Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Кафедра физики

Ю.А. Грибов, А.А. Зенин

МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
по аудиторным практическим занятиям и самостоятельной работе
для студентов всех направлений подготовки

Томск 2018

Рецензент

Лячин А.В., канд физ.-мат наук, доцент кафедры физики
Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники

Грибов Юрий Ананьевич

Механика : учеб.-метод. пособие по аудиторным практ. занятиям и самостоятельной работе для студентов всех направлений подготовки / Ю.А. Грибов, А.А. Зенин. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроника, 2018. – 64 с.

Содержит краткую теорию, примеры решения задач, тестовые задания, задачи для аудиторных практических занятий и самостоятельного решения, список рекомендуемой литературы, а также вопросы для самоконтроля по разделу «Механика» дисциплины «Физика» («Физика для информатики», «Физика и естествознание» и т.п.).

Для студентов очной, очно-заочной и заочной форм образования всех направлений подготовки.

Введение

Механика – наука о простейших формах движения материи, которые характеризуются взаимодействиями между телами и их перемещениями друг относительно друга. Следовательно, опытные данные формируются наглядностью механических представлений. Классическая механика Галилея – Ньютона рассматривает движение тел со скоростями намного меньшими по сравнению со скоростью света. Законами классической механики невозможно характеризовать системы, состоящие из большого числа микрочастиц. Если мы перейдем к движению отдельных атомов или элементарных частиц, то в данном случае законы движения устанавливаются квантовой механикой. Следовательно, существуют границы применимости классической механики.

Механическое движение может быть очень сложным. Поэтому механика разбивает сложные движения на простые и, изучив их, переходит снова к более сложным. Для описания движения приходится связывать с телами координатную систему. Поступательное движение тел рассматривается в декартовой системе координат. Координатную систему можно связать с каким-то земным объектом. Начало координат можно поместить на Солнце, а оси провести в направлении определенных звезд. Координатную систему можно связать с материальной сплошной средой. Выбор координатной системы зависит от поставленной задачи.

Механика состоит из двух частей: кинематика и динамика. Кинематика рассматривает лишь само перемещение в зависимости от времени, и не рассматривает причины, вызвавшие движение. Динамика учитывает взаимодействие между телами, которое определяет движение тел.

Целью данного учебного пособия является: изложить основные законы кинематики и динамики твердых тел, а также проиллюстрировать их на примере решения задач и тестовых заданий.

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

1.1. Путь и перемещение

Траектория движения – это линия, вдоль которой движется материальная точка. В зависимости от траектории различают прямолинейное и криволинейное движение.

Перемещение – это векторная физическая величина, численно равная кратчайшему расстоянию от начального до конечного положения тела.

Путь – скалярная физическая величина, численно равная расстоянию, пройденному материальной точкой по ее траектории от одного положения до другого.

Скорость – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки (тела) в пространстве.

Ускорение – это векторная физическая величина, характеризующая изменение во времени скорости движения материальной точки (тела).

В этом параграфе рассмотрим путь и перемещение при поступательном движении. Положение материальной точки относительно декартовой системы координат в данный момент времени определяется координатами x, y, z или радиус-вектором, проведенным из начала координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.1}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это единичные векторы, направленные вдоль осей координат x, y, z.

Радиус-вектор – это вектор, определяющий положение материальной точки в пространстве. Он проводится из начала координат в заданную точку. Из чертежа (рисунок 1.1) видно, что перемещение материальной точки можно выразить через приращение радиус-вектора:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{1.2}$$

Зависимость перемещения (или пути) от времени называют кинематическим уравнением движения:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(t), \\ S &= S(t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Прямолинейное равномерное движение: $x = x_0 \pm vt$, где x_0 – начальная координата материальной точки; x – координата точки в момент времени t, знак скорости зависит от направления движения.

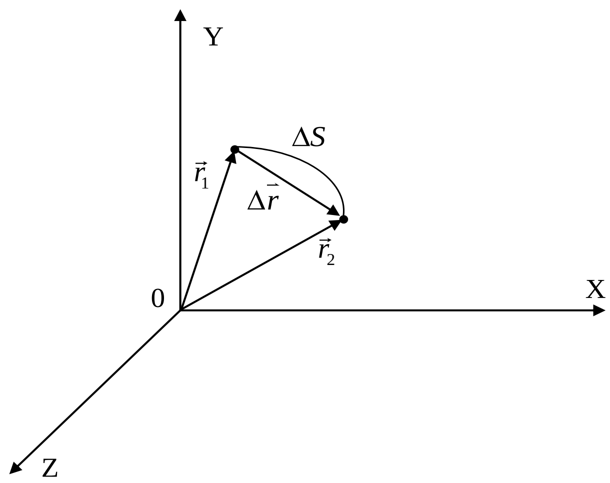


Рисунок 1.1 – Путь и перемещение

Прямолинейное равнопеременное движение: $\left|\Delta\vec{r}\right| = x - x_0 = \pm v_0 t \pm \dfrac{a \cdot t^2}{2}$.

В общем случае модуль перемещения меньше пройденного пути:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \le \Delta S\,. \tag{1.4}$$

Если движение прямолинейное в одном направлении, модуль перемещения равен пройденному пути:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta S\,. \tag{1.5}$$

При движении материальной точки по замкнутой траектории (начальное и конечное положения точек совпадают) перемещение равно нулю.

При движении материальной точки ее координаты изменяются с течением времени:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2. Скорость поступательного движения тела

Для характеристики движения материальной точки (тела) вводится понятие скорости. Скорость – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки (тела) в пространстве. Поступательное движение тела – это механическое движение, при котором прямая, проведенная через две произвольные точки тела, перемещается параллельно самой себе. Пусть тело движется поступательно по криволинейной траектории, тогда вектор скорости совпадает с касательной к траектории (рисунок 1.2).

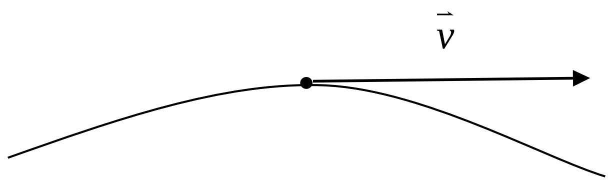


Рисунок 1.2 – Вектор скорости направлен вдоль касательной к траектории

В течение малого промежутка времени материальная точка пройдет некоторый путь. Средняя скорость перемещения запишется следующим образом:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

Средняя скорость вводится из сравнения данного движения с равномерным и прямолинейным. Она равна отношению перемещения к затраченному времени. Вектор средней скорости направлен вдоль хорды, стягивающей соответствующий участок траектории движения материальной точки, т.е. направление вектора средней скорости совпадает с направлением перемещения материальной точки. Так как $|\Delta \vec{r}| \le \Delta S$, где ΔS – путь, пройденный материальной точкой вдоль траектории за рассматриваемый промежуток времени, то

$$|\vec{v}_{\text{ср}}| \le \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Знак равенства в соотношении для средней скорости соответствует движению материальной точки вдоль прямолинейной траектории в одном направлении. Если промежуток времени неограниченно уменьшить, то средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью. Мгновенная скорость – это скорость материальной точки (тела) в данный момент времени (в данной точке траектории).

$$\vec{v}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$|\vec{v}_{\text{мгн}}| = \frac{dS}{dt}, \; \textit{так как} \; |d\vec{r}| = dS.$$

При равномерном движении скорость постоянна

$$v = \text{const}. \tag{1.9}$$

В случае неравномерного движения скорость зависит от времени

$$v = v(t). \tag{1.10}$$

Равноускоренное прямолинейное движение:

$$S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2},$$

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}\right) = v_0 + a \cdot t.$$

Равнозамедленное прямолинейное движение:

$$\left|\Delta \vec{r}\right| = v_0 \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2},$$

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2}) = v_0 - a \cdot t.$$

1.3. Линейное ускорение и его составляющие

Движение может быть:

• равномерным или неравномерным;

• прямолинейным или криволинейным.

Важно знать, как изменяется скорость с течением времени. Скорость – это векторная физическая величина. Она может изменяться по модулю и направлению. В этом случае вводится физическая величина, характеризующая изменение скорости и по величине (по модулю), и по направлению – это линейное ускорение. Ускорение – это векторная физическая величина, характеризующая изменение во времени скорости движения материальной точки (тела).

Линейное ускорение подразделяют на две составляющие:

1. Тангенциальное ускорение: $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора скорости.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{1.11}$$

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории движения (рисунок 1.3) и характеризует быстроту изменения скорости по модулю.

2. Нормальное (центростремительное) ускорение:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный к центру кривизны траектории.

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.12)$$

Нормальное ускорение направлено перпендикулярно скорости (рисунок 1.3) и характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

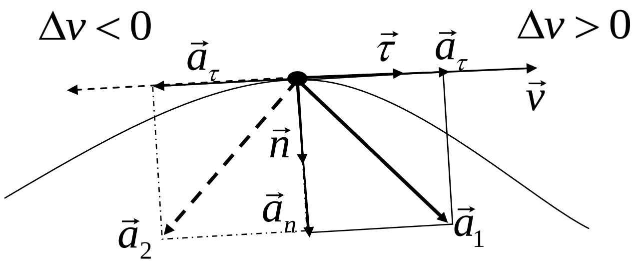


Рисунок 1.3 – Линейные ускорения при криволинейном движении, $\vec{a}_1$ – соответствует $\Delta v > 0$, $\vec{a}_2$ – соответствует $\Delta v < 0$

Полное линейное ускорение:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.13)$$

Таким образом, полное ускорение тела – есть векторная сумма тангенциальной и нормальной составляющих. Как и в случае для скорости, различают среднее и мгновенное ускорения.

Среднее ускорение:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\vec{v}. \quad (1.14)$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a}_{\text{мгн}} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.15)$$

В зависимости от величины тангенциального и нормального ускорений движение можно классифицировать следующим образом:

1. Равномерное прямолинейное движение $a_\tau = 0, a_n = 0, a = 0$.

2. Равнопеременное (равноускоренное или равнозамедленное) прямолинейное движение $a_\tau = \text{const}$, $a_n = 0$, $a = a_\tau$, при этом:

$a_\tau > 0$ – равноускоренное движение;

$a_\tau < 0$ – равнозамедленное движение.

3. Равномерное криволинейное движение $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$, $a = a_n$.

4. Равнопеременное (равноускоренное или равнозамедленное) криволинейное движение

$$a_\tau = \text{const}\ (a_\tau > 0 \text{ или } a_\tau < 0), \quad a_n \neq 0, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

1.4. Угловая скорость, угловое ускорение, угловое перемещение

При криволинейном движении линейная скорость изменяется по направлению. Примерами такого движения являются движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела.

Вращательное движение тела – это такое механическое движение, при котором материальные точки твердого тела движутся по концентрическим окружностям. Их центры лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Вращательное движение тела возможно и при наличии единого центра вращения.

Основные характеристики вращательного движения материальной точки:

Угловое перемещение – это вектор, модуль которого равен углу поворота, а направление подчиняется правилу правого винта.

Угловая скорость – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения углового перемещения материальной точки.

Угловое ускорение – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости по модулю (величине).

На рисунке 1.4 $\Delta\vec{\varphi}$ – угловое перемещение. Направление углового перемещения подчиняется правилу правого винта (правило буравчика). Если ввинчивать буравчик так, чтобы направление вращения совпало с направлением движения материальной точки по окружности, то поступательное движение буравчика покажет направление углового перемещения.

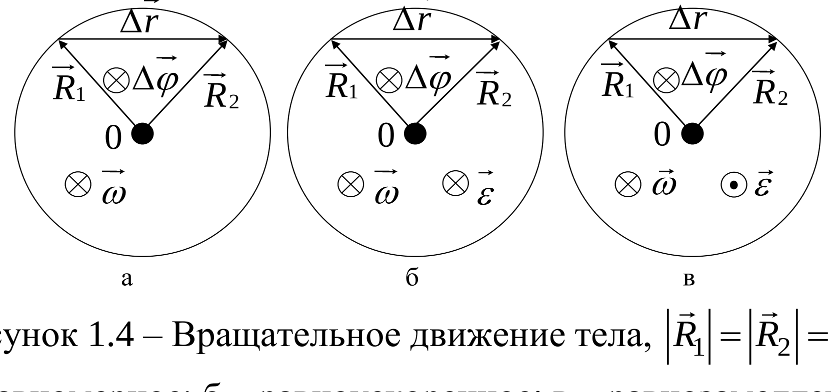


Рисунок 1.4 – Вращательное движение тела, $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = R$:
а – равномерное; б – равноускоренное; в – равнозамедленное

$$\Delta\vec{\varphi} = \left[\vec{R} \times \Delta\vec{r}\right]. \tag{1.16}$$

В зависимости от изменения угловой скорости различают равномерное и неравномерное вращательное движение. Если движение является равномерным, вращательным, то угловая скорость постоянна, а в случае неравномерного – угловая скорость изменяется с течением времени.

Равномерное вращательное движение: $\varepsilon = 0$, $\varphi = \varphi_0 \pm \omega \cdot t$ – кинематическое уравнение движения, $\omega = \text{const}$.

Равнопеременное вращательное движение: $\varepsilon = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 \pm$ $\pm\omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$ – кинематическое уравнение движения, $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$.

Кинематическое уравнение вращательного движения выражается следующим образом:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{1.17}$$

Направление угловой скорости, как и направление углового перемещения, подчиняется правилу правого винта. Если вращение тела совпадает с вращением правого винта, то поступательное движение винта покажет направление вектора угловой скорости. Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения.

Средняя угловая скорость равна:

$$\vec{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \tag{1.18}$$

Мгновенная угловая скорость равна:

$$\vec{\omega}_{\text{мгн}} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.19}$$

Связь между линейной и угловой скоростями выражается формулой:

$$\begin{gathered} v = \omega \cdot R, \\ \vec{v} = \left[\vec{\omega} \times \vec{R}\right]. \end{gathered} \tag{1.20}$$

В случае неравномерного вращательного движения вводится угловое ускорение:

$$\begin{gathered} \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

При равноускоренном движении угловое ускорение и угловая скорость направлены одинаково. При равнозамедленном – противоположны по направлению. Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения (рисунок 1.4).

Угловое ускорение связано с тангенциальным ускорением по формуле:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R,$$
$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{R}\right]. \tag{1.22}$$

Кинематика поступательного и вращательного движения тела. Разобранные задачи

Задача 1.

Движение двух материальных точек выражаются уравнениями

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2;\; x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2,$$

где A_1 = 20 м; A_2 = 2 м; $B_1 = B_2$ = 2 м/с; C_1 = –4 м/с^2; C_2 = 0,5 м/с^2. В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковыми? Определите скорости v_1 и v_2 и ускорения a_1 и a_2 в этот момент.

Решение:

Мгновенная скорость первой точки

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = B_1 + 2C_1 t, \tag{1}$$

для второй точки

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = B_2 + 2C_2 t. \tag{2}$$

Приравниваем уравнения (1) и (2)

$$B_1 + 2C_1 t = B_2 + 2C_2 t. \tag{3}$$

Отсюда находим, что $t = 0$ с. В этот момент времени скорость $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 2$ м/с.

Мгновенное значение ускорения для первой точки

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2C_1 = -8 \text{ м/с}^2,$$

для второй точки $a_2 = \dfrac{dv_2}{dt} = 1$ м/с^2.

Задача 2.

Тело падает вертикально с высоты $h = 19,6$ м с нулевой начальной скоростью. Какой путь пройдет тело: 1) за первую 0,1 с; 2) за последнюю 0,1 с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

За первую 0,1 с движения тело пройдет путь

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 0,1^2}{2} = 0,049 \text{ м.}$$

Весь путь тело пройдет за время $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 19,6}{9,8}} = 2$ с.

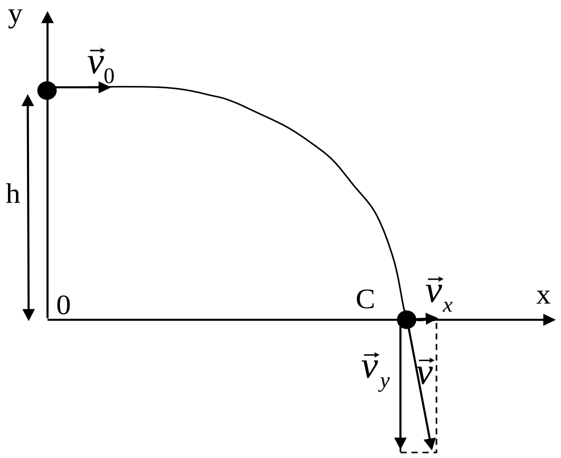
За последнюю 0,1 с движения тело пройдет путь $h_3 = h - h_2$, где h_2 – путь, пройденный за время $t_2 = 2 - 0,1 = 1,9$ с. Найдем h_2 из соотношения $h_2 = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 1,9^2}{2} = 17,7$ м. Тогда искомое расстояние

$$h_3 = 19,6 - 17,7 = 1,9 \text{ м.}$$

Задача 3.

На высоком отвесном берегу озера находится пулемет, который стреляет в горизонтальном направлении. Начальная скорость пуль v_0. Какую скорость будут иметь пули при падении в воду, если высота берега равна h?

Решение:



Систему координат выбираем как показано на рисунке. Сопротивление воздуха не учитываем. Пуля участвует как бы в двух движениях: по оси x – равномерном со скоростью v_0; по оси y – ускоренном, под действием силы тяжести со стороны Земли. Кинематические уравнения движения выглядят так

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}.$$

В точке C вектор скорости $\vec{v}$ разложим на две составляющие $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, т.е. $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. Модуль вектора $\vec{v}$ можно найти по формулам:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2};$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0,\ \frac{dy}{dt} = -gt,\ v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2},$$

получим $h = \frac{gt^2}{2} \cdot \frac{g}{g} = \frac{g^2t^2}{2g}$. Тогда для скорости v получаем:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Задача 4.

Точка движется по окружности со скоростью $v = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}5$ м/с^2. Найдите ее полное ускорение в момент, когда она пройдет $n = 0{,}1$ длины окружности после начала движения.

Решение:

Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где a_n и a_τ нормальное и тангенциальное ускорение. Нормальное ускорение частицы зависит от времени по закону $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^2 t^2}{R}$. Тангенциальное ускорение постоянно и равно $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\alpha t)}{dt} = \alpha$. Найдем время t_0, за которое частица пройдет n-ую часть окружности. Зависимость пройденного частицей пути S от времени определяется дифференциальным уравнением $\frac{dS}{dt} = \alpha t$, решение которого имеет вид: $S = \frac{\alpha t^2}{2}$. Поэтому искомое время t_0 находится из условия $2\pi Rn = \frac{\alpha t_0^2}{2}$, откуда получаем соотношение $\alpha^2 t_0^2 = 4\pi Rn\alpha$. Тогда $a_n = 4\pi n\alpha$. Полное ускорение в этот момент времени равно

$$a = \sqrt{(4\pi n\alpha)^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{1 + (4\pi n)^2},\ a == 0{,}5\sqrt{1 + (4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1)^2} = 0{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Задача 5.

Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ с$^{-2}$. Определите радиус колеса, если через время $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса равно $a = 7,5$ м/с^2.

Решение:

Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где a_n и a_τ нормальное тангенциальное ускорение. $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, $a_\tau = \varepsilon R$. Линейная скорость v и тангенциальное ускорение связаны соотношением $v = a_\tau \cdot t = \varepsilon R t$, тогда $a_n = \dfrac{\varepsilon^2 R^2 t^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R$. $a^2 = \left(\varepsilon^2 t^2 R\right)^2 + (\varepsilon R)^2 = \varepsilon^2 R^2 (\varepsilon^2 t^4 + 1)$.

Откуда $R = \sqrt{\dfrac{a^2}{\varepsilon^2 (\varepsilon^2 t^4 + 1)}} = 0,79$ м.

Кинематика поступательного и вращательного движения тела. Задачи для практических занятий

Задача 1.

С аэростата находящегося на высоте $h = 300$ м упал камень. Через какое время камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью $v = 5$ м/с; б) спускается со скоростью $v = 5$ м/с; аэростат неподвижен.

Задача 2.

Точка движется со скоростью $\vec{v} = bt(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$, $b = 1$ м/с^2. Найдите: а) модуль скорости в момент времени $t = 1$ с; б) ускорение точки $\vec{a}$ и его модуль $|\vec{a}|$; в) путь S, пройденный точкой с момента времени $t_1 = 2$ с до момента $t_2 = 3$с.

Задача 3.

Три четверти своего пути автомобиль прошел со скоростью $v_1 = 60$км/ч, остальную часть пути – со скоростью $v_2 = 80$км/ч. Какова средняя путевая скорость $\langle v \rangle$ автомобиля?

Задача 4.

Движение точки по кривой задано уравнениями $x = A_1 t^3$ и $y = A_2 t$, где $A_1 = 1$ м/с^3, $A_2 = 0{,}8$ с. Найдите уравнение траектории точки, ее скорость v и полное ускорение a в момент времени $t = 0{,}8$ с.

Задача 5.

Пуля пущена с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определите максимальную высоту H подъема, дальность s полета радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 6.

По дуге окружности радиусом $R = 10$ м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 4{,}9$ м/с^2, в этот момент векторы полного и нормального ускорения образуют угол $\alpha = 60°$. Найдите скорость v и тангенциальное ускорение a_τ точки.

Задача 7.

Материальная точка начинает движение в момент времени $t = 0$ и движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону $x = 2 + 6t - 1{,}5t^2$ [м]. Найдите величину скорости и ускорения точки в момент времени $t = 3$ с, а также среднюю скорость за первые $\Delta t = 3$ с.

Задача 8.

Диск радиусом $r = 20$ см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0{,}1$ рад/с$^{-3}$. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени $t = 10$ с.

Задача 9.

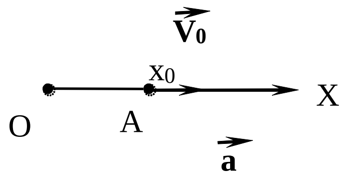
Диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = -2$ рад/с^2. Сколько оборотов N сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240$ мин$^{-1}$ до $n_2 = 90$ мин$^{-1}$. Найдите время Δt, в течение которого это произойдет.

Задача 10.

Колесо автомашины вращается равноускорено. Сделав $N = 50$ полных оборотов оно изменило частоту вращения от $n_1 = 4$ с$^{-1}$ до $n_2 = 6$ с$^{-1}$. Определите угловое ускорение ε колеса.

Кинематика поступательного и вращательного движения тела. Тест для практического занятия

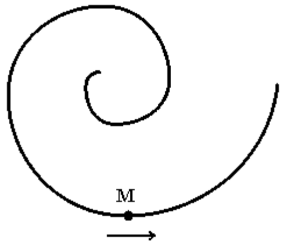
1. Точка А движется с постоянным ускорением вдоль оси OX как показано на рисунке.



x_0 – начальная координата точки A; V_0 – начальная скорость точки A; a – ускорение точки A. Какое из предложенных ниже выражений является кинематическим законом движения точки A?

Ответы: 1) $X = x_0 - V_0t - 0{,}5(at^2)$; 2) $X = -x_0 - V_0t + 0{,}5(at^2)$; 3) $X = x_0 + V_0t + 0{,}5(at^2)$; 4) $X = -x_0 + V_0t - 0{,}5(at^2)$.

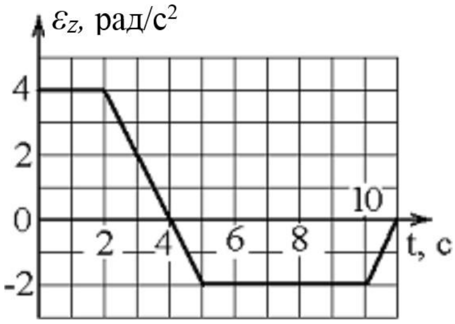
2. Точка M движется по спирали в направлении, указанном стрелкой. Нормальное ускорение по величине не изменяется. При этом величина скорости …



Ответы: 1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

3. Твёрдое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловым ускорением, проекция которого изменяется во времени, как показано на графике. Какую угловую скорость тело будет иметь через t = 4 с при t = 0, ω_z = 0.

Ответы: 1) 0 рад/с; 2) 2 рад/с; 3) 4 рад/с; 4) 12 рад/с.



4. Частица движется по окружности радиусом 3 м в соответствии с уравнением

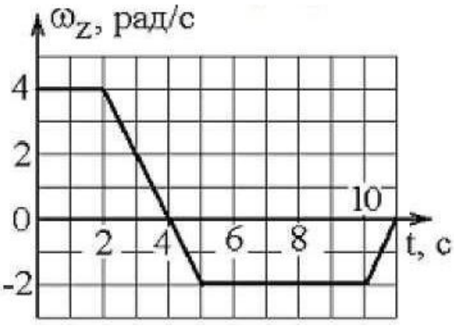
$$\varphi = 48 + 12t - 2t^2,$$

где φ – в радианах; t – в секундах.

Через какой промежуток времени после начала движения частица остановится?

Ответы: 1) 1 с; 2) 2 с; 3) 3 с; 4) 4 с.

5. Твёрдое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. На какой угол повернётся тело относительно начального положения через 7 с?



Ответы: 1) 4 рад; 2) 0 рад; 3) 7 рад; 4) 6 рад.

Кинематика поступательного и вращательного движения тела. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.

Радиус-вектор точки изменяется со временем по закону:

$$\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k} .$$

Найдите скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ в момент времени $t = 2$ с, приближенное значение пути S, пройденного точкой за 10-ю секунду движения.

Задача 2.

Тело брошено с поверхности Земли со скоростью $v = 10$ м/с под углом $45°$ к горизонту. Определите радиус кривизны траектории в верхней точке. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Задача 3.

Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ см. Зависимость пути от времени дается уравнением $S = ct^3$, где $c = 0{,}1$ см/с^3. Найдите нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорение точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}3$ м/с.

Задача 4.

С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через промежуток времени $t = 2$ с камень упал на землю на расстоянии $S = 40$ м от основания вышки. Определите начальную v_0 и конечную v скорости камня.

Задача 5.

Тело брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найдите нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения в начальный момент движения.

Задача 6.

Материальная точка начинает свое движение в момент времени $t = 0$ и движется вдоль оси OX так, что ее координата зависит от времени по закону $x = 1 + 2t - t^2$ [м]. Определите путь, пройденный точкой за время $\Delta t = 3$ с после начала движения.

Задача 7.

Линейная скорость v_1 точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки расположенные на $\Delta R = 10$ см ближе к оси, имеют линейную скорость $v_2 = 2$ м/с. Определите частоту вращения диска.

Задача 8.

Велосипедное колесо вращается с частотой $n = 5$ с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени $\Delta t = 1$ мин. Определите угловое ускорение ε и число N оборотов, которое сделает колесо за это время.

Задача 9.

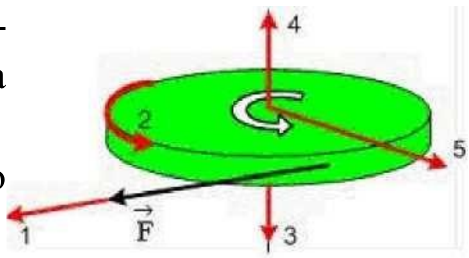
В момент времени $t = 0$ материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $R = 500$ м так, что угол поворота изменяется с течением времени по закону $\varphi = ct - bt^2$ [рад], где $c = 0,2$ рад/с; $b = 0,1$ рад/с^2. Найдите величину угловой скорости, угловое ускорение, линейную скорость и ускорение точки в момент времени, когда она изменяет направление вектора скорости на противоположное.

Задача 10.

Большой шкив ременной передачи имеет радиус $R_1 = 32$ см и вращается с частотой $n_1 = 120$ об/мин. Радиус малого шкива $R_2 = 24$ см. Найдите угловую скорость малого шкива, число его оборотов в минуту и линейную скорость точек ремня.

Кинематика поступательного и вращательного движения тела. Тест для самоконтроля

1. Колесо вращается так, как показано на рисунке белой стрелой. К ободу колеса приложена сила, направленная по касательной.



Какой из предложенных векторов правильно изображает угловое ускорение?

Ответы: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

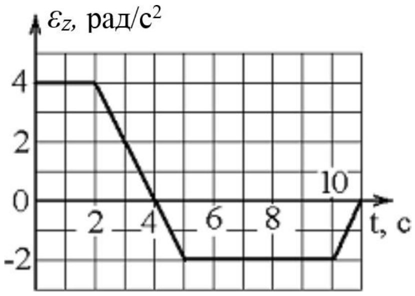
2. Два таракана бегут по внешнему ободу колеса в одной плоскости согласно уравнениям

$$\varphi_1 = 12 - 3t - t^2 \text{ и } \varphi_2 = 5 + 2t + t^2,$$

где φ – в радианах, t – в секундах. Через сколько секунд после начала движения тараканы встретятся?

Ответы: 1) 1 с; 2) 2 с; 3) 3 с; 4) 4 с.

3. Твёрдое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловым ускорением, проекция которого изменяется во времени, как показано на графике. Какую угловую скорость тело будет иметь через 11 с при при $t = 0$, $\omega_z = 0$.



Ответы: 1) 6 рад/с; 2) 0 рад/с; 3) 12 рад/с; 4) 4 рад/с.

4. Материальная точка M движется по окружности со скоростью $\vec{V}$. На рисунке 1 показан график зависимости V_τ от времени ($\vec{\tau}$ – единичный вектор положительного направления, V_τ – проекция $\vec{V}$ на это направление). При этом вектор полного линейного ускорения точки M в момент времени t_1 на рисунке 2 имеет направление…

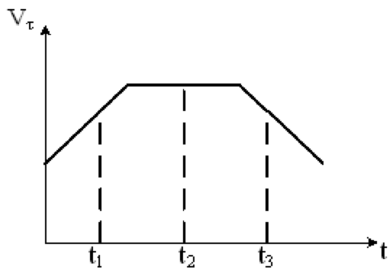


Рисунок 1

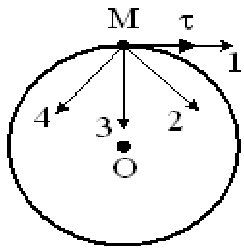


Рисунок 2

Ответы: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

5. Радиус-вектор движущейся частицы определяется выражением $\mathbf{r} = 3t^2 i + 4t^2 j$, где t – время, i, j – орты координатных осей X и Y соответственно. Найти модуль скорости частицы в конце второй секунды.

Ответы: 1) 4,5 м/с; 2) 20 м/с; 3) 10 м/с; 4) $10\sqrt{2}$ м/с.

Кинематика поступательного и вращательного движения тела. Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение тела называется поступательным?
2. Как определяется путь, пройденный телом?
3. Дайте определение вектора перемещения.
4. Может ли средняя скорость перемещения равняться средней скорости пройденного пути?
5. Мерой чего является нормальное ускорение?
6. Мерой чего является тангенциальное ускорение?

7. Как направлены относительно друг друга угловая скорость и угловое ускорение точки, если линейная скорость уменьшается со временем?

8. Как определяются направления векторов углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения?

9. Дайте определение движению материальной точки, если направление мгновенной скорости образует с полным ускорением тупой угол.

10. Как ориентируются относительно друг к другу вектора углового ускорения и тангенциального ускорения материальной точки.

2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальная система отсчёта

Первым законом Ньютона является закон инерции, открытый Галилеем:

– тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

Такое тело называется свободным, а его движение – свободным движением или движением по инерции. Свободные тела являются физическими абстракциями. Тем не менее, можно представить тело с внешними воздействиями на него по возможности устранёнными или компенсирующими друг друга.

Как убедиться в том, что тело не подвержено внешним воздействиям? Об этом нельзя судить по отсутствию ускорения. Исчерпывающего ответа на этот вопрос не существует. Тело может испытывать воздействия не только со стороны других тел, с которыми оно соприкасается. Тело может подвергаться воздействиям со стороны различного рода силовых полей, создаваемых другими телами. Следовательно, возникает необходимость в том, чтобы убедиться в отсутствии воздействии силовых полей на тело.

Все известные силы сводятся к силам гравитационного притяжения, электромагнитным силам и прочим короткодействующим силам. Гравитационные и электромагнитные силы являются дальнодействующими силами, так как с расстоянием они убывают медленно. Если эти силы статические, то они убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Переменные силы убывают медленно – обратно пропорционально расстоянию. Благодаря электромагнитным волнам мы знаем о существовании небесных объектов. В отсутствии электромагнитных полей можно убедиться, так как они действуют по-разному на отрицательные и положительные заряды. Действие таких полей привело бы к определённому разделению отрицательных и положительных зарядов, которое можно было бы обнаружить на опыте.

О гравитационных полях такого сказать нельзя. Но если бы такие поля и существовали, то с ними можно было бы не считаться. Дело в том, что всем телам одно и то же гравитационное поле сообщает одно ускорение. Статическое гравитационное поле удалённых тел Вселенной в малых областях пространства можно считать однородным. Можно ввести систему отсчёта, свободно падающую в таком однородном гравитационном поле.

На явлениях, происходящих в такой системе отсчёта, наличие этого однородного гравитационного поля никак не сказывается. Переменные же гравитационные поля очень малы. Гравитационные волны обнаружены экспериментально.

В кинематике выбор системы отсчёта не существенен. В динамике всё иначе. Закон инерции ставит вопрос о выборе системы отсчёта. Одно и то же движение выглядит по-разному в разных системах отсчёта. Если в какой-то системе отсчёта тело движется прямолинейно и равномерно, то в системе отсчёта, движущейся относительно первой ускоренно, это уже не будет наблюдаться. Следовательно, закон инерции не может быть справедлив во всех системах отсчёта. Классическая механика постулирует, что существует система отсчёта, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно. Такая система отсчёта называется инерциальной.

Неинерциальность земной системы отсчёта объясняется тем, что Земля вращается вокруг своей собственной оси и вокруг Солнца, другими словами движется ускоренно относительно системы Коперника. Оба этих вращения происходят медленно по отношению к большинству процессов Земли, поэтому для множества явлений земная система отсчёта ведёт себя практически как инерциальная система.

Если три звезды, используемые в системе Коперника для фиксирования направлений координатных осей, принадлежат нашей Галактике, то такая система может играть роль инерциальной или приблизительно инерциальной системы отсчёта только тогда, когда речь идёт о движении объектов, малых по сравнению с размерами Галактики. При рассмотрении движений всей Галактики или нескольких галактик это будет уже не так. Для построения приблизительно инерциальной системы отсчёта можно использовать какие-нибудь иные четыре астрономических объекта, расстояния между которыми велики по сравнению с размерами области пространства, внутри которой совершается движение тел.

2.2. Масса. Закон сохранения импульса

Все тела сопротивляются при попытках привести их в движение, изменить направление или величину их скоростей. Это свойство тел называется инертностью. Оно проявляется в разной степени у разных тел. Сообщить одно и то же ускорение большому камню труднее, чем маленькому. Масса тела является мерой инертности этого тела.

Введём понятие изолированной или замкнутой системы. Так называют систему тел, удалённых от остальных тел, что они не оказывают никакого действия на рассматриваемую систему. Тела такой системы могут взаимодействовать только между собой. Рассмотрим изолированную систему, состоящую из двух материальных точек. Скорости точек должны быть намного меньше скорости света. Взаимодействие материальных точек приводит к изменению их скоростей. Допустим, $\vec{v}_1$ – скорость первой точки; $\vec{v}_2$ – скорость второй точки; $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$ – изменение этих скоростей за один и тот же промежуток времени Δt. На основании множества опытных фактов получено соотношение между величинами $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$:

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2, \tag{2.1}$$

здесь величины m_1 и m_2 постоянны, имеют одинаковые знаки и не зависят от характера взаимодействия между материальными точками. Коэффициенты m_1 и m_2 могут зависеть только от самих материальных точек системы и называются массами.

Чтобы от отношения масс перейти к самим массам, надо определить массу какого тела считать равной единице. В физике основной единицей массы считается килограмм. Приблизительно килограмм равен массе кубического дециметра чистой воды при $t = 4°\ \mathrm{C}$.

Выражение (2.1) можно представить в другом виде. Допустим $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости тел до взаимодействия, а $\vec{v}_1{}'$ и $\vec{v}_2{}'$ – скорости тел после взаимодействия. В соответствии с прежними обозначениями $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' - \vec{v}_1$, $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}\,' - \vec{v}_2$. Подставляем последние выражение в (2.1):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}'. \tag{2.2}$$

Назовём импульсом или количеством движения материальной точки вектор, равный:

$$p = m\vec{v}\,. \tag{2.3}$$

Импульсом или количеством движения системы материальных точек назовём векторную сумму импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит. Равенство (2.2) принимает вид:

$$\vec{p} = \vec{p}\,', \tag{2.4}$$

здесь $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\vec{p}\,' = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$ – импульсы системы до и после взаимодействия. Следовательно, импульс изолированной системы двух материальных точек сохраняется, остаётся постоянным во времени. Закон сохранения импульса может быть распространён на изолированные системы, состоящие из любого числа материальных точек.

2.3. Второй закон Ньютона. Сила

Взаимодействие с окружающими телами приводит к тому, что импульс материальной точки не сохраняется. Следовательно, за меру взаимодействия следует принять производную импульса по времени $\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$. Производная $\dot{\vec{p}}$ зависит от положения рассматриваемой материальной точки относительно окружающих её тел и в некоторых случаях от её скорости. Следовательно, $\dot{\vec{p}}$ является функцией скорости $\vec{v}$ и радиус-вектора $\vec{r}$ материальной точки и называется силой:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}). \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.5) описывает второй закон Ньютона. При нерелятивистских скоростях движения второй закон Ньютона принимает вид:

$$m\vec{v} = \vec{F}, \qquad (2.6)$$

или

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (2.7)$$

Произведение массы на ускорение равно силе, действующей на материальную точку. К установлению вида этой функции в каждом конкретном случае и сводится основная задача механики.

Уравнения (2.6) и (2.7) определяют выбор функции силы. За единицу силы принимаем такую силу, которая единице массы сообщает ускорение, равное единице. В системе СИ за единицу силы принимается ньютон (Н). Ньютон это такая сила, которая массе в один килограмм сообщает ускорение, равное $1\frac{\text{м}}{c^2}$.

2.4. Третий закон Ньютона

Рассмотрим две взаимодействующих материальных точки, которые изолированы от других взаимодействий. Согласно (2.4) в этом случае справедлив закон сохранения импульса: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$.

Дифференцируем по времени:

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0. \qquad (2.8)$$

На основании второго закона Ньютона (2.5):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \qquad (2.9)$$

здесь $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы, с которыми рассматриваемые материальные точки действуют друг на друга. В результате можем сформулировать третий закон Ньютона: силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

2.5. Силы в природе

В физике определены четыре вида взаимодействия:

1) гравитационные;

2) электромагнитные;

3) сильные или короткодействующие ядерные;

4) слабые, наблюдаемые при распаде элементарных частиц.

Классическая механика оперирует электромагнитными и гравитационными взаимодействиями. Следует отметить, что силы трения и упругие силы определяются характером взаимодействия между молекулами вещества, а они имеют электромагнитное происхождение.

2.5.1. Упругие силы

Тело под действием приложенной силы деформируется. Деформация называется упругой, если после прекращения действия силы тело принимает первоначальную форму и размеры. Для каждого тела существует предел упругости при котором наблюдаются упругие деформации.

Рассмотрим процесс упругой деформации на примере простых деформаций: растяжение и сжатие. Рассмотрим пружину, имеющую в недеформированном состоянии длину l_0. Закрепим один конец пружины неподвижно (рисунок 2.1), а удлинение пружины будем рассматривать как координату x другого конца, отсчитываемую от его положения, относящегося к недеформированной пружине.

Из рисунка 2.1 следует, что проекция упругой силы $\vec{F}_{упр}$ на ось X и координата x всегда имеют разные знаки. Это справедливо как для растяжения (рисунок 2.1,а), так и для сжатия (рисунок 2.1,б). Под действием внешней силы $\vec{F}_{\text{вн}}$ пружины растягивается на величину x, а далее наступает равновесие:

$$\vec{F}_{\text{вн}} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0. \quad (2.10)$$

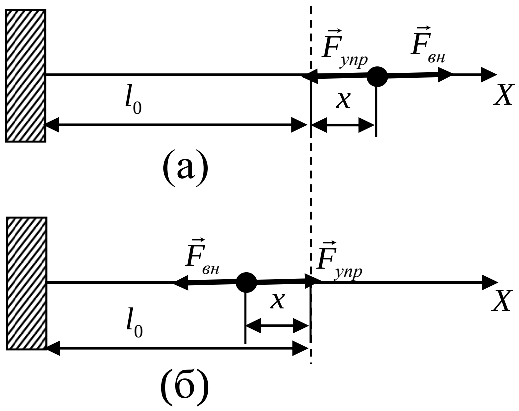


Рисунок 2.1 – Упругие деформации:
а – растяжение; б – сжатие

Внешняя сила $\vec{F}_{\text{вн}}$ и сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ уравновешивают друг друга.

Согласно опытным данным при небольших деформациях $F_{\text{вн}}$ пропорциональна x. Учитывая (2.10), следует

$$F_{\text{упр}} = -kx, \quad (2.11)$$

здесь k – коэффициент жесткости, а (2.11) так называемый закон Гука.

Упругие напряжения возникают во всей пружине, поэтому при разрезании пружины пополам та же по модулю упругая сила будет действовать в каждой из половин при удлинении в два раза меньшем. Следовательно, при одном и том же материале пружины, и размерах витка сила определяется не абсолютным удлинением x, а относительным удлинением пружины $\varepsilon = \dfrac{x}{l_0}$.

2.5.2. Силы трения

Силы трения возникают при перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друг друга. Внешним трением называется трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел. Внутренним трением называется трение между частями одного и того же сплошного тела. Например, между слоями жидкости или газа.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки называется сухим. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется вязким.

2.5.2.1. Сухое трение

В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое скольжение. Такая сила называется силой трения покоя. Рассмотрим два соприкасающихся тела (рисунок 2.2). Нижнее тело закреплено неподвижно. Верхнее тело прижимается к нижнему с силой $\vec{F}_{\text{н}}$, называемой силой нормального давления. Подействуем силой $\vec{F}$, параллельной поверхности соприкосновения тел, на верхнее тело. Каждой конкретной паре тел и силы нормального давления соответствует минимальное значение $\vec{F}_0$ силы $\vec{F}$, при котором верхнее тело сдвинется из состояния покоя. Если $0 < F < F_0$, то сила $\vec{F}$ уравновешивается равной ей по модулю и противоположной по направлению силой. Эта сила называется силой трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Согласно третьему закону Ньютона, на нижнее тело также действует сила трения покоя $\vec{F}'_{\text{тр}}$ (рисунок 2.2) и $\vec{F}_{\text{тр}} = \left|\vec{F}'_{\text{тр}}\right|$.

Если $F > F_0$, то верхнее тело начинает скользить в соответствии с уравнением:

$\vec{F}_p = \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}}$, здесь $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения.

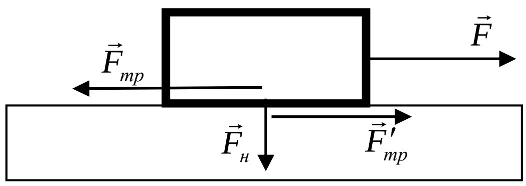


Рисунок 2.2 – $\vec{F}$ – внешняя сила; $\vec{F}_{\text{н}}$ – сила нормального давления; $\vec{F}_{\text{тр}}$, $\vec{F}'_{\text{тр}}$ – силы трения

Сила трения скольжения зависит от скорости скольжения и особенностей трущихся поверхностей. Сформулируем закон сухого трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu F_{\text{н}}, \tag{2.12}$$

где μ – коэффициент трения. Уравнение (2.12) справедливо для силы трения покоя, а также для силы трения скольжения.

Из (2.12) следует вывод, что максимальная сила трения покоя и сила трения скольжения не зависят от площади соприкасающихся поверхностей.

2.5.2.2. Вязкое трение и сопротивление среды

Сила вязкого трения обращается в нуль при отсутствии скорости. Следует отметить, что при движении тела в жидкости или газе возникают силы сопротивления среды. Эти силы могут значительно превосходить силы вязкого трения. Рассмотрим результирующие этих сил в зависимости от скорости. При малых скоростях

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha_1 \vec{v}, \tag{2.13}$$

здесь α_1 зависит от размеров тела, поверхности и формы тела, а также свойств среды, определяющей вязкость.

При больших скоростях:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha_2 v^2 \vec{i}, \tag{2.14}$$

здесь $\vec{i}$ – единичный вектор, определяющей направление скорости; α_2 в основном зависит от площади поперечного сечения и его формы.

2.5.3. Вес и сила тяжести

Ускорением свободного падения $\vec{g}$ называется ускорение с которым тела падают около поверхности Земли. следовательно, в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, на тело массой m действует сила тяжести:

$$\vec{P} = m\vec{g}. \tag{2.15}$$

Если пренебречь суточным вращением Земли, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны:

$$P = mg = G\frac{mM_З}{R^2},$$

здесь G – гравитационная постоянная; $M_З$ – масса Земли; R – расстояние между телом и центром Земли.

Весом тела называют силу, с которой тело действует на опору или на подвес вследствие гравитационного притяжения к Земле. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением не равным $\vec{g}$, значит кроме силы тяжести на тело действуют другие силы. Состояние, при котором тело движется только под действием силы тяжести называется невесомостью.

Следовательно, сила тяжести действует всегда, а вес проявляется в случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы:

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}. \qquad (2.16)$$

Из уравнения (2.16) находим вес тела

$$\vec{R} = -\vec{N} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}). \qquad (2.17)$$

Из уравнения (2.17) следует, что если тело двигается равномерно и прямолинейно, или находится в состоянии покоя $\vec{a} = 0$ и $\vec{R} = m\vec{g}$.

Если тело свободно двигается в поле тяготения $\vec{a} = \vec{g}$ и тогда $\vec{R} = 0$, получаем состояние невесомости. Невесомыми становятся тела, находящиеся в космических кораблях, которые свободно перемещаются в космосе.

2.6. Динамика вращательного движения

2.6.1. Момент инерции твёрдого тела

Момент инерции тела определяет меру инертности тела при вращательном движении. Имеет такой же физической смыл, как масса при поступательном движении. Моментом инерции тела или системы тел относительно оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения:

$$J_z = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2 , \qquad (2.18)$$

здесь k – количество элементарных масс (рисунок 2.3).

При непрерывном распределении масс (2.18) преобразуется

$$J = \int r^2 dm . \qquad (2.18')$$

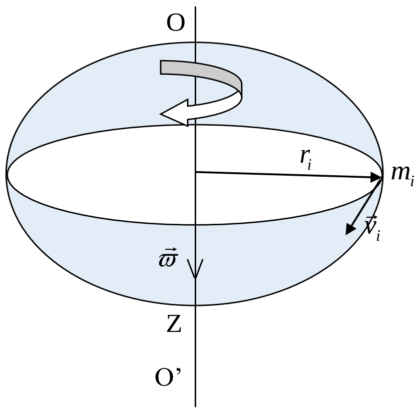


Рисунок 2.3 – Направление угловой скорости

Интегрирование в (2.18′) производится по всему объёму. Из (2.18) следует, что момент инерции тела относительно оси равен сумме моментов инерции частей тела относительно этой же оси. Следовательно, момент инерции величина аддитивная.

Теорема Штейнера позволяет вычислить момент инерции относительно произвольной оси, которая параллельна оси, проходящей через центр масс:

$$J = J_c + md^2, \tag{2.19}$$

здесь J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; m – масса тела; d – расстояние между параллельными осями.

2.6.2. Момент силы. Основное уравнение динамики вращательного движения

Мера взаимодействия между телами при вращательном движении определяется моментом силы. Рассмотрим момент силы относительно неподвижной точки и момент силы относительно неподвижной оси.

Моментом силы относительно неподвижной точки O (рисунок 2.4) называется физическая величина $\vec{M}$, определяемая векторным произведением радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку A приложения силы, на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]. \tag{2.20}$$

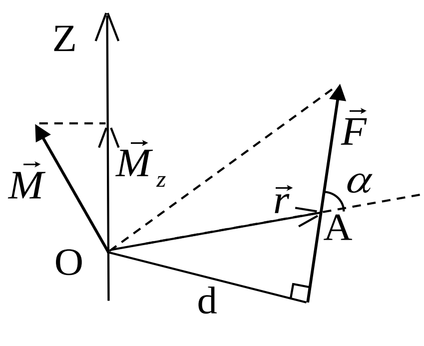


Рисунок 2.4 – Момент силы $\vec{F}$ относительно точки О

Здесь $\vec{M}$ – вектор и его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от вектора $\vec{r}$ к вектору $\vec{F}$, $\vec{M}_z$ момент силы $\vec{F}$ относительно оси Z, A – точка приложения силы $\vec{F}$, d – плечо силы $\vec{F}$.

Из (2.20) определим модуль момента силы:

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot d, \tag{2.21}$$

здесь $d = r \cdot \sin\alpha$ – плечо силы или длина перпендикуляра восстановленного из центра вращения O до линии продолжения силы; α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{r}$.

Моментом силы относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$.

Если ось Z совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]_z. \tag{2.22}$$

Вычислим кинетическую энергию твёрдого тела, вращающегося около неподвижной оси Z, проходящей через это тело. Разобьём это тело на материальные точки с массами $m_1, m_2, m_3 ... m_k$, находящиеся на расстоянии $r_1, r_2, r_3 ... r_k$ от оси вращения. Во время вращения твёрдого тела относительно неподвижной оси материальные точки будут вращаться по окружностям различных радиусов r_i с одной и той же угловой скоростью ω и различными линейными скоростями v_i (см. рисунок 2.3). Тогда кинетическая энергия вращающегося тела:

$$E_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{2.23}$$

Согласно (1.20) и (2.18) из формулы (2.23) получим:

$$E_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}, \tag{2.24}$$

здесь согласно (2.18) J_z – момент инерции тела относительно неподвижной оси Z.

Определим работу, необходимую для вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси (рисунок 2.5).

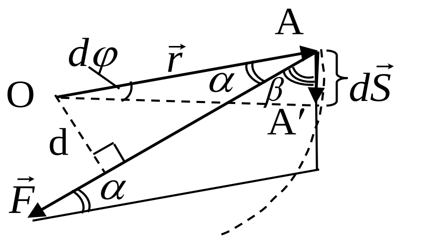


Рисунок 2.5 – Работа, необходимая для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси: A – точка приложения силы $\vec{F}$ в начале процесса; A' – точка приложения силы $\vec{F}$ в конце процесса; dS – модуль вектора перемещения; $d\varphi$ – угловое перемещение; d – плечо силы

Допустим сила $\vec{F}$ приложена в точке A, определяемой радиус-вектором $\vec{r}$, α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, β – угол между векторами $d\vec{S}$ и $\vec{F}$. При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ совершается элементарная работа согласно рисунку 2.5:

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos\beta = F \cdot dS \cdot \cos(90° - \alpha) = F \cdot \sin\alpha \cdot r \cdot d\varphi. \qquad (2.25)$$

Учтём (2.21.), тогда:

$$dA = M_z d\varphi. \qquad (2.26)$$

Работа при вращении тела идёт на увеличение кинетической энергии:

$$dA = dE_{\text{вр}}.$$

Учитывая

$$dE_{\text{вр}} = \left(\frac{J_z\omega^2}{2}\right) = J_z\omega d\omega,$$

получаем

$$M_z d\varphi = J_z \omega d\omega.$$

Из предыдущего уравнения следует:

$$dA = M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}. \qquad (2.27)$$

Учтем $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, а $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, тогда из (2.27):

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \qquad (2.28)$$

Уравнение (2.28) называется основным уравнением динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси.

Если ось Z проходит через центр масс, тогда получаем векторное равенство:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \qquad (2.29)$$

здесь J – главный момент инерции тела.

Динамика поступательного и вращательного движения. Разобранные задачи

Задача 1.

Материальная точка массой $m = 20$ г движется без трения прямолинейно под действием силы, изменяющейся со временем по закону $\vec{F} = \vec{b}t$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор, модуль которого равен 0,03 Н/с. В момент времени $t = 0$ координата тела $x_0 = 0$, скорость тела $v_0 = 5$ м/с. Получите зависимость координаты x движущейся точки от времени и найдите путь, пройденный ею за первые 4 с.

Решение:

Модуль действующей силы равен $\vec{F} = \left|\vec{b} \cdot t\right| = bt$. В проекции на направление x можно записать: $F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Ускорение $a_x = \dfrac{b}{m}t$ или $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, откуда $dv_x = a_x dt$. Проинтегрируем это выражение и получаем $\int\limits_{v_0}^{v} dv_x = \int\limits_0^t a_x dt$. (В дальнейшем индекс «$x$» опустим). $v - v_0 = \dfrac{b}{m}\int\limits_0^t tdt = \dfrac{b}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2}$;

$v = v_0 + \dfrac{b}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2}$. Координату x можно найти из соотношения $dx = vdt$. Тогда

$\int\limits_{x_0}^{x} dx = \int\limits_0^t vdt$, $x - x_0 = \int\limits_0^t\left(v_0 + \dfrac{b}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2}\right)dt = \int\limits_0^t v_0 dt + \dfrac{b}{2m}\int\limits_0^t t^2 dt$.

$$x = v_0 t + \frac{b}{6m}t^3 = 5t + 0,25t^3.\ S = S_{t_1} = x_{t_1} = 20 + 0,25\cdot 64 = 36 \text{ м.}$$

Задача 2.

Тело массой $m = 2$ кг движется под действием переменной силы $F = At^3 + Bt$ (Н), где $A = 1$кг·м/с^5, $B = 2$ кг·м/с^3. Движение начинается в момент времени $t_0 = 0$. Определить скорость тела через 2 с после начала движения.

Решение:

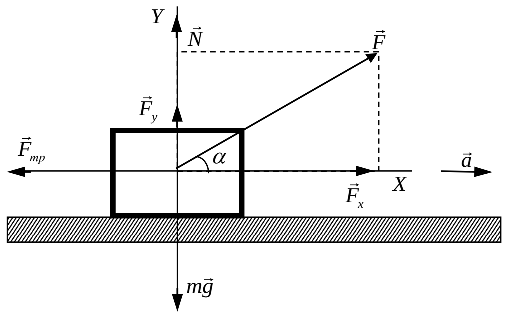
Применим второй закон Ньютона $d(m\vec{v}) = \vec{F}dt$. Запишем в скалярной форме этот закон $mdv = Fdt$ и проинтегрируем

$\int\limits_0^v mdv = \int\limits_{t_0}^t Fdt = \int\limits_{t_0}^t\left(At^3 + Bt\right)dt$; $m\cdot v = \int\limits_{t_0}^t t^3 dt + \int\limits_{t_0}^t 2tdt$, тогда $v = 4$ м/с.

Задача 3.

Груз массой 10 кг перемещается горизонтально под действием силы, равной 100 Н/м и направленной под углом 30⌖горизонту. Определите силу трения, действующую на тело и путь, пройденный телом на 10 с после начала действия силы, если коэффициент трения груза о плоскость равен 0,1. Ответ представить в СИ и округлить до целого числа.

Решение:



Рассмотрим, с какими телами взаимодействует данное тело и какие силы на него действуют со стороны других тел. На тело действуют силы: внешняя сила $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Задаем направление оси X (по направлению ускорения $\vec{a}$), и оси Y. По второму закону Ньютона в векторной форме для данного тела запишем

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}. \tag{1}$$

Проецируя все составляющие данного уравнения на координатные оси X и Y, и принимая во внимание, что $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$, где $\vec{F}_x = \vec{F} \cdot \cos\alpha$, а $\vec{F}_y = \vec{F} \cdot \sin\alpha$, получим

для оси *OX:*

$$F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр}} = ma, \tag{2}$$

для оси *OY:*

$$F \cdot \sin\alpha + N - mg = 0. \tag{3}$$

Определив из (3) силу N, получим выражение для силы трения.

$$N = mg - F \cdot \sin\alpha; \quad F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F \cdot \sin\alpha). \tag{4}$$

$$F_{\text{тр}} = 0{,}1\left(10 \cdot 9{,}8 - 100 \cdot \frac{1}{2}\right) = 4{,}8 \text{ Н}.$$

Искомый путь найдем как путь, пройденный при равноускоренном движении без начальной скорости $S = \dfrac{a \cdot \Delta t^2}{2}$. Подставив (4) в (2), определим ускорение a

$$F \cdot \cos\alpha - \mu(mg - F \cdot \sin\alpha) = ma,$$

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu\cdot\sin\alpha) - \mu\cdot mg}{m}.$$

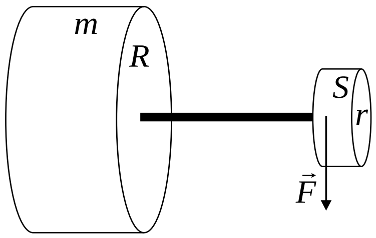
$$a = \frac{100\left(0{,}876 + 0{,}1\cdot\frac{1}{2}\right) - 0{,}1\cdot 10\cdot 9{,}8}{10} = 8{,}19 \text{ м/с}^2.$$

$$S = \frac{a\cdot\Delta t^2}{2} = \frac{8{,}19\cdot 100}{2} = 409{,}5 \text{ м}.$$

Задача 4.

Маховик массой 1 т связан со шкивом *S*. К шкиву, радиус которого 0,15 м приложена постоянная сила 500 Н по касательной. Определите через сколько времени после начала вращения маховик достигнет скорости 6,28 рад/с. Маховик представляет собой диск радиусом 1 м.

Решение:



Постоянная сила F в течение времени t совершила работу, которая пошла на увеличение кинетической энергии маховика. Вращение маховика под действием постоянного момента силы равноускоренное; в начальный момент угловая скорость равна нулю; конечная скорость $\omega = \varepsilon t$. Угол поворота маховика $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$, где ε – угловое ускорение. Тогда $\varphi = \frac{t^2\omega}{2t} = \frac{\omega t}{2}$. Работа постоянного момента силы M, действующего на вращающееся тело, равна $A = M\cdot\varphi = F\cdot r\cdot\varphi$, r – плечо силы $\vec{F}$. В результате совершенной работы маховик приобрел энергию $\frac{J\omega^2}{2}$, где J – момент инерции, равный $J = \frac{mR^2}{2}$. Следовательно $\frac{Fr\omega t}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{4}$, откуда $t = \frac{mR^2\omega}{2Fr} = \frac{10^3\cdot 1\cdot 6{,}28}{2\cdot 500\cdot 0{,}15} = 42$ с.

Задача 5.

Маховик, масса которого 5 кг можно считать распределенной по ободу радиуса $r = 20$ см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой $n = 720$ об/мин. Найдите тормозящий момент M и число оборотов N, которое сделает маховик до полной остановки. При торможении маховик полностью останавливается через 20 с.

Решение:

Применим основной закон динамики для вращательного движения: $M = \dfrac{\Delta(J\omega)}{\Delta t}$. Роль тормозящей силы играет сила трения; момент инерции $J = \mathrm{const}$, так как радиус вращения и масса не изменяются. $M\Delta t = J\Delta\omega$.

При равномерном движении $\omega_0 - \omega_t = \Delta\omega,\ \Delta\omega = \omega_0 \quad (\omega_t = 0)$, $\Delta\omega = 2\pi n$.

Момент инерции

$$J = mr^2.\ M\Delta t = mr^2 2\pi n,$$

откуда $M = \dfrac{2\pi mr^2 n}{\Delta t} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 12}{20} = 0{,}755$ Н·м.

Угловой путь

$$\varphi = 2\pi N = \frac{\omega_0 \Delta t}{2};\ \omega_0 = \varepsilon \Delta t,$$

где ε – угловое ускорение.

$$\varphi = \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2};\ N = \frac{\omega_0 \Delta t}{4\pi} = \frac{2\pi n \Delta t}{4\pi} = \frac{n\Delta t}{2} = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120.$$

Динамика поступательного и вращательного движения. Задачи для практических занятий

Задача 1.

Шарик массой $m = 300$ г ударился о стену и отскочил от нее. Определите импульс p_1, полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость $v_0 = 10$ м/с, направленную под углом $\alpha = 30°$ к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

Задача 2.

К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 3$ кг. Каково будет показание весов во время движения грузов. Массой блока и шнура пренебречь.

Задача 3.

Материальная точка массой $m = 1$ кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом $r = 1,2$ м в течение времени $t = 2$ с. Найдите изменение Δp импульса точки.

Задача 4.

Шайба, пущенная по поверхности льда с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с, остановилась через $t = 20$ с. Найдите коэффициент трения μ шайбы о лед.

Задача 5.

Самолет описывает петлю Нестерова радиусом $R = 200$ м. Во сколько раз сила $\vec{F}$, с которой летчик давит на сиденье в нижней точке, больше силы тяжести $\vec{P}$ летчика, если скорость самолета $v = 100$ м/с.

Задача 6.

Искусственный спутник обращается вокруг Земли по окружности на высоте $h = 3,6$ Мм. Определите линейную скорость v спутника. Радиус Земли $R = 6,37 \cdot 10^3$ м и ускорение свободного падения g на поверхности Земли считать постоянными.

Задача 7.

Груз, привязанный к нити длиной $l = 1$ м описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определите период T обращения, если нить отклонена на угол $\varphi = 60°$ от вертикали.

Задача 8.

На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом $R = 5$ см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 0,4$ кг. Опускаясь равноускорено, груз прошел путь $S = 1,8$ м за время $t = 3$ с. Определите момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

Задача 9.

Через неподвижный блок массой $m = 0,2$ кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами $m_1 = 0,3$ кг и $m_2 = 0,5$ кг. Определите силы натяжения T_1 и T_2 шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

Задача 10.

К ободу однородного диска радиусом $R = 0,2$ м приложена касательная сила $F = 98,1$ Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр} = 4,9$ Н·м. Найдите массу m диска, если известно, что диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 100$ рад/с^2.

Динамика поступательного и вращательного движения. Тест для практического занятия

1. Материальная точка М движется по окружности со скоростью $\vec{V}$. На рисунке 1 показан график зависимости V_τ от времени ($\vec{\tau}$ – единичный вектор положительного направления, V_τ – проекция $\vec{V}$ на это направление). На рисунке 2 укажите направление силы, действующей на точку в момент времени t_3.

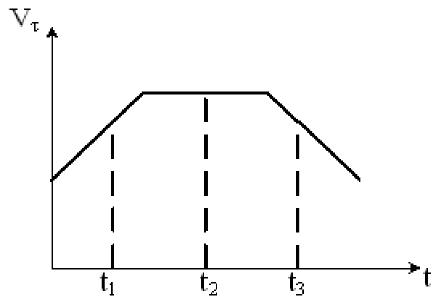


Рисунок 1

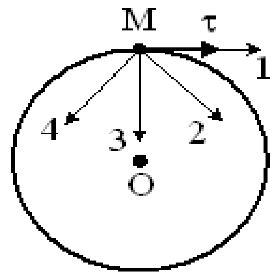


Рисунок 2

Ответы: 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

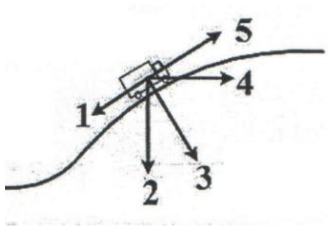
2. К вертикально висящей пружине прицепили груз массой 1 кг и спокойно его отпустили. Пружина при этом растянулась на 4,9 см. Определить коэффициент жесткости пружины.

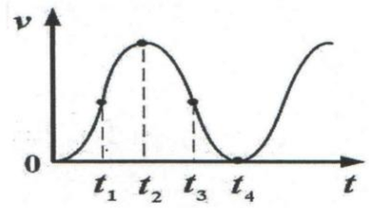
Ответы: 1) 50 Н/м 2) 100 Н/м 3) 200 Н/м 4) 49 Н/м.

3. Укажите из предложенных ниже формул закон динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Ответы: 1) $\vec{L} = I\vec{\omega}$; 2) $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$; 3) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}v(t)$; 4) $\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$.

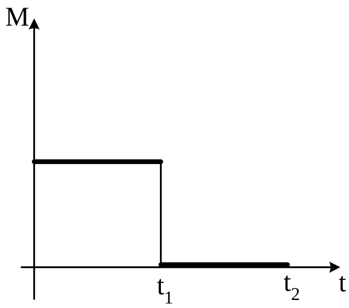
4. Модуль скорости автомобиля изменялся со временем, как показано на графике $v(t)$. В момент времени t_2 автомобиль поднимался по участку дуги. Направление результирующей всех сил, действующих на автомобиль в этот момент времени правильно отображает вектор.



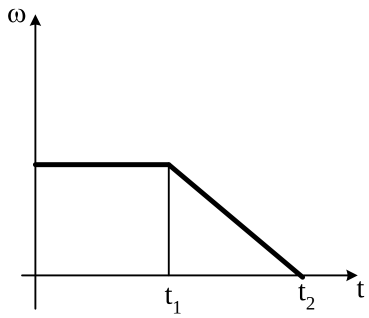


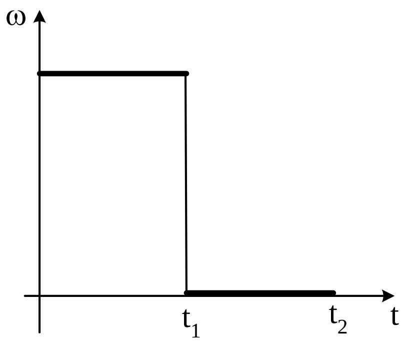
Ответы: 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5.

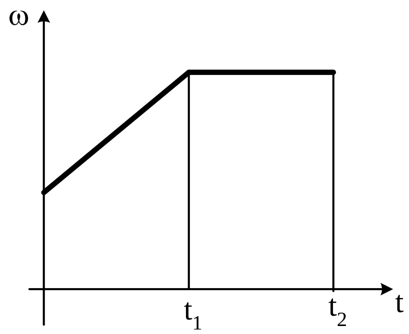
5. Диск вращается равномерно с некоторой угловой скоростью ω. Начиная с момента времени $t = 0$, на него действует момент сил, график временной зависимости которого представлен на рисунке.

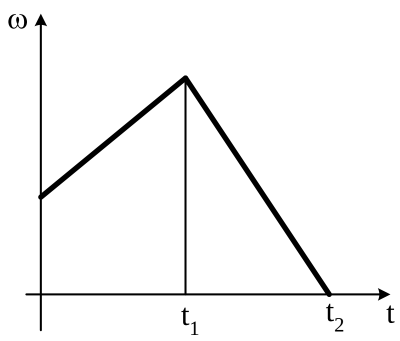


Укажите график, ПРАВИЛЬНО отражающий зависимость угловой скорости диска от времени.









Ответы: 1) 2) 3) 4)

Динамика поступательного и вращательного движения. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.

На гладком столе лежит брусок массой $m = 4$ кг. К бруску привязан шнур, ко второму концу которого приложена сила $F = 10$ Н, направленная параллельно поверхности стола. Найдите ускорение a бруска.

Задача 2.

На столе стоит тележка массой $m_1 = 4$ кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через блок. С каким ускорением a будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой $m_2 = 1$ кг.

Задача 3.

Шарик массой $m = 0,2$ кг соскальзывает без трения по желобу высотой $h = 2$ м. Начальная скорость v_0 шарика равна нулю. Найдите изменение Δp шарика и импульс p, полученный желобом при движении тела.

Задача 4.

Шарик массой $m = 100$ г упал с высоты $h = 2,5$ м на горизонтальную плиту, масса которой много больше массы шарика, и отскочил от нее вверх. Считая удар абсолютно упругим определите импульс p, полученный плитой.

Задача 5.

Акробат на мотоцикле описывает «мертвую петлю» радиусом $r = 4$ м. С какой наименьшей скоростью $v_{\min}$ должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться.

Задача 6.

Радиус R малой планеты равен 250 км, средняя плотность $\rho = 3$ г/см^3. Определите ускорение свободного падения g на поверхности этой планеты.

Задача 7.

На легкой нерастяжимой нити, выдерживающей натяжение $T_{\max} = 20$ Н, поднимают груз массой $m = 1$ кг из состояния покоя вертикально вверх. Считая движение равноускоренным, найдите максимальную высоту, на которую можно поднять груз за $\Delta t = 1$ с так, чтобы нить не оборвалась.

Задача 8.

Тонкий однородный стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определите вращающий момент M.

Задача 9.

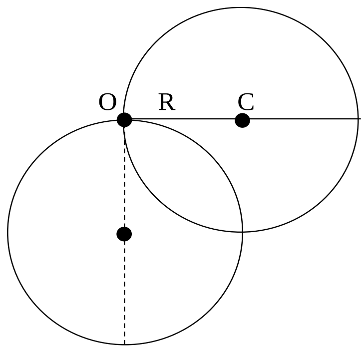
Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 4$ рад/с^2, $C = -1$ рад/с^3. Найдите закон изменения момента сил, действующих на шар. Определите момент сил M в момент времени $t = 2$ с.

Задача 10.

К ободу колеса радиусом 0,5 м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 98{,}4$ Н. Найдите угловое ускорение ε колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $n = 100$ об/с? Колесо считать однородным диском, трением пренебречь.

Динамика поступательного и вращательного движения. Тест для самоконтроля

1. Тонкий обруч радиусом 1 м, способный вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, отклонили от вертикали на угол $\frac{\pi}{2}$ и отпустили. В начальный момент времени угловое ускорение обруча равно:



Ответы: 1) 7 рад/с^2 2) 5 рад/с^2 3) 20 рад/с^2 4) 10 рад/с^2.

2. В каком случае материальная точка движется равномерно по окружности?

Ответы:

1) Если направление силы, приложенной к точке, совпадает с направлением скорости.

2) Если сила, приложенная к точке, направлена противоположно направлению скорости.

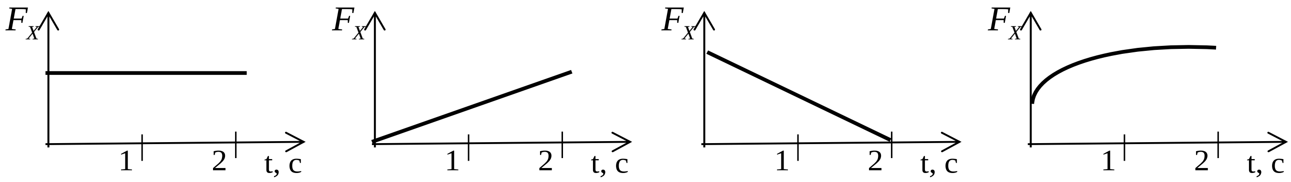
3) Если сила перпендикулярна скорости и непрерывно меняется по модулю.

4) Если сила, приложенная к точке, перпендикулярна скорости и постоянна по модулю.

3. Под действием силы тело массой 1,5 кг движется так, что зависимость пути от времени описывается уравнением $S = a + bt + ct^2$, где $a = 1$ м, $b = 3$ м/с, $c = 2$ м/с^2, t –- время. Определить в СИ силу, действующую на тело.

Ответы: 1) 0,5 Н 2) 1 Н 3) 2 Н 4) 6 Н.

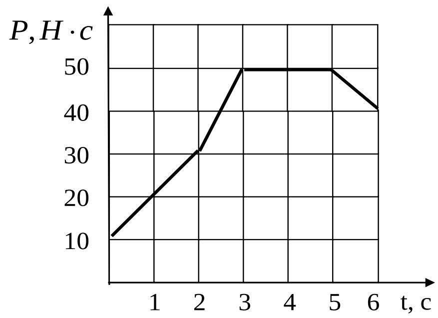
4. Зависимость импульса частицы от времени описывается законом $\vec{P} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные вектора координатных осей *X, Y* соответственно. Зависимость горизонтальной проекции силы F_X, действующей на частицу от времени представлена на



Ответы: 1) 2) 3) 4)

5. Импульс тела меняется со временем согласно графика. Какая сила действует во временном интервале от 3 до 5 с:

Ответы: 1) 50 Н 2) 150 Н 3) 0 Н 4) 80 Н.



Динамика поступательного и вращательного движения. Вопросы для самоконтроля

1. Мерой чего является масса тела?
2. Что характеризует момент инерции твёрдого тела?
3. В каких системах отсчёта выполняются законы Ньютона?
4. Мерой чего является вектор силы?
5. Дайте определение закону сохранения импульса.
6. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения.
7. Как определить направление вектора момента силы?

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса материальной точки *A* относительно неподвижной точки *O* определяется как физическая величина $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times m\vec{v}\right], \qquad (3.1)$$

здесь m – масса материальной точки; $\vec{v}$ – скорость материальной точки; $\vec{r}$ – определяет положение точки *A* относительно точки *O*.

Направление $\vec{L}$ определяется поступательным движением правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p} = m\vec{v}$ (рисунок 3.1).

Согласно (3.1.) определим модуль момента импульса:

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\alpha = p \cdot d, \qquad (3.2)$$

здесь d – плечо вектора импульса относительно точки *O*; α – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{r}$.

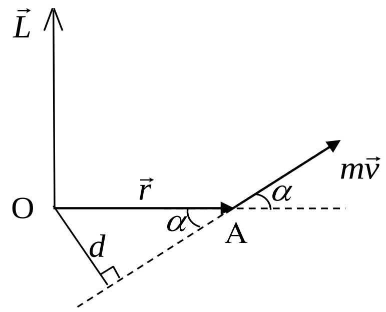


Рисунок 3.1 – Направление момента импульса

Моментом импульса относительно неподвижной оси *Z* является величина L_z, равная проекции на ось *Z* вектора $\vec{L}$, определённого относительно точки *O*, лежащей на данной оси *Z*.

Если твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси *Z*, то каждая *i*-ая точка тела вращается по окружности радиусом $\vec{r}_i$, с соответствующей скоростью $\vec{v}_i$ (см. рисунок 2.1). Вектор скорости $\vec{v}_i$ расположен под прямым углом к вектору $\vec{r}_i$. Следовательно, r_i является плечом вектора $\vec{p}_z = m_i\vec{v}_i$. В результате:

$$L_{iz} = m_i v_i r_i. \qquad (3.3)$$

Определим момент импульса твёрдого тела относительно оси *Z*:

$$L_z = \sum_{i=1}^{k} m_i v_i r_i. \quad (3.4)$$

Согласно (1.20):

$$L_z = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2 = J_z \omega. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z. \quad (3.6)$$

В общем виде:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) называется уравнением моментов. В замкнутой системе $\vec{M} = 0$, тогда (3.7) преобразуется:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Следовательно

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Получили фундаментальный закон природы: момент импульса замкнутой системы величина постоянная, не зависит от времени.

3.2. Закон сохранения полной механической энергии

Закон сохранения энергии утверждает, что замкнутая система не может бесконечно долго выделять механическую энергию за пределы системы. Это строгое ограничение на возможность создания энергии и её преобразование запрещает существование вечных двигателей.

Если материальная точка движется под действием фундаментальной силы $\vec{F}$, которая не зависит от времени, тогда:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.9)$$

Для этой точки можно определить физическую величину, которая в процессе движения остаётся неизменной.

Умножим уравнение (3.9) скалярно на $d\vec{r}$:

$$\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r}\right). \tag{3.10}$$

Первую часть (3.10) преобразуем:

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r}\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{v}\right) = m(\vec{v}, d\vec{v}). \tag{3.11}$$

Имеем тождество:

$$v^2 = (\vec{v}, \vec{v}).$$

Из последнего следует:

$$vdv = (\vec{v}, d\vec{v}). \tag{3.12}$$

Учитывая (3.11) и (3.12), уравнение (3.10) преобразуется:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) - (\vec{F}, d\vec{r}) = 0. \tag{3.13}$$

Введем функцию *U(x,y,z)* для которой справедливо:

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{3.14}$$

Функция *U*(*x*,*y*,*z)* определяется силовым действием на материальную точку и называется потенциальной энергией. Силы, для которых выполняется условие (3.14) называются консервативными или потенциальными.

С учётом (3.14) уравнение (3.13) преобразуется:

$$d\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0. \tag{3.15}$$

Следовательно, для материальной точки, находящейся в поле консервативных сил, остаётся постоянная величина *E*:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x, y, z) = \text{const}. \tag{3.16}$$

Первое слагаемое в (3.16) называется кинетической энергией или энергией движущегося тела. Результат, аналогичный (3.16) можно получить и для твёрдого тела. *E* называется полной механической энергией. Очевидно:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \tag{3.17}$$

Из (3.14) и (3.17) следует;

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z};$$

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \tag{3.18}$$

Обозначим:

$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

тогда:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U(x, y, z). \tag{3.19}$$

Выполненная математическая операция называется градиентом. Вектор градиента направлен в сторону возрастания функции $U(x,y,z)$.

Из (3.14) следует:

$$U(x, y, z) = -\int(\vec{F}, d\vec{r}) + C. \tag{3.20}$$

Неопределённость не отражается на физических результатах, так как при решении физических задач фиксируется разность потенциальных энергий.

Изменение потенциальной энергии точки не зависит от пути, по которому точка перемещается, а зависит только от начального и конечного положения:

$$-\int_{r_1}^{r_2}(\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1. \tag{3.21}$$

В поле консервативных сил выполняется (3.16), поэтому увеличение потенциальной энергии соответствует такому же уменьшению кинетической энергии и наоборот.

Из (3.21) также следуют выводы:

1. Работа в поле консервативных сил не зависит от формы пути, а зависит только от начального и конечного состояния системы.

2. Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю.

Законы сохранения. Разобранные задачи

Задача 1.

Нейтрон испытывает центральное, упругое соударение с ядром гелия и затем, отразившись, упруго соударяется с другим ядром гелия. Оба ядра до соударения были неподвижны. Определите, со сколько раз изменится кинетическая энергия нейтрона после двух соударений. Массы нейтрона и протона можно считать одинаковыми.

Решение:

Кинетическая энергия нейтрона до соударения $E_0 = \frac{m_n v_n^2}{2}$. Применим закон сохранения к первому столкновению:

$$m_n v_n = -m_n v_{n1} + m_я v_{я1}, \tag{1}$$

где v_{n1} и $v_{я1}$ – скорости нейтрона и ядра гелия после соударения. Теперь воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$\frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_n v_{n1}^2}{2} + \frac{m_я v_я^2}{2}. \tag{2}$$

Учтем что $m_я = 4m_n = 4m_p$, тогда из (1) получаем $v_n = 4v_{я1} - v_{n1}$. Из уравнения (2) следует, что $v_n^2 = v_{n1}^2 + 4v_{я1}^2 = \left(4v_{я1} - v_n\right)^2 + 4v_{я1}^2$; $v_n^2 = 16v_{я1}^2 - 8v_{я1} \cdot v_n + v_n^2 + 4v_{я1}^2$, откуда $v_{я1} = \frac{2}{5} v_n$.

Следовательно $v_{n1} = 4v_{я1} - v_n = 4 \cdot \frac{2}{5} v_n - v_n = \frac{3}{5} v_n$.

Теперь применим законы сохранения ко второму соударению.

$$m_n v_{n1} = m_я v_{я2} - m_n v_{n2},$$

$$\frac{m_n v_{n1}^2}{2} = \frac{m_n v_{n2}^2}{2} + \frac{m_я v_{я2}^2}{2}.$$

По аналогии, повторяя предыдущие расчеты, получим выражение для скорости нейтрона после второго соударения:

$$v_{n2} = \frac{3}{5} v_{n1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} v_n = \frac{9}{25} v_n.$$

Кинетическая энергия после второго соударения равна

$$E_2 = \frac{m_n v_{n2}^2}{2} = \frac{m_n}{2}\left(\frac{9}{25}v_n\right)^2 = \frac{81 m_n v_n^2}{625\cdot 2} = \frac{81}{625}E_0.$$

Найдем отношение $\frac{E_2}{E_0} = \frac{81\cdot E_0}{625\cdot E_0} = 0{,}13$.

Задача 2.

При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой $m = 20$ г поднялась на высоту $h = 5$ м. Определите жесткость пружины пистолета, если она была сжата на $S = 10$ см. Массой пружины пренебречь.

Решение:

Прежде всего проследим за энергетическими превращениями, с которыми связан выстрел. При зарядке пистолета сжимается пружина. При этом совершается работа A_1, в результате чего пружина приобретает потенциальную энергию E_{n1}. При выстреле потенциальная энергия пружины переходит в кинетическую энергию E_2 пули, а затем при подъеме ее на высоту превращается в потенциальную энергию E_{n2} пули. Если пренебречь потерями в этой «цепочке» энергетических превращений, то на основании закона сохранения энергии можно записать $A_1 = E_{n2}$.

Выразим работу A_1. Сила F_1, сжимающая пружину, является переменной: в каждый момент она по направлению противоположна силе упругости F и численно равна ей. Сила упругости F, возникающая в пружине при ее деформации, определяется по закону Гука $F_1 = -F = kx$, где x – абсолютная деформация пружины.

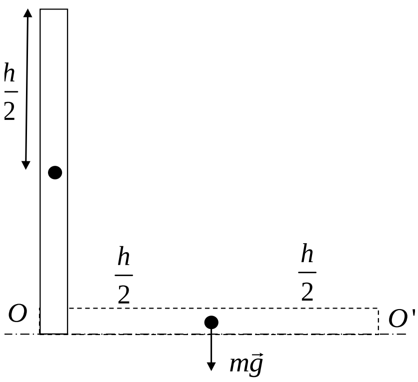
Работу переменной силы вычислим как сумму элементарных работ. Элементарная работа при сжатии пружины на dx выразится формулой $dA_1 = F_1 dx = kxdx$, интегрируя в пределах от 0 до S получим

$$A_1 = k\int_0^S xdx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^S = \frac{1}{2}kS^2.$$

Потенциальная энергия пули на высоте h определяется по формуле $E_{n2} = mgh$, где g – ускорение свободного падения. Подставив полученные выражения, найдем

$$\frac{1}{2}kS^2 = mgh, \text{ откуда } k = \frac{2mgh}{S^2} = \frac{2\cdot 0{,}02\cdot 9{,}81\cdot 5}{(0{,}1)^2} = 196 \text{ Н/м}.$$

Задача 3.



Телеграфный столб высотой $h=5$ м подпиливают у основания. С какой скоростью упадет на землю верхний конец столба? Столб можно рассматривать как тонкий и однородный стержень.

Решение:

Столб поворачивается вокруг оси OO' под действием силы тяжести. При опускании столба момент сил изменяется во времени. Поэтому применение основного закона динамики вращательного движения нецелесообразно.

Поскольку силами трения можно пренебречь, используем закон сохранения энергии $E_1 = E_2$, где E_1 – потенциальная энергия столба; E_2 – кинетическая энергия его вращательного движения.

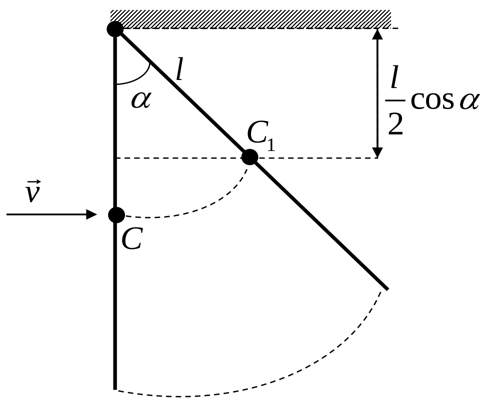
$$E_1 = mgh', \; E_2 = \frac{J\omega^2}{2},$$

здесь J – момент инерции столба; ω – угловая скорость в момент падения. По теореме Штейнера $J = \frac{1}{12}mh^2 + \frac{1}{4}mh^2 = \frac{mh^2}{3}$, $\omega = \frac{v}{h}$. Центр масс столба в результате падения опускается на величину $h' = \frac{h}{2}$. Следовательно, $E_1 = \frac{mgh}{2}$, $\frac{mgh}{2} = \frac{mh^2v^2}{3 \cdot h^2 \cdot 2}$.

$$3gh = v^2 \rightarrow v = \sqrt{3gh} = \sqrt{3 \cdot 9{,}8 \cdot 5} = 12{,}1 \text{ м/с}.$$

Задача 4.

Стержень длиной $l = 2$ м и массой $m_1 = 8$ кг может вращаться вокруг



неподвижной оси, проходящей через его верхний конец. В середину стержня ударяется пуля массой $m_2 = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 800$ м/с, и застревает в нем. Определите, на какой угол α отклонится стержень после удара.

Решение: Пуля сообщает стержню кинетическую энергию E_k и приводит его во вращательное движение, $E_k = \frac{J\omega^2}{2}$. При этом центр тяжести стержня C переходит в положение C_1 и поднимается на высоту h. Из геометрических соображений $h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$. Здесь стержень обладает потенциальной энергией $E_{\min} = m_1 gh = m_1 g\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$.

Систему «стержень-пуля» считать замкнутой. По закону сохранения энергии: $\frac{J\omega^2}{2} = m_1 g\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$, отсюда $\cos\alpha = 1 - \frac{J\omega^2}{m_1 gl}$, момент инерции стержня $J = \frac{m_1 l^2}{3}$, поэтому $\cos\alpha = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}$. Применим закон сохранения момента импульса. В начальный момент времени: для стержня $L_{01} = 0$; для пули $L_{02} = m_2 v_0 r$, где r – расстояние от точки попадания пули в стержень до оси вращения, $r = \frac{l}{2}$. В конечный момент времени $L_1 = J\omega$; для пули $L_2 = m_2\omega r^2$.

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2,\ m_2 v_0 r = J\omega + m_2\omega r^2,$$

откуда

$$\omega = \frac{m_2 v_0 r}{J + m_2 r^2} = \frac{m_2 v_0 \frac{l}{2}}{J + m_2 \frac{l^2}{4}} = \frac{6 m_2 v_0}{l(4m_1 + 3m_2)};$$

$$\omega = \frac{6\cdot 10^{-2}\cdot 8\cdot 10^2}{2(4\cdot 8 + 3\cdot 0{,}01)} = 0{,}749\ \text{с}^{-1}.$$

Искомая величина угла определяется из соотношения

$$\cos\alpha = 1 - \frac{l\omega^2}{3g} = 1 - \frac{2\cdot 0{,}719^2}{3\cdot 9{,}8} \approx 0{,}965;\ \alpha \approx 15^0.$$

Задача 5.

На краю платформы в виде диска, вращающегося по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1 = 18$ мин$^{-1}$, стоит человек массой $m_1 = 70$ кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой $n_2 = 30$ мин$^{-1}$. Определить массу платформы m_2. Момент инерции человека рассчитать, как для материальной точки.

Решение:

Замкнутая система, следовательно, момент вращения сил равен нулю, и выполняется закон сохранения момента импульса $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, отсюда $\vec{L} = \text{const}$ или в скалярном виде $L_2 = J_2\omega = \text{const}$.

Для системы «человек-платформа» суммарный момент инерции равен: $J = J_{\text{п}} + J_{\text{ч}}$, где $J_{\text{п}}$ –момент инерции платформы; $J_{\text{ч}}$ – момент инерции человека. Человека можно считать материальной точкой согласно условию задачи: $J_{\text{ч}} = m_1 r^2$, где r – расстояние от человека до оси вращения. В исходном состоянии системы $r = R$ и $J_{\text{ч}} = m_1 R^2$, в конечном состоянии $r = 0$ и $J_{\text{ч}} = 0$. Момент инерции платформы $J_{\text{п}} = \frac{1}{2} m_2 R^2$.

До перехода $L = \left(J_{\text{п}} + J_{\text{ч}}\right)\omega_1 = \left(\frac{1}{2} m_2 R^2 + m_1 R^2\right)\omega_1 = \left(\frac{1}{2} m_2 + m_1\right) R^2 \omega_1$.

После перехода $L' = J_{\text{п}}\omega_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2 \omega_2$.

По закону сохранения момента импульса:

$$\left(\frac{1}{2} m_2 + m_1\right) R^2 \omega_1 = \frac{1}{2} m_2 R^2 \omega_2,$$

отсюда $m_2 = 2m_1 \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}$.

Учитывая, что $\omega_1 = 2\pi n_1$, $\omega_2 = 2\pi n_2$ получим:

$$m_2 = 2m_1 \frac{2\pi n_1}{2\pi(n_2 - n_1)} = 2m_1 \frac{n_1}{n_2 - n_1} = 2 \cdot 70 \frac{18}{30 - 18} = 210 \text{ кг.}$$

Законы сохранения. Задачи для практических занятий

Задача 1.

Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 1{,}5$ кг и неупруго соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Какое время t будут двигаться эти тела после удара, если коэффициент трения $k = 0{,}05$?

Задача 2.

На горизонтальных рельсах стоит платформа с песком. В песок попадает снаряд, летевший вдоль рельсов, и застревает в нем. В момент попадания снаряда его скорость равна $v = 400$ м/с и направлена сверху вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Какую скорость приобрела платформа? Масса платформы с песком $M = 5$ т, масса снаряда $m = 10$ кг.

Задача 3.

Человек неподвижно стоит на тележке, которая может двигаться по горизонтальной поверхности без трения. Определите скорость тележки, если человек начнет перемещаться по ней со скоростью $v = 5$м/с относительно тележки. Масса тележки $M = 120$ кг, масса человека $m = 80$ кг.

Задача 4.

Снаряд массой $m = 10$ кг обладает скоростью $v = 200$ м/с в верней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой $m_1 = 3$ кг получила скорость $v_1 = 400$ м/с в прежнем направлении. Найдите скорость v_2 второй, большей части, после разрыва.

Задача 5.

Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь $S = 5$ м и приобрела скорость $v = 2$ м/с. Определите работу A сил, если масса вагонетки равна 400 кг и коэффициент трения $\mu = 0,01$.

Задача 6.

Определите линейную скорость v центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 1$ м.

Задача 7.

В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной $l = 2,4$м и массой 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой $n_1 = 1$ с$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен $J = 6$ кг·м^2.

Задача 8.

На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0,1$ кг·м^2 намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0,5$ кг. До начала вращения барабана высота груза над полом $h_0 = 1$ м. Через какое время t груз опустится до пола? Найдите кинетическую энергию E_k груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Задача 9.

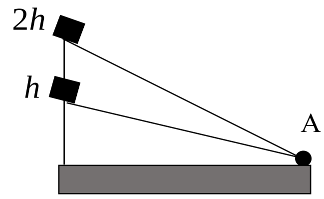
На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2$ м, стоит человек массой $m_1 = 80$ кг. Масса m_2 платформы равна 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найдите, с какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ м/с относительно платформы.

Задача 10.

В пружинном ружье пружина сжата на $x_1 = 20$ см. При взводе ее сжали еще на $x_2 = 30$ см. С какой скоростью v вылетит из ружья стрела массой $m = 50$ г, если жесткость пружины равна $k = 120$ Н/м?

Законы сохранения. Тест для практического занятия

1. В каком случае полная механическая энергия тела в точке А будет больше:



1) тело без начальной скорости соскальзывает (без трения) по наклонной плоскости с высоты h;

2) тело без начальной скорости соскальзывает (без трения) по наклонной плоскости с высоты $2h$.

Ответы: 1) 1 2) 2

2. Самолет массой 10^4 кг двигаясь со скоростью 360 км/ч по окружности пролетает 1/6 ее длины. Величина изменения импульса самолета равна…

Ответы: 1) $0{,}5\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{c}$ 2) $10^4\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{c}$ 3) $2{,}5\cdot 10^5\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{c}$ 4) $5\cdot 10^5\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{c}$ 5) $10^6\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{c}$.

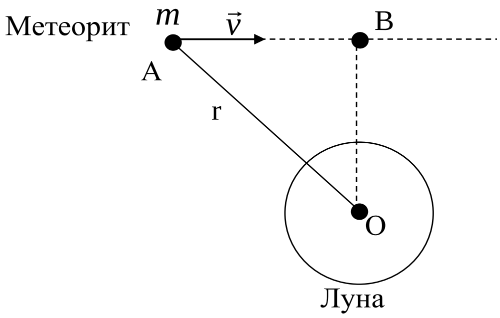
3. Камень массой 40 г бросают вертикально вверх со скоростью 30 м/с. Если в начальный момент времени потенциальная энергия камня равна нулю, то в конце четвертой секунды полета потенциальная энергия камня равна

Ответы: 1) 1,6 Дж 2) 4,8 Дж 3) 16 Дж 4) 48 Дж 5) 1,6 кДж.

4. Шарик массой m упал с высоты H на стальную плиту и упруго отскочил от нее вверх. Изменение импульса шарика в результате удара равно…

Ответы: 1) $m\sqrt{2gH}$ 2) $m\sqrt{8gH}$ 3) $m\sqrt{0,5gH}$ 4) $2m\sqrt{gH}$.

5. Находясь на расстоянии $r \gg R$,по направлению к Луне летит метеорит, скорость которого v_0. Для расчета предельного расстояния OB, при котором метеорит не упадет на поверхность Луны, используют закон сохранения механической энергии и момента импульса. Выберите из предложенных вариантов верную запись этих законов. Радиус R и массу M Луны, гравитационную постоянную G, скорость метеорита вблизи поверхности Луны v считать известными.



Ответы: 1) $\dfrac{mv_0^2}{2} = G\dfrac{mM}{R} + \dfrac{mv^2}{2}$, $mv_0(OB) = mvR.$

2) $\dfrac{mv_0^2}{2} = -G\dfrac{mM}{R} + \dfrac{mv^2}{2}$, $mv_0 = mv.$

3) $\dfrac{mv_0^2}{2} = -G\dfrac{mM}{R} + \dfrac{mv^2}{2}$, $mv_0(OB) = mvR.$

4) $\dfrac{mv_0^2}{2} = -G\dfrac{mM}{R} + \dfrac{mv^2}{2}$, $mv_0(OA) = mvR.$

Законы сохранения. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.

В комнате высотой $h = 2,5$ м с потолка на пол упал кусок штукатурки массой $m = 50$ г. Какой импульс был передан полу? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2.

Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с. На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной? Сопротивление воздуха не учитывать.

Задача 3.

В шар массой $M = 50$г, висящий на невесомой нерастяжимой нити, попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 10$ г и застревает в нем.

Какое количество теплоты при этом выделилось, если после взаимодействия с пулей шар поднялся на высоту $h = 20$ см.

Задача 4.

С какой скоростью v вылетит из пружинного пистолета шарик массой $m = 10$ г, если пружина была сжата на $x = 5$ см. Жесткость пружины равна 200 Н/м.

Задача 5.

Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 2$ кг, Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент после бросания ее скорость была равна $v = 0{,}1$ м/с. Масса тележки с человеком $M = 100$ кг. Найдите кинетическую энергию E_k брошенного камня через время $t = 0{,}5$ с после начала его движения.

Задача 6.

Человек сидит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой $m = 0{,}4$ кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20$ м/с. Траектория мяча проход на расстоянии $r = 0{,}8$ м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции человека и скамьи равен $J = 6$ кг·м^2.

Задача 7.

Сколько времени будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости длиной $l = 2$ м и высотой $h = 10$ см?

Задача 8.

Платформа в виде диска радиусом $R = 1$ м вращается по инерции с частотой $n_1 = 6$ мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса m которого равна 80 кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы равен $J = 120$ кг·м^2. Момент инерции человека рассчитывать, как для материальной точки.

Задача 9.

Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения $n_1 = 0{,}5\,\text{с}^{-1}$. Момент инерции J_0 тела человека относительно оси вращения равен 1,6 кг·м^2. В вытянутых в стороны руках человек держит по гире массой 2 кг каждая. Расстояние между гирями 1,6 м. Определите частоту вращения скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние между гирями станет равным 0,4 м. Моментом инерции скамьи пренебречь.

Задача 10.

Пуля, летящая со скоростью v_0 пробивает несколько одинаковых досок равной толщины и расположенных вплотную друг к другу. В какой по счету доске застрянет пуля, если скорость ее после прохождения первой доски $v_1 = 0,9v_0$.

Законы сохранения. Тест самоконтроля

1. Тело с нулевой начальной скоростью падает с некоторой высоты. Во сколько раз увеличится конечная скорость тела, если высоту падения увеличить в 4 раза?

Ответы: 1) 2 2) 4 3) 8 4) 16

2. Материальная точка массой 1 кг равномерно движется по окружности со скоростью 20 м/с. За четверть полного оборота модуль изменения импульса материальной точки для этого движения равен в (кг м/с).

Ответы: 1) 10 2) $10\sqrt{2}$ 3) 20 4) $20/\sqrt{2}$ 5) $20\sqrt{2}$.

3. В каком случае 1 или 2 изменение импульса мяча будет больше?

1) Мяч ударяется нормально о стенку и упруго отскакивает от нее.

2) Мяч ударяется о стенку под углом 30^0 и упруго отскакивает от нее.

Ответы: 1) 1 2) 2 3) в обоих случаях изменение импульса одинаково.

4. Могут ли осколки разорвавшейся гранаты лететь в одном направлении, если до взрыва граната покоилась?

Ответы: 1) да, могут 2) нет, не могут.

5. Совершает ли работу сила притяжения Земли Солнцем?

Ответы: 1) да, совершает; 2) нет не совершает; 3) зависит от системы отсчета.

Законы сохранения. Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение полной механической энергии.
2. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии.
3. Какое силовое поле называется потенциальным?
4. Каковы свойства потенциальных полей?
5. Какие силы называют консервативными?
6. Дайте определение потенциальной энергии.
7. Может ли работа силы тяжести равняться нулю при ненулевом векторе перемещения?

Заключение

В учебно-методическом пособии приведены основные законы классической механики. Законы проиллюстрированы тестами и задачами для самостоятельной и аудиторной работы. Следует отметить, что методики решения задач классической механики получили свое развитие во всех разделах общей физики. Следовательно, основы классической механики подготавливают студентов к изучению фундаментальных основ специальных дисциплин и формированию профессионального творчества.

Таблица ответов на задачи для самостоятельной работы

№ задачи	1. Кинематика поступательного и вращательного движения тела	2. Динамика поступательного и вращательного движения	3. Законы сохранения
1	3 м/с, 38м, 4 м/с^2	2,5 м/с^2	0,35 кг·м/с
2	3 м/с, 1 м/с, 2,24 м/с	1,96 м/с^2	23 м
3	4,5 м/с^2, 0,06 м/с^2	1,25 Н·с, –1,25Н·с	0,59 Дж
4	20 м/с, 28 м/с	1,4 Н·с	7,07 м/с
5	4,9 м/с^2, 8,49 м/с^2	6,26 м/с	50 Дж
6	5 м	0,21 м/с^2	1,02 рад/с
7	1,59 с$^{-1}$	5,1 м	4,04 с
8	0,523 рад/с^2, 150 оборотов.	0,025 Н·м	10 мин$^{-1}$
9	114 рад/с, 0,2 рад/с^2, 570 м/с, 657 м/с^2	0,64 Н·м	1,18 с$^{-1}$
10	16,7 рад/с, 160 об/мин, 4 м/с	7,9 рад/с^2, 80 с	6

Таблица ответов на тесты самоконтроля

№ вопроса в тесте	1. Кинематика поступательного и вращательного движения тела	2. Динамика поступательного и вращательного движения	3. Законы сохранения
1	3	2	1
2	1	4	5
3	2	4	1
4	2	2	2
5	2	3	2

Список используемой литературы

1. Савельев И.В. Курс общей физики: учеб. пособие для втузов. В 3 т. / И.В. Савельев. – 7-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007.

Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 432 с. (В библиотеке – 155 экз.).

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие для вузов. В 5 т. / Д.В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005–2006.

Т. 1: Механика. – 5-е изд., стер. – М. : Физматлит, 2006. – 560 с. (В библиотеке – 101 экз.).

3. Зисман Г.А. Курс общей физики. В 3-х т. [Электронный ресурс] / Г.А. Зисман, О.М. Тодес – СПб. : Лань, 2007.

Т. 1: Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны. – 7-е изд. – 352 с. – Режим доступа on-line с компьютеров ТУСУР: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=505.

4. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике [Электронный ресурс] / И.В. Савельев. – 5-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 288 с. – Режим доступа on-line: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=352 с компьютеров ТУСУР.

5. Иродов И.Е. Механика. Основные законы / И.Е. Иродов. – 8-е изд., стер. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 309 с. (В библиотеке – 99 экз.).

6. Иродов И.Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. – 7-е изд., стер. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 431 с. (В библиотеке – 496 экз.).

7. Чертов А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьёв. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2007. – 640 с. (В библиотеке – 99 экз.).

8. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики : учеб. пособие для втузов / В.С. Волькенштейн. – 12-е изд., испр. – М. : Наука, 1990. – 396 с. (В библиотеке – 148 экз.).

9. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х т. [Электронный ресурс] / И.В. Савельев. – СПб. : Лань, 2011.

Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 11-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 432 с. Режим доступа on-line с компьютеров ТУСУР: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2038.

10. Фриш С.Э. Курс общей физики. В 3-х т. [Электронный ресурс] / С.Э. Фриш, А.В. Тиморева. – СПб. : Лань, 2009.

Т. 1: Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны. – 13-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 480 с. – Режим доступа online: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=416 с компьютеров ТУСУР.

Оглавление

Учебное издание

Грибов Юрий Ананьевич
Зенин Алексей Александрович

МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (6822) 533018.