала. Обычно приходится прибегать к помощи приближенных методов решения подобных задач. Такие методы в зависимости от того, ищется ли приближенное решение в аналитическом виде или в виде таблицы значений, разделяют на *аналитические* и *численные*. Конкретный вид метода существенно зависит от типа решаемой задачи. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений в зависимости от того, ставятся ли дополнительные условия в одной или в нескольких точках отрезка изменения независимой переменной, задачи обычно подразделяют на *одноточечные* (*задачи с начальными условиями*, или *задачи Коши*) и *многоточечные*. Среди многоточечных задач наиболее часто в прикладных вопросах встречаются так называемые *граничные задачи*, когда дополнительные условия ставятся на концах рассматриваемого отрезка. При этом нередко решение многоточечных задач и, в частности, решение граничных задач сводят к решению задач с начальными условиями.

4.1. Методы Эйлера и Рунге-Кутты

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad (4.1)$$

состоит в нахождении функции $y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению при начальном условии $y(x_0) = y_0$. При численном решении этой задачи обычно задают некоторый шаг h и находят решение в точках x_1, x_2, \dots, x_n , где $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$, $h = \frac{x_0 - x_n}{n}$.

Обозначим разность между точными значениями функции $y(x)$ в двух рядом стоящих точках через

$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + h) - y(x_0) \quad (4.2)$$

и представим приближенно эту же разность в виде некоторой линейной комбинации:

$$\Delta y_0 = p_1 K_1(x_0, y_0) + p_2 K_2(x_0, y_0) + \dots + p_r K_r(x_0, y_0), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x_0, y_0) &= h f(x_0, y_0), \\ K_2(x_0, y_0) &= h f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{2,1} K_1(x_0, y_0)), \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K_r(x_0, y_0) &= h f(x_0 + \alpha_r h, y_0 + \beta_{r,1} K_1(x_0, y_0) + \dots \\ &\quad + \beta_{r,r-1} K_{r-1}(x_0, y_0)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Коэффициенты $p_j, \alpha_j, \beta_{ji}$, $j = \overline{1, r}$, $i = \overline{1, r-1}$ будем задавать таким образом, чтобы разложение $\Delta y(x_0)$ в ряд Тейлора по степеням h и линейная комбинация Δy_0 совпадали до возможно более высоких степеней h при произвольной функции $f(x, y)$ и произвольном шаге h .

Введем функцию:

$$\varphi_r(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - [p_1 K(x_0, y_0) + \dots + p_r K_r(x_0, y_0)]. \quad (4.5)$$

Разложение функции $\varphi_r(h)$ в ряд Тейлора в окрестности $h = 0$ будет иметь вид:

$$\varphi_r(h) = \varphi_r(0) + h \frac{\varphi_r'(0)}{1!} + h^2 \frac{\varphi_r''(0)}{2!} + \dots + h^{m+1} \frac{\varphi_r^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} + O(h^{m+1}), \quad (4.6)$$

где $O(h^{m+1})$ – величина, имеющая более высокий порядок малости, чем h^{m+1} . Коэффициенты $p_j, \alpha_j, \beta_{ji}$, $j = \overline{1, r}, i = \overline{1, r-1}$ задают таким образом, чтобы функция $\varphi_r(h)$ обладала следующими свойствами:

$$\varphi_r(0) = \varphi_r'(0) = \dots = \varphi_r^{(s)}(0) = 0, \quad \varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0 \quad (4.7)$$

при возможно больших S для любых h и $f(x, y)$.

4.1.1. Формула Эйлера

Если в (4.3) положить $r = 1$, то получим:

$$\Delta y_0 = p_1 K_1(x_0, y_0). \quad (4.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_r(h) &= y(x_0 + h) - y(x_0) - p_1 h f(x_0, y_0), \\ \varphi_r'(h) &= y'(x_0 + h) - p_1 f(x_0, y_0), \\ \varphi_r''(h) &= y''(x_0 + h), \end{aligned} \quad (4.9)$$

и при $h = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_r(0) &= 0, \\ \varphi_r'(0) &= y'(x_0) - p_1 f(x_0, y_0), \\ \varphi_r''(0) &= y''(x_0). \end{aligned}$$

При этом $\varphi_1'(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $p_1 = 1$, а $\varphi_1''(0) = y''(x_0)$, вообще говоря, в нуль не обращается. Тогда приближенное решение в точке x_1 согласно (4.8) будет определяться следующим образом:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0).$$

Формула Эйлера для значения функции решения в произвольной точке будет иметь вид:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (4.10)$$

Пример 4.1. Требуется решить задачу Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, X]$ с шагом $h = 0,1$ методом Эйлера, оценить погрешность решения, применяя правило Рунге (см. п.).

Исходные данные:

$$f(x, y) = \frac{x-1}{x+2y^2}, \quad y(0) = 1, \quad X = 3.$$

Решение найдем по формуле (4.10), полученные значения $y_i = y(x_i)$, $i = \overline{0,31}$ приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1	0,95	0,90	0,85	0,82	0,78	0,75	0,73
			3	9	5	6	3	
i	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	0,71	0,70	0,7	0,7	0,70	0,71	0,72	0,74
	7	6			5	4	7	3
i	16	17	18	19	20	21	22	23
y_i	0,76	0,78	0,80	0,83	0,86	0,89	0,92	0,95
	3	4	8	4	1			1
i	24	25	26	27	28	29	30	31
y_i	0,98	1,01	1,04	1,08	1,11	1,14	1,18	1,21
	2	5	8	1	5	9	3	8

Для оценки погрешности с помощью правила Рунге, найдем решение задачи на интервале $[x_0, X]$ с шагом $h = 0.2$.

Полученные значения y_i , $i = \overline{0,15}$ приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1	0,9	0,81	0,74	0,69	0,67	0,67	0,69
			2	2	5	3	3	2
i	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	0,72	0,77	0,82	0,88	0,94	1,01	1,08	1,15
	6	1	4	4	8	4	3	3

Оценка погрешности полученного решения для данного дифференциального уравнения согласно правилу Рунге для данного метода определяется по формуле

$$R_1(x) \approx \max_{i=1,15} |y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)}|.$$

Для рассмотренного примера: $R_1 = 0,037$.

Результаты вычислений представлены графически на рисунке 4.1:

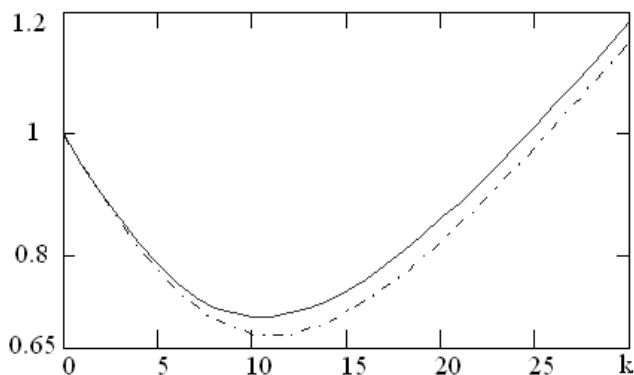


Рис.4.1 – Графическое изображение результатов решения

На рис. 4.1 сплошной линией представлено графическое изображение решения данного дифференциального уравнения методом Эйлера с шагом $h = 0,1$, а штрихпунктирной линией – с шагом $h = 0,2$. Видно, что точность решения не высока.

4.1.2. Формула Рунге-Кутты

Существует несколько формул Рунге-Кутты для решения дифференциального уравнения первого порядка, которые получены при различных значениях $r > 1$. Наиболее распространенной является формула Рунге-Кутты при $r = 4$, которая имеет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= h f(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right), \\ K_3^{(i)} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \\ K_4^{(i)} &= h f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

и $K_j^{(i)} = K_j(x_i, y_i)$, $j = \overline{1, 4}$.

Пример 4.2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, рассмотренного в примере 4.1. Решение найти с шагом $h = 0.1$ методом Рунге-Кутты и оценить погрешность решения, применяя правило Рунге.

Воспользовавшись формулами (4.11) и (4.12) найдем решение задачи Коши с шагом $h = 0.1$. Полученные значения $y_i, i = \overline{0, 31}$ приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1,000000	0,951378	0,906036	0,864765	0,828295	0,797218	0,771926	0,752585
i	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	0,739137	0,731346	0,728845	0,731190	0,737903	0,748507	0,762543	0,779586
i	16	17	18	19	20	21	22	23
y_i	0,799246	0,821178	0,845071	0,870655	0,897689	0,925966	0,955302	0,985541
i	24	25	26	27	28	29	30	31
y_i	1,016543	1,048189	1,080376	1,113012	1,146019	1,179329	1,212883	1,246629

Для оценки погрешности с помощью правила Рунге, найдем решение задачи на интервале $[x_0, X]$ с шагом $h = 0.2$. Полученные значения y_i , $i = \overline{0,15}$ приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4

i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1,000000	0,906035	0,828292	0,771922	0,739132	0,728840	0,737899	0,762539
i	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	0,799242	0,845068	0,897686	0,955299	1,016540	1,080373	1,146016	1,212880

Оценка погрешности полученного решения для данного дифференциального уравнения согласно правилу Рунге для данного метода определяется по формуле (4.17)

$$R_4(x) \approx \max_{i=1,15} \left| \frac{y_{2i}^h - y_i^{2h}}{15} \right|. \quad \text{Для рассмотренного примера:}$$

$$R_4 = 2.933 \cdot 10^{-7}.$$

Отметим, что в силу высокой точности, графическое представление функций, построенные с шагом $h = 0,1$ и с шагом $h = 0,2$ практически совпали бы.

4.2. Правило Рунге

Функция $\varphi_r(h)$ в (4.5) имеет следующий смысл: это разность между точным и приближенным приращениями решения дифференциального уравнения в точке x_1 . Тогда, учитывая (4.6) и (4.7), можно записать уравнение погрешности функции решения в одной точке следующим образом:

$$\varphi_r(h) = h^{s+1} \frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)!} + O(h^{s+1}), \quad (4.13)$$

где $h^{s+1} \frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)!}$ – главный член погрешности. Число шагов, которые необходимо сделать до произвольной точки x , обратно пропорционально шагу h , т.е. $N = O(1/h)$ и погрешность в произвольной точке X будет иметь смысл произведения погрешности на шаге $\varphi_r(h)$ на число шагов N , т.е. $\varphi_r(h)N$.

Если главный член погрешности можно записать в виде $K(x)h^m$, то говорят, что *порядок погрешности метода равен m* . На практике в качестве погрешности приближенного решения берут главный член погрешности:

$$R_r(x) = K(x)h^m. \quad (4.14)$$

Рассмотренные методы имеют *порядок погрешности на шаге*, равный $s+1$, а *порядок погрешности метода* – s . Для метода Эйлера $s=1$, а для метода Рунге-Кутты $s=4$. Таким образом, при моделировании методом Эйлера результаты получаются с погрешностью порядка h , а методом Рунге-Кутты с погрешностью порядка h^4 .

Оценка погрешности методов Эйлера и Рунге-Кутты затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить, используя *правило Рунге*.

Пусть $y(x_i)$ – точное решение в точке x_i , $y_i^{(h)}$ – приближенное решение в точке x_i , найденное с шагом h , $y_i^{(2h)}$ – приближенное значение в точке x_i , найденное с шагом $2h$, и пусть погрешность приближенного решения определяется формулой:

$$R_r(x_i) = K(x_i)h^s.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$y(x_i) = y_i^{(h)} + K(x_i)h^s,$$

$$y(x_i) = y_i^{(2h)} + K(x_i)(2h)^s.$$

Приравнивая правые части этих равенств, получим:

$$K(x_i) = \frac{y_i^{(h)} - y_i^{(2h)}}{(2h)^s - h^s} = \frac{y_i^{(h)} - y_i^{(2h)}}{h^s(2^s - 1)}$$

и

$$R_r(x_i) = \frac{y_i^{(h)} - y_i^{(2h)}}{2^s - 1}. \quad (4.15)$$

Таким образом, грубую оценку погрешности на интервале $[x_0, x_n]$ можно получить с помощью двойного счета по формулам Эйлера и Рунге-Кутты и в качестве оценки погрешностей использовать величины:

- для метода Эйлера

$$R_1(x) \approx \max_{i=1,n} |y_i^{(h)} - y_i^{(2h)}|, \quad (4.16)$$

- для метода Рунге-Кутты

$$R_4(x) \approx \max_{i=1,n} \left| \frac{y_i^{(h)} - y_i^{(2h)}}{15} \right|. \quad (4.17)$$

Кроме того, для контроля правильности выбора шага h рекомендуется вычислять величину:

$$\theta = \max_{i=1,n} \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right|. \quad (4.18)$$

4.3. Решении задачи Коши для систем дифференциальных уравнений

Ограничимся для сокращения записи системой двух уравнений.

Задача Коши для решения системы из двух уравнений:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), y_2(x)), \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1(x), y_2(x)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

состоит в том, что требуется найти на интервале $[x_0, x_n]$ решение этой системы, удовлетворяющее условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}. \quad (4.20)$$

Формулы Эйлера решения задачи Коши для системы (4.19) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_1^{(i+1)} &= y_1^{(i)} + h f_1(x_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}), \\ y_2^{(i+1)} &= y_2^{(i)} + h f_2(x_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $h = \overline{x_{i+1}} - x_i$, $y_1^{(i)}$, $y_2^{(i)}$ – приближенные решения в точке x_i , $i = \overline{0, n}$.

Формулы Рунге-Кутты решения задачи Коши для системы (4.19) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_1^{(i+1)} &= y_1^{(i)} + \frac{1}{6}[K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}], \\ y_2^{(i+1)} &= y_2^{(i)} + \frac{1}{6}[L_1^{(i)} + 2L_2^{(i)} + 2L_3^{(i)} + L_4^{(i)}], \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= h f_1(x_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}), \\ L_1^{(i)} &= h f_2(x_i, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}), \\ K_2^{(i)} &= h f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{K_1^{(i)}}{2}, y_2^{(i)} + \frac{L_1^{(i)}}{2}), \\ L_2^{(i)} &= h f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{K_1^{(i)}}{2}, y_2^{(i)} + \frac{L_1^{(i)}}{2}), \\ K_3^{(i)} &= h f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{K_2^{(i)}}{2}, y_2^{(i)} + \frac{L_2^{(i)}}{2}), \\ L_3^{(i)} &= h f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_1^{(i)} + \frac{K_2^{(i)}}{2}, y_2^{(i)} + \frac{L_2^{(i)}}{2}), \\ K_4^{(i)} &= h f_1(x_i + h, y_1^{(i)} + K_3^{(i)}, y_2^{(i)} + L_3^{(i)}), \\ L_4^{(i)} &= h f_2(x_i + h, y_1^{(i)} + K_3^{(i)}, y_2^{(i)} + L_3^{(i)}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.5. Метод Адамса

Методы Эйлера и Рунге-Кутты являются одношаговыми, так как при вычислении решения в точке $x_i + h$ они используют информацию о значении функции решения только в одной точке x_i . Существуют методы, которые позволяют часть получен-

ной информации использовать повторно на нескольких шагах вычислительного процесса. Это так называемые многошаговые методы. При этом иногда оказывается целесообразным привлекать также и информацию с «забеганием» вперед.

Рассмотрим решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (4.1).

Пусть:

- узлы являются равноотстоящими $x_{i+1} = x_i + h$, $i = \overline{0, n}$;

- для нахождения решения в точке x_{i+1} требуется знание приближенного решения в $(k+1)$ предыдущих точках $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$.

Точки x_0, x_1, \dots, x_k образуют *начальный отрезок*. Решение на начальном отрезке может быть найдено другим методом, например, методом Рунге-Кутты.

Пусть известно решение в точках x_0, x_1, \dots, x_k и требуется найти решение в точке x_{k+1} . Проинтегрируем исходное уравнение $y' = f(x, y)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx.$$

Тогда

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx. \quad (4.24)$$

Для подынтегральной функции $f(x, y)$ построим интерполяционный многочлен $P_n(x)$ и подставим его в (4.24). Так как значение интерполяционного многочлена вычисляется на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, то в качестве такого многочлена выберем формулу Ньютона для интерполирования назад, и, в зависимости от того, какую точку привлекают первой при построении интерполяционного многочлена, получаются различные формулы для решения дифференциального уравнения.

Если вместо функции $f(x, y)$ в (4.24) подставить $P_n(x)$, точные значения $y(x_i)$ заменить на приближенные y_i и проинтегрировать, то получим конкретные формулы Адамса. Наиболее распространенными являются формулы для $n = 4$.

4.5.1. Экстраполяционная формула Адамса

Если для построения интерполяционного многочлена $P_4(x)$ используются значения функции $f(x, y)$ в узлах $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-4}$, то

$$P_4(x) = f(x_k, y(x_k)) + \frac{t}{1!} \Delta f(x_{k-1}, y(x_{k-1})) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f(x_{k-2}, y(x_{k-2})) + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+3)}{4!} \Delta^4 f(x_{k-4}, y(x_{k-4})).$$

Тогда для вычисления значения решения дифференциального уравнения (4.1) в точке x_{k+1} получим *экстраполяционную формулу Адамса*, которая имеет вид:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - f_{k-3}). \quad (4.25)$$

Здесь $f_j = f(x_j, y_j)$, $j = \overline{k, k-3}$.

4.5.2. Интерполяционная формула Адамса

Если для построения интерполяционного многочлена $P_4(x)$ используются значения функции $f(x, y)$ в узлах $x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-3}$, то

$$P_4(x) = f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) + \frac{t}{1!} \Delta f(x_k, y(x_k)) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f(x_{k-1}, y(x_{k-1})) + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+3)}{4!} \Delta^4 f(x_{k-3}, y(x_{k-3})).$$

и для вычисления значения решения дифференциального уравнения (4.1) в точке x_{k+1} получим *интерполяционную формулу Адамса*, которая имеет вид:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}). \quad (4.26)$$

Заметим, что интерполяционная формула (4.26) представляет собой уравнение относительно y_{k+1} . Одним из методов решения этого уравнения является метод последовательных приближений:

$$y_{k+1}^{(i+1)} = y_k^{(i)} + \frac{h}{24}(9f_{k+1}^{(i)} + 19f_k^{(i)} - 5f_{k-1}^{(i)} + f_{k-2}^{(i)}), \quad (4.25)$$

где $f_{k+1}^{(i)} = f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i)})$, начальное значение $y_{k+1}^{(0)}$ задается, например, с помощью экстраполяционной формулы Адамса, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Методы Адамса дают результат с погрешностью порядка h^4 . Практическая оценка погрешности приближенного решения может быть получена с помощью правила Рунге.

4.6. Метод сеток решения линейных краевых задач

Наряду с задачами Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно часто рассматриваются также *граничные задачи*. В этих задачах дополнительные условия, которым должно удовлетворять решение, задаются в виде уравнений, содержащих комбинации значений решения и его производных, взятых в нескольких точках рассматриваемого отрезка $[a, b]$. Простейшими среди граничных задач являются *краевые задачи*, когда дополнительные условия задаются только на концах отрезка $[a, b]$. Если дифференциальное уравнение и уравнения, определяющие дополнительные условия, являются линейными, то граничная задача называется *линейной*.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана линейная краевая задача для дифференциального уравнения

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4.28)$$

с условиями

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y(b) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(a) + \beta_1 y(b) = B, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $L(y)$, $l_a(y)$, $l_b(y)$ линейные операторы.

Метод сеток для решения краевой задачи (4.28), (4.29) состоит в следующем.

1. На отрезке $[a, b]$ выбирается некоторая система точек x_k . Совокупность этих точек называется *сеткой*, а точки x_k называются *узлами сетки*. Достаточно часто используют *равномерную сетку узлов*, когда $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $k = \overline{0, n}$, n - заданное целое число.

2. Краевая задача (4.28), (4.29) на множестве узлов, принадлежащих сетке, заменяется некоторой *сеточной задачей*, то есть некоторыми соотношениями между приближенными значениями решения краевой задачи (4.28), (4.29) в узлах сетки.

3. Сеточная задача решается каким-либо численным методом. Это позволяет найти приближенные значения решения краевой задачи в узлах сетки.

Метод сеток является одним из наиболее универсальных как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Рассмотрим этот метод в применении к решению линейных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть линейная краевая задача задана в виде:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (4.30)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (4.31)$$

На интервале $[a, b]$ зададим равномерную сетку узлов $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}$ и обозначим y_i , $i = \overline{0, n}$ значения приближенного решения в точках x_i . В дифференциальном уравнении (4.30) производные заменим разностными отношениями:

$$y'(x_i) = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \\ \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \\ \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \end{cases} \quad (4.32)$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (4.33)$$

Тогда, записав уравнение (4.30) для точки x_i и заменив производные в этой точке согласно (4.32), (4.33), получим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} &= g_i, \quad i = \overline{1, i-1}, \\ y_n &= \beta, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где a_i, b_i, c_i, g_i получены приведением подобных членов после замены производных. Система (4.34) является системой с трехдиагональной матрицей. Для решения таких систем используется *метод прогонки*. Согласно этому методу решение системы записывается в виде:

$$y_i = L_i y_{i+1} + K_i, \quad (4.35)$$

где L_i и K_i – неизвестные коэффициенты, которые называются *прогоночными*.

Так как, при $i = 0$ $y_0 = \alpha$ и

$$y_0 = L_0 y_1 + K_0,$$

то

$$K_0 = \alpha, \quad L_0 = 0.$$

При $i = 1$ имеем

$$y_1 = L_1 y_2 + K_1,$$

а из уравнения системы (4.34)

$$a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = g_1$$

или

$$y_1 = \frac{-c_1}{b_1} y_2 + \frac{g_1 - a_1 K_0}{b_1}.$$

Тогда для определения прогоночных коэффициентов получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$L_i = -\frac{c_i}{a_i \cdot L_{i-1} + b_i}, \quad K_i = \frac{g_i - a_i \cdot K_{i-1}}{a_i \cdot L_{i-1} + b_i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (4.36)$$

Решение системы (4.34) находится в обратном порядке следующим образом:

$$\begin{aligned} y_n &= \beta, \\ y_{i-1} &= L_{i-1} y_i + K_{i-1}, \quad i = n, n-1, \dots, 2, \\ y_0 &= \alpha. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Для того, чтобы получить решение задачи (4.30), (4.31) в аналитической форме, необходимо аппроксимировать значения y_0, y_1, \dots, y_n некоторой функцией.

Существуют и другие методы решения граничных задач, получающие решение, как в виде таблицы, так и в виде аналитической функции, например, в виде отрезка некоторого ряда.

4.7. Метод коллокации решения краевых задач

При решении задач физики и механики искомое решение иногда более выгодно находить в аналитическом виде. Часто в таких случаях не преследуют цель получить решение с большой точностью, а ограничиваются отысканием функции, точно удовлетворяющей граничным условиям и некоторым соотношениям, связанным с заданным дифференциальным уравнением. Эти соотношения строятся таким образом, что функция, удовлетворяющая им, удовлетворяет приближенно с возможно хорошей точностью также и заданному дифференциальному уравнению, при этом эти соотношения в различных методах строятся по-разному.

Решение краевой задачи

$$\begin{aligned} L(y) &= y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ \Gamma_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\Gamma_b(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$$

ищется в виде:

$$y_n(x_0) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (4.39)$$

где конечная система базисных функций $\{\varphi_i(x)\}$, $i = \overline{0, n}$, заданных на $[a, b]$, выбирается так, чтобы функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяла неоднородным краевым условиям:

$$l_a(\varphi_0) = A, \quad l_b(\varphi_0) = B, \quad (4.40)$$

а функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ удовлетворяли бы однородным краевым условиям:

$$l_a(\varphi_i) = l_b(\varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.41)$$

Подставляя (4.39) в дифференциальное уравнение, получим невязку

$$R(x, c, \dots, c_n) = L[\varphi_0] + \sum_{i=1}^n c_i L[\varphi_i] - f(x). \quad (4.42)$$

Потребуем, чтобы невязка $R(x, c, \dots, c_n)$ обращалась в нуль на некоторой системе точек x_1, \dots, x_n отрезка $[a, b]$, называемых *точками коллокации*, причем число таких точек должно равняться числу коэффициентов c_i в выражении (4.39). Тогда, для определения значений c_1, \dots, c_n , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} R(x_1, c_1, \dots, c_n) &= 0, \\ R(x_2, c_1, \dots, c_n) &= 0, \\ &\dots\dots \\ R(x_n, c_1, \dots, c_n) &= 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

определитель которой имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} L(\varphi_1(x_1)) & L(\varphi_2(x_1)) & \dots & L(\varphi_n(x_1)) \\ & & \dots & \\ L(\varphi_1(x_n)) & L(\varphi_2(x_n)) & \dots & L(\varphi_n(x_n)) \end{vmatrix}. \quad (4.44)$$

Система (4.43) имеет единственное решение, если $D \neq 0$, в связи с этим функции $L(\varphi_i(x))$, $i = \overline{1, n}$ должны составлять *систему Чебышева*.

Для достижения хорошего качества приближения $y_n(x)$ к точному решению $y(x)$ функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ должны удовлетворять следующим условиям:

- быть линейно независимыми;
- при непрерывных функциях $p(x), q(x), f(x)$ непрерывными на $[a, b]$ вместе со своими производными до второго порядка включительно должны быть и функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$;
- для того, чтобы $L(y_n(x))$ могли сколь угодно точно приближать значения $L(y(x))$, система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ должна быть полной в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Существуют и другие методы решения граничной задачи (7.7.42) в виде (7.7.43), например, метод Галеркина, наименьших квадратов. Однако метод коллокации приводит к более простым вычислениям.

Замечание 4.2. Для решения краевой задачи (7.7.42) в качестве функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ можно выбрать, например, следующие функции:

- $\varphi_0(x) = e + d \cdot x$, где e и d задаются таким образом, чтобы выполнялись неоднородные краевые условия (7.7.44);

- $\varphi_1(x) = (x-a)(x-b)$, $\varphi_1(x) = (x-a)^2(x-b)$, ... , $\varphi_1(x) = (x-a)^n(x-b)$, $\varphi_n(x) = (x-a)^n(x-b)$, которые будут удовлетворять однородным краевым условиям (7.7.45).

Пример 4.3. Требуется найти решение линейной краевой задачи для следующих исходных данных:

$$p(x) = \frac{0,5x + x^2 + 0.7}{2 \cos(0,1x) + 1}, \quad q(x) = \frac{0,5x + x^2 + 0.7}{-\ln(3 + x^2)},$$

$$f(x) = \frac{0,5x + x^2 + 0,7}{4x^{0,2} + \sqrt{x} + 0,5}, \quad a = 0,1; \quad b = 1,3;$$

$$y(a) = 0,7, \quad y(b) = 1,37, \quad n = 14.$$

Выберем в качестве $\varphi_0(x) = e + d \cdot x$, где e и d можно определить по формуле (4.40). И выберем $\varphi_n(x) = (x-a)^n(x-b)$, которое будет удовлетворять однородным краевым условиям (4.41).

$$d = 0,558, \quad e = 0,644,$$

Для определения значений c_1, c_2, c_3 запишем систему уравнений, чтобы невязка $R(x, c_1, c_2, c_3)$ обращалась в 0 на системе точек коллокации x_1, x_2, x_3 заданного отрезка $[a, b]$, получим

$$x = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,7 \\ 1,3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, c_2, c_3) = 0, \\ R(x_2, c_1, c_2, c_3) = 0, \\ R(x_3, c_1, c_2, c_3) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,22 + 1,69c_1 - 2,4c_2 = 0, \\ -1,83 + 2,15c_1 + 1,1c_2 - 0,16c_3 = 0, \\ -2,1 + 3,22c_1 + 6,26c_2 + 10,4c_3 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим коэффициенты c_1, c_2, c_3 :

$$c = \begin{pmatrix} 0,814 \\ 0,063 \\ -0,088 \end{pmatrix}.$$

Запишем решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^3 c_i \varphi_i(x) = \\ &= 0,74 - 0,56x + 0,68x^2 + 0,2x^3 - 0,087x^4. \end{aligned}$$

Построим график функции $y(x)$:

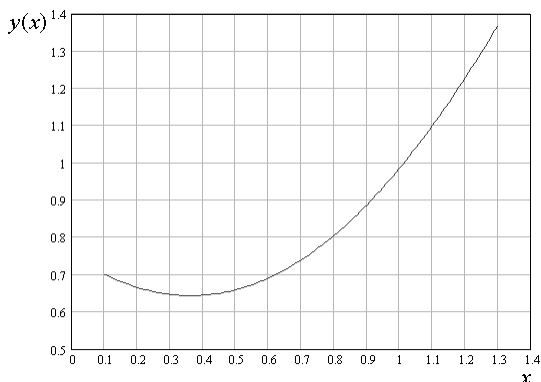


Рис. 4.2 Графическое представление решения краевой задачи

4.8. Контрольные вопросы

1. Укажите правильный вариант метода Эйлера для решения дифференциального уравнения вида $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:

1) $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, где $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$;

2) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$, где $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$;

3) $y_{k+1} = y_k + 2hf(x_k, y_k)$, где $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$.

2. Укажите порядок точности метода Эйлера относительно шага дискретизации по независимой переменной:

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.

3. Укажите порядок точности модифицированного метода Эйлера относительно шага дискретизации по независимой переменной:

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.

4. Укажите правильный вариант модифицированного метода Эйлера для решения дифференциального уравнения вида $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:

1) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$, где $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$;

2) $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, где $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$;

3) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$, где $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + h\frac{1}{2}$, $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$;

4) $y_{k+1} = y_k + 2hf(x_k, y_k)$, где $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$;

5) $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$, где $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + h\frac{1}{2}$, $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$, $h > 0$ - шаг, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

5. Какой численный метод позволяет найти приближенной аналитическое решение краевой задачи:

- 1) метод сеток;
- 2) метод Эйлера;
- 3) метод коллокации;
- 4) метод Адамса.

6. Пусть погрешность приближенного решения задачи Коши в точке x_i определяется формулой $R_r(x_i) = K(x_i)h^s$. Тогда справедливы следующие равенства для решений задачи с шагом h и $2h$: $y(x_i) = y_i^{(h)} + K(x_i)h^s$,

$y(x_i) = y_i^{(2h)} + K(x_i)(2h)^s$. Укажите правильную формулу оценки погрешности по правилу Рунге:

$$1) R_r(x_i) = \frac{y_i^{(2h)} - y_i^{(h)}}{2^s - 1};$$

$$2) R_r(x_i) = \frac{y_i^{(h)} - y_i^{(2h)}}{2^s - 1};$$

$$3) R_r(x_i) = \frac{y_i^{(2h)} - y_i^{(h)}}{e^s - 1};$$

$$4) R_r(x_i) = \frac{y_i^{(h)} - y_i^{(2h)}}{e^s - 1}.$$

4.9. Задания к главе 4

Задание 4.1. Используя метод Рунге-Кутты решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Решение найти с шагом $h=0,05$, оценить погрешность решения, применяя правило Рунге. Варианты исходных данных приведены в п.5.4.

Задание 4.2. Используя метод сеток решить линейную краевую задачу следующего вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Решение найти на интервале $[0; 0,5]$ ($a=0, b=0,5$) с шагом $0,05$. Варианты функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и значения параметров α , β приведены в п.5.4.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРИАНТЫ К ЗАДАНИЯМ

5.1. Варианты к заданиям 1.1, 1.2

N	a	b	$f(x)$
1	2	3	$\sqrt{x^2 + 2x + \lg x}$
2	2	4	$\sin(x + e^x)$
3	1	3	$\cos(x + \ln x)$
4	1	3	$\lg(x + \ln x)$
5	$\frac{\pi}{2}$	π	$x(x^2 + e^x)$
6	0	$\frac{\pi}{2}$	$\sin(x + \sqrt{x})$
7	1	3	$\sqrt{\ln x + x^2}$
8	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$
9	$\frac{\pi}{2}$	π	$e^{x + \cos(x)}$
10	0	$\frac{\pi}{2}$	$\lg(x + \cos(x))$
11	-1	$\frac{\pi}{2}$	$\sin(x + x^2)$
12	$\frac{\pi}{2}$	π	$\sqrt{e^x + 2}$
13	-1	1	$x^2 \ln(x + 2)$

14	1	3	$\ln(\sqrt{x} + x^2)$
15	$\frac{\pi}{2}$	π	$\cos(x + x^2 + \sqrt{x})$
16	0	$\frac{\pi}{2}$	$\ln(x + \cos(x))$
17	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\cos(x)}{\lg(x) + x}$
18	0	$\frac{\pi}{2}$	$(x + \cos(x) + \sqrt{x})^2$
19	$\frac{\pi}{2}$	4	$\frac{\cos(x)}{\sqrt{x} + x + 1}$
20	$\frac{\pi}{2}$	π	$\ln(x + \sqrt{x} + 1)$
21	1	π	$\sin(x + \ln(x))$
22	0	$\frac{\pi}{2}$	$\cos(x + \sin(x))$
23	-1	$\frac{\pi}{2}$	$\cos(x + x^2)$
24	$\frac{\pi}{2}$	π	$\ln(x + \cos(x))$

5.2. Варианты к заданию 2.1 – 2.3

1) $x^{20} - 20\sin x = 0$.	2) $\cos(x+0,3) = x^2$.	3) $3x + \cos x + 1 = 0$.
4) $x^2 \cos 2x = -1$.	5) $4\sin x = x - 0,4$.	6) $2\ln x - 0,5x = -1$.
7) $0,5^x + 1 = (x-2)^2$.	8) $2^x - 1 + 0,5x = 0$.	9) $2x + \cos 2x = 0$.
10) $x^2 2^x = 1$.	11) $x(x+1)^2 = 1$.	12) $x^3 = \sin x$.
13) $e^x + x + 1 = 0$.	14) $x^3 = 0,5\sin x$.	15) $x \ln(x+1) = 1$.
16) $2x + \cos x = 0,5$.	17) $3^x + 2 + x = 0$.	18) $\cos(x+0,5) = x^3$.
19) $x^3 \cos x = 2$.	20) $\sin x = 2x + 0,7$.	21) $\ln x - 1,3x = 1$.
22) $0,3^x + 2 = (x-2)^2$.	23) $3^x - 2 + x = 0$.	24) $2x + \sin(2x) = 2$.

Варианты к заданию 2.3

1. $x^4 - 3x^3 - 4x^2 - x - 3 = 0$,	13. $x^4 - x^3 - 7x^2 - 8x - 6 = 0$,
2. $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x - 1 = 0$,	14. $x^4 - 10x^2 - 16x + 5 = 0$,
3. $x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 10x + 1 = 0$,	15. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 3 = 0$,
4. $x^4 + x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0$,	16. $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 1 = 0$,
5. $x^4 - x^3 - 4x^2 - 11x - 3 = 0$,	17. $x^4 - 3x^3 + 4x - 3 = 0$,
6. $x^4 - 6x^2 - 12x - 8 = 0$,	18. $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 1 = 0$,
7. $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$,	19. $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$,
8. $x^4 + x^3 + 2x + 1 = 0$,	20. $x^4 + x^3 - 7x^2 + 8x - 6 = 0$,
9. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$,	21. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$,
10. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 2x - 28 = 0$,	22. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$,
11. $x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0$,	23. $x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$,
12. $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$,	24. $x^4 - x^3 - 2x + 1 = 0$.

5.3. Варианты к заданиям 3.1, 3.2

$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1,2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0,1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1,1 & 3,3 \end{pmatrix},$ $b = (1,5 \ 1 \ 2 \ 2,3)^T.$	$2) A = \begin{pmatrix} 1,2 & -1,2 & 1 & 1,1 \\ 1,4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0,1 & -1 & -3 \\ 1,1 & -1 & 1,1 & 3,1 \end{pmatrix},$ $b = (2,1 \ 2 \ 3 \ 3)^T.$
$3) A = \begin{pmatrix} 4 & 1,5 & 1 & 2 \\ 3 & 2,2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3,4 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 2,5 \ 2 \ 4)^T.$	$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2,6 & -1 & 2 \\ 3 & 0,1 & -1 & 4 \\ -5 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$ $b = (3 \ 1,6 \ 2 \ 1)^T.$
$5) A = \begin{pmatrix} -2 & 1,2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1,5 & 3 \\ 2 & 1,7 & 2,1 & 7 \end{pmatrix},$ $b = (-1 \ 1 \ 2 \ 5)^T.$	$6) A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$ $b = (6 \ 2 \ 2 \ 3)^T.$
$7) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3,1 & -1 & 1 \\ 0 & 0,6 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 2 \ 3 \ 1)^T.$	$8) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 2 & -3,8 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ -1 \ 2 \ -2,7)^T.$
$9) A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1,6 & 2 \\ 0 & 2 & -1,1 & 1 \\ 3 & 0 & -1,5 & -3 \\ -9 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 1 \ 2 \ 1)^T.$	$10) A = \begin{pmatrix} 2 & -1,2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0,1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1,1 & 3,3 \end{pmatrix},$ $b = (1,5 \ 1 \ 2 \ 2,3)^T.$

$11) A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1,7 & 2 \\ -7 & 2 & -1,1 & 1 \\ 5 & 0,8 & -1 & -3 \\ 1,9 & 6 & 1 & -7 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 1 \ 6,1 \ 2)^T.$	$12) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,8 & 2,5 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1,9 & 7,3 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 4 \ 2 \ 3)^T.$
$13) A = \begin{pmatrix} -4 & -1,2 & 1 & 2,7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0,1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix},$ $b = (-1 \ 1 \ 6 \ 3)^T.$	$14) A = \begin{pmatrix} 2,8 & -1,2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0,1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1,1 & 9 \end{pmatrix},$ $b = (1,5 \ 1 \ 2 \ 2,3)^T.$
$15) A = \begin{pmatrix} -2 & 1,2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 1 \ 4 \ 1)^T.$	$16) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3,1 \\ 1,4 & 3 & -1 & 2,7 \\ 2 & 0,1 & -1 & -3 \\ 1,1 & -1 & 1,1 & 3 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 1 \ 2 \ 2,3)^T.$
$17) A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5,4 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 1 \ 2 \ -3)^T.$	$18) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0,1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$ $b = (-4 \ 1 \ 2 \ -4)^T.$
$19) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2,5 & -1 & 1 \\ 0 & 0,6 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix},$ $b = (2 \ 1 \ 3 \ 1)^T.$	$20) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 2 & 3,2 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 1 \ -2 \ -2,1)^T.$

$21) A = \begin{pmatrix} 2 & 3,2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -0,1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & -3 \end{pmatrix},$ $b = (-2,5 \ 1 \ 2 \ 2)^T.$	$22) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1,9 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0,1 & -1 & -3 \\ 1,1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$ $b = (2 \ 3 \ 1 \ 3)^T.$
$23) A = \begin{pmatrix} 4 & 1,5 & 1 & 2 \\ 3 & 2,2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3,4 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$ $b = (1 \ 2,5 \ 2 \ 4)^T.$	$24) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2,6 & -1 & 2 \\ 3 & 0,1 & -1 & 4 \\ -5 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$ $b = (3 \ 1,6 \ 2 \ 1)^T.$

5.4. Варианты к заданию 4.1, 4.2

- $y'(x) = e^{-x} \cdot \operatorname{tg}(x - y^2)$, $y(0) = 0,3$, $x \in [0; 1]$.
- $y'(x) = e^{-0,1x} \cdot \operatorname{tg}(x + y)$, $y(0,1) = -0,1$, $x \in [0,1; 1,2]$.
- $y'(x) = \operatorname{tg}(x^2 - y^2)$, $y(0,2) = 0,8$, $x \in [0,2; 1]$.
- $y'(x) = 2 \cos(x - y)$, $y(-0,1) = -0,3$, $x \in [-0,1; 1]$.
- $y'(x) = e^{-x} \cdot \cos(x - y^2)$, $y(0) = 0,5$, $x \in [0; 0,8]$.
- $y'(x) = 2^{-x} \cdot \sin(x^2 + y^2)$, $y(0,5) = -0,8$, $x \in [0,5; 0,9]$.
- $y'(x) = \cos(x + x^2 - y^2)$, $y(0) = 0,1$, $x \in [0; 0,7]$.
- $y'(x) = e^{-x} \cdot \sqrt[3]{(x + y^2)}$, $y(0,2) = -0,9$, $x \in [0,2; 0,9]$.
- $y'(x) = e^{-0,5x} \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $y(0) = -0,1$, $x \in [0; 1]$.
- $y'(x) = \cos(\sqrt[3]{(x^3 + y^2)})$, $y(0,7) = -0,2$, $x \in [0,7; 1,6]$.
- $y'(x) = \sin(\sqrt[2]{(3x^2 + 0,2y^2)})$, $y(0) = -0,2$, $x \in [0; 1,2]$.
- $y'(x) = \ln(\sqrt{(x^2 + 0,8y^2)})$, $y(0,2) = 1$, $x \in [0,2; 1]$.

13. $y'(x) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + 0.5y^2}), y(0) = 1,2, x \in [0; 1,1].$
14. $y'(x) = \cos(\sqrt[2]{x^2 + 2y^2}), y(0) = -0,2, x \in [0; 0,9].$
15. $y'(x) = e^{-0,5x} \cdot \sqrt[2]{x^2 + y^2}, y(-0,4) = -0,1, x \in [-0,4; 0,8].$
16. $y'(x) = \sin(\sqrt[2]{3x^2 + 0.2y^2}), y(-0,2) = 0,2, x \in [-0,2; 0,9].$
17. $y'(x) = e^{-x} \cdot \frac{1+x}{\sqrt[2]{x^2 + y^2}}, y(0,2) = 0,1, x \in [0,2; 1].$
18. $y'(x) = \cos(e^{-0,2x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - y^2}}), y(0) = 1,2, x \in [0; 1].$
19. $y'(x) = x + \cos(y/\sqrt{3}), y(1,1) = -0,3, x \in [1,1; 2].$
20. $y'(x) = e^{-x} \cdot \cos(2x - y), y(0,2) = 0,5, x \in [0,2; 0,9].$
21. $y'(x) = 2^{-x} \cdot \sin(2x + y^2), y(0,5) = -0,8, x \in [0,5; 0,9].$
22. $y'(x) = \cos(1 + x - y^2), y(0,1) = 0,1, x \in [0,1; 0,9].$
23. $y'(x) = x + \sin(y/2), y(0,8) = -0,3, x \in [0,8; 1,8].$
24. $y'(x) = e^{-x} \cdot \operatorname{tg}(2x - y^3), y(0,4) = 0,4, x \in [0,4; 1,1].$

Варианты к заданию 4.2

1. $p(x) = x^2, q(x) = 2 - 0,85x, f(x) = \frac{x}{x^2 + 4,5}, \alpha = 1, \beta = 1.$
2. $p(x) = x, q(x) = 2,2 - x, f(x) = \frac{x^2}{3 + x^2}, \alpha = 0,5, \beta = 1.$
3. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}, q(x) = 1,4, f(x) = x, \alpha = 2, \beta = 1.$
4. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2,5}}, q(x) = 2,2, f(x) = \sqrt[3]{x + 2}, \alpha = 0, \beta = 1.$

5. $p(x) = \cos(x)$, $q(x) = \sin(1-x)$, $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$.
6. $p(x) = \sin(2x)$, $q(x) = 3-x^2$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.
7. $p(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $q(x) = 1$, $f(x) = x^3$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$.
8. $p(x) = \cos(x^2)$, $q(x) = \sin(x^3-1)$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$, $\alpha = -1$, $\beta = -3$.
9. $p(x) = \ln x$, $q(x) = x+1$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.
10. $p(x) = x$, $q(x) = 0,5x^3$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\alpha = -1$, $\beta = -1$.
11. $p(x) = \cos(x)$, $q(x) = \sin(x+1)$, $f(x) = \frac{x^2}{3+\sin(x)}$, $\alpha = -5$, $\beta = 1$.
12. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}$, $q(x) = x$, $f(x) = -x$, $\alpha = -2$, $\beta = -1$.
13. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $q(x) = \ln(x)$, $f(x) = -x^2$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$.
14. $p(x) = x-2$, $q(x) = \cos(1-x)$, $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, $\alpha = -1$, $\beta = -3$.
15. $p(x) = \sin(4x)$, $q(x) = x+1$, $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$, $\alpha = -2$, $\beta = 1$.
16. $p(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$, $q(x) = x^2$, $f(x) = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$.
17. $p(x) = \cos(x)$, $q(x) = \sin(x^2-3)$, $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$, $\alpha = 1$, $\beta = -3$.
18. $p(x) = \sin(x)$, $q(x) = x^4+1$, $f(x) = 1+x$, $\alpha = -2$, $\beta = 2$.

$$19. p(x) = x^3, q(x) = 1 - 0,5x, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \alpha = 2, \beta = 2.$$

$$20. p(x) = \sin(3x), q(x) = 1 - x^2, f(x) = \frac{1}{2x + 1}, \alpha = 1, \beta = -2.$$

$$21. p(x) = x, q(x) = 4 - 3x, f(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \alpha = 1,5, \beta = 2.$$

$$22. p(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}, q(x) = 4, f(x) = x^2 + 1, \alpha = 1, \beta = 1.$$

$$23. p(x) = \sqrt[3]{x}, q(x) = x^3, f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}, \alpha = 1, \beta = -1.$$

$$24. p(x) = \cos(1 - x), q(x) = \sin(x), f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \alpha = 2, \beta = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смагин, В.И. Вычислительная математика: Учебное пособие [Электронный ресурс]Томск: ТУСУР, 2018. 117 с. Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/7391>
2. Киреев В.И. Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Лань, 2015. 448 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/65043>
3. Горлач Б.А., Шахов В.Г. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация, Лань, 2016. 292 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/74673/>
4. Смагин В.И. Matlab и система Simulink. Изд-во ТУСУР, 2006. 123 с.
5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов М.: Высшая школа, 2009. 848 с.
6. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Лань, 2009. 368 с.
7. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. М.: Высшая школа, 1998.
8. Смагин В.И., Решетникова Г.Н. Численные методы (аппроксимация, дифференцирование и интегрирование). Изд-во Том. ун-та, Томск, 2008. 184 с.
9. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Рудченко Е.А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 260 с.