Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники »**

Кафедра математики

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к лабораторным работам
для студентов

специальности 27.03.05 Инноватика

Томск 2018

Стариков Виталий Иванович

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА
Методические указания к лабораторным работам
для студентов направления 27.03.05. Инноватика

Рецензент: Гриншпон И.Э.
доцент каф. Математики
к.ф.-м.н.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники,
2018

Содержание

Введение

Тематика работ охватывает все положения из рабочей программы учебной дисциплины «Финансовая математика», уровень образовательной программы «бакалавриат», направление подготовки (специальность) - 27.03.05 Инноватика.

Цель проведения лабораторных работ – закрепить знания, полученные на лекциях, научить студентов работать с использований различных программных сред, таких как“ Mathematica” “, Mathcad ”, “Excel”.

В настоящем пособии все пояснения и решения стандартных задач представлены с использованием пакета программ “Mathematica 5-2-for students.” Эта среда удобна тем, что во многих случаях формулы в ней программируются так, как они выглядят на листке бумаги. Лабораторные работы содержат примеры решения типовых задач.

Формально, представленные комментарии и формулы- это копии рабочих компьютерных программ.

Составлены варианты задач, которые могут быть использованы на контрольных работах.

Форма отчетности для всех лабораторных работ –защита отчета.

Лабораторная работа «Практика расчета по простым процентам»

Цель работы: Проведение расчетов для наращенных сумм по простым процентам с использованием германской, французской и английской практик, использование обобщенной формулы простых процентов, расчет погашения задолжности частями с использование актуарного метода и метода торговца, расчет потребительского кредита.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

P-первоначальная сумма долга,

I- проценты за весь кредит,

S-наращенная сумма - полная сумма долга- сумма погашения- возвращаемая кредитору сумма,

n- промежуток времени, на который выдан кредит (в годах),

i-процентная ставка, ставка наращения процентов за определенный период, выражается в долях единицы,

t- число дней в году,

Wk -платежи в счет погашения долга.

1.1. **Формула простых процентов.**

Начисленные за весь срок кредита проценты I вычисляются по формуле

$$I=P*n*i \qquad (1)$$

Наращенная сумма S определяется по формуле

$$S=P+I = P*(1+n*i) \qquad (2)$$

Пример. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна

200. тыс. руб., срок 3 года, проценты простые- 20% годовых.

Имеем: P=200.; i=0.2; n=3; Расчеты проводятся по формулам (1) и (2).

Вывод результатов вычислений в среде «Mathematica 5.2 for student» осуществляется по командам:

Print["Начисленные за весь срок кредита проценты I=",I]

Print["Наращенная сумма S=" ,S]

Ответ появляется в форме:

"Начисленные за весь срок кредита проценты I=" 120.`;

"Наращенная сумма S=" 320.;

1.2. Практика расчета процентов для краткосрочных ссуд.

Временные базы:

K360-обыкновенные (коммерческие) проценты, K360=360 дней, 12 месяцев по 30 дней.

K365-точные проценты, K365=365 (или 366) дней в году.

Германская практика (360/360)- обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды t. В месяце - 30 дней. Расчет S проводится по формуле:

$$SGermany=P*(1+i*t/K360) \tag{3}$$

Французская практика (365/360) (**банковское правило**) или ACT/360- обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды, расчет числа дней t проводится по формуле t=N(T1)-N(T2), T1, T2- даты выдачи и погашения ссуды. Номера дней в году N берутся из таблиц или из Интернета. Расчет S проводится по формуле:

$$GFrance=P*(1+i*t/K360) \tag{4}$$

Английская практика (365/365) или (ACT/ACT) - это точные проценты с точным числом дней ссуды, t=N(T1)-N(T2). Расчет S проводится по формуле:

$$GEngland=P*(1+i*t/K365) \tag{5}$$

Пример: Ссуда в размере P=50000.0 руб. выдана под 10% годовых (i=0.10), T1 =15.01, T2=12.09. Какую сумму должен заплатить должник при начислении простых процентов?

Расчет времени по германской практике:

t=16+30*7+12-1;

Расчет времени для французской и английской практик:

N(T1)=15; N(T2)=255; d= N(T2)- N(T1)=240.0.

SGermany=P*(1+i*t/K360)= 53291.7,

GFrance=P*(1+i*d/K360)= 53333.3,

GEngland=P*(1+i*d/K365)= 53287.7.

1.3. Начисление процентов при переменной процентной ставке.

Пример Сумма P=20000. 0 положена в банк на 2.5 года на условиях:

первый полугодие под 5 % годовых (n1=0.5, i1=0.05), в каждом следующем году ставка повышается на один % :n2=1., i2=0.06; n3=1.0, i3=0.07. Определить наращенную сумму.

Расчет проводится по формуле:

$$S=P*(1.+n1*i1+n2*i2+n3*i3) \tag{6}$$

Ответ: S= 23100.

1.4. Погашение задолжности частями.

1.4а. **Актуарный метод**. Происходит последовательное начисление процентов на фактическую сумму долга. Если поступления больше суммы начисленных процентов, то разность идет на погашение основного долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления % за следующий период. Если частичный платеж меньше начисленных %, то он никак не отражается на основной сумме долга и приплюсовывается к следующему платежу.

Пример. Кредит на 15000 т. р. выдан на 1.5 года (с 12.03.99 по 12.09 00) под 20% годовых. В счет погашения кредита произведены платежи: 12.06.99- 500.0 р.; 12.06.00-5000.р.; 30.06.00-8000. р. Нужно найти сумму платежа в конце срока.

Имеем: P= 15000.; n=1.5; T0=12.03.99; TFin=12.09.00; i=0.2;

Поступления: W1=500., T1=12.06.99; W2=5000., T2=12.06.00; W3=8000.;T3=30.06.00.

Последовательность действий (используем германскую практику):

Шаг 1. Вычисляем долг с процентами на дату T1 учитывая, что t1 = T1- T0= 3месяца =90 дней:

S1=P*(1.+i*90/K360) =15750.

Шаг 2. Вычисляем сумму начисленных процентов и сравниваем с суммой начисления W1.

Начисленные проценты:

I1= S1-P=750.0

больше поступившей суммы в W1=500 р., поэтому сумма в 500 р. присоединяется к следующему платежу и не изменяет сумму основного долга S1= 15750.

Вычисляем долг с % на следующую дату T2, учитывая, что между T2 и T0 1 год=360 дней +90 дней = 450 дней :

S2=(P-0.)*(1.+i*450/K360)=18750.

Поступившая сумма W2 + W1 = 5500 больше начисленных процентов I2= S2 -P=18750-15000=3750, поэтому за основной долг нужно считать K2 =S2-(W2+W1)= 18750-5500= 13250.

Шаг 3. Вычисляем долг с процентами на момент T3 = (время от T2 до T3) = 18 дней:

S3=(S2-(W1+W2))*(1+ 18/360*1) = 13382.5.

После поступления W3 основная сумма долга K3= S3-W3=5382.5.

Шаг 4. Вычисляем наращенную сумму долга к концу срока TFin. Время от TFin до T3 равно 72 дня, поэтому

SFin=(S3-W3)*(1+ 72/360*i)= 5597.8.

1.4b. Правило торговца. Сумма долга с процентами остается неизменной до полного погашения в конце срока кредита. В то же время происходит накопление суммы частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами. Последний платеж Q (остаток долга) определяется как разность

$$Q=P*(1+n*i)-Sum[Wk*(1+nk*i)] \qquad (7)$$

между наращенными суммами долга и частичных платежей.

Пример. Кредит на сумму 1500 р., выданный 10.08.99 под 20% годовых, должен быть погашен 10.06.00. В счет погашения долга 10.12.99 поступило 800.р. Нужно найти остаток долга на конец срока ссуды.

Имеем: P=1500.; T0=10.08.99; Tfin=10.06.00; i=0.2;

Поступления в счет погашения долга:

W1=800.; T1=10.12.99;

"Время n (от Tfin до T0) = 10 мес., время n1(от Tfin до T1)= 6 месяцев, т.е. n=10./12; n1=6./12. Рассчитываем

Q= P*(1+n*i1)-W1*(1+n1*i1) = 869.999.

1.5 Потребительский кредит. Задается сумма кредита P, срок кредита n, процентная ставка i, число платежей в году m. Наращенная сумма долга определяется по формуле (2) S=P*(1.+n*i). Величина разового платежа находится как

$$R=S/(n*m) \qquad (8)$$

Пример. Кредит в сумме 3000 р. выдан на 2 года под 12% годовых. Погашение- ежеквартальное равными платежами (начисляются простые проценты). Определить долг с процентами и величину разового платежа.

Имеем: P=3000.; n=2; i=0.12; m=4 (ежеквартальные платежи).

Определяем наращенную сумму долга

S=P*(1.+n*i)= 3720.

Находим величину разового платежа

R=S/(n*m)= 465. 0.

Задачи к Лабораторной работе «Практика расчета по простым процентам»

Задача 1.1.
Банк выдал кредит P под простые проценты i % годовых. Дата выдачи кредита – T_1, дата погашения – T_2 . Определить сумму возвращения и проценты при разных практиках начисления: германской (360/360), французской (365/360) и английской (365/365).
Данные взять из Таб. 1.1

Таблица 1.1. Данные к задаче 1.1.

Вариант	*P, тыс. руб.*	*i, %*	T_1	T_2
1	50	10	01.02.05	01.06.05
2	50	11	02.02.05	02.06.05
3	50	12	03.02.05	03.06.05
4	50	13	04.02.05	04.06.05
5	100	14	05.02.05	05.06.05
6	150	15	06.02.05	06.06.05
7	150	16	07.02.05	07.06.05
8	150	17	08.02.05	08.06.05
9	150	18	09.02.05	09.06.05
10	150	19	10.02.05	10.06.05
11	200	20	11.02.05	11.06.05
12	200	21	12.02.05	12.06.05
13	200	22	13.02.05	13.06.05
14	200	23	14.02.05	14.06.05
15	200	24	15.02.05	15.06.05
16	300	25	16.02.05	16.06.05
17	300	26	17.02.05	17.06.05
18	300	27	18.02.05	18.06.05
19	400	28	19.02.05	19.06.05
20	400	29	20.02.05	20.06.05
21	200	10	21.02.05	21.06.05
22	300	11	22.02.05	22.06.05
23	400	12	23.02.05	23.06.05
24	200	13	24.02.05	24.06.05
25	300	14	25.02.05	25.06.05

Задача 1.2. Клиент поместил в банк сумму P (тыс. руб.) в момент времени T_1 под простые i_1 % годовых. В моменты времени T_2 и T_3 ставка заменялась на i_2 ,i_3 соответственно. В момент времени T_4 вклад был изъят. Определить доход клиента и эффективную ставку простых процентов. Расчет выполнить по правилу 365/365. Данные взять из Таб. 1.2

Таблица 1. 2. Данные к задаче 1.2.

Вар.	P	T_1	i_1, %	T_2	i_2, %	T_3	i_3, %	T_4
1	100	01.02.05	10	01.03.0.5	11	01.04.05	12	01.05.05
2	100	02.02.05	11	02.03.0.5	12	02.04.05	13	02.05.05
3	100	03.02.05	12	03.03.0.5	13	03.04.05	14	03.05.05
4	100	04.02.05	13	04.03.0.5	14	04.04.05	15	04.05.05
5	100	05.02.05	14	05.03.0.5	15	05.04.05	16	05.05.05
6	200	06.02.05	15	06.03.0.5	16	06.04.05	17	06.05.05
7	200	07.02.05	16	07.03.0.5	17	07.04.05	18	07.05.05
8	200	08.02.05	17	08.03.0.5	18	08.04.05	19	08.05.05
9	200	09.02.05	18	09.03.0.5	19	09.04.05	20	09.05.05
10	200	10.02.05	19	10.03.0.5	20	10.04.05	21	10.05.05.
11	200	11.02.05	20	11.03.0.5	21	11.04.05	22	11.05.05
12	200	12.02.05	21	12.03.0.5	22	12.04.05	23	12.05.05
13	200	13.02.05	22	13.03.0.5	23	13.04.05	24	13.05.05
14	200	14.02.05	23	14.03.0.5	24	14.04.05	25	14.05.05
15	200	15.02.05	24	15.03.0.5	25	15.04.05	26	15.05.05
16	200	16.02.05	25	16.03.0.5	26	16.04.05	27	16.05.05
17	300	17.02.05	26	17.03.0.5	27	17.04.05	28	17.05.05
18	300	18.02.05	27	18.03.0.5	28	18.04.05	29	18.05.05
19	300	19.02.05	28	19.03.0.5	29	19.04.05	30	19.05.05
20	300	20.02.05	29	20.03.0.5	30	20.04.05	31	20.05.05
21	200	21.02.05	30	21.03.0.5	26	21.04.05	32	21.05.05
22	300	22.02.05	31	22.03.0.5	27	22.04.05	33	22.05.05
23	300	23.02.05	32	23.03.0.5	28	23.04.05	34	23.05.05
24	300	24.02.05	33	24.03.0.5	29	24.04.05	35	24.05.05
25	300	25.02.05	34	25.03.0.5	30	25.04.05	36	25.05.05

Задача 1.3. Клиент поместил в банк сумму R_1 (тыс. руб.) в момент времени T_1 под простые i % годовых. В моменты времени T_2 со счета снята сумма R_2 , в момент T_3 добавлена сумма R_3 . В момент времени T_4 счет был закрыт . Определить доход клиента. Расчет выполнить по правилу 360/360. Даты T_i взять из предыдущей таблицы 1. 2, остальные данные- из Таб. 1.3

Таблица 1. 3. Данные к задаче 1.3.

Вар.	R_1	R_2	R_3	i, %	Вар.	R_1	R_2	R_3	i, %
1	100	10	200	10	14	230	140	330	23
2	110	20	210	11	15	240	150	340	24
3	120	30	220	12	16	250	160	350	25
4	130	40	230	13	17	260	170	360	26
5	140	50	240	14	18	270	180	370	27
6	150	60	250	15	19	280	190	380	28
7	160	70	260	16	20	290	200	390	29
8	170	80	270	17	21	300	210	400	30
9	180	90	280	18	22	310	220	410	31
10	190	100	290	19	23	320	230	420	32
11	200	110	300	20	24	330	240	430	33
12	210	120	310	21	25	340	250	440	34
13	220	130	320	22	26	350	260	450	35

Задача 1.4. Реинвестирование по простым процентам. Сумма P положена 1-го июня на месячный депозит под i % годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза. Использовать схему начисления 365/365. Данные взять из Таб. 1.4

Таблица 1. 4. Данные к задаче 1.4

Вар.	P	i, %	Вар.	P	i, %
1	100	10	14	113	23
2	101	11	15	114	24
3	102	12	16	115	25
4	103	13	17	116	26
5	104	14	18	117	27
6	105	15	19	118	28
7	106	16	20	119	29
8	107	17	21	120	30
9	108	18	22	121	31
10	109	19	23	122	32
11	110	20	24	123	33
12	111	21	25	124	34
13	112	22	26	125	35

Задача 1.5. Кредит на сумму P (тыс. руб.) выдан в момент времени T_1 под i % годовых. В счет погашения долга в момент времени T_2 поступила сумма R_1, в момент времени T_3 - сумма R_2. Найти остаток долга на момент T_4.Используйте правило торговца, вариант расчета - 365/360. Даты T_i взять из таблицы 1. 2, остальные данные- из Таб. 1.5

Таблица 1. 5.

Вар.	P	i, %	R_1	R_2	Вар.	P	i, %	R_1	R_2
1	100	10	10	20	14	200	23	20	40
2	100	11	15	25	15	200	24	25	50
3	100	12	20	30	16	200	25	30	60
4	100	13	25	40	17	300	26	100	70
5	100	14	30	50	18	300	27	150	80
6	200	15	10	60	19	300	28	200	90
7	200	16	15	70	20	300	29	200	100
8	200	17	20	80	21	200	25	30	60
9	200	18	25	90	22	300	26	100	70
10	200	19	30	100	23	400	27	150	80
11	200	20	10	20	24	500	28	200	90
12	200	21	10	25	25	600	29	250	100
13	200	22	15	30	26	700	30	260	110

Задача 1. 6. Имеется обязательство погасить с момента времени T_0 до момента времени T_4 долг в сумме P. Кредитор согласен получать частичные платежи. Проценты начисляются по ставке i % годовых Частичные поступления характеризуются следующими данными: в T_1 поступает сумма R_1, в T_2 поступает сумма R_2, в момент T_3 поступает сумма R_3. Нарисовать контур финансовой операции и определить остаток долга на момент T_4. Данные взять из Таб. 1.5. Все суммы – в тыс. руб. Использовать правило 365 /360.

Таблица 1. 6.

В.	P	T_0	i	R_1	T_1	R_2	T_2	R_3	T_3	T_4
1	15000	12.03.99	10	5000	12.06.99	500	12.06.00	8000	30.06.00	12.09.00
2	14000	13.03.99	11	4000	13.06.99	400	13.06.00	7000	01.07.00	13.09.00
3	13000	14.03.99	12	3000	14.06.99	300	14.06.00	8000	02.07.00	14.09.00
4	15000	15.03.99	13	5000	15.06.99	500	15.06.00	8000	03.07.00	15.09.00
5	14000	16.03.99	14	4000	16.06.99	400	16.06.00	7000	04.07.00	16.09.00
6	13000	17.03.99	15	3000	17.06.99	300	17.06.00	8000	05.07.00	17.09.00
7	15000	18.03.99	16	5000	18.06.99	500	18.06.00	8000	06.07.00	18.09.00
8	14000	19.03.99	17	4000	19.06.99	400	19.06.00	7000	07.07.00	19.09.00
9	13000	20.03.99	18	3000	20.06.99	300	20.06.00	8000	08.07.00	20.09.00
10	15000	21.03.99	19	5000	21.06.99	500	21.06.00	8000	09.07.00	21.09.00
11	14000	22.03.99	20	4000	22.06.99	400	22.06.00	7000	10.07.00	22.09.00
12	13000	23.03.99	21	3000	23.06.99	300	23.06.00	8000	11.07.00	23.09.00
13	15000	24.03.99	22	5000	24.06.99	500	24.06.00	8000	12.07.00	24.09.00
14	14000	25.03.99	23	4000	25.06.99	400	25.06.00	7000	13.07.00	25.09.00
15	13000	26.03.99	24	3000	26.06.99	300	26.06.00	8000	14.07.00	26.09.00
16	15000	27.03.99	25	5000	27.06.99	500	27.06.00	8000	15.07.00	27.09.00
17	14000	28.03.99	26	4000	28.06.99	400	28.06.00	7000	16.07.00	28.09.00
18	13000	29.03.99	27	3000	29.06.99	300	29.06.00	8000	17.07.00	29.09.00
19	15000	12.03.99	28	5000	12.06.99	500	12.06.00	8000	18.07.00	30.09.00
20	14000	13.03.99	29	4000	13.06.99	400	13.06.00	7000	19.07.00	01.10.00
21	13000	14.03.99	30	3000	14.06.99	300	14.06.00	8000	20.07.00	02.10.00
22	15000	15.03.99	31	5000	15.06.99	500	15.06.00	8000	21.07.00	03.10.00
23	14000	16.03.99	32	4000	16.06.99	400	16.06.00	7000	22.07.00	04.10.00
24	13000	17.03.99	33	3000	17.06.99	300	17.06.00	8000	23.07.00	05.10.00
25	15000	18.03.99	34	5000	18.06.99	500	18.06.00	8000	24.07.00	06.10.00

Лабораторная работа «Дисконтирование по простым процентам»

Цель работы: Освоение расчетов по дисконтированию сумм по простым процентным и учетным ставкам, проведение банковского учета векселей, расчет эквивалентных процентных и учетных ставок, определение срока ссуды и величины ставки.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

P-современная, приведенная, текущая, капитализированная, номинальная, стоимость будущего платежа S. Дисконтированная стоимость векселя,

S-будущий платеж - дисконтируемая сумма,

n- промежуток времени в годах,

i-процентная ставка (ставка наращения процентов) за определенный период, выражается в долях единицы,

D-дисконт, удержанные проценты. Определяется как D=P-S.

d-учетная ставка,

ν=nu – дисконтный множитель,

q- комиссионные от суммы кредита или номинальной стоимости векселя,

ie - эффективная ставка.

2.1a. Математическое дисконтирование. При математическом дисконтировании современная стоимость P будущей суммы S определяется формулой

$$P=S/(1.+n*i) \tag{1}$$

Дисконтный множитель ν = nu определяется как

$$nu=1./(1.+n*i) \tag{2}$$

Пример. Номинальная стоимость векселя со сроком погашения через полгода равна 55.0 т. р. Проценты начисляются по ставке 20% годовых. Найти сумму, выданную заемщику и дисконт. Имеем: S=55.0, n=0.5, i=0.2. Вычисляем и находим:

nu=0.909,

P=S/(1.+n*i)=50.0,

D=S-P=5.0.

2.1b. Банковское дисконтирование. При банковском дисконтировании

$$D=S*n*d \quad (3)$$

$$P=S*(1-n*d) \quad (4)$$

$$nu=1-n*d \quad (5)$$

Пример. Номинальная стоимость векселя в 100. т. р. со сроком погашения 12.10.1997 г. предъявлен в банк 13.09.1997. Банк учел вексель по простой учетной ставке 12% годовых. Найти сумму, которую получит владелец векселя.

Имеем: S=100., Tfin=12.10.199, T0=13.09.1997, d=0.12.

Шаг 1. Определяем точное время между Tfin и T0; N1_(Tfin)=316, N2(T0)=256.

Шаг 2.

Используем базу K=360 и рассчитываем

n=(N1-N2)/360;

P=S*(1-n*d);

D=S*n*d ;

Ответ: Дисконтированная стоимость векселя P= 98, дисконт D =2.0.

2.2.Эквивалентность процентной и учетной ставок;

Ставки i и d, связанные соотношениями

$$i=d/(1-n*d) \quad (6)$$
$$d=i/(1+n*i1)$$

называются эквивалентными.

Пример. Найти d, эквивалентную i в 19% годовых при а) n = 1 год, и б) при n =2 года.

Решение a. i=0.19, n1=1,

d=i/(1+n1*i)= 0.1596.

Решение b. i=0.19, n2=2,

d=i/(1+n2*i) = 0.1376;

2.3. Эффективная ставка. Годовая процентная ставка, эквивалентная формально применяемой в некоторой финансовой операции ставе, называется эффективной

Если q – комиссионные, которые удерживает банк от при выдаче кредита или при учете векселей, то

$$ie= (n*d+q)/n/(1.-n*d-q); \quad (7)$$

Пример. Вексель учтен в банке за 60 дней до погашения по простой годовой учетной ставке 30%. Банк удержал комиссионные в размере 0.8% от номинальной стоимости векселя. Определить доходность операции по эффективной ставке простых процентов. Использовать банковское правило.

Имеем: t=60, d=0.3, q=0.008, n=t/360.

Решение:

ie= (n*d+q)/n/(1.-n*d-q) = 0.3694.

2.4. Определение срока ссуды и величины ставки;

Срок ссуды в годах при заданных S, P, i и d, определяется формулами

$$n1=(S/P-1)/ 1 \quad (8)$$
$$n2=(S-P)/(S*d)$$

Срок ссуды в днях;

$$t1=(S-P)*K/(P* 1) \quad (9)$$
$$t2=(S-P)*K/(S*d)$$

Годовая процентная ставка определяется как

$$i=(S-P)*K/(P*t); \quad (10)$$

Годовая учетная ставка определяется как

$$d=(S-P)*K/(S*t); \quad (11)$$

Пример. Определить время, при котором начальный капитал в 3. мл. р. при простых процентах возрастет до 3.6 мл. р. если используется а) процентная ставка в 10% годовых, б) учетная ставка в 10 % годовых.

Имеем: P=3.,S=3.6., i=0.1, d=0.1.

Вычисляем:

n1=(S/P-1)/i=2.0,

n2=(S-P)/(S*d)= 1.6667.

Задачи к Лабораторной работе 2.

Задача 2. 1.

Через *k* месяцев после выдачи кредита должник обязан вернуть сумму *S* (тыс. р.). Какова сумма выданного кредита, если он выдан под простую годовую ставку *i*. Данные взять из Таб. 2.1

Таблица 2.1. Данные к задаче 2.1.

Вар.	*S*	*k*	*i*, %	Вар.	*S*	*k*	*i*, %
1	100	1	10	14	200	4	23
2	100	2	11	15	200	5	24
3	100	3	12	16	200	6	25
4	100	4	13	17	200	7	26
5	100	5	14	18	200	8	27
6	200	6	15	19	300	9	28
7	200	7	16	20	300	10	29
8	200	8	17	21	400	6	25
9	200	9	18	22	400	7	26
10	200	10	19	23	400	8	27
11	200	1	20	24	400	9	28
12	200	2	21	25	400	10	29
13	200	3	22	26	400	11	30

Задача 2. 2 Номинальная стоимость векселя равна *S* тыс. р.. За *k* месяцев до погашения банк учел его по простой учетной ставке *d %* . Какую сумму получит владелец векселя и чему равен дисконт? Данные взять из Таб. 2.2

Таблица 2.2 . Данные к задаче 2.2.

Вар.	*S*	*k*	*d*, %	Вар.	*S*	*k*	*d*, %
1	100	2	11	14	200	5	24
2	100	3	12	15	200	6	25
3	100	4	13	16	200	7	20
4	100	5	14	17	300	8	11
5	100	6	15	18	400	9	12
6	200	7	16	19	500	10	13
7	200	8	17	20	600	1	14
8	200	9	18	21	600	2	15
9	200	10	19	22	600	3	16
10	200	1	20	23	600	4	17
11	200	2	21	24	600	5	18
12	200	3	22	25	600	6	19
13	200	4	23	26	700	7	20

Задача 2.3. Вексель номиналом S с датой погашения T_2 предъявлен в банк в момент T_1. Используется простая учетная ставка d % годовых. Определить сумму, выплаченную владельцу векселя и дисконт. Использовать правило 365/360. Данные взять из Таб. 2.3

Таблица 2.3 Данные к задаче 2.3.

Вар.	*S*, тыс. р.	T_1	T_2	*d*, %
1	100	01.02.05	01.05.0.5	11
2	100	02.02.05	02.05.0.5	12
3	100	03.02.05	03.05.0.5	13
4	100	04.02.05	04.05.0.5	14
5	100	05.02.05	05.05.0.5	15
6	200	06.02.05	06.05.0.5	16
7	200	07.02.05	07.05.0.5	17
8	200	08.02.05	08.05.0.5	18
9	200	09.02.05	09.05.0.5	19
10	200	10.02.05	10.050.5	20
11	200	11.02.05	11.05.0.5	21
12	200	12.02.05	12.05.0.5	22
13	200	13.02.05	13.05.0.5	23
14	200	14.02.05	14.05.0.5	24
15	200	15.02.05	15.05.0.5	25
16	200	16.02.05	16.05.0.5	20
17	300	17.02.05	17.05.0.5	11
18	400	18.02.05	18.05.0.5	12
19	500	19.02.05	19.05.0.5	13
20	600	20.02.05	21.05.0.5	14
21	600	21.02.05	22.05.0.5	15
22	600	22.02.05	23.05.0.5	16
23	600	23.02.05	24.05.0.5	17
24	600	24.02.05	25.05.0.5	18
25	600	25.02.05	26.05.0.5	19

Задача 2. 4. Вексель учтен в банке за t дней до срока оплаты по простой годовой ставке *d%*. Определить доходность этой операции по эквивалентной годовой ставке простых процентов при использовании банковского правила. Данные взять из Таб.2.4

Задача 2. 5. Используется простая годовая ставка *i%*. Определить эквивалентное значение простой учетной ставки при учете векселя в банке за t дней до погашения по банковскому правилу. Данные взять из Таб.2.4

Таблица 2.4 . Данные к задачам 2.4, 2.5

Вар.	*t* дней	*d*, %	*i*, %	Вар.	*t* дней	*d*, %	*i*, %
1	40	11	10	14	52	24	23
2	41	12	11	15	53	25	24
3	42	13	12	16	54	26	25
4	43	14	13	17	55	27	26
5	44	15	14	18	56	28	27
6	45	16	15	19	57	29	28
7	46	17	16	20	58	30	29
8	47	18	17	21	59	31	30
9	48	19	18	22	60	32	31
10	49	20	19	23	61	33	32
11	50	21	20	24	62	34	33
12	50	22	21	25	63	35	34
13	51	23	22	26	64	36	35

Задача2. 6. Вексель учтен в банке за *t* дней до погашения по простой учетной ставке *d%*. Банк удерживает комиссионные в размере *q%* от номинальной стоимости векселя. Определить доходность сделки по эффективной ставке простых процентов с использованием банковского правила.

Задача 2. 7. Банк выдает кредит на *k* – месяцев по *i* % годовых. Определить эффективную процентную ставку кредита, если удерживаются комиссионные в размере *q* % от суммы кредита.

Данные к задачам 2.6, 2.7 взять из Таб. 2.5.

Таблица 2.5. Данные к задачам 2.6, 2.7.

Вар.	t дней	*d*, %	*q*, %	*k* - месяцев	*i*, %
1	40	11	1.0	1	10
2	41	12	1.1	2	11
3	42	13	1.2	3	12
4	43	14	1.3	4	13
5	44	15	1.4	5	14
6	45	16	1.5	6	15
7	46	17	1.6	7	16
8	47	18	1.7	8	17
9	48	19	1.8	9	18
10	49	20	1.9	2	19
11	50	21	2.0	2	20
12	50	22	2.1	3	21
13	51	23	2.2	4	22
14	52	24	2.3	5	23
15	53	25	2.4	6	24
16	54	20	2.5	7	25
17	55	11	2.6	8	26
18	56	12	2.7	9	27
19	57	13	2.8	10	28
20	58	14	2.9	11	29

Лабораторная работа «Начисление по сложным процентам»

Цель работы: Проведение расчетов наращенных сумм по сложным годовым процентам, сравнение роста наращенных сумм по сложным и простым процентам.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

P-первоначальная сумма долга,

S-наращенная сумма, полная сумма долга, сумма погашения, возвращаемая кредитору сумма,

n- срок, число лет наращения,

I- проценты за весь кредит,

Ip-начисленные проценты на проценты,

i-процентная ставка, ставка наращения процентов за определенный период (выражается в долях единицы)

r-проценты на проценты,

q-множитель наращения,

a-целое число лет,

b-дробная часть года,

j-номинальная годовая ставка,

m-число периодов начислений в году,

N-общее число периодов начисления, N=m*n.

3.1 Начисление сложных годовых процентов. Формула для наращенной суммы S с использованием сложных процентов i имеет вид

S= P*(1+i)^n (1)

Начисленные проценты определяются как

$$I = S-P = P*((1+i)^n-1) \quad (2)$$

Начисление процентов на проценты проводится по формуле

$$Ip=P*((1+i)^n-(1+n*i)) \quad (3)$$

Пример. Какой величины достигнет долг в P=1000 тыс. руб. через 5 лет (n=5) при росте по сложной ставке 15.5% годовых (i=0.155). По формуле (1)

При использовании переменной процентной ставки (i1 за период n1 и i2 за период n2)

$$S=P*(1+i1)^{n1}*(1+i2)^{n2}, \quad (4)$$

множитель наращения

$$q=(1+i1)^{n1}*(1+i2)^{n2} \quad (5)$$

Пример. Срок ссуды - 5 лет, договорная ставка -12% годовых плюс маржа 0.5% в первые два года и 0.75% в оставшиеся годы. Найти множитель наращения.

Имеем: n1=2, n2=3, i1=0.125, i2=0.1275

$q=(1+i1)^{n1}*(1+i2)^{n2}=1.814$

При использовании ставки r на проценты наращенная сумма S определяется по формуле

$$S=P*(1+i*((1+r)^n-1)/i) \quad (6)$$

При дробном числе лет в смешанном методе используется формула

$$Sm=P*(1+i)^a*(1+b*i) \quad (7)$$

где a-целое число лет и b-остаток.

Пример. Кредит в размере 3000т. р. выдан на 3 года и 160 дней под 16% годовых..

Определить сумму долга на конец срока общим и смешанным методом (К=360)

Имеем: P=3000; a=3; b=160/360; n= 3.444; i=0.16;

По общему методу

$S=3000*(1+0.16)^{3.444} = 5001.66;$

По смешанному методу

$Sm=P*(1+0.16)^3*(1+0.444*0.16))= 5015.66$

3.2 Сравнение роста по сложным и простым процентам.

Связь между эффективной ставкой ie и ставкой i сложных процентов определяется соотношением

$$ie=((1+i)^n-1)/n \qquad (8)$$

Срок удвоения суммы по простым процентам определяется как n=1/i, срок удвоения по сложным процентам находится как n=Log[2]/Log[1+i];

Например, при i=0.225 n=4.4444 и n=3.04 по простым и сложным процентам соответственно.

3.3 Наращение процентов m раз в году.

Расчет наращенной суммы S проводится по формуле

S=P*(1+j/m)^N,

где N= n*m-общее число периодов начисления, j- номинальная годовая ставка.

Пример. Какой величины достигнет долг в 1000 тыс. руб. через 5 лет при росте по номинальной ставке 15.5% годовых и поквартальном начислении процентов?

Имеем: P=1000, m=4, j=0.155, n=5;

Определяем

N=m*n=20,

S=P*(1+j/m)^N = 1000*(1+0.155/4)^20= 2139.049

3.4 Эффективна процентная ставка.

Эффективная ie и номинальная j процентные ставки связаны соотношениями:

$$ie=(1+j/m)^m-1 \qquad (9)$$
$$j=m*((1+ie)^(1/m)-1)$$

Пример. Для j=0.25 и m=12 ie=(1+j/m)^n -1 =0.2807

3.4. Непрерывное наращение.

Наращенная сумма S определяется формулой

$$S=P*Exp[delta*n], \tag{10}$$

в которой delta – сила роста. Связь процентных ставок delta и i осуществляется по формулам:

$$\begin{gathered} delta=Log[1+i] \\ i=Exp[delta]-1 \end{gathered} \tag{11}$$

Пример. Найти наращенную через 5 лет сумму при начальном вкладе в 2000 р. при непрерывном наращении при силе роста в 10%. Найти эквивалентную годовую ставку.

Имеем: P=2000, delta=0.10, n=5.

Находим

S=P*Exp[delta*n]= 3297. 44.

Эквивалентная годовая ставка

ie=Exp[delta]-1= 0.1051.

Задачи к Лабораторной работе «Начисление по сложным процентам».

Задача 3.1. Определить наращенную сумму вклада и доход клиентов при сроке n лет по номинальной ставке j , если начисление процентов производится а) ежемесячно, б) поквартально, в) по полугодиям , с) раз в год.

Задача 3.2. Определить эффективную процентную ставку, если номинальная процентная ставка равна j , а начисление процентов производится m раз в году.

Задача 3.3. На какой срок нужно поместить вклад P , чтобы получить наращенную сумму S? Номинальная процентная ставка и начисление проводится m раз в году.

Задача 3.4. Какой должна быть номинальная годовая процентная ставка $j\%$ при начислении процентов m раз в году, чтобы получить через n лет наращенную сумму S, если была помещена сумма P ?

Задача 3.5. Определить сумму вклада P , необходимую для накопления с момента T_1 до момента T_2 суммы S , если банк начисляет проценты по номинальной процентной ставке j % ежемесячно по германской практике. Данные для задач взять из Таблицы 3.1.

Таблицы 3.1. Данные для задач 3.1-3.5.

Вар.	P,тыс.р.	S, тыс.р.	j, %	m	n,лет	T_1	T_2
1	5	25	3	4	2	01.04.05	01.05.05
2	6	26	4	6	3	02.04.05	02.05.05
3	7	27	5	12	4	03.04.05	03.05.05
4	8	28	6	2	5	04.04.05	04.05.05
5	9	29	7	2	2	05.04.05	05.05.05
6	10	210	8	4	3	06.04.05	06.05.05
7	11	211	9	6	4	07.04.05	07.05.05
8	12	212	10	12	5	08.04.05	08.05.05
9	13	213	11	4	2	09.04.05	09.05.05
10	14	214	12	6	3	10.04.05	10.05.05
11	15	215	13	12	4	11.04.05	11.05.05
12	16	216	14	2	5	12.04.05	12.05.05
13	17	217	1	2	2	13.04.05	13.05.05
14	18	218	2	4	3	14.04.05	14.05.05
15	19	219	3	6	4	15.04.05	15.05.05
16	20	220	4	12	5	16.04.05	16.05.05
17	21	221	5	4	2	17.04.05	17.05.05
18	22	222	6	6	3	18.04.05	18.05.05
19	23	223	7	12	4	19.04.05	19.05.05
20	24	224	8	2	2	20.04.05	20.05.05

Задача 3.6. Ссуда P (тыс. р.) выдана на время с T_1 1998 года по T_2 2000 г . Необходимо распределить начисленные проценты (ставка i ACT/ACT) по календарным годам. Данные взять из Таб. 3.2

Таблица 3.2 Данные к задаче 3. 6.

Вар.	*P*	***i***	T_1	T_2	Вар.	*P*	***i***	T_1	T_2
1	12	10	1.05.	1.05	14	25	23	14.05.	14.05
2	13	11	2.05.	2.05	15	26	24	15.05.	15.05
3	14	12	3.05.	3.05	16	27	25	16.05.	16.05
4	15	13	4.05.	4.05	17	28	26	17.05.	17.05
5	16	14	5.05.	5.05	18	29	27	18.05.	18.05
6	17	15	6.05.	6.05	19	30	28	19.05.	19.05
7	18	16	7.05.	7.05	20	31	29	20.05.	20.05
8	19	17	8.05.	8.05	21	32	30	21.05.	21.05
9	20	18	9.05.	9.05	22	33	31	22.05.	22.05
10	21	19	10.05.	10.05	23	34	32	23.05.	23.05
11	22	20	11.05.	11.05	24	35	33	24.05.	24.05
12	23	21	12.05.	12.05	24	36	34	25.05.	25.05
13	24	22	13.05.	13.05	26	37	35	26.05.	26.05

Лабораторная работа «Дисконтирование по сложной ставке»

Цель работы: Проведение расчетов для дисконтирования по сложной учетной ставке, проведение операций со сложной учетной ставкой, сравнение интенсивностей дисконтирования по разным видам ставок, определение срока ссуды и размера процентной ставки, непрерывное дисконтирование.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

P-современная (текущая) стоимость будущей величины S,

ν≡ nu - дисконтный множитель,

D-дисконт,

f-номинальная годовая учетная ставка,

de – эффективная учетная ставка,

4.1 Математическое дисконтирование по сложной процентной ставке;

При математическом дисконтировании

nu=1/(1+i)^n (1)

P=S*nu; (2)

D=S-P (3)

При начислении m раз в году по номинальной процентной ставке j

nu_jm=1/(1+j/m)^n (4)

P=S*nu_jm (5)

Пример. Сумма в 5000 тыс. руб. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить ее современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12 % годовых.

Имеем: S=5000, n=5, i=0.12.

Находим

nu=1/(1+i)^n= 0.56742

и

P=5000*nu = 2837. 13

4.2 Банковское дисконтирование по сложной ставке.

При банковском дисконтировании при сложной учетной ставке d или номинальной годовой учетной ставке f

$$P=S(1-d)^n \tag{6}$$

$$P=S*(1-f/m)^{(m*n)} \tag{7}$$

Пример. Обязательство на сумму 5000 тыс. руб. выдано на 5 лет с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта?

Имеем: S=5000, n=5, d=0.15.

Рассчитываем

P=S(1-d)^n = 5000*(1-0.15)^5=2218.53

4.3 Эффективная учетная ставка.

Эффективная учетная de и номинальная f ставки связаны соотношением

$$de=1-(1-f/m)^m \tag{8}$$

Пример. Для S=5000, n=5, f=0.15 и m=4

P=S*(1-f/m)^(m*n)=2328.00

de=1-(1-f/m)^m =0.1417

4.4. Наращение по сложной учетной и номинальной ставкам.

Формулы наращения имеют вид:

$$S=P/(1-d)^n \tag{9}$$

$$S=P/(1-f/m)^{(m*n)} \tag{10}$$

Множители наращения MR при использовании различных ставок:

MRSimple=(1+n*is)- для простой ставки is;

MRComp=(1+i)^n- для сложной ставки i;

MRDsimple=1./(1-n*d)- для простой учетной ставки d;

MRRComp=1./(1-d)^n- для сложной учетной ставки d;

4.5 Определение срока ссуды и размера процентной ставки;

Нужно определить, за какой срок n ссуда P достигнет величины S при начислении по разным видам ставок. Нужно использовать соответствующие формулы, связывающие P , S и различные виды ставок.

Пример: P=75000., S=200000, i=0.15, j=0.15, m=4, f=0.15, d=0.15.

При наращении по сложной годовой ставке i

ni=Log[S/P]/Log[1+i]=7.017

При наращении по сложной номинальной ставке j

nj=Log[S/P]/(m*Log[1+j/m])= 6.660

При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d

nd=Log[P/S]/Log[1-d]= 6.035

При дисконтировании по сложной номинальной ставке f

nf=Log[P/S]/(m*Log[1-f/m])= 6.4154.

4.6 Величина процентной ставки.

По известным P , S, n, m,n нужно определить величину ставки.

Пример. P=100, S=160, n=2.5, m=4.

При наращении по сложной годовой ставке i

i=(S/P)^(1/n)-1= 0.206

При наращении по сложной номинальной ставке j

j=m*((S/P)^(1/(m*n))-1)= 0.1925

При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d

d=1-(P/S)^(1/n)= 0.1713

При дисконтировании по сложной номинальной ставке f

f=m*(1-(P/S)^(1/(m*n)))= 0.1836

4.7 Непрерывное дисконтирование.

Наращенная сумма

$$P=S*Exp[-delta*n] \tag{11}$$

Дисконтный множитель

$$nu=Exp[-delta*n] \tag{12}$$

Пример. S=500, delta=0.12, n=5,

P=500*Exp[-0.12*5] =274.4058

Задачи к Лабораторной работе «Дисконтирование по сложной ставке»

Задача 4. 1. Вексель стоимостью S учтен в банке за k месяцев до погашения по номинальной годовой учетной ставке f и ежемесячном дисконтировании. Определить текущую стоимость векселя и дисконт.

Задача 4. 2. Вексель учтен в банке за t дней до погашения по цене P . Номинальная годовая учетная ставка банка равна f , дисконтирование m раз в году. Определить номинальную стоимость векселя при использовании банковского правила.

Задача 4. 3. За долговое обязательство в S тыс. руб. выплачено P тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась сложная учетная ставка $d\,\%$?

Данные взять из Таб. 4.1

Таблица 4.1. Данные к задачам 4.1-4.3.

Вар.	S тыс.р. .	P,тыс.р.	f,%	m	k, мес.	t, дней	d,%	m_d
1	40	30	6	4	3	30	6	2
2	50	40	7	6	4	40	7	4
3	60	50	8	12	5	50	8	6
4	70	60	9	2	6	60	9	12

Продолжение

Таблица 4.1. Данные к задачам 4.1-4.3.

5	80	70	10	4	7	70	10	2
6	90	80	11	6	3	80	11	4
7	100	90	12	12	4	90	12	6
8	110	100	13	2	5	30	13	12
9	120	110	14	4	6	40	14	2
10	130	120	15	6	7	50	15	4
11	140	130	16	12	3	60	16	6
12	150	140	17	2	4	70	17	12
13	160	150	18	4	5	80	18	2
14	170	160	19	6	6	90	19	4
15	180	170	20	12	7	30	20	6
16	190	180	21	2	3	40	21	12
17	200	190	22	4	4	50	22	2
18	210	200	23	6	5	60	23	2
19	220	210	24	12	6	70	24	4
20	230	220	25	2	7	80	25	6

Задача 4. 3. Сравнить множители наращения и дисконтирования по разным видам процентных ставок $i=d$=20% и n=1,2,3, ...10 ;

Задача 4. 5. Найти величину дисконта, если долговое обязательство на выплату S млн. руб. учтено за k лет до срока погашения по сложной учетной ставке d % годовых. Данные взять из Таб. 4.2.

Таб. 4.2. Данные к задаче 4.5.

Вар.	*S*	*k*	*d%*	Вар.	*S*	*k*	*d%*
1	5	1	5	14	18	3	18
2	6	2	6	15	19	4	19
3	7	3	7	16	20	5	20
4	8	4	8	17	21	1	21
5	9	5	9	18	22	2	22
6	10	6	10	19	23	3	23
7	11	1	11	20	24	4	24
8	12	2	12	21	25	5	25
9	13	3	13	22	26	1	26
10	14	4	14	23	27	2	27
11	15	5	15	24	28	3	28
12	16	1	16	25	29	4	29
13	17	2	17	25	30	5	30

Задача 4. 6. Долговое обязательство было учтено по номинальной учетной ставке f % годовых при дисконтировании m раз в году. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если его дисконтированная сумма составила k -ю часть от суммы, которую нужно выплатить по этому обязательству. Данные – в таб. 4.3

Таб. 4.3. Данные к задаче 4.6.

Вар.	f,%	m	k	Вар.	f,%	m	k
1	5	1	5	14	18	3	18
2	6	2	6	15	19	4	19
3	7	3	7	16	20	5	20
4	8	4	8	17	21	1	21
5	9	5	9	18	22	2	22
6	10	6	10	19	23	3	23
7	11	1	11	20	24	4	24
8	12	2	12	21	25	5	25
9	13	3	13	22	26	1	26
10	14	4	14	23	27	2	27
11	15	5	15	24	28	3	28
12	16	1	16	25	32	2	3
13	17	2	17	26	33	3	4

Задача 4. 7. По финансовому соглашению банк начисляет проценты m раз в году по сложной учетной ставке d % . Определить в виде простой учетной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении на k месяцев. Данные – в таб. 4.4.

Таб. 4. 4. Данные к задаче 4.7.

Вар.	m	d ,%	k	Вар.	m	d ,%	k
1	5	1	5	14	18	14	18
2	6	2	6	15	19	15	19
3	7	3	7	16	20	16	20
4	8	4	8	17	21	17	21
5	9	5	9	18	22	18	22
6	10	6	10	19	23	19	23
7	11	7	11	20	24	20	24
8	12	8	12	21	25	21	25
9	13	9	13	22	26	22	26
10	14	10	14	23	27	23	27
11	15	11	15	24	28	24	28
12	16	12	16	25	2	28	3
13	17	13	17	26	28	24	28

Задача 4. 8 Сравнить интенсивности процессов наращения и дисконтирования по разным видам процентных ставок.

Лабораторная работа «Средние процентные ставки»

Цель работы: определение средних ставок, определение эквивалентных простых процентных ставок, составление уравнений эквивалентности.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

imiddle-средняя процентная годовая ставка,

dmiddle- средняя учетная ставка,

D-дисконт,

is и i- ставки простых и сложных процентов, соответственно,

ds- простая учетная ставка,

j- номинальная процентная ставка начислений,

m - количество начислений.

5.1 Средние процентные ставки.

5.1 а Средняя процентная ставка определяется по формуле

$$imiddle= Sum[nt*it]/N, \qquad (1)$$

где N=Sum[nt], а it – ставка за период nt.

5.1 б Средняя учетная ставка определяется как

$$dmiddle= Sum[dt*it]/N, \qquad (2)$$

где dt- учетные ставки за период nt.

Пример. Договор предусматривает переменную ставку простых процентов 20%, 22% и 25% годовых . Продолжительность периодов начисления 2, 3 и 5 месяцев. Какой размер ставки приведет к аналогичному наращению исходной суммы?

Имеем;

$i1=0.2$; $i2=0.22$; $i3=0.25$; $n1=2$; $n2=3$; $n3=5$;

imiddle=(n1*i1+n2*i2+i3*n3)/(n1+n2+n3)=0.231

5.2 При усреднении сложных процентов нужно применять формулу

$$\text{imiddled}= ((1+i1)^{n1}*(1+i2)^{n2}*...)^{(1/N)}-1 \qquad (3)$$

Пример. Выдан кредит на 3 года. Первые два года процентная ставка составляла 10% , 3-й год - 20%. Найти среднюю процентную ставку для а) начисление по простым процентам, для б) начисление по сложным процентам.

Имеем: $i1=0.1$; $n1=2$; $i2=0.20$; $n2=1$;

imiddles=(n1*i1+n2*i2)/(n1+n2) =0.13333,

imiddled=((1+i1)^n1*(1+i2)^n2)^(1/(n1+n2))-1= 0.132371

5.3 При усреднении ставок в нескольких однородных операциях, в которых различаются суммы Pk и проценты ik , но одно n.

Простые проценты:

$$\text{imiddles}= \text{Sum}[Pk*ik]/\text{Sum}[Pk] \qquad (4)$$

Сложные проценты:

$$\text{imiddled} = (P1*(1+i1)^n+P2*(1+i2)^n*...)/(P1+P2+...))^{(1/n)}-1 \qquad (5)$$

5.4 Эквивалентность ставок простых is и сложных i процентов .

Эти ставки связаны соотношениями

$$is=(1+i)^n/n-1 \qquad (6)$$

$$i=(1+n*is)^{(1/n)}-1$$

5.5 Эквивалентность простой процентной ставки is и простой учетной ставки ds.

При одинаковых временных базах, n - срок в годах

$$is=ds/(1-n*ds) \qquad (7)$$

$$ds=is/(1+n*is)$$

Пример. Вексель учтен за год до погашения по учетной ставке 15% годовых. Какова доходность операции в виде процентной ставки?

Имеем: ds=0.15; n=1, по формуле (7)

is=ds(1+n*ds)=0.17

5.6. Эквивалентность простой процентной ставки is и простой учетной ставки ds при временной базе 360 дней, t- число дней учета или начисления.

В этом случае

$$is=360/(360-t*ds) \tag{8}$$

$$ds=360*is/(360+t*is)$$

5.7. Эквивалентность простой процентной ставки is и простой учетной ставке ds при начислении простых процентов для временной базы К=360 дней, а для учетной ставки К=365 дней, t- число дней .

Формулы для пересчета имеют вид:

$$is=365 *ds/(360-t*ds) \tag{9}$$

$$ds=360*is/(365+t*is)$$

Пример. Найти учетную ставку, эквивалентную годовой процентной ставке 40 % (К=365) при условии, что срок учета равен 255 дней.

Имеем: is=0.4; К=365; t=255; ds=360*is/(365+t*is);

Ответ: ds=0.3083 или 30.83% .

5.8. Эквивалентность delta и i.

Формулы, связывающие эти две ставки, имеют вид:

$$delta= Log[1+i] \tag{10}$$

$$i=Exp[delta]-1$$

5.9. Эквивалентность delta и j.

Для этих двух ставок

j=m*(Exp[delta/m]-1). (11)

delta=m*Log[1+j/m]

Пример. Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20%" ?

Имеем: j=0.2; m=4.

delta=4.*Log[1+0.2/4]= 0.1951.

Рекомендации. *Нет смысла приводить все формулы, проще записывать уравнение эквивалентности и из него получать нужные соотношения.*

Задачи к Лабораторной работе «Средние процентные ставки»

Задача 5. 1. Определить размеры эквивалентных ставок i_s при заданной ставке d_s =20% в зависимости от n в годах. Данные взять из Таб. 4.1

Задача 5. 2. Определить номинальную учетную ставку, эквивалентную номинальной годовой процентной ставке j при дисконтировании m_d раз в году и при начислении процентов m раз в год. Данные взять из Таб. 4.1

Задача 5. 3. Определить номинальную процентную ставку при ежемесячном начислении процентов, эквивалентную сложной учетной ставке d при дисконтировании m раз в году. Данные взять из Таб. 4.1

Лабораторная работа «Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей»

Цель работы: Определение параметров эквивалентных обязательств, определение критической ставки **,** определение размера и срока консолидированного платежа";

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

S1, S2 ...,- платежи со сроками n1, n2,...,

P1, P2, ...- номинальные стоимости платежей,

i0- критическая ставка, при которой платежи становятся равноценными,

S0- консолидированная сумма платежа,

n0- срок консолидированного платежа S0,

Пример. Сравнить равноценность платежа с S1=40. тыс. руб. и n1 =4 мес. с платежом S2= 45. тыс. руб. и n2 = 8 мес. при ставке 20% .

Решение. Нужно сравнить их современные стоимости P1, P2, например, при математическом дисконтировании.

Ответ:

P1=40. /(1+4/12*0.2)=37.5

P2=45./(1+8/12*0.2)=39.7.

Платежи не являются равноценными.

6.1 Определение критической ставки i0 для двух платежей S1, S2 со сроками n1, n2 и простой ставке

Пример.

S1=40;n1=4/12; S2=45.; n2=8/12;

Определение i0 осуществляется по формуле

$$i0simple=(1-S1/S2)/(S1/S2*n2-n1) \quad (1)$$

В данном примере i0simple= 0.4285.

6.2. Определение критической ставки i0 для двух платежей S1, S2 со сроками n1, n2 и сложной ставке .

Осуществляется по формуле

$$i0comp=(S2/S1)^{(1/(n2-n1))}-1 \quad (2)$$

Для рассмотренного выше примера i0comp= 0.4238.

6.3. Определение размера консолидированного платежа.

6.3a. При использовании простых процентных ставок размер консолидированного платежа определяется по формуле

$$S=Sum[Sj*(1+tj*i)]+Sum[Sk/(1+tk*i)] \quad (3)$$

Здесь Sj-размеры объединяемых платежей со сроками nj<n0, Sk-размеры платежей со сроками nk>n0, tj=n0-nj, tk=nl-n0.

Пример. Два платежа в 1. тыс. руб. и 500. руб. со сроками уплаты в 150 и 180 дней объединяются в один со сроком уплаты в 200 дней по ставке в 20% годовых. Найти консолидированную сумму платежа.

Имеем:

S1=1000., S2=500.0, n1=150, n2=180, n0=200, i=0.2.

В этом примере n1>n0, n2>n0.

S0= S1*(1+(n0-n1)*i/365)+S2*(1+(n0-n2)*i/365)= 1532.876.

6.3b. При использовании сложных процентных ставок

$$S0=Sum[Sj*(1+i)^{tj}]+Sum[Sk/(1+tk*i)^{tk}] \quad (4)$$

Пример. Два платежа в 1. тыс. руб. и 2 тыс. руб. со сроками уплаты в 2 и 3 года объединяются в один со сроком уплаты в 2.5 года по ставке в 20% годовых. Найти консолидированную сумму платежа.

Имеем: S1=1000.0, S2=2000.0, n1=2, n2=3, n0=2.5, i=0.2, n0 > n1, n0<n2. Определяем

t1=n0-n1, t2=n2-n0 и вычисляем

S0=S1*(1+i)^t1+S2/(1+i)^t2=2921.1869

6.4. Определение срока консолидированного платежа.

6.4а, При применении простой ставки срок консолидированного платежа определяется как

n0=(1/i)*(S0/P) -1) (4)

В знаменателе стоит современная стоимость P заменяемых платежей P= Sum[Sj/(1+n*i)]

Пример. Три платежа в 1. тыс. руб.,2 тыс. руб. и 1.5 тыс. руб. должны быть уплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом в 5 тыс. руб. с i=10% годовых при К=365. Найти срок платежа.

Имеем: S1=1000.; S2=2000; S3=1500; S0=5000;

K=365, t1=50/K, t2=80/K, t3=150/K, i=0.1.

Находим

P=S1/(1+i*t1)+S2/(1+i*t2)+S3/(1+i*t3)=4384.38

После этого

n0=(1/i)(S0/P-1)= 1.40411 года (или 1.40411*К=512. дней)

6.4 б. Применении сложной ставки.

Предварительно определяется

Q= Sum[Sj/(1+i)^nj] (5)

и далее вычисляется

n0=Log[S0/Q]/Log[1+i] (6)

Для частного случая, когда S0=Sum[Sj*nj], средний взвешенный срок (приближенное значение)

$$n01=Sum[Sj*nj]/S0 \quad (7)$$

Пример. Два платежа в 1. тыс. руб. и 2 тыс. руб. со сроками уплаты в 2 и 3 года объединяются в один с S0=3. тыс. руб. Определить точное и приближенное значение срока.

Имеем: S1=1000., S2=2000.0, S0=3000.0, n1=2, n2=3, i=0.2.

Вычисляем

Q=S1/(1+i)^n1+S2/(1+i)^n2 = 1.85185,

после этого находим

n0=Log[S0/Q]/Log[1+i]=2.6460.

Приближенное значение

n0 = (S1*n1+S2*n2)/S0=2.66667.

6.5. Общая постановка задачи изменения условий контракта.

Используются уравнения эквивалентности в общем виде:

$$Sum[Sj*(1+nj*i)=Sum[Sk/(1+nk*i) \quad (8)$$

-при использовании простых процентов,

$$SumSj*nu^{\wedge}nj=Sum[Sk*nu^{\wedge}nk] \quad (9)$$

- при использовании сложных процентов. Приведение осуществляется на некоторую базовую дату.

Пример. Два платежа в 10. тыс. руб. и 5 тыс. руб. со сроками уплаты 1 ноября и 1 января следующего года объединяются в один. Стороны согласились, что должник 1 декабря выплачивает 6 тыс. руб, остаток долга гасится 1 марта. Необходимо найти сумму остатка при условии, что пересчет осуществляется по ставке 20% простых, К=365.

Имеем: S1=10000, T1=1.10, S2=5000, T2=1.01, S1new=6000.

Выбираем базовую дату T0=1.01. От базовой даты отсчитываем сроки nj и nk.

Для nj:

nj1= (от 1.10 до T0=1.01) = 61 день; nj2 = (от 1.01 до T0) =0 дней";

Для nk:

nk1= (от T0 до 1.11)   = 31 день, nk2= (от T0 до 1.03) = 59 дней.

Записываем уравнение эквивалентности:

S1*(1+n1j/K)+S2*(1+n2j/K)= S1new/(1+n1k/K)+S2new/(1+n2k/K)

которое принимает вид:

10000*(1+61*i/K)+5000= 6000(1+31*i/K)+S2new*(1+59*i/K).

Из последнего уравнения

S2new=(10000*(1+61*i/K)+5000- 6000(1+31*i/K))*(1+59*i/K) =9530.8.

Задачи к Лабораторной работе «Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей»

Задача 6. 1. Суммы в размере S_1, S_2 и S_3 млн. руб. должны быть выплачены через t_1, t_2 и t_3 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом в размере S_0 млн. руб. Найти срок выплаты консолидированного платежа для i % годовых, K = 365. Данные взять из Таб. 6.1

Таблица 6.1 Данные к задаче 6. 1.

Вар.	S_1	S_2	S_3	S_0	t_1	t_2	t_3	i
1	11	21	16	60	51	81	151	11
2	12	22	17	70	52	82	152	12
3	13	23	18	80	53	83	153	13
4	14	24	19	90	54	84	154	14
5	15	25	20	100	55	85	155	15
6	16	26	21	110	56	86	156	16
7	17	27	22	120	57	87	157	17
8	18	28	23	130	58	88	158	18
9	19	29	24	140	59	89	159	19
10	20	30	25	150	60	90	160	20
11	21	31	26	160	61	91	161	21
12	22	32	27	170	62	92	162	22
13	23	33	28	180	63	93	163	23

Продолжение

Таблица 6.1 Данные к задаче 6. 1.

14	24	34	29	190	64	94	164	24
15	25	35	30	200	65	95	165	25
16	26	36	32	210	66	96	166	26
17	27	37	32	220	67	97	167	27
18	28	38	33	230	68	98	168	28
19	29	39	34	240	69	99	169	29
20	30	40	35	250	70	100	170	30
21	31	21	36	260	71	101	171	31
22	32	22	37	270	72	102	172	32
23	33	43	38	280	73	103	173	33
24	34	44	39	290	74	104	174	34
25	35	45	40	300	75	105	175	35
26	10	20	15	50	50	80	150	10

Задача 6.2 . Три векселя номинальной стоимостью S_1, S_2 и S_3 тыс. руб. со сроками погашения соответственно t_1, t_2 и t_3 дней объединяются в один со сроком погашения t_0 дней. Объединение производится по простой процентной ставке i % годовых. Какова номинальная стоимость объединенного векселя, если расчет выполнялся по правилу АСТ/360. Данные взять из Таб. 6.2

Таблица 6.2 Данные к задаче 6. 2.

Вар.	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	t_0	i
1	10	30	60	55	65	115	95	10
2	11	31	61	56	66	116	96	11
3	12	32	62	57	67	117	97	12
4	13	33	63	58	68	118	98	13
5	14	34	64	59	69	119	99	14
6	15	35	65	60	70	120	100	15
7	16	36	66	61	71	121	101	16
8	17	37	67	62	72	122	102	17
9	18	38	68	63	73	123	103	18
10	19	39	69	64	74	124	104	19
11	20	40	70	65	75	125	105	20
12	21	41	71	66	76	126	106	21
13	22	42	72	67	77	127	107	22
14	23	43	73	68	78	128	108	23
15	24	44	74	69	79	129	109	24
16	25	45	75	70	80	130	110	25
17	26	46	76	71	81	131	111	26
18	27	47	77	72	82	132	112	27
19	28	48	78	73	83	133	113	28
20	29	49	79	74	84	134	114	29
21	20	50	80	75	85	135	115	30
22	31	51	81	76	86	136	116	31
23	32	52	82	77	87	137	117	32
24	33	53	83	78	88	138	118	33
25	34	54	84	79	89	139	119	34
26	20	30	60	80	90	140	120	80

Задача 6. 3. Заменить поток платежей S_1, S_2 и S_3 по срока (в годах) n_1, n_2 и n_3 эквивалентным потоком, состоящим из двух платежей: первый через n_{11} , второй через n_{22} лет . Процентная ставка- j % годовых при начислении m раз в году. Данные взять из Таб. 6.3

Таблица 6.3 Данные к задаче 6.3.

Вар.	S_1	S_2	S_3	n_1	n_2	n_3	n_{11}	n_{22}	j	m
1	210	190	220	1.1	2.1	4.1	1.6	3.1	9	2
2	220	200	230	1.2	2.2	4.2	1.7	3.2	10	3
3	230	210	240	1.3	2.3	4.3	1.8	3.3	11	4
4	240	220	250	1.4	2.4	4.4	1.9	3.4	12	5
5	250	230	260	1.5	2.5	4.5	2.0	3.5	13	6
6	260	240	270	1.6	2.6	4.6	2.1	3.6	14	7
7	270	250	280	1.7	2.7	4.7	2.2	3.7	15	8
8	280	260	290	1.8	2.8	4.8	2.3	3.8	16	9
9	290	270	300	1.9	2.9	4.9	2.4	3.9	17	10
10	300	280	310	2.0	3.0	5.0	2.5	4.0	18	11
11	310	290	320	2.1	3.1	5.1	2.6	4.1	19	12
12	320	300	330	2.2	3.2	5.2	2.7	4.2	20	13
13	330	310	340	2.3	3.3	5.3	2.8	4.3	21	14
14	340	320	350	2.4	3.4	5.4	2.9	4.4	22	15
15	350	330	360	2.5	3.5	5.5	3.0	4.5	23	16
16	360	340	370	2.6	3.6	5.6	3.1	4.6	24	17
17	370	350	380	2.7	3.7	5.7	3.2	4.7	25	18
18	380	360	390	2.8	3.8	5.8	3.3	4.8	26	19
19	390	370	400	2.9	3.9	5.9	3.4	4.9	27	20
20	400	380	410	3.1	4.0	6.0	3.5	5.0	28	21
21	410	390	420	3.1	4.1	6.1	3.6	5.1	29	22
22	420	400	430	3.2	4.2	6.2	3.7	5.2	30	23
23	430	410	440	3.3	4.3	6.3	3.8	5.3	31	24
24	440	420	450	3.4	4.4	6.4	3.9	5.4	32	25
25	450	430	460	3.5	4.5	6.5	4.0	5.5	33	26
26	200	175	210	1	2	4.1	1.5	3	8	2

Задача 6. 4. Есть обязательство уплатить S_1 тыс. руб. через n_1 месяцев и S_2 тыс. руб. через n_2 месяцев. По новому обязательству выплата производится равными суммами через n_{11} и n_{22} месяцев. Изменение условий осуществляется с использованием простой ставки i% годовых. Найти сумму выплат. Данные взять из Таб. 6.4

Таблица 6. 4.Данные к задаче 6. 4.

Вар.	S_1	S_2	n_1	n_2	n_{11}	n_{22}	i
1	11	8	5	9	4	10	11
2	12	9	6	10	5	11	12
3	13	10	7	11	6	12	13
4	14	11	8	12	7	13	14
5	15	12	9	13	8	14	15
6	16	13	10	14	9	15	16
7	17	14	11	15	10	16	17
8	18	15	12	16	11	17	18
9	19	16	13	17	12	18	19
10	20	17	14	18	13	19	20
11	21	18	15	19	14	20	21
12	22	19	16	20	15	21	22
13	23	20	17	21	16	22	23
14	24	21	18	22	17	23	24
15	25	22	19	23	18	24	25
16	26	23	20	24	19	25	26
17	27	24	21	25	20	26	27
18	28	25	22	26	21	27	28
19	29	26	23	27	22	28	29
20	30	27	24	28	23	29	30
21	31	28	25	29	24	30	31
22	32	29	26	30	25	31	32
23	33	30	27	31	26	32	33
24	34	31	28	32	27	32	34
25	35	32	29	33	28	33	35
26	10	7	4	8	3	9	10

Лабораторная работа «Налоги и инфляция»

Цель работы: Проведение финансовых расчетов с учетом налогов и инфляционных процессов.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

S- наращенная сумма, измеренная по номиналу,

Snalog- наращенная сумма с учетом выплат налогов,

Salfa- наращенная сумма с учетом инфляции,

g- ставка налога на проценты,

G- общая сумма налога,

J= S_j-S_0 - индекс, характеризующий изменение покупательной способности денег, индекс инфляции,S_j,S_0- стоимости потребительской корзины в моменты времени t_j и t_0. За последовательные периоды t_k , k= 1,2,3,... J = J1*J2*...*Jk ,

$\alpha\equiv$ alfa = (S_j-S_0)/S_0 -темп инфляции; alfa= [(S_j-S_0)/S_0] /100 (в%)- уровень инфляции, alfa=J-1, J=1+alfa. За последовательные периоды t_k , k= 1,2,3,... alfa= alfa1*alfa2*...*alfak -1";

Sreal= S/J -наращенная сумма с учетом инфляции,

Salfa= S*J -наращенная сумма, которая компенсирует инфляцию,

ialfa - брутто ставка, скорректированная по темпу роста ставка. В условиях инфляции обеспечивает реальную доходность операции по ставке i,

jalfa - брутто ставка, скорректированная по темпу роста ставка при начислении сложных процентов m раз в году. В условиях инфляции обеспечивает реальную доходность операции по ставке j .

7.1 Налог на полученные проценты.

7.1a .Налог начисляется за весь срок сразу по простым процентам, при этом

$$G=P*n*i*g \tag{1}$$

$$Snalog1= P*(1+n*(1-g)*i) \tag{2}$$

7.1b. Налог начисляется за весь срок сразу по сложным процентам. В этом случае

$$G=P*((1+i)^n-1)*g \tag{3}$$

$$Snalog2= P*((1-g)*(1+i)^n+g) \tag{4}$$

Пример. Ставка налога на проценты равна 10%. Процентная ставка - 30% годовых, срок начисления процентов - 3 года. Первоначальная сумма ссуды- 10000 тыс. руб. Определить размеры налога на проценты при начислении простых и сложных процентов.

Имеем: P= 10000; g=0.1; i=0.3; n=3;

1) Простые проценты. Наращенная сумма без налога

S= P*(1+n*i)=19000.

Наращенная сумма с учетом налога

Snalog1= P*(1+n*(1-g)*i)=18100.

2) Сложные проценты. Наращенная сумма без налога

Snalog2= P*(1+i)^n=21970.

Наращенная сумма с учетом налога.

Snalog2= P*((1-g)*(1+i)^n+g) =20773.

7.2. Определение уровня инфляции за определенный период времени.

Пример 1. Месячный темп инфляции -5%. Определить рост цен за 1 год и годовой темп инфляции.

Решение.

Имеем: alfa1=alfa2=...alfa12 =0.05, n =12

Индекс инфляции составит

$J=(1+alfa1)^{12}=1.79$

а годовой уровень инфляции будет

alfa =(J-1)=0.7958.

Пример 2. Прирост цен по месяцам 1.5, 1.2, и 0.5 %. Определить индекс цен за 3 месяца.

Имеем: J1=1.015; J2=1.012; J3=1.005;

За три месяца

Jp=J1*J2*J3= 1.03232.

Темп инфляции за 3 месяца alfa=3.23%.

7.3. Начисление процентов с учетом инфляции.

При наращении по простым процентам наращенная сумма с учетом инфляции

$$Sreal = P*(1+n*i)/J \quad (5)$$

При наращении по сложным процентам наращенная сумма с учетом инфляции

$$Sreal = P*(1+i)^n/J \quad (6)$$

При наращении по простым процентам

$$Salfa = P*(1+n*i)*J \quad (7)$$

При наращении по сложным простым

$$Salfa = P*(1+i)^n*J \quad (8)$$

Пример. На сумму 1.5 мл. руб. в течении 3-х месяцев начисляются простые проценты из расчета 28% годовых. Ежемесячная инфляции определяется темпами 2.5, 2.0 и 1.8%. Найти наращенную сумму с учетом инфляции.

Имеем: P=1.5; i=0.28; alfa1=2.5; alfa2=2.0; alfa3=1.8; n=3/12;

Определяем индекс инфляции

J=(1+2.5/100)*(1+2.0/100)*(1+1.8/100),

после чего вычисляем

Sreal=P*(1+n*i)/J= P*(1+3/12*0.28)/J=1.605*1.06432=1.508.

7.4 Брутто-ставка ialfa.

При наращении по простым процентам брутто ставка и простая ставка i связаны соотношениями

$$ialfa= ((1+n*i)*J-1)/n \qquad (9)$$

$$i=((1+n*ialfa)/J-1)/n$$

При наращении по сложным процентам

$$ialfa=(1+i)*J\^{}(1/n)-1 \qquad (10)$$

$$i=(1+iala)/(1+ialfa)\^{}(1/n)-1$$

При начислении m раз году

$$jalfa=m*((1+j/m)*J\^{}(1/(m*n))-1) \qquad (11)$$

$$j=m*((1+jalfa/m)*J\^{}(-1/(m*n))-1)$$

Пример 1 . Рассчитать реальную годовую ставку для следующих условий: годовой темп инфляции- 20%, брутто ставка- 25% годовых,   n=0.5 года.

Имеем: i=0.2; alfai=0.25; n=0.5;

Предварительно находим

J=(1+i)^n=1.09545.

Далее вычисляем

i=((1+n*ialfa)/J-1)/n=0.05395.

Пример 2 . Рассчитать реальную годовую ставку для сложных процентов при следующих условиях: годовой темп инфляции- 20%, брутто-ставка- 25% годовых,   n=5 лет. Индекс цен за этот период 1.7.

Имеем: i=0.2, ialfa=0.25, n=5, J=1.7.

Определяем уровень инфляции за период

alfa=J-1, т.е. alfa=0.7 или   70%. Для сложных процентов

i=(1+ialfa)/(1+alfa)^(1/n)-1= (1+0.256)/(1+alfa))^(1/5)-1= 0.1241.

Задачи к Лабораторной работе «Налоги и инфляция»

Задача 7. 1. Три векселя номинальными стоимостями S_1, S_2 и S_3 тыс. руб. со сроками погашения t_1, t_2 и t_3 дней объединяются в один со сроком погашения t_0 дней. Объединение происходит по простой ставки i% годовых по банковской методике. Годовой уровень инфляции - α % годовых. Определить номинальную стоимость объединенного векселя с учетом инфляции. Данные взять из Таб. 7.1

Таблица 7. 1 . Данные к задаче 7.1

Вар.	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	t_0	i	α
1	21	51	41	61	71	81	91	37	31
2	22	52	42	62	72	82	92	38	32
3	23	53	43	63	73	83	93	39	33
4	24	54	44	64	74	84	94	40	34
5	25	55	45	65	75	85	95	41	35
6	26	56	46	66	76	86	96	42	36
7	27	57	47	67	77	87	97	43	37
8	28	58	48	68	78	88	98	44	38
9	29	59	49	69	79	89	99	45	39
10	30	60	50	70	80	90	100	46	40
11	31	61	51	71	81	91	101	47	41
12	32	62	52	72	82	92	102	48	42
13	33	63	53	73	83	93	103	49	43
14	34	64	54	74	84	94	104	50	44
15	35	65	55	75	85	95	105	51	45
16	36	66	56	76	86	96	106	52	46
17	37	67	57	77	87	97	107	53	47
18	38	68	58	78	88	98	108	54	48
19	39	69	59	79	89	99	109	55	49
20	40	70	60	80	90	100	110	56	50
21	41	71	61	81	91	101	111	57	51
22	42	72	62	82	92	102	112	58	52
23	43	73	63	83	93	103	113	59	53
24	44	74	64	84	94	104	114	60	54
25	45	75	65	85	95	105	115	61	55
26	20	50	40	60	70	80	90	36	30

Задача 7. 2 Вклад оформлен на депозит сроком на k месяцев по простой процентной ставке i % годовых. Годовой уровень инфляции α %. Определить реальную годовую процентную ставку. Данные взять из Таб. 7.2.

Таблица 7. 2 Данные к задаче 7.2

Вар.	k	i	α	Вар.	k	i	α
1	2	37	31	14	15	50	44
2	3	38	32	15	16	51	45
3	4	39	33	16	17	52	46
4	5	40	34	17	18	53	47
5	6	41	35	18	19	54	48
6	7	42	36	19	20	55	49
7	8	43	37	20	21	56	50
8	9	44	38	21	22	57	51
9	10	45	39	22	23	58	52
10	11	46	40	23	24	59	53
11	12	47	41	24	25	60	54
12	13	48	42	25	26	61	55
13	14	49	43	26	27	36	30

Задача 7. 3 Вексель учтен в банке за k месяцев до погашения по простой учетной ставке d % годовых. За него получено P тыс. руб. Годовой уровень инфляции α %. Определить номинальную стоимость векселя и реальную учетную ставку банка. Данные взять из Таб. 7.3.

Таблица 7. 3 Данные к задаче 7.3

Вар.	k	P	d	α	Вар.	k	P	d	α
1	2	24	37	31	14	15	37	50	44
2	3	25	38	32	15	16	38	51	45
3	4	26	39	33	16	17	39	52	46
4	5	27	40	34	17	18	40	53	47
5	6	28	41	35	18	19	41	54	48
6	7	29	42	36	19	20	42	55	49
7	8	30	43	37	20	21	43	56	50
8	9	31	44	38	21	22	44	57	51
9	10	32	45	39	22	23	45	58	52
10	11	33	46	40	23	24	46	59	53
11	12	34	47	41	24	25	47	60	54
12	13	35	48	42	25	26	48	61	55
13	14	36	49	43	26	27	49	36	30

Лабораторная работа «Потоки платежей. Постоянные ренты».

Цель работы: Определение наращенной суммы и современной стоимости потока платежей, решение прямой и обратной задачи с помощью формул финансовых вычислений и электронных таблиц из «EXCEL» или с помощью разработанной программы вычислений в «Matimatica -5.2 for students», «Mathcad».

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

Обозначения:

S-наращенная сумма ренты,

A-современная стоимость ренты,

Rt- потоки платежей, выплачиваемые спустя время nt после некоторого начального момента времени,

R- член ренты, размер отдельного платежа,

p- количество выплат в году,

m- количество начислений процентов в году,

i- процентная ставка,

n- срок ренты, время от начала первого периода ренты до конца последнего,

tau- период ренты, временной интервал между двумя последовательными платежами,

j- номинальная ставка процентов.

Основные формулы для расчета рент представлены в Таблице 8.1. Задача состоит в том, чтобы правильно использовать эти формулы для различных условий выплат членов рент, различных вариантов начислений процентов и т.д.

Таблица 8. 1 Основные формулы для расчета рент.

	Условия	Постнумерандо	Пренумерандо
1	p=1 m=1	$S=R\cdot[(1+i)^n-1]/i$	$S_{pre}=S\cdot(1+i)$
		$A= R\cdot[1.-(1+i)^{(-n)}]/i$	$A_{pre}=A\cdot(1+i)$
2	p=1;m>1	$S= R\cdot[(1+j/m)^{(n\cdot m)}-1]/[(1+j/m)^m-1]$	$S_{pre}=S\cdot(1+j/m)^m$
		$A=R\cdot[1-(1+j/m)^{-n\cdot m}]/[(1+j/m)^m-1]$	$A_{pre}=A\cdot(1+j/m)^m$
3	p>1; m=1	$S=(R/p)\cdot[(1+i)^n-1]/[(1+i)^{1/p}-1]$	$S_{pre}=S\cdot(1+i)^{1/p}$
		$A=(R/p)\cdot[1-(1+i)^{-n}]/[(1+i)^{1/p}-1]$	$A_{pre}=A\cdot(1+i)^{1/p}$
4	p>1; m>1 $p \neq m$	$S=(R/p)\cdot[(1+j/m)^{(m\cdot n)}-1]/[(1+j/m)^{m/p}-1]$	$S_{pre}=S\cdot(1.+j/m)^{m/p}$
		$A=(R/p)\cdot[1-(1+j/m)^{(-m\cdot n)}]/[(1+j/m)^{m/p}-1]$	$A_{pre}=A\cdot(1+j/m)^{m/p}$
5	p>1; m=p	$S=(R/j)\cdot[(1.+j/m)^{m\cdot n}-1]$	$S_{pre}=S\cdot(1+j/m)$
		$A=(R/j)\cdot[1-(1+j/m)^{-m\cdot n}]$	$A_{pre}=A\cdot(1+j/m)$
		Непрерывное начисление процентов	
6	p=1	$S=R\cdot(\mathrm{Exp}[\delta\cdot n]-1)/(\mathrm{Exp}[\delta]-1.)$	$S_{pre}=S\cdot\mathrm{Exp}[\delta]$
		$A=R\cdot(1-\mathrm{Exp}[-\delta\cdot n])/(\mathrm{Exp}[\delta]-1)$	$A_{pre}=A\cdot\mathrm{Exp}[\delta]$
7	p>1	$S= (R/p)\cdot(\mathrm{Exp}[\delta\cdot n]-1)/(\mathrm{Exp}[\delta/p]-1.)$	$S_{pre}=S\cdot\mathrm{Exp}[\delta/p]$
		$A=(R/p)\cdot(1-\mathrm{Exp}[-\delta\cdot n])/(\mathrm{Exp}[\delta/p]-1)$	$A_{pre}=A\cdot\mathrm{Exp}[\delta/p]$

8.1 Прямой метод расчета наращенной суммы и современной стоимости потока платежей

При начислении процентов 1 раз в году по сложной ставке

$$S=Sum[Rt*(1+i)^{nt}] \quad (1)$$

$$A=S/(1+i)^n \quad (2)$$

Пример. Есть следующий порядок выплат ссуды во времени: 1.06.2000 г. - 5 мл. руб., 1.01.2001 г. -15 мл. руб., 1.01.2003 г.-18 мл. руб.. Необходимо определить сумму задолжности на 1.01.2004 г. при условии, что проценты начисляются по ставке 20% годовых.

Имеем: n1=3.5 от 1.06.2000 до 1.01.2004, n2=3.0 от 1.01. 2000 до 1.01.2004, n3 = 1 от 1.01.2003 до 1.01.2004, n=3.5, i=0.2, R1=5, n1=3.5, R2=15, n2=3, R3=18, n3=1.

Находим сумму

S=R1*(1+i)^n1+R2*(1+i)^n2+R3*(1+i)^n3=56.9846, и далее вычисляем

A=S/(1+i)^n= 30.103.

8.2 Наращенная сумма постоянной ренты постнумерандо.

Это первая рента из Таблицы 8.1, т.е. S=R*((1.+i)^n-1)/i или

$$S=R*s[n,i] \qquad (3)$$

Здесь

$$s[n,i]= ((1.+i)^n-1)/i \qquad (4)$$

- коэффициенты наращения аннуитета. Их можно насчитать по формуле:

s=Table[((1.+i/100.)^n-1)/(i/100),{n,15},{i,36}] или в матричной форме MatrixForm[s].

Внизу показан фрагмент таблицы коэффициентов s[n,i] наращения ренты.

Таблица 8.2. Фрагмент таблицы коэффициентов s[n,i] (4) наращения ренты постнумерандо, рассчитанные для 1.0 ≤ n ≤ 15.0 с шагом 1 и для 1.0 ≤ i /100 ≤ 36.0 с шагом 1.

1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.0100	2.0199	2.0299	2.0400	2.0500
3.0301	3.0604	3.0909	3.1216	3.1525
4.0604	4.1216	4.1836	4.2464	4.3101
5.1010	5.2040	5.3091	5.4163	5.5256

Например, коэффициент наращения аннуитета s[[2,4]] определяется как s[[2,4]]=2.0400.

Пример. Создается фонд, средства в который поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течении 5 лет. Размер разового платежа - 4 мл. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18.5% годовых. Найти величину фонда.

Имеем: R=4.0; i=0.185; n=5.0;

Расчет проводится по формуле S=R*((1.+i)^n-1)/i и дает S= 28.90.

Для расчета наращенной суммы можно использовать программу Excel БЗЗ. В разделе "Вставка" вызвать финансовые функции, и найти соответствующую процедуру.

8.3 Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо определяется как

A=S/(1+i)^n=R*((1.-(1.+i)^(-n))/i) (1-я строка из Таб. 8.1)

или

$$A=R*a[n,i] \quad (5)$$

Здесь

$$a[n,i] =((1.-(1.+i)^(-n))/i) \quad (6)$$

a[n,i]- коэффициенты приведения аннуитета. Их можно насчитать процедурой

a=Table[(1.-(1.+i/100.)^(-n))/(i/100.),{n,8},{i,35}] или в матричной форме MatrixForm[a].

В Таб. 8.3 дан фрагмент таблицы коэффициентов a[n,i] приведения ренты.

Таблица 8.3. Фрагмент таблицы коэффициентов a[n,i] (5) приведения ренты постнумерандо, рассчитанные для 1.0 ≤ n ≤ 15.0 с шагом 1 и для 1.0 ≤ i /100 ≤ 36.0 с шагом 1.

0.990099	0.98039	0.970873	0.961538	0.952380
1.970395	1.94156	1.913469	1.886094	1.859410
2.940985	2.88388	2.828611	2.775091	2.723248
3.901965	3.80772	3.717098	3.629895	3.545950
4.853431	4.71345	4.579707	4.451822	4.329476

Конкретный коэффициент a[[1,2]]=0.98039.

Пример. Годовая рента постнумерандо характеризуется параметрами R =4 мл. руб., n=5,i = 18% годовых. Найти современную стоимость ренты.

Имеем: R=4; n=5; i=18; A=R*a[[5,18]]=12.508.

Определение члена ренты.

Например, для ренты 1 из таблицы 8.1

$$R=S*i/((1.+i)^n-1.) \quad (7)$$

$$R=A*i/(1.-(1.+i)^(-n)) \quad (8)$$

Пример. Определить размер ежемесячных платежей обычной ренты, текущее значение которой 10000 руб., срок - 6 мес., проценты начисляются по ставке 3% в месяц.

Имеем: A = 10000; n=6; i=0.03;

Находим формулу R=A*i/(1.-(1.+i)^(-n)), подставляем в нее входные данные и определяем R= 1845.975.

Определение срока ренты.

Например, для ренты 1 из таблицы 8

$$n=Log[(S/R)*i+1.]/Log[1.+i] \qquad (9)$$

$$n=-Log[1.-(A/R)*i]/Log[1.+i] \qquad (10)$$

Пример. Создается фонд, для чего ежегодно в конце года переводится 10000 руб.. Определить срок, за который на счету будет 100000 руб. при ставке 10% годовых.

Имеем: R=10000; S=100000; i=0.1;

Находим формулу n=Log[(S/R)*i+1.]/Log[1.+i], подставляем в нее входные данные и определяем n= 7.272.

8.4 Наращенная сумма ренты постнумерандо. Начисления *m* раз в году.

Это рента 2 из Таблицы 8. 1. Наращенная сумма определяется формулой

$$S=R*((1+j/m)^(m*n)-1.)/((1+j/m)^m-1) \qquad (11)$$

Пример. Создается фонд, средства в который поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течении 5 лет. Размер разового платежа - 4 мл. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18.5% годовых. Проценты начисляются поквартально. Найти величину фонда.

Имеем: R=4; n=5; m=4; j=0.185;

Проводим расчет по формуле (9) и определяем S= 29.66.

8.5 Современная стоимость ренты. Начисления m раз в году.

Этот вариант относится к ренте 2 из Таблицы 8.1. Для ренты постнумерандо

$$A=R*(1-(1+j/m)^(-m*n))/((1+j/m)^m-1) \qquad (12)$$

Пример. Пусть R=4; n=5; m=4; j=0.185;

По формуле (10) современная стоимость такой ренты

A=R*(1-(1+j/m)^(-m*n))/((1+j/m)^m-1)= 12.01.

Задачи к Лабораторной работе «Потоки платежей. Постоянные ренты».

Задача 8.1. Вкладчик кладет в конце каждого месяца в банк сумму R тыс. руб.. Проценты начисляются m раз в году по номинальной годовой ставке j % . Определить сумму на счете через n лет. Данные взять из Таб. 8.4.

Таблица 8.4. Данные к задаче 8.1

Вар.	R .	m	j %	n
1	100	1	10	4
2	200	2	11	5
3	300	3	12	6
4	400	4	13	7
5	500	5	14	8
6	600	6	15	9
7	700	7	16	10
8	800	8	17	11
9	900	9	18	12
10	100	10	19	13
11	110	11	20	14
12	120	12	21	15
13	130	13	22	16
14	140	14	23	17
15	150	15	24	18
16	160	16	25	19
17	170	17	26	20
18	180	18	27	21
19	190	19	28	22
20	200	20	29	23
21	210	21	30	24
22	220	22	31	25
23	230	23	32	26
24	240	24	33	27
25	250	25	34	28
26	260	26	35	29

Задача 8.2. Вкладчик хочет накопить в течении n лет в банке сумму S , производя равные вклады m раз в году под сложные проценты по номинальной годовой ставке j %. Определить сумму вклада. Данные взять из Таб. 8.2.

Таблица 8.5. Данные к задаче 8.2

Вар.	*S.*	*p*	*j* %	*n*
1	100	1	10	4
2	200	2	11	5
3	300	3	12	6
4	400	4	13	7
5	500	5	14	8
6	600	6	15	9
7	700	7	16	10
8	800	8	17	11
9	900	9	18	12
10	100	10	19	13
11	110	11	20	14
12	120	12	21	15
13	130	13	22	16
14	140	14	23	17
15	150	15	24	18
16	160	16	25	19
17	170	17	26	20
18	180	18	27	21
19	190	19	28	22
20	200	20	29	23
21	210	21	30	24
22	220	22	31	25
23	230	23	32	26
24	240	24	33	27
25	250	25	34	28
26	260	26	35	29

Задача 8.3. Какую сумму необходимо вносить t0 - летнему мужчине в начале каждого года под *i*% /100 годовых, чтобы по достижении пенсионного возраста в t1 лет получать в конце каждого года R тыс. рублей. Мужчина планирует прожить t2 лет. Данные взять из Таб. 8.6.

Таблица 8.6. Данные к задаче 8.3

Вар.	t_0	t_1	t_2	*R*	*i*/100
1	21	41	61	11	0.11
2	22	42	62	12	0.12
3	23	43	63	13	0.13
4	24	44	64	14	0.14
5	25	45	65	15	0.15
6	26	46	66	16	0.16
7	27	47	67	17	0.17
8	28	48	68	18	0.18
9	29	49	69	19	0.19

Продолжение

Таблица 8.6. Данные к задаче 8.3

10	30	50	70	20	0.20
11	31	51	71	21	0.21
12	32	52	72	22	0.22
13	33	53	73	23	0.23
14	34	54	74	24	0.24
15	35	55	75	25	0.25
16	36	56	76	26	0.26
17	37	57	77	27	0.27
18	38	58	78	28	0.28
19	39	59	79	29	0.29
20	40	50	80	30	0.30
21	41	61	81	31	0.31
22	42	62	82	32	0.32
23	43	63	83	33	0.33
24	44	64	84	34	0.34
25	45	65	85	35	0.35

Лабораторная работа «Определение ставки ренты численным методом Ньютона-Рафсона».

Цель работы: Определение ставки ренты численным методом Ньютона-Рафсона.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

В методе Ньютана-Рафсона (или методе касательных) проводится последовательное нахождение решения.

Пример. Пусть для постоянной ренты постнумерандо заданы параметры

S=6.0; R=1.; n=5; Нужно определить ставку i. Аналитического решения нет, поэтому i ищется последовательными итерациями.

Шаг 1. Находим стартовый интервал для поиска i. Поскольку процентная ставка изменяется от 0 до 1, то решение уравнения S=R*((1+i)^n-1.)/i для i локализовано в интервале [0, 1.0]. Обозначим i=x и будем искать то значения x , при котором функция f=S-R*((1+x)^n-1.)/x обращается в ноль. В левой точке x=0 функция обращается в бесконечность, поэтому уменьшим интервал поиска до [0.01, 1.0]. Это и будет стартовый интервал.

Строим рисунок, который помогает определить поведение функции. Она показана на Рис. 9.1.

Plot[f=S-R*((1+x)^n-1.)/x, {x,0.01,1.0}];

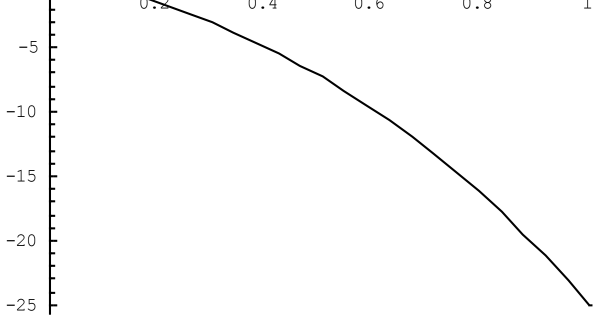

Рис. 9. 1 Функция f= S- R*((1+x)^n-1.)/x.

Левая первая точка x=0.01. Вычисляем значение функции в левой точке, находим f1lev=S-R*((1+x)^n-1.)/x=0.89;

Правая точка x20=1.0. Вычисляем значение функции в правой точке, находим f1prav=S-R*((1+x)^n-1.)/x=-25.0

Решение находится ближе к левой точке, но мы будем искать последовательные решения от правой точки, что бы понять, как работает алгоритм поиска.

Следующие значения для x находятся по формуле

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{f(x_2^{(k)})}{f^{'}(x_2^{(k)})} \tag{1}$$

В этой формуле нижний индекс (2) означает, что решение ищется от «правой» точки, верхний индекс означает номер итерации. В знаменателе в (1) – значение производной в данной точке.   Если решение искать от «левой» точки, то нижний индекс (2) в формуле (1) нужно заменить на индекс (1).

Вычисляем производную от функции в точке. Производную аналитически можно найти с помощью процедуры D[f=((1+x)^k-1.)/x,x] как

$$derf = f^{'} = \frac{k \cdot (1+x)^{-1+k}}{x} - \frac{-1+(1+x)^k}{x^2}$$

В точке x20=1.0

derf1prav=-R*(n*(1+x)^(n-1)/x-((1+x)^n-1)/x^2)=-49.;

Итак, на шаге 1 определили $x_2^{(0)}$ =1.0; f($x_2^{(0)}$) =-25.0; f$^{'}$($x_2^{(0)}$) =-49.0;

Шаг 2. Вычисляем следующую правую точку, для этого в формулу (1) подставляем найденные на шаге 1 значения, находим

$x_2^{(1)}$ = x21= x20-f1prav/derf1prav = 1.0- (-25.0)/(-49.0)=0.4897

Шаг 3. Вычисляем функцию и производную в точке x21=0.4897.

Функция

f($x_2^{(1)}$) = f2prav=S-R*((1+x)^n-1.)/x = -6.94,

Производная

f ’($x_2^{(1)}$) = derf2prav=-R*(n*(1+x)^(n-1)/x-((1+x)^n-1)/x^2)= -23.86

и находим следующую точку;

x=x22;

$x_2^{(2)}$ = x22= 0.4810- (-6.94)/(-23.86)=0.1989

Шаг 4. Вычисляем функцию и производную в точке x22=0.1989.

Функция f($x_2^{(2)}$) =-1.425, производная   f’ ($x_2^{(2)}$) =-14.60,

и находим следующую точку;

$x_2^{(3)}$ = x23= 0.1989- (-1.425)/(-14.60)=0.10;

Шаг 5. На следующей итерации $x_2^{(4)}$ = 0.0917.

Получены последовательные точки {0.99135,0.4842,0.10008, 0.09136}.

Итерации повторяются до тех пор, пока различие между предыдущим $x_2^{(k)}$ и последующим значением $x_2^{(k+1)}$ станет меньше заданного числа δ, например δ =0.01

Точку $x_2^{(4)}$ = 0.0917 можно взять за искомый ответ

Проверяем значение функции в последней точке; f(0.09136)= -0.00094.

Ответ: x=0.09136, т.е. искомая ставка i = 9.17%.

f4prav=S-R*((1+x)^n-1.)/x ;

Решение с помощью стандартной программы NSolve из библиотеки “Mathematica” ;

NSolve[S-R*((1+y)^n-1.)/y□0, {y}]

приводит к решениям :

{{y→-2.726987},{y→-1.182146+1.61860 ™},{y→-1.18214-1.61860 ™},{y→0.09128}};

Берем последний корень $y \to 0.09128$. Эта и есть искомая ставка.

Задачи к Лабораторной работе «Определение ставки ренты численным методом Ньютона-Рафсона».

Задача 9.1. При заданных значениях R, S и n для постоянной ренты постнумерандо найти методом Ньютона- Рафсона процентную ставку i. Данные взять из Таб. 9.1.

Таблица 9.1. Данные к задаче 9.1

Вар.	*S*	*R*	*n*		Вар.	*S*	*R*	*n*
1	5	1	3	0.561553	14	12	2	3
2	6	1	3	0.79128	15	12	2	4
3	7	2	3	0.158312	16	12	2	5
4	8	2	3	0.30277	17	12	3	2
5	9	2	3	0.4364	18	12	3	3
6	9	2	4	0.079081	19	14	2	2
7	10	2	4	0.15091	20	14	2	3
8	10	2	2	3.	21	14	2	4
9	10	2	3	0.561553	22	14	2	5
10	11	2	2	3.5	23	14	2	6
11	11	2	3	0.67944	24	15	2	3
12	11	2	4	0.216927	25	15	2	4
13	12	2	2	4.0	26	15	2	5

Задача 9.2. При заданных значениях R, S и n для постоянной ренты пренумерандо найти методом Ньютона- Рафсона процентную ставку i. Данные взять из Таб. 9.2.

Таблица 9.1. Данные к задаче 9.2

Вар.	*S*	*R*	*n*		Вар.	*S*	*R*	*n*
1	5	1	3	0.278163	14	12	2	3
2	6	1	3	0.389194	15	12	2	4
3	7	2	3	0.0790816	16	12	2	5
4	8	2	3	0.150911	17	12	4	2
5	9	2	3	0.216927	18	12	3	3
6	9	2	4	0.0476726	19	14	4	2
7	10	2	4	0.0912806	20	14	2	3
8	10	2	2	0.79128	21	14	2	4
9	10	2	3	0.278163	22	14	2	5
10	11	2	2	0.897916	23	14	2	6
11	11	2	3	0.33538	24	15	2	3
12	11	2	4	0.13153	25	15	2	4
13	12	3	2	561553	26	15	2	5

Лабораторная работа «Конверсия рент и изменение условий ренты» **.**

Цель работы: Проведение расчетов, связанных с объединением рент, с выкупом рент, с изменением условий рент.

Форма проведения: Выполнение индивидуального задания.

Продолжительность выполнения работы: 2 часа.

Теоретические основы и примеры.

выкуп ренты- замена ренты разовым платежом,

рассрочка платежа -замена разового платежа рентой,

консолидация рент - объединения рент с разными параметрами в одну ренту,

S-наращенная сумма эквивалентной простой ренты,

Ak-современные стоимости заменяемых рент,

Rk-постоянные члены заменяемых рент,

R- размер платежа эквивалентной объединенной ренты,

A -современная стоимость эквивалентной объединенной ренты,

i- процентная ставка за период начисления,

n- срок ренты, определяется по разному для различных вариантов расчета.

Выкуп ленты. Размер выкупа должен быть равен современной стоимости А выкупаемой ренты.

Рассрочка платежа. Приравнивается современная стоимость ренты сумме долга. Из этого равенства определяется либо член ренты, либо ее срок.

10.1 Объединение рент с заданным сроком.

Уравнение финансовой эквивалентности имеет вид

$$A=Sum[Ak] \tag{1}$$

Если заменяющая рента постнумерандо является простой немедленной и задан ее срок, то

$$R=Sum[Ak*i]/(1-1/(1+i)^n)= Q*i/(1-1/(1+i)^n) \tag{2}$$

В формуле (2)

$$Q=Sum[Ak] \quad (3)$$

Пример. Три ренты постнумерандо - немедленные, годовые, заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент Rк: 100, 120, 300 тыс. руб., сроки рент :6, 11 и 8 лет, ik=20%". Нужно найти R.

Имеем: R1=100; R2=120; R3=300; n1=6; n2=11; n3=8; n=10; i1=0.2; i2=0.2; i3=0.2; i=0.2; t=3;

Вычисляем отдельно современные стоимости заменяемых рент Ak

A1=R1*(1-1/(1+i1)^n1)/i1= 332.551,

A2=R2*(1-1/(1+i2)^n2)/i2= 519.247,

A3=R3*(1-1/(1+i3)^n3)/i3 = 1151.15,

Q=A1+A2+A3 = 2002.95.

Решение по формуле (2) R= Q*i*(1+i)^3/(1-1/(1+i)^(n-t))=960. 189. Здесь учтено, что рента отложена на 3 года. Задачу можно решить с использованием коэффициентов приведения a[[n,i]]. Насчитываем эти коэффициенты с помощью процедуры

a=Table[(1.-(1.+i/100.)^(-n))/(i/100.),{n,12},{i,35}]

Их можно вывести в матричной форме как MatrixForm[a]. После этого находим A1=R1*a[[6,20]], A1=R1*a[[11,20]], A3=R3*a[[8,20]] и Q=A1+A2+A3. Далее вычисляем R=Q/a[[7,20]]*(1+i)^t" = 960.189.

10.2 Объединение рент с заданным размером платежа.

В этом случае находится срок заменяющей ренты

$$n= -Log[1-A*i/R]/Log[1+i] \quad (4)$$

Пример. В условиях предыдущего примера задан не срок заменяющей ренты, а величина годового платежа R=1500 тыс. руб. и нужно определить срок ренты.

1.Определяется текущую стоимость ренты на момент конца отсрочки.

Имеем: R=1500. С входными данными из предыдущего примера вычисляем

A=Q(1+i)^t и далее находим ответ

n= -Log[1-A*i/R]/Log[1+i]=3.3947.

Задачи к Лабораторной работе «Конверсия рент и изменение условий ренты»

Задача 10.1.

Три ренты постнумерандо - немедленные, годовые с членами ренты R_1 R_2 и R_3 и сроками n_1, n_2 и n_3 с i_1= i_2 = i_3 заменяются одной отложенной на t лет рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок n лет, включая отсрочку. Найти R для заменяющей ренты. Данные взять из Таб. 11.1

Таблица 10. 1 Данные к задаче 10.1

Вар.	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3	t	n	i	R
1	21	51	41	1	2	3	1	10	10	60
2	22	52	42	2	3	4	2	11	11	61
3	23	53	43	3	4	5	3	12	12	62
4	24	54	44	4	5	6	4	13	13	63
5	25	55	45	5	6	7	5	14	14	64
6	26	56	46	6	7	8	6	15	15	65
7	27	57	47	7	8	9	7	16	16	66
8	28	58	48	8	9	10	8	17	17	67
9	29	59	49	9	10	11	9	18	18	68
10	30	60	50	10	11	12	10	19	19	69
11	31	61	51	11	12	13	11	20	20	70
12	32	62	52	12	13	14	12	21	21	71
13	33	63	53	13	14	15	13	22	22	72
14	34	64	54	14	15	16	14	23	23	73
15	35	65	55	15	16	17	15	24	24	74

Продолжение

Таблица 10. 1 Данные к задаче 10.1

16	36	66	56	16	17	18	16	25	25	75
17	37	67	57	17	18	19	17	26	26	76
18	38	68	58	18	19	20	18	27	27	77
19	39	69	59	19	20	21	19	28	28	78
20	40	70	60	20	21	22	20	29	29	79
21	41	71	61	21	22	23	21	30	30	80
22	42	72	62	22	23	24	22	31	31	81
23	43	73	63	23	24	25	23	32	32	82
24	44	74	64	24	25	26	24	33	33	83
25	45	75	65	25	26	27	25	34	34	84
26	20	50	40	26	27	28	26	35	35	85

Задача 10.2

Три ренты постнумерандо - немедленные, годовые с членами ренты R_1 R_2 и R_3 и сроками n_1, n_2 и n_3 с $i_1 = i_2 = i_3$ заменяются одной отложенной на t лет рентой постнумерандо. Согласно договоренности в заменяющей ренте член ренты R. Определить срок n заменяющей ренты. Данные взять из Таб. 10.1

Литература.

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учеб. – М. Дело, 2001. 400. с.

2. Григорьев А.В. Финансовая математика. Учеб. Пос. Изд. Томского государственного архитектурно-строительного университета. Томск, 2004.112 с.

3. Ефимова М. Р. Финансовые расчеты. Практикум. Учеб. Пособие. М. : КНОРУС, 2009. 184 с.

4. Печенежская И.А. Финансовая математика. Сборник задач. Ростов н/ Д. Фениес, 2008. 188 с.

5. Красина Ф.А. Финансовые вычисления [Электронный ресурс] : методические указания к лабораторным работам и самостоятельной работе для студентов направления 080100.62 – Экономика / Ф. А. Красина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (Томск), Факультет дистанционного обучения. - Электрон. текстовые дан. - Томск : [б. и.], 2015. - 75 с. on-line : http://edu.tusur.ru/training/publications/4941