Федеральное Агентство по образованию

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Н. Э. Лугина

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Томск 2006

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики Томского ун-та систем управления и радиоэлектроники $\boxed{\text{Н. Н. Горбанев}}$;
канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики Томского ун-та систем управления и радиоэлектроники Л. А. Гутова.

Корректор: Осипова Е.А.

Лугина Н. Э.
Практикум по теории вероятностей:
Учебное пособие. — Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2006. — 153 с.

Рассмотрены примеры решения задач по теории вероятностей и элементам математической статистики. Приведены задачи для самостоятельной работы с указанием ответов.

Для студентов и преподавателей вузов.

Оглавление

Введение

Настоящий практикум представляет учебное пособие для студентов технических и экономических факультетов и имеет цель – оказать студентам помощь в овладении методикой решения задач по теории вероятностей. В практикуме даны решения основных типовых задач, что позволит использовать его при самостоятельном изучении теории вероятностей студентами, обучающимися по дистанционной технологии.

Круг вопросов и содержание помещенных здесь задач определяются действующей программой по теории вероятностей и математической статистике для технических вузов, а также содержанием изданных в последние годы в ТУСУРе учебных пособий по теории вероятностей.

Практикум по теории вероятности включает 300 задач по всем разделам программы по теории вероятностей. В начале каждого раздела дается краткое изложение теоретического материала, приводится решение типовых задач с подробным объяснением.

В отличие от задачников других авторов в предлагаемом пособии представлены все типы задач, удовлетворяющие программам технических специальностей.

Автор стремился к тому, чтобы содержание задач носило конкретный характер, а поэтому при составлении их в значительной мере использовались фактические материалы.

Случайные события. Вероятность

1. Комбинаторика

В основе решения задач на комбинаторику лежат следующие два правила:

1. Правило сложения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а другой элемент B — n способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо A, либо B) можно осуществить $m+n$ способами.

2. Правило умножения. Если элемент A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов $(A,\, B)$ в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Размещениями из n различных элементов по k называются всевозможные упорядоченные множества, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, отличающиеся друг от друга или составом элементов, или их порядком.

Число размещений из n различных элементов по k элементов без повторений определяется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1)$$

Любое множество из k элементов, составленное из данных n элементов множества, называется размещением с повторениями из n элементов по k. Число всех размещений из n различных элементов по k с повторениями находится по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (2)$$

Перестановками из n различных элементов называются всевозможные размещения из этих n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n различных элементов без повторений определяется по формуле

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Перестановкой с повторениями заданного состава (k_1, k_2, $\dots, k_n$) из элементов данного множества объемом n называется всякая упорядоченная выборка объема $m = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, составленная из элементов этого множества так, что элемент x_1 повторяется k_1 раз, x_2 повторяется k_2 раз и так далее, элемент x_n повторяется k_n раз.

Число всех различных перестановок с повторениями указанного состава $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ определяется по формуле

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}. \tag{4}$$

Сочетаниями из n различных элементов по k называются всевозможные размещения, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, отличающиеся друг от друга, по крайней мере, одним элементом.

Число сочетаний из n различных элементов по k без повторений определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{5}$$

Число сочетаний без повторений из n различных элементов по k равно числу сочетаний из этих же n элементов по $n - k$: определяется по формуле

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Разобьем множество всех выборок объема k, составленных из n элементов данного множества, на классы эквивалентности, относя к одному классу все выборки одинакового состава. Такие классы эквивалентности называются сочетаниями с повторениями из n элементов по k, а их число выражается формулой

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{6}$$

Решение задач на отыскание числа размещений (с повторениями или без них), перестановок и сочетаний удобно проводить по следующей схеме:

- определяем число элементов (объем) основного множества;
- подсчитываем число элементов, входящих в выборку;
- выясняем, упорядочены ли выборки;
- выясняем, идет ли речь о подсчете числа выборок данного состава или же о подсчете числа возможных составов выборок;
- используем соответствующие формулы (1)–(6).

1.1. В столовой имеется четыре первых блюда, пять вторых и три третьих. Сколькими способами можно составить из них полноценный обед?

Решение. Обозначим первые блюда цифрами 1, 2, 3, 4, вторые — буквами русского алфавита а, б, в, г, д, третьи — буквами греческого алфавита α, β, γ. Тогда любому обеду можно поставить во взаимно однозначное соответствие строку (x_1, x_2, x_3), где x_1 выбирается из четырехэлементного множества цифр, x_2 (независимо от x_1) — из пятиэлементного множества букв русского алфавита, x_3 (независимо от x_1, x_2) — из трехэлементного множества букв греческого алфавита. Следовательно, по правилу произведения всего существует $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ возможностей выбора обеда из трех блюд.

1.2. В классе 20 мальчиков и 20 девочек. Для участия в КВНе нужно выделить танцевальный дуэт, дуэт певцов и дуэт ведущих (каждый из которых состоит из мальчика и девочки). Сколькими способами это можно сделать, если все участники поют, танцуют и имеют хорошую дикцию?

Решение. Выделить из 20 мальчиков одного танцора, певца и одного ведущего можно столькими способами, сколько существует упорядоченных трехэлементных подмножеств в данном множестве из 20 элементов, то есть A_{20}^3 способами. Аналогично имеется A_{20}^3 способов выделить из множества девочек танцовщицу, певицу, ведущую. По правилу произведения находим общее число способов выделения дуэтов певцов, танцоров и конферансье: $A_{20}^3 \cdot A_{20}^3 = (20 \cdot 19 \cdot 18)^2 = 46785600$.

1.3. Даны натуральные числа от 1 до 30. Сколькими способами можно выбрать из них три числа так, чтобы их сумма была четной?

Решение. Сумма трех чисел будет четной, если все слагаемые — четные числа или одно слагаемое четное, а два других — нечетные. Из 15 четных чисел три числа можно выбрать C_{15}^3 различными способами, так как порядок выбранных слагаемых безразличен. Кроме этого, из 15 нечетных чисел два числа можно выбрать C_{15}^2 различными способами и после каждого такого выбора по одному четному числу из 15 можно выбрать C_{15}^1 способами. По правилу произведения число выборок, содержащих два нечетных числа и одно четное, равно $C_{15}^2 \cdot C_{15}^1$. Наконец, применяя правило суммы, находим общее число выборок, удовлетворяющее условию задачи:

$$C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^1 = 2030.$$

1.4. На полке помещены 7 книг разных авторов и трехтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

Решение. Представим себе три книги одного автора как одну книгу. Тогда получим 8 книг, которые можно расставить на полке P_8 способами. Учитывая при этом, что 3 книги одного автора можно переставлять друг с другом P_3 способами, и пользуясь правилом произведения, находим общее число всех способов расстановки книг на полке при указанном условии:

$$P_8 \cdot P_3 = 3! \cdot 8! = 241920.$$

1.5. Для автомобильных номеров используются 10 цифр и 28 букв. Каждый номер состоит из трех букв и четырех цифр. Какое максимальное число машин может получить номера при такой системе нумерации?

Решение. Сначала осуществим выбор четырех цифр. Каждый такой комплект цифр представляет собой четырехэлементную выборку из данного десятиэлементного множества цифр, то есть является размещением с повторением из 10 элементов по 4. Следовательно, общее число таких комплектов равно 10^4. Остается лишь исключить из рассмотрения выборку вида $00-00$. Аналогично выбор трех букв из 28 осуществляется 28^3 числом способов. Поскольку номер каждой машины есть упорядоченная “пара”, состоящая из комплектов цифр и букв, то по правилу произведения число всех номеров будет равно $(10^4-1)\cdot 28^3 = 219498048$.

1.6. Сколькими способами на первой горизонтали шахматной доски можно расставить следующие одноцветные фигуры: две ладьи, два коня, два слона, одного ферзя и одного короля? (Замечание: правила шахматной игры не учитываются.)

Решение. Всякой расстановке шахматных фигур взаимно однозначно соответствует выборка заданного состава $(2,2,2,1,1)$ объемом $2+2+2+1+1=8$. Следовательно, по формуле (4) искомое число способов равно

$$P_8(2,2,2,1,1) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 5040.$$

1.7. Сколькими способами можно распределить 6 одинаковых папок по трем ящикам письменного стола, если каждый ящик может вместить все папки?

Решение. Рассматриваемое множество состоит из трех различных элементов, а выборки имеют объем, равный шести. Поскольку порядок расположения папок в ящиках роли не играет, то искомое число способов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по шесть в каждом. Следовательно, по формуле (6) имеем $\overline{C}_3^6 = 28$.

1.8. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах “дискета”, “эллипсоид”, “математика”?

Решение. В слове “дискета” все буквы различны, всего их 7. Тогда $P_7 = 7! = 5040$. В слове “эллипсоид” 9 букв, среди них буква “л” встречается 2 раза, буква “и” встречается 2 раза. Тогда $n=5$, $n_1=2$, $n_2=2$,

$$P_9(1,2,2,1,1,1,1) = \frac{9!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 90720.$$

В слове “математика” 10 букв, из них буква “м” встречается 2 раза, буква “а” встречается 3 раза, буква “т” встречается 2 раза. Тогда $n = 10$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$,

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

1.9. В сумке содержится 30 CD-дисков, из них 8 с программным обеспечением, остальные — игровые. Сколькими способами из них можно отобрать 6 дисков так, чтобы 4 из них были с программами и 2 — игровых?

Решение. Всего в сумке 30 CD-дисков. Число всех различных способов выбора 4 дисков с программами из 8 определяет C_8^4, а число способов выбора двух игровых дисков из 22 определяет C_{22}^2. По правилу произведения в комбинаторике получаем: $C_8^4 \cdot C_{22}^2 = 16170$ — столькими способами можно отобрать 6 дисков так, чтобы 4 из них были с программами и 2 — игровых.

Задачи для самостоятельного решения

1.10. На студенческой вечеринке присутствуют 14 девушек и 17 парней. Сколькими способами можно выбрать из них разнополую пару для танца?

1.11. Студенту необходимо сдать 5 экзаменов в течение 12 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?

1.12. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7?

1.13. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5,7, 9, если цифры в числе не повторяются?

1.14. Сколькими способами можно составить четырехзначное число, все цифры которого различны?

1.15. В хоккейном клубе 8 нападающих, 5 защитников и 2 вратаря. Сколько различных вариантов команды может составить тренер, если на лед выходят вратарь, два защитника и тройка нападающих?

1.16. Десять участников марафонского забега разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти награды могут быть распределены между спортсменами?

1.17. Имеется три различных кресла и пять рулонов обивочной ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку кресел?

1.18. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

1.19. В киоске продаются открытки 6 видов. Сколькими способами можно приобрести в нем: а) 4 открытки; б) 4 различные открытки?

1.20. Сколькими способами можно нанизать на нитку 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бусинок?

1.21. Сколько перестановок можно сделать из букв слова

а) врач; б) папа ?

1.22. В партии содержится 30 деталей, из них 8 дефектных. Сколькими способами из этой партии можно отобрать 6 деталей так, чтобы 4 из них были качественные и 2 дефектные?

1.23. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из 10 кандидатов?

1.24. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

1.25. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах "замок", "ротор", "топор", "колокол"?

1.26. Замок на сейфе зашифрован кодом из 10 цифр $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. Замок открывается при определенной комбинации. Хватит ли 10 дней, чтобы открыть сейф, если "рабочий день" продолжается 13 часов, а на набор одной цифры уходит полсекунды? Ответ обоснуйте.

1.27. Вычислите $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$.

1.28. Найдите n, если

$$\frac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240 \cdot A_{n+3}^{k+3}, \quad k \leq n.$$

1.29. Решите неравенство

$$C_{10}^{n-1} > 2 \cdot C_{10}^{n}.$$

1.30. Возведите в шестую степень двучлен $(x^2 - y)$, воспользовавшись формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Ответы
1.10. $14 \cdot 17 = 238$. **1.11.** $A_{12}^5 = 95040$. **1.12.** $\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343$. **1.13.** 6. **1.14.** 4536. **1.15.** 1120. **1.16.** 720. **1.17.** 125. **1.18.** 165. **1.19.** а) 126; б) 15. **1.20.** $P(4,5,6) = 630630$. **1.21.** а) $P_4 = 24$; б) $P(2,2) = 6$. **1.22.** $C_{22}^4 \cdot C_8^2 = 204820$. **1.23.** 720. **1.24.** 120. **1.25.** 120, 30, 60, 210. **1.26.** Недостаточно. **1.27.** 256. **1.28.** 11. **1.29.** 8, 9,10.

2. Действия над событиями

Событие называется случайным или возможным, если исход испытания приводит к появлению либо к непоявлению этого события. Например, выпадение герба при бросании монеты; выпадение грани с числом очков, равным 3, при бросании игральной кости.

Событие называется достоверным, если в условиях испытания оно обязательно произойдет. Например, извлечение белого шара из урны, в которой находятся только белые шары; выпадение не более 6 очков при бросании игральной кости.

Событие называется невозможным, если в условиях испытания оно заведомо не произойдет. Например, выпадение семи очков при бросании одной игральной кости; извлечение более четырех тузов из обычной колоды карт.

Случайные события обозначаются латинскими буквами алфавита A, B, C и так далее.

События бывают совместные и несовместные. События называются несовместными, если в условиях испытания появление одного из них исключает появление остальных.

Например, выпадение герба и решки при одном бросании монеты; попадание и промах при одном выстреле. События называются совместными, если в условиях испытания появление одного из них не исключает появления остальных. Например, поражение мишени и промах при одновременной стрельбе из двух винтовок; выпадение двух гербов при бросании двух монет.

События называются равновозможными, если в условиях данного испытания возможность наступления каждого из этих событий одинакова. Примеры равновозможных событий: выпадение герба и выпадение решки при одном бросании монеты; выпадение числа очков от 1 до 6 при бросании одной игральной кости.

Событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B, называется суммой (объединением) событий и обозначается $C = A + B \quad (C = A \bigcup B)$.

Событие C, состоящее в совместном наступлении событий A и B, называется произведением (пересечением) этих событий и обозначается $C = A \cdot B \quad (C = A \bigcap B)$.

Событие C, состоящее в том, что событие A не происходит, называется противоположным и обозначается $\overline{A}$. Сумма противоположных событий является достоверным событием Ω, то есть $A + \overline{A} = \Omega$.

Произведение противоположных событий — событие невозможное (V), то есть $A \cdot \overline{A} = V$.

Совокупность возможных событий образует полную группу, если в результате испытаний появится хотя бы одно из этих событий:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Например, при бросании игральной кости выпадения от одного до шести очков составляют полную группу событий.

2.1. Событие A — из четырех проверяемых электролампочек все дефектные; событие B — все лампочки доброкачественные. Что означают события: 1) $A + B$; 2) $A \cdot B$; 3) $\overline{A}$; 4) $\overline{B}$?

Решение. 1) Событие A состоит в том, что все электролампочки дефектные, а событие B — в том, что все электролампочки доброкачественные. Сумма событий $A + B$ означает, что все лампочки должны быть либо дефектными, либо доброкачественными.

2) Событие $A \cdot B$ — лампочки должны быть одновременно дефектными и доброкачественными, поэтому событие $A \cdot B$ — невозможное.

3) A — все лампочки дефектные, следовательно, $\overline{A}$ — хотя бы одна лампочка доброкачественная.

4) B — все лампочки доброкачественные, следовательно, $\overline{B}$ — хотя бы одна лампочка дефектная.

2.2. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A — выбранное число делится на 2, событие B — выбранное число делится на 3. Что означают события: 1) $A+B$; 2) $A \cdot B$; 3) $\overline{A \cdot B}$?

Решение. 1) Сумма событий $A+B$ есть событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B, то есть случайно выбранное число должно делиться или на 2, или на 3, или на 6.

2) Произведение событий $A \cdot B$ означает, что события A и B происходят одновременно. Следовательно, выбранное число должно делиться на 6.

3) $\overline{A \cdot B}$ — выбранное число не делится на 6.

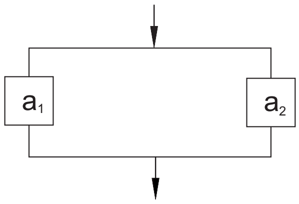
2.3. Два стрелка делают по одной и той же цели по одному выстрелу. Событие A — первый стрелок попадает в цель; событие B — второй стрелок попадает в цель. Что означают события: а) $A+B$; б) $A \cdot B$; в) $\overline{A}+\overline{B}$; г) $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

Решение. а) Событие $A + B$ означает: хотя бы один из стрелков попадает в цель; б) событие $A \cdot B$ означает: оба стрелка попадают в цель; в) событие $\overline{A} + \overline{B}$ означает: хотя бы один делает промах; г) события $\overline{A} \cdot \overline{B}$ означает: оба делают промахи.

2.4. Два шахматиста играют одну партию. Событие A — выиграет первый игрок, событие B — второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

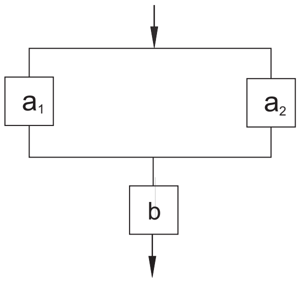
Решение. Событие C — ничья.

2.5. Даны два дублирующих блока a_1 и a_2. Запишите событие, состоящее в том, что система замкнута.



Решение. Введем следующие обозначения: A_1 — событие, состоящее в том, что блок a_1 исправен; A_2 — событие, состоящее в том, что блок a_2 исправен; S — событие, состоящее в том, что система замкнута. Блоки дублирующие, поэтому система будет замкнута в том случае, когда исправен хотя бы один из блоков, то есть $S = A_1 + A_2$.

2.6. Дана система из трех блоков a_1, a_2, b. Запишите событие, состоящее в том, что система замкнута.



Решение. Введем следующие обозначения: A_1 — событие, состоящее в том, что блок a_1 исправен; A_2 — событие, состоящее в том, что блок a_2 исправен; B — событие, состоящее в том, что блок b исправен; S — событие, состоящее в том, что система замкнута. Разобьем систему на две части. Замкнутость системы, состоящей из дублирующих блоков, как мы видим, можно записать в виде события $A_1 + A_2$. Для замкнутости всей системы исправность блока B всегда обязательна, поэтому

$$S = (A_1 + A_2) \cdot B.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.7. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A — выбранное число делится на 5, событие B — это число оканчивается нулем. Что означают события: 1) $A + B$; 2) $A \cdot \overline{B}$; 3) $A \cdot B$; 4) $\overline{A} \cdot B$?

2.8. Три стрелка стреляют по мишени. События: A_1 — попадание в мишень первым стрелком; A_2 — попадание вторым стрелком; A_3 — попадание третьим стрелком. Составьте полную группу событий.

2.9. В коробке лежат по несколько шаров одного размера, но разных цветов: белого, красного, синего. Событие K_i — взятый наудачу шар красного цвета; событие B_i — белого цвета; событие C_i — синего цвета. Вынимают два шара подряд ($i = 1, 2$ — порядковый номер вынутых шаров). Запишите следующие события: а) событие A — взятый наудачу второй шар оказался синего цвета; б) событие $\overline{A}$; в) событие B — оба шара красные? Составьте полную группу событий.

2.10. По цели производится три выстрела. Даны события A_i $(i = 1, 2, 3)$ — попадание в цель при i-ом выстреле. Выразите через A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: 1) ни одного попадания в цель; 2) одно попадание в цель; 3) два попадания в цель; 4) три попадания в цель; 5) хотя бы одно попадание в цель; 6) хотя бы один промах.

2.11. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт — подбрасывание монеты; события: А — появление герба, В — появление цифры;

б) опыт — два выстрела по мишени; события: А — хотя бы одно попадание, В — хотя бы один промах.

2.12. Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт — подбрасывание монеты; события: А — появление герба, В — появление цифры;

б) опыт — подбрасывание погнутой монеты; события: А — появление герба, В — появление цифры;

в) опыт: выстрел по мишени; события: А — попадание, В — промах.

2.13. Образуют ли полную группу событий следующие события:

а) опыт — подбрасывание монеты; события: А — герб, В — цифра;

б) опыт — подбрасывание двух монет; события: А — два герба, В — две цифры.

2.14. Подбрасывают игральный кубик. Обозначим события: A — выпадение 6 очков, B — выпадение 3 очков, C — выпадение четного числа очков; D — выпадение числа очков, кратного трем. Каковы соотношения между этими событиями?

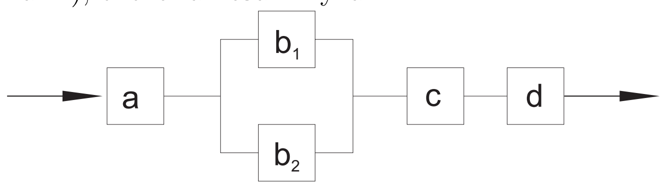
2.15. Пусть A, B, C — произвольные события. Что означают следующие события: $\overline{A}BC$; $\overline{ABC}$; $\overline{A}+\overline{BC}$; $A\overline{BC}+\overline{A}B\overline{C}+$ $+\overline{AB}C$; $\overline{ABC}+\overline{AB}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{BC}$?

2.16. Через произвольные события A, B, C найдите выражения для следующих событий:

а) произошло только событие A;
б) произошли A и B, C не произошло;
в) произошли все три события;
г) произошло, по крайней мере, одно из этих событий;
д) произошло, по крайней мере, два события;
е) произошло одно и только одно событие;
ж) произошло два и только два события;
з) ни одно событие не произошло;
и) произошло не более двух событий.

2.17. В условиях задачи **2.6** запишите событие, состоящее в том, что система незамкнута.

2.18. Запишите событие, состоящее в том, что система замкнута (дублирующие блоки обозначены одинаковыми буквами), система незамкнута.



Ответы

2.7. 1) $A+B=A$ — выбранное число делится на 5; 2) $A\cdot\overline{B}$ — выбранное число оканчивается на 5; 3) $A\cdot B$ — выбранное число оканчивается нулем; 4) $\overline{A}\cdot B$ — невозможное событие. **2.8.** $A_1A_2A_3$; $\overline{A_1}A_2A_3$; $A_1\overline{A_2}A_3$; $A_1A_2\overline{A_3}$; $\overline{A_1A_2}A_3$; $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$; $A_1\overline{A_2A_3}$; $\overline{A_1A_2A_3}$. **2.9.** а) $K_1C_2+B_1C_2+C_1C_2$; б) $\overline{A}=C_1K_2+C_1B_2+K_1K_2+B_1B_2+K_1B_2+B_1K_2$; в) $B=$ $=K_1K_2$. **2.10.** 1) $\overline{A_1A_2A_3}$; 2) $A_1\overline{A_2A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1A_2}A_3$; 3) $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$; 4) $A_1A_2A_3$; 5) $A_1\overline{A_2A_3}+$ $+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$;

б) $\overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + \overline{A_1A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2A_3} + \overline{A_1A_2A_3}$. **2.11.** а) да; б) нет. **2.12.** а) да; б) нет; в) в общем случае нет. **2.13.** а) да; б) нет. **2.14.** Если выпало 6 очков, то тем самым выпало и четное число очков, то есть событие A влечет за собой событие C: $A \subset C$. Рассуждая аналогично, получаем $A \subset D$, $B \subset D$, $A + B = D$, $C \cdot D = A$. **2.15.** Событие A не произошло, B, C — произошли; ни одно из трех данных событий не произошло; хотя бы одно из трех событий не произошло; произошло ровно одно из трех событий; произошло не более одного из трех событий.
2.16. а) $A\overline{BC}$; б) $AB\overline{C}$; в) ABC; г) $A + B + C$; д) $AB + AC + BC$; е) $A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$; ж) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$; з) $\overline{ABC}$; и) $AB + BC + AC$. **2.17.** Система незамкнута, если неисправны оба блока a_1 и a_2 или блок b. Поэтому, обозначив через $\overline{S}$ событие, состоящее в том, что система незамкнута, можно записать: $\overline{S} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} + \overline{B} = \overline{(A_1 + A_2)} + \overline{B}$. **2.18.** Аналогично решению задач **2.5**, **2.6** получаем $S = A(B_1 + B_2) \cdot C \cdot D$; $\overline{S} = \overline{A} + \overline{B_1B_2} + \overline{C} + \overline{D}$.

3. Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу n всех несовместных равновозможных и образующих полную группу случаев. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается $P(A)$ и вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{7}$$

Эта формула применима в том случае, когда результаты опыта можно представить в виде полной группы равновозможных и попарно несовместных событий.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$.

3.1. Из урны, в которой находится 4 белых, 9 черных и 7 красных шаров, наугад вынимают один шар. Какова вероятность появления белого шара?

Решение. Здесь элементарным исходом является извлечение из урны любого шара. Число всех таких исходов равно числу шаров в урне, то есть $n = 20$. Число исходов, благоприятствующих появлению белого шара (событие A), очевидно равно числу белых шаров в урне, то есть $m = 4$. Поэтому по формуле (7) находим

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

3.2. Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется равной восьми?

Решение. Обозначим через A_{ij} событие, состоящее в том, что при первом подбрасывании выпало i очков, а при втором — j очков. Тогда 36 событий

$$\begin{array}{cccc} A_{11}, & A_{12}, & \dots, & A_{16}; \\ A_{21}, & A_{22}, & \dots, & A_{26}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{61}, & A_{62}, & \dots, & A_{66} \end{array}$$

можно рассматривать как элементарные исходы опыта. Следовательно, число всех таких элементарных исходов $n = 36$. Появлению события A (сумма выпавших очков равна восьми) благоприятствуют исходы A_{26}, A_{35}, A_{44}, A_{53}, A_{62}. Таким образом, $m = 5$. Отсюда получаем

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

3.3. В партии из S изделий имеется T нестандартных. Определите вероятность того, что среди выбранных наудачу s изделий нестандартными окажутся t изделий.

Решение. Элементарным исходом является выборка любых s изделий из их общего числа S. Число всех таких исходов равно числу сочетаний из S по s, то есть $n = C_S^s$. Интересующее нас событие A — это извлечение s изделий, в которых $s - t$ изделий — качественные, а t — нестандартные. Число таких групп

$$m = C_{S-T}^{s-t} \cdot C_T^t,$$

так как группу из t нестандартных изделий можно образовать C_T^t способами, а группу из $s-t$ качественных изделий — C_{S-T}^{s-t} способами, причем любая группа исправных изделий может комбинироваться с любой группой нестандартных изделий. Отсюда

$$P(A) = \frac{C_{S-T}^{s-t} \cdot C_T^t}{C_S^s}.$$

3.4. Из букв слова “ДИФФЕРЕНЦИАЛ” наугад выбирается буква. Какова вероятность того, что эта буква будет а) гласной; б) согласной; в) буквой “ч”?

Решение. В слове “ДИФФЕРЕНЦИАЛ” 12 букв, 5 гласных, 7 согласных. Пусть событие A — выбрана гласная буква , B — выбрана согласная буква, C — выбрана буква “ч”. Тогда

$$P(A) = \frac{5}{12}, \quad P(B) = \frac{7}{12}, \quad P(C) = 0.$$

3.5. В команде участников студенческой олимпиады 4 девушки и 6 юношей. Разыгрываются 3 диплома первой степени. Какова вероятность того, что среди обладателей дипломов окажутся одна девушка и двое юношей?

Решение. Число всех равновозможных случаев распределения 3 дипломов среди 10 человек равно числу сочетаний C_{10}^3. Число групп по двое юношей из шести, которые могут получить дипломы — C_6^2. Каждая пара может сочетаться с любой девушкой, число таких выборов — C_4^1. Следовательно, число групп: двое юношей и одна девушка равно произведению $C_6^2 \cdot C_4^1$. Это число благоприятствующих случаев распределения дипломов. Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.6. На 5 одинаковых карточках написаны буквы К, М, О, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово “ТОМСК”?

3.7. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что эти шары разного цвета.

3.8. В офисе работают четыре женщины и трое мужчин. Среди них разыгрываются 4 билета на концерт юмористов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две женщины и двое мужчин?

3.9. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных, 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все три шара разного цвета.

3.10. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Л, М, О, О, Т. Какова вероятность того, что извлекая карточки наугад, получим в порядке их выхода слово "МОЛОТ"?

3.11. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке ровно одно изделие бракованное.

3.12. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

3.13. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

3.14. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Наудачу извлекают 3 детали. Найдите вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

3.15. Из букв составлено слово "АНАНАС". Буквы рассыпались. Найдите вероятность того, что собрав буквы в произвольном порядке, снова получим это слово.

3.16. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число кратно 3?

3.17. В урне A красных и B голубых шаров, одинаковых по размеру и весу. Чему равна вероятность того, что наудачу извлеченный шар окажется голубым?

3.18. Наудачу выбрано число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число является делителем 30?

3.19. В урне B красных и A голубых шаров, одинаковых по размеру и весу. Из этой урны извлекают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался красным. После этого из урны вынимают еще один шар. Найдите вероятность того, что второй шар тоже красный.

3.20. Наудачу выбрано число, не превосходящее 50. Какова вероятность того, что это число является простым?

3.21. Подбрасывают три игральных кубика, подсчитывается сумма выпавших очков. Что вероятнее — получить в сумме 9 или 10 очков? 11 или 12 очков?

Ответы

3.6. 1/120. **3.7.** 5/9. **3.8.** 18/35. **3.9.** 0,25. **3.10.** 1/60. **3.11.** 21/40. **3.12.** 5/9. **3.13.** а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008. **3.14.** 24/91. **3.15.** 1/60. **3.16.** 1/3. **3.17.** $\frac{B}{A+B}$. **3.18.** 1/7. **3.19.** $\frac{B-1}{A+B-1}$. **3.20.** 0,32. **3.21.** $p_1 = 25/216$ — вероятность получить в сумме 9 очков, $p_2 = 27/216$ — вероятность получить в сумме 10 очков; $p_2 > p_1$; $p_3 = 27/216$ — вероятность получить в сумме 11 очков, $p_4 = 25/216$ — вероятность получить в сумме 12 очков; $p_3 > p_4$.

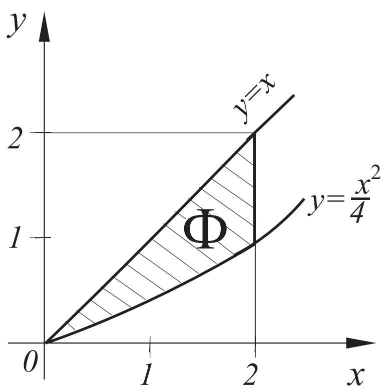
4. Геометрическая вероятность

Формула $P(A) = \frac{m}{n}$ теряет смысл, если число всех равновозможных несовместных случаев неограничено (образует бесконечное множество). Однако возможно иногда всей совокупности бесконечных равновозможных несовместных случаев дать количественную характеристику S в некоторых мерах длины, площади, объема, времени и так далее, а части этой совокупности, благоприятствующей наступлению рассматриваемого события A — характеристику S_δ в тех же мерах. Тогда вероятность появления события A определяется соотношением:

$$P(A) = \frac{S_\delta}{S}. \tag{8}$$

4.1. Из промежутка $[0; 2]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найдите вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$.

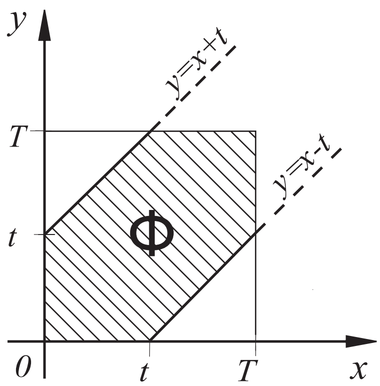
Решение. Испытание состоит в случайном выборе из промежутка $[0; 2]$ пары чисел x и y. Будем это интерпретировать как выбор наудачу точки $M(x; y)$ из множества всех точек квадрата, сторона которого равна двум. Рассмотрим фигуру Φ, представляющую собой множество всех точек квадрата, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $x^2 \le 4y \le 4x$. Интересующее событие происходит тогда и только тогда, когда выбранная точка $M(x; y)$ принадлежит фигуре Φ.



По формуле (8) искомая вероятность равна отношению площади фигуры Φ к площади квадрата:

$$P = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx}{4} = \frac{1}{3}.$$

4.2. Двое договорились о встрече в определенном месте. Каждый из них приходит в условленное место независимо друг от друга в случайный момент времени из $[0; T]$ и ожидает не более чем время $t \in (0; T)$. Какова вероятность встречи на таких условиях?



Решение. Обозначим через x время прихода первого в условленное место, а через y — время прихода туда второго лица. Из условия вытекает, что x и y независимо друг от друга пробегают промежуток времени $[0;T]$. Испытание состоит в фиксации времени прихода указанных лиц к месту встречи. Тогда пространство элементарных исходов данного испытания интерпретируется как совокупность всех точек $M(x;y)$ квадрата $\Omega = \{(x;y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$. Интересующее нас событие A — "встреча произошла" наступает в том и только том случае, когда выбранная точка $M(x;y)$ окажется внутри фигуры Φ, представляющей собой множество всех точек квадрата, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x-y| \leq t$. По формуле (8) искомая вероятность представляет собой отношение площади фигуры Φ к площади квадрата Ω:

$$P(A) = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

Анализируя полученный в этой задаче результат, видим, что с возрастанием $t \in (0;T]$ увеличивается вероятность встречи. Пусть, например, $T = 1$ час, $t = 20$ мин, тогда $P(A) = \frac{5}{9} > 0{,}5$, то есть чаще чем в половине случаев встречи будут происходить, если многократно договариваться на указанных выше условиях.

Задачи для самостоятельного решения

4.3. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 45-м и 50-м километром линии? (Вероятность обрыва провода в любом месте считать одинаковой).

4.4. В круг радиуса r наугад брошена точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в данный круг правильного треугольника.

4.5. Найдите вероятность того, что сумма двух случайно выбранных чисел из промежутка $[-1; 1]$ больше нуля, а их произведение отрицательно.

4.6. Во время боевой учебы н-ская эскадрилья бомбардировщиков получила задание атаковать нефтебазу "противника". На территории нефтебазы, имеющей форму прямоугольника со сторонами 30 и 50 м, находятся четыре круглых нефтебака диаметром 10 м каждый. Найдите вероятность прямого поражения нефтебаков бомбой, попавшей на территорию нефтебазы, если попадание бомбы в любую точку этой базы равновероятно.

4.7. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что сумма их квадратов меньше 100. Какова вероятность, что сумма квадратов этих чисел окажется больше 64?

4.8. Двое друзей условились встретиться между 13 и 14 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 20 минут, после чего уходит. Определите вероятность встречи друзей, если моменты их прихода в указанном промежутке времени равновозможны.

4.9. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов равновозможно в течение данных суток. Определите вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода равно одному часу, а второго — двум часам.

4.10. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найдите вероятность того, что произведение $x \cdot y$ будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

4.11. В области G, ограниченной эллипсоидом $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, наудачу зафиксирована точка. Какова вероятность того, что координаты $(x; y; z)$ этой точки будут удовлетворять неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$?

4.12. В прямоугольник с вершинами $R(-2;0)$, $L(-2;9)$, $M(4;9)$, $N(4;0)$ брошена точка. Найдите вероятность того, что ее координаты будут удовлетворять неравенствам
$0 \le y \le 2x - x^2 + 8$.

4.13. Область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 25$, а область g — этой окружностью и параболой $16x - 3y^2 > 0$. Найдите вероятность попадания в область g.

4.14. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найдите вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение $x \cdot y$ не меньше 0,09.

Ответы
4.3. $1/6$. **4.4.** $3\sqrt{3}/4\pi$. **4.5.** 0,25. **4.6.** $\pi/15$. **4.7.** 0,36. **4.8.** $5/9$. **4.9.** $\approx 0{,}121$. **4.10.** $\approx 0{,}38$. **4.11.** $1/3$. **4.12.** $2/3$. **4.13.** $\approx 0{,}346$. **4.14.** $\approx 0{,}198$.

5. Основные теоремы теории вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий, то есть

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, то есть

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Следствия:

- Сумма вероятностей событий, составляющих полную группу, равна единице: $P\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$.
- Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

События A_i $(i = 1, \ldots, n)$ называются зависимыми, если появление одного из них изменяет вероятность появления остальных.

События A_1, A_2 называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого.

События A_i $(i = 1, \ldots, n)$ называются независимыми в совокупности или независимыми, если они попарно-независимы, а также независимы каждое из них и произведение k остальных $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$. (Заметим, что из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.) Если события A_1, A_2, …, A_n независимы, то противоположные им события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, …, $\overline{A_n}$ также независимы.

Например, в ящике находятся электрические лампочки одинаковой величины и формы, но различного напряжения: на 120 В — 20 штук, на 220 В — 50. Наудачу вынимают две лампочки одну за другой. Предположим, что событие A_1 — первой взята лампочка напряжением 120 В, событие A_2 — второй взята лампочка того же напряжения. Если первая вынутая лампочка не возвращается в ящик перед взятием второй лампочки, то события A_1 и A_2 — зависимые, так как появление события A_1 изменило вероятность появления события A_2: $P(A_2) = 19/69$.

Если взятая наудачу первая лампочка после фиксирования ее напряжения возвращается обратно в ящик, то вероятность появления события A_2 не изменится. В этом случае события A_1 и A_2 независимые.

Вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B имело место, называется условной вероятностью события A и обозначается $P(A|B)$.

Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) \tag{9}$$

или

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Если события A и B независимые, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Вычисление вероятности суммы событий можно свести к вычислению вероятности произведения противоположных событий. Если обозначить $P(A_i) = p_i$, $P(\overline{A_i}) = q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

Если независимые события имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий выражается формулой $P(A) = 1 - q^n$, где $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. В обратной задаче вероятность $P(A)$ известна и нужно определить при каком числе n независимых событий A_i достигается заданное значение $P(A)$. Точнее, задается некоторое число Q, такое, что $P(A) = 1 - q^n \geq Q$. Из этого неравенства определяется значение n.

Приведем некоторые рекомендации к решению задач на использование основных теорем теории вероятностей:

- Искомое событие A представьте через события A_i, используя операции сложения, умножения и противоположные события. Например, $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, $A = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2 + A_1A_2$, $A = \Omega - \overline{A}$.
- Найдите вероятность события A, пользуясь теоремами сложения, умножения вероятностей.
- Старайтесь выбирать события такими, чтобы они были независимыми.
- Представляйте искомые события через A_i так, чтобы они были несовместными.
- Оцените, не лучше ли перейти к противоположному событию при решении задачи.

5.1. Бросается игральная кость один раз. Найдите вероятность выпадения грани с тремя или пятью очками.

Решение. Пусть событие A — появление грани с тремя очками, событие B — с пятью очками. $P(A) = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{1}{6}$.

События A и B несовместные, так как появление грани с тремя очками исключает появление грани с пятью очками и наоборот. Поэтому $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

5.2. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение. Пусть событие A означает, что наудачу взятое двузначное число кратно 2. Событие B — двузначное число кратно 5. Найдем $P(A+B)$. Так как события A и B совместные, то $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. Двузначные числа — это числа 10, 11, 12, ..., 99. Всего их 90. Из них 45 будут кратны 2, 18 кратны 5 и 9 кратны 2 и 5 одновременно. Поэтому $P(A) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$; $P(A \cdot B) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$. Следовательно, $P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$.

5.3. Имеются две урны с шарами. В одной 10 красных и 5 синих шаров, во второй 5 красных и 7 синих шаров. Какова вероятность того, что из первой урны наудачу будет вынут красный шар, а из второй синий?

Решение. Пусть событие A_1 — из первой урны вынут красный шар; A_2 — из второй урны вынут синий шар:

$$P(A_1) = \frac{10}{15}, \quad P(A_2) = \frac{7}{12}.$$

События A_1 и A_2 независимые. Вероятность совместного появления событий A_1 и A_2 равна

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{18}.$$

5.4. Имеется колода карт (36 штук). Вынимаются наудачу две карты подряд. Какова вероятность того, что обе вынутые карты будут красной масти?

Решение. Пусть событие A_1 — первая вынутая карта красной масти. Событие A_2 — вторая вынутая карта красной масти. B — обе вынутые карты красной масти. Так как должны произойти и событие A_1, и событие A_2, то $B = A_1 \cdot A_2$. События A_1 и A_2 зависимые, следовательно, $P(B)$ вычисляем по формуле (9).

$$P(A_1) = \frac{18}{36}; \quad P(A_2|A_1) = \frac{17}{35}.$$

Отсюда $P(B) = \frac{18}{36} \cdot \frac{17}{35} \approx 0{,}243$.

5.5. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8, 6 шаров. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

Решение. Пусть индекс 1 означает белый цвет, индекс 2 — черный цвет; 3 — красный цвет. Пусть событие A_i — из первой урны извлекли шар i-го цвета; событие B_j — из второй урны извлекли шар j-го цвета; событие A — оба шара одного цвета. $A = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + A_3 \cdot B_3$. События A_i и B_j независимые, а $A_i \cdot B_i$ и $A_j \cdot B_j$ несовместные при $i \neq j$. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(B_1) + P(A_2) \cdot P(B_2) + P(A_3) \cdot P(B_3) =$$
$$= \tfrac{5}{24} \cdot \tfrac{10}{24} + \tfrac{11}{24} \cdot \tfrac{8}{24} + +\tfrac{8}{24} \cdot \tfrac{6}{24} = \tfrac{31}{96}.$$

5.6. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что взятое изделие стандартное, равна 0,9. Найдите вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

Решение. Пусть событие A_i — i-е изделие стандартное, $i = 1, 2$. Пусть событие A — из двух проверенных изделий только одно стандартное. $A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$, $P(A_i) = 0{,}9$, $P(\overline{A_i}) = 0{,}1$, $i = 1, 2$.

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0{,}9 = 0,18,$$

так как события A_1 и A_2 независимые, следовательно, события A_1 и $\overline{A_2}$, $\overline{A_1}$ и A_2 — тоже независимые события; события $A_1 \cdot \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} \cdot A_2$ — несовместные события.

Задачи для самостоятельного решения

5.7. Предприятие даёт в среднем 25% продукции высшего сорта и 65% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта?

5.8. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,014, 0,011, 0,009, 0,006. Найдите вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

5.9. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг и кольца соответственно равны 0,35, 0,20, 0,15. Какова вероятность попадания в мишень?

5.10. Определите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 9, либо тому и другому одновременно.

5.11. Найдите вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика на верхней грани окажется четное или кратное трем число.

5.12. На десяти карточках напечатаны цифры от 0 до 9. Определите вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 357.

5.13. Производится 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания 0,2 при отдельном выстреле. Попадания в мишени при различных выстрелах предполагаются независимыми событиями. Какова вероятность попадания в цель ровно три раза?

5.14. Вероятности появления каждого из трёх независимых событий A, B, C соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7. Найдите вероятность появления только одного из этих событий.

5.15. Слово "ЛОТОС", составленное из букв кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем перемешаны и сложены в коробке. Из коробки наугад извлекаются одна за другой три буквы. Найдите вероятность того, что при этом получится слово "СТО".

5.16. В ящике находятся 10 деталей, из которых 4 — первого типа и 6 — второго. Для сборки агрегата нужно сначала взять деталь первого типа, а затем второго. Какова вероятность того, что при выборке наугад детали будут взяты в нужной последовательности?

5.17. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трёх независимых испытаниях, равна 0,875. Найдите вероятность появления события в одном испытании.

5.18. Студент знает ответы на 20 вопросов из 26. Предположим, что вопросы задаются последовательно один за другим. Найдите вероятность того, что три подряд заданных вопроса — счастливые.

5.19. В ящике находятся 10 деталей, из которых 5 — первого типа, 3 — второго и 2 — третьего. Какова вероятность того, что при выборе наугад первой будет взята деталь первого типа, второй — второго, третьей — третьего типа?

5.20. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

5.21. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найдите вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

5.22. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7 , а для второго — 0,8. Найдите вероятность, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

5.23. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найдите вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

5.24. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найдите вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

5.25. Радиолокационная станция ведет наблюдение за двумя объектами. За время наблюдения первый объект может быть потерян с вероятностью $p_1 = 0{,}12$, а второй — с вероятностью $p_2 = 0{,}14$. Найдите вероятность того, что за время наблюдения станцией не будет потерян хотя бы один объект.

5.26. По цели стреляют тремя ракетами. Вероятность поражения цели каждой ракетой равна 0,95. Найдите вероятность того, что после обстрела цель уцелеет.

5.27. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найдите вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3, 0,4, 0,6, 0,7.

5.28. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найдите вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

5.29. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найдите вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Ответы

5.7. 0,9. **5.8.** 0,04. **5.9.** 0,7. **5.10.** 5/9. **5.11.** 2/3. **5.12.** 1/720. **5.13.** 0,0256. **5.14.** 0,092. **5.15.** 1/30. **5.16.** 4/15. **5.17.** 0,5. **5.18.** 57/130. **5.19.** 1/24. **5.20.** $n \geq 2$. **5.21.** 0,14. **5.22.** 0,38. **5.23.** 0,7. **5.24.** 0,126. **5.25.** 0,2432. **5.26.** 0,000125. **5.27.** 0,9496. **5.28.** 0,388. **5.29.** 0,8.

6. Формула полной вероятности

Рассмотрим n попарно несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, называемых гипотезами, для которых известны вероятности $P(H_i) \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$. Если некоторое событие A может произойти с каждым из несовместных событий H_1, H_2, ... , H_n, причем известны условные вероятности $P(A|H_i)$, то вероятность события A

будет равна сумме вероятностей произведений:

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \ldots + P(A \cdot H_n).$$

Заменяя вероятность произведений по теореме умножения вероятностей, получим формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

6.1. Имеются три одинаковые урны; в первой урне два белых и один черный шар; во второй — три белых и один черный; в третьей — два белых и два черных шара. Для опыта наугад выбрана одна урна и из нее вынут шар. Найдите вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Рассмотрим три гипотезы: H_1 — выбрана первая урна, H_2 — выбрана вторая урна, H_3 — выбрана третья урна и событие A — вынут белый шар.

Так как гипотезы по условию задачи равновозможны, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно равны: $P(A|H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{3}{4}$, $P(A|H_3) = \frac{1}{2}$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

6.2. В пирамиде стоят 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0,81, а стреляя из винтовки без оптического прицела, — с вероятностью 0,46. Найдите вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

Решение. Здесь первым испытанием является случайный выбор винтовки, вторым — стрельба по мишени. Рассмотрим следующие события: A — стрелок поразит мишень; H_1 — стрелок возьмет винтовку с оптическим прицелом; H_2

— стрелок возьмет винтовку без оптического прицела. Используем формулу полной вероятности. Имеем

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2).$$

Учитывая, что винтовки выбираются по одной, и используя формулу классической вероятности, получаем: $P(H_1) = 3/19$, $P(H_2) = 16/19$.

Условные вероятности заданы в условии задачи: $P(A|H_1) = 0{,}81$ и $P(A|H_2) = 0{,}46$. Следовательно,

$$P(A) = 0{,}81 \cdot \frac{3}{19} + 0{,}46 \cdot \frac{16}{19} = 0{,}515.$$

6.3. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, наудачу извлекаются два шара и добавляется в урну 1 белый шар. Найдите вероятность того, что наудачу взятый шар окажется белым.

Решение. Событие "извлечен белый шар" обозначим через A. Событие H_1 — наудачу извлекли два белых шара; H_2 — наудачу извлекли два черных шара; H_3 — извлекли один белый шар и один черный. Тогда вероятности выдвинутых гипотез

$$P(H_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}, \qquad P(H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$

$$P(H_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Условные вероятности при данных гипотезах соответственно равны: $P(A|H_1) = 1/4$ — вероятность извлечь белый шар, если в урне в данный момент один белый и три черных шара, $P(A|H_2) = 3/4$ — вероятность извлечь белый шар, если в урне в данный момент три белых и один черный шар, $P(A|H_3) = 2/4 = 1/2$ — вероятность извлечь белый шар, если в урне в данный момент два белых и два черных шара. В соответствии с формулой полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20}.$$

6.4. Производится два выстрела по цели. Вероятность попадания при первом выстреле 0,2, при втором — 0,6. Вероятность разрушения цели при одном попадании 0,3, при двух — 0,9. Найдите вероятность того, что цель будет разрушена.

Решение. Пусть событие A — цель разрушена. Для этого достаточно попадания с одного выстрела из двух или поражение цели подряд двумя выстрелами без промахов. Выдвинем гипотезы: H_1 — оба выстрела попали в цель. Тогда $P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$. H_2 — либо первый раз, либо второй раз был совершен промах. Тогда $P(H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}56$. Гипотеза H_3 — оба выстрела были промахи — не учитывается, так как вероятность разрушения цели при этом нулевая. Тогда условные вероятности соответственно равны: вероятность разрушения цели при условии обоих удачных выстрелов равна $P(A|H_1) = 0{,}9$, а вероятность разрушения цели при условии только одного удачного выстрела $P(A|H_2) = 0{,}3$. Тогда вероятность разрушения цели по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = 0{,}12 \cdot 0{,}9 + 0{,}56 \cdot 0{,}3 = 0{,}276.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.5. В пяти ящиках лежат одинаковые по размерам и весу шары. В двух ящиках (состава H_1) — по 6 голубых и 4 красных шара. В двух других ящиках (состава H_2) — по 8 голубых и 2 красных шара. В одном ящике (состава H_3) — 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

6.6. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 30%, вторая 25%, третья 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

6.7. Имеются две урны. В первой лежат m белых и n чёрных шаров, а во второй k белых и l чёрных шаров соответственно. Из первой урны во вторую перекладывают один шар. Какова вероятность после этого вынуть

а) белый шар из первой урны;

б) белый шар из второй урны.

6.8. Партия электрических лампочек на 25% изготовлена первым заводом, на 35% — вторым, на 40% — третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1 = 0,03$, $q_2 = 0,02$, $q_3 = 0,01$. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

6.9. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашается наугад один студент. Найдите вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку (событие A).

6.10. На сборку попадают детали с трёх автоматов. Известно, что первый автомат даёт 0,2% брака, второй — 0,3%, и третий — 0,4%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 500, со второго — 1000 и с третьего — 1500 деталей.

6.11. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго — 0,02, для третьего — 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в два раза больше второго, а третьего станка в три раза меньше второго. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется бракованной?

6.12. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наугад извлечен один шар. Найдите вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все представления о первоначальном составе шаров (по цвету).

6.13. В первой урне содержатся 10 шаров, из них 8 белых, во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны извлекли по одному шару, а затем из этих двух наудачу взят один шар. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

6.14. На фабрике изготовляются изделия определённого вида на трёх поточных линиях. На первой линий производится 45% изделий, на второй 35%, на третьей — остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 98%, 96%, 94%. Определите вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

6.15. Из пяти винтовок, из которых 3 снайперские и 2 обычные, наугад выбирается одна, и из неё производится выстрел. Найдите вероятность попадания, если вероятность попадания из снайперской винтовки 0,95, а из обычной 0,7.

Ответы

6.5. 0,6. **6.6.** 0,978. **6.7.** а) $\frac{m}{m+n}$; б) $\frac{m(k+1)+nk}{(m+n)(k+l+1)}$. **6.8.** $0,0185$. **6.9.** 17/21. **6.10.** 1/300. **6.11.** $0,015$. **6.12.** 2/3. **6.13.** 0,5. **6.14.** 0,035. **6.15.** 0,85.

7. Формулы Бейеса

Пусть некоторое событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, где $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ — полная группа событий и $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = 1$. Если событие A уже произошло и условные вероятности $P(A|H_i)$ известны, то можно определить вероятность наступления его с каким-то из событий H_i $(i = \overline{1,n})$. По теореме умножения имеем:

$$P(H_iA) = P(A) \cdot P(H_i|A); \tag{10}$$

$$P(H_iA) = P(H_i) \cdot P(A|H_i). \tag{11}$$

Из формулы (10) находим

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)}.$$

$P(A)$ вычисляем по формуле полной вероятности, а $P(H_iA)$ — по формуле (11), то есть

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}. \qquad (12)$$

Это выражение называется формулами Бейеса.

7.1. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Около 40% приборов собираются из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, его надежность (вероятность безотказной работы) за время t равна 0,95; если из деталей обычного качества — его надежность равна 0,7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найдите вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

Решение. Возможны две гипотезы: H_1 — прибор собран из высококачественных деталей; H_2 — прибор собран из деталей обычного качества. Вероятности этих гипотез до опыта: $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$. В результате опыта наблюдалось событие A — прибор безотказно работал время t. Условные вероятности этого события при гипотезах H_1 и H_2 равны: $P(A|H_1) = 0{,}95$; $P(A|H_2) = 0{,}7$. По формуле (12) находим вероятность гипотезы H_1 после опыта:

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}95}{0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}6 \cdot 0{,}6} = 0{,}475.$$

7.2. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Предполагая,что два стрелка не могут попасть в одну и ту же точку, найдите вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

Решение. Пусть событие A — после стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. До начала стрельбы возможны гипотезы:

H_1 — ни первый, ни второй стрелок не попадет, вероятность этой гипотезы: $P(H_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$.

H_2 — оба стрелка попадут, $P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$.

H_3 — первый стрелок попадет, а второй не попадет, $P(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$.

H_4 — первый стрелок не попадет, а второй попадет, $P(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны: $P(A|H_1) = 0$; $P(A|H_2) = 0$; $P(A|H_3) = 1$; $P(A|H_4) = 1$. После опыта гипотезы H_1 и H_2 становятся невозможными, а вероятности гипотез H_3 и H_4 будут равны:

$$P(H_3|A) = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{6}{7};$$

$$P(H_4|A) = \frac{0{,}08 \cdot 1}{0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{1}{7}.$$

Итак, вероятнее всего, что мишень поражена первым стрелком.

7.3. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели названных заводов соответственно в количестве 19, 6 и 11 шт., которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока соответственно с вероятностями 0,85, 0,76 и 0,71. Рабочий берет случайно один двигатель и монтирует его к устройству. Найдите вероятность того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом-изготовителем.

Решение. Первым испытанием является выбор электродвигателя, вторым — работа электродвигателя во время гарантийного срока. Рассмотрим следующие события:

A — электродвигатель работает безотказно до конца гарантийного срока;

H_1 — монтер возьмет двигатель из продукции первого завода;

H_2 — монтер возьмет двигатель из продукции второго завода;

H_3 — монтер возьмет двигатель из продукции третьего завода.

Вероятность события A вычисляем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3).$$

Условные вероятности заданы в условии задачи:
$P(A|H_1) = 0{,}85$, $P(A|H_2) = 0{,}76$, $P(A|H_3) = 0{,}71$. Найдем вероятности $P(H_1) = 19/36 \approx 0{,}528$, $P(H_2) = 6/36 \approx 0{,}167$, $P(H_3) = 11/36 \approx 0{,}306$.

$$P(A) = 0{,}85 \cdot 19/36 + 0{,}76 \cdot 6/36 + 0{,}71 \cdot 11/36 \approx 0{,}792.$$

По формулам Бейеса (12) вычисляем условные вероятности гипотез H_i:

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}528 \cdot 0{,}85}{0{,}792} \approx 0{,}566;$$

$$P(H_2|A) = \frac{0{,}167 \cdot 0{,}76}{0{,}792} \approx 0{,}160;$$

$$P(H_3|A) = \frac{0{,}306 \cdot 0{,}71}{0{,}792} \approx 0{,}274.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.4. На предприятии, изготавливающем болты, первая машина производит 30%, вторая — 25%, третья — 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный дефектный болт произведен именно первой, именно второй, именно третьей машинами.

7.5. Расследуются причины катастрофы космического корабля “Columbia”, о которой можно высказать четыре предположения (гипотезы) H_1, H_2, H_3 и H_4. По данным NASA $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}4$, $P(H_3) = 0{,}3$, $P(H_4) = 0{,}1$. В ходе расследования обнаружено, что произошло нарушение теплоизоляции шаттла (событие А). Условные вероятности события А согласно той же статистике равны: $P(A|H_1) = 0{,}9$, $P(A|H_2) = 0$, $P(A|H_3) = 0{,}2$, $P(H_4|A) = 0{,}3$. Какая из гипотез наиболее вероятна при данных условиях?

7.6. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найдите вероятность того, что студент подготовлен а) отлично; б) плохо.

7.7. В специализированную больницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% с заболеванием Л, 20% с заболеванием М. Вероятность излечения болезни К равна 0,7, для болезней Л и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найдите вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

7.8. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 — с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

7.9. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятность попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равна 0,6, 0,5 и 0,4.

7.10. На производстве было установлено, что 3% рабочих являются алкоголиками и показатели прогула в три раза выше, чем у остальных рабочих. Если случайно выбранный человек отсутствует на работе, какова вероятность того, что он алкоголик?

7.11. В ящике 3 белых и 7 черных шаров. Один шар вынули наудачу и отложили в сторону. Следующий наугад вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что отложенный шар был белым?

Ответы

7.4. 0,273; 0,113; 0,614. **7.5.** Первая. **7.6.** а) $\approx 0{,}58$; б) $\approx 0{,}002$. **7.7.** 5/11. **7.8.** Без оптического прицела. **7.9.** 10/19. **7.10.** 9/105. **7.11.** 2/9.

8. Последовательность независимых опытов

Производятся испытания, в каждом из которых может появиться событие A или событие $\overline{A}$. Если вероятность события A в одном испытании не зависит от появления его в любом другом, то испытания называются независимыми относительно события A. Будем считать, что испытания происходят в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления события $\overline{A}$ через q ($q = 1-p$).

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз (и не появится $n-k$ раз), обозначим через $P_n(k)$, тогда

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{13}$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{или} \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}.$$

Формула (13) называется формулой Бернулли.

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная вероятность $P_n(k_0)$, называется наивероятнейшим числом появления события A. При заданных n и p это число определяется неравенствами

$$np - q \le k_0 \le np + p. \tag{14}$$

- Если число $np + p$ не является целым, то существует одно наивероятнейшее число k_0, равное целой части этого числа $k_0 = [p(n+1)]$;

- если $np + p$ – целое число, то k_0 имеет два значения: $k_0^{'} = np - q$ и $k_0^{''} = np + p$;
- если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Вероятность того, что в n опытах схемы Бернулли событие A появится от k_1 до k_2 раз ($0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$), обозначим через $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$, тогда

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{15}$$

Вероятность $P_n(1 \leq k \leq n)$ того, что в n опытах событие A появится хотя бы один раз, определяется формулой

$$P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - q^n. \tag{16}$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит:

а) менее k раз, находят по формуле

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1); \tag{17}$$

б) более k раз:

$$P(A) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n); \tag{18}$$

в) не менее k раз:

$$P(A) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n); \tag{19}$$

г) не более k раз, соответственно

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k). \tag{20}$$

Если $k < \frac{n+1}{2}$, то удобнее перейти к противоположному событию.

Формулу Бернулли применяют, когда число испытаний $n \leq 10$. В случае, когда число испытаний n достаточно велико, на практике пользуются локальной и интегральной теоремами Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \tag{21}$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \tag{22}$$

Таблица значений функции $\varphi(x)$ приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \tag{23}$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz \text{ — функция Лапласа}, \tag{24}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{25}$$

Таблица значений функции Лапласа для положительных значений x $(0 \le x \le 5)$ приведена в приложении 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Рассмотрим случай, когда n является достаточно большим, а p — достаточно малым; положим $np = a$, где a — некоторое число. В этом случае искомая вероятность определяется формулой Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{a^k e^{-a}}{k!}. \tag{26}$$

Вероятность появления k событий за время длительностью t можно также найти по формуле Пуассона:

$$P_t(k) \approx \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \tag{27}$$

где λ — интенсивность потока событий, то есть среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

В ряде задач (если вероятность появления события A постоянна, а число опытов невелико) проще построить так называемую производящую функцию

$$\varphi(x) = (q + px)^n.$$

Тогда вероятность $P_n(k)$ равна коэффициенту при x^k.

При решении задач в этом разделе будут полезны следующие рекомендации:

- внимательно прочитайте условия задачи и определите, о каком количестве испытаний и какой величине вероятности идет речь, как соотносятся эти данные;
- если вероятность появления события A постоянна и число появлений события $n \leq 10$, то следует воспользоваться формулой Бернулли;
- если вероятность появления события A постоянна, а количество независимых опытов неограниченно растет $n \to \infty$, то следует воспользоваться теоремами Лапласа;
- если вероятность появления события мала $p \to 0$, а количество независимых опытов неограниченно растет $n \to \infty$, то следует воспользоваться формулой Пуассона;
- используйте вероятность противоположного события.

8.1. Произведено четыре независимых выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна $p = 0{,}6$. Найдите вероятность, что мишень будет поражена: а) четыре раза; б) три раза; в) два раза; г) один раз; д) ни разу.

Решение. По условию задачи $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $n = 4$. Производящая функция для данной задачи имеет вид:

$$\varphi(x) = (0,4 + 0,6x)^4 = 0,0256 + 0,1536x + 0,3456x^2 + \\ +0,3456x^3 + 0,1296x^4.$$

Отсюда находим искомые вероятности: а) $P_4(0) = 0{,}0256$; б) $P_4(1) = 0{,}1536$; в) $P_4(2) = 0{,}3456$; г) $P_4(3) = 0{,}3456$; д) $P_4(4) = 0{,}1296$.

Наивероятнейшее число поражений мишени равно 2 или 3.

8.2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что в серии из 4 выстрелов будет: а) хотя бы одно попадание; б) не менее трех попаданий; в) не более одного попадания.

Решение. Здесь $n = 4$, $p = 0{,}8$, $q = 0,2$.

а) Найдем вероятность противоположного события — в серии из четырех выстрелов нет ни одного попадания в цель:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,2^4 = 0,0016.$$

Отсюда находим вероятность хотя бы одного попадания в цель:

$$P_4(k \geq 1) = 1 - 0,0016 = 0,9984.$$

б) Событие B, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не менее трех попаданий в цель, означает, что было либо три попадания (событие C), либо четыре (событие D), то есть $B = C + D$. Отсюда, $P(B) = P(C) + P(D)$; следовательно,

$$\begin{aligned} P_4(k \geq 3) &= P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 = \\ &= 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^4 = 0,8192. \end{aligned}$$

в) Аналогично вычисляется вероятность попадания в цель не более одного раза:

$$\begin{aligned} P_4(k \le 1) &= P_4(0) + P_4(1) = 0,0016 + C_4^1 p^1 q^3 = \\ &= 0,0016 + 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,2576. \end{aligned}$$

8.3. В каждом из 700 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найдите вероятность того, что событие A происходит: а) ровно 270 раз;
б) меньше чем 270 и больше чем 230 раз; в) больше чем 270 раз.

Решение. Так как количество опытов $n = 700$ довольно велико, то используем формулы Лапласа (21), (23), (24).

а) Задано: $n = 700$, $p = 0,35$, $k = 270$.

Найдем $P_{700}(270)$. Используем локальную теорему Лапласа (21).

Находим: $\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} \approx 12{,}6$;

$$x = \frac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} = \frac{25}{12,6} \approx 1,98.$$

Значение функции $\varphi(x)$ найдем из таблицы (см. приложение 1):

$$\varphi(1,98) \approx 0,05618,\ P_{700}(270) \approx \frac{0,05618}{12,6} \approx 0,00446.$$

б) Задано: $n = 700$, $p = 0,35$, $a = 230$, $b = 270$.

Найдем $P_{700}(230 < k < 270)$.

Используем интегральную теорему Лапласа (23), (24). Находим: $\sqrt{npq} \approx 12{,}6$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{230 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx 1,19, \\ x_2 &= \frac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} \approx 1,98. \end{aligned}$$

Значение функции $\Phi(x)$ найдем из таблицы (см. приложение 2)

$$P_{700}(230 < k < 270) \approx \Phi(1,98) - \Phi(-1,19) \approx$$
$$\approx \Phi(1,98) + \Phi(1,19) \approx 0,85913.$$

в) Задано: $n = 700,\ p = 0,35,\ a = 270,\ b = 700$.
Найдем $P_{700}(k > 270)$.
Имеем: $\sqrt{npq} \approx 12,6,\ x_1 \approx 1,98,\ x_2 = \frac{700-700\cdot 0,35}{12,6} \approx 36{,}1,$

$$P_{700}(270 < k) = P_{700}(270 < k < 700) \approx \Phi(36,1) - \Phi(1,98) \approx$$
$$\approx 1 - 0,97615 \approx 0,02385.$$

8.4. В каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что событие A происходит: а) ровно 220 раз; б) ровно 190 раз; в) меньше чем 240 и больше чем 180 раз; г) меньше чем 235 раз.

Решение. При решении этой задачи используем теоремы Лапласа: локальную в случаях а) и б) и интегральную для случаев в) и г).

а) Задано: $n = 500,\ p = 0,4,\ k = 220$.
Найдем $P_{500}(220)$.
Имеем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{120} \approx 11;$$

$$x = \frac{220 - 500 \cdot 0,4}{11} \approx 1,82.$$

Значение функции $\varphi(x)$ найдем из таблицы (см. приложение 1):

$$\varphi(1,82) \approx 0,07614, \qquad P_{500}(220) \approx \frac{0,07614}{11} \approx 0,00692.$$

б) Задано: $n = 500,\ p = 0,4,\ k = 190$.
Найдем $P_{500}(190)$.
Получаем:

$$\sqrt{npq} \approx 11, \qquad x = \tfrac{190-500\cdot 0,4}{11} \approx -0,91,$$
$$\varphi(-0,91) \approx 0,26369, \quad P_{500}(190) \approx \tfrac{0,26369}{11} \approx 0,02397.$$

в) Задано: $n = 500$, $p = 0,4$, $a = 180$, $b = 240$.

Найдем $P_{500}(180 < k < 240)$.

Имеем:

$$\sqrt{npq} \approx 11, \qquad x_1 = \tfrac{180-500\cdot 0,4}{11} \approx -1,82,$$
$$x_2 = \tfrac{240-500\cdot 0,4}{11} \approx 3,64$$

$$P_{500}(180 < k < 240) \approx \Phi(3,64) - \Phi(-1,82) \approx$$
$$\approx \Phi(3,64) + \Phi(1,82) \approx 0,96548.$$

г) Задано: $n = 500$, $p = 0,4$, $a = 0$, $b = 235$.

Найдем $P_{500}(k < 235)$.

Имеем:

$$\sqrt{npq} \approx 11, \qquad x_1 = \tfrac{0-500\cdot 0,4}{11} = -18,$$
$$x_2 = \tfrac{235-500\cdot 0,4}{11} \approx 3,18,$$

$$P_{500}(k < 235) = P(0 < k < 235) \approx \Phi(3,18) - \Phi(-18) \approx$$
$$\approx \Phi(3,18) + \Phi(18) \approx 0,99926.$$

8.5. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 1/200. Найдите вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:

а) ровно одно неправильное соединение;

б) меньше чем три неправильных соединения;

в) больше чем два неправильных соединения.

Решение. По условию задачи вероятность события мала, поэтому используем формулу Пуассона (15).

а) Задано: $n = 200$, $p = 1/200$, $k = 1$. Найдем $P_{200}(1)$.

Получаем: $a = np = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1$. Тогда $P_{200}(1) \approx e^{-1} \approx$ $\approx 0,3679$.

б) Задано: $n = 200$, $p = 1/200$, $k < 3$. Найдем $P_{200}(k < 3)$.

Имеем: $a = 1$.

$$P_{200}(k < 3) \approx P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) \approx$$
$$\approx e^{-1} + \tfrac{e^{-1}}{1!} + \tfrac{e^{-1}}{2!} \approx$$
$$\approx 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 \approx 0,9197.$$

в) Задано: $n = 200$, $p = 1/200$, $k > 2$. Найдем $P_{200}(k > 2)$.

Эту задачу можно решить проще: найти вероятность противоположного события, так как в этом случае нужно вычислить меньше слагаемых. Принимая во внимание предыдущий случай, имеем

$$P_{200}(k > 2) = 1 - P_{200}(k \leq 2) = 1 - P_{200}(k < 3) \approx \\ \approx 1 - 0,9197 \approx 0,0803.$$

8.6. При установившемся технологическом процессе на ткацкой фабрике происходит 10 обрывов нити на 100 веретен в час. Определите: а) вероятность того, что в течение часа на 80 веретенах произойдет 7 обрывов нити; б) наивероятнейшее число обрывов нити на 80 веретенах в течение часа.

Решение. Статистическая вероятность обрыва нити в течение часа равна $p = 10/100 = 0{,}1$ и, следовательно, $q = 1 - 0{,}1 =$
$= 0{,}9$; $n = 80$; $k = 7$.

Поскольку n велико, то используется локальная теорема Лапласа (23). Вычисляем:

$$x = \frac{7 - 80 \cdot 0,1}{\sqrt{80 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \approx -0,37.$$

Воспользуемся свойством $\varphi(-x) = \varphi(x)$, находим $\varphi(0{,}37) \approx$ $\approx 0{,}3726$, а затем вычисляем искомую вероятность:

$$P_{80}(7) \approx \frac{0,3726}{\sqrt{80 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \approx 0{,}139.$$

Таким образом, вероятность того, что в течение часа на 80 веретенах произойдет 7 обрывов нити, приближенно равна 0,139.

Наивероятнейшее число k_0 наступлений события при повторных испытаниях определим по формуле (14). Находим: $7{,}1 < k_0 < 8{,}1$. Поскольку k_0 может быть только целым числом, то $k_0 = 8$.

Задачи для самостоятельного решения

8.7. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что "герб"выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

8.8. Вероятность появления некоторого события в каждом из 5 независимых опытов равна 0,7. Найдите вероятность появления этого события хотя бы два раза.

8.9. Вероятность появления события A в каждом из 8 независимых испытаний равна 0,6. Найдите вероятность того, что событие A появится: а) не менее трех раз и не более шести раз; б) не менее трех раз; в) не более двух раз.

8.10. В урне 4 белых и 13 черных шаров. Опыт заключается в извлечении одного шара из урны с последующим его возвращением. Каково наивероятнейшее число появлений белого шара в 50 опытах?

8.11. Первая сотрудница пейджинговой компании записывает в данный промежуток времени 60 сообщений с вероятностью опечаток 5%, а вторая сотрудница за то же время — 70 сообщений с вероятностью опечаток 4%. У какой из сотрудниц наивероятнейшее число качественных сообщений больше?

8.12. Вероятность появления некоторого события в отдельном испытании равна 0,75. Какова вероятность того, что при восьмикратном повторении испытания это событие появится менее пяти раз?

8.13. По мишени производится 6 независимых выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Определите вероятность того, что будет: а) хотя бы одно попадание; б) только одно попадание; в) не более трех попаданий; г)не менее четырех попаданий; д) от двух до пяти попаданий.

8.14. В результате многолетних наблюдений было установлено, что вероятность выпадения дождя 1 июня в некоторой местности равна $4/19$. Каково наивероятнейшее число дождливых дней 1 июня для данной местности за ближайшие 100 лет?

8.15. По имеющимся данным в среднем 90% числа производимых цехом изделий не имеют дефектов. Каково наивероятнейшее число изделий с дефектами окажется среди отобранных случайным образом: а) 19 образцов; б) 20 образцов изделий?

8.16. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

8.17. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 90% случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправятся: а) 4 больных; б) не менее 4 больных; в) никто не поправится; г) менее двух больных; д) хотя бы один больной.

8.18. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трёх мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

8.19. Найдите вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

8.20. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найдите вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

8.21. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найдите наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

8.22. При стрельбе по мишени вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16?

8.23. Вероятность того, что пара обуви, взятая наудачу из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,4. Чему равна вероятность того, что среди 600 пар, поступивших на контроль, окажется от 228 до 252 пар обуви высшего сорта?

8.24. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы элементов (за время t) соответственно равна $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$. Найдите вероятности того, что за время t будут работать безотказно: а) все элементы; б) два элемента; в) один элемент; г) ни одного элемента.

8.25. Из двух орудий совершен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго — 0,9. Найдите вероятности следующих событий: а) два попадания в цель; б) одно попадание; в) ни одного попадания; г) не менее одного.

8.26. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найдите вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

8.27. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трёх; в) более трёх; г) хотя бы одно.

8.28. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p = 0{,}01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей чем 0,95?

8.29. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найдите вероятность того, что за 2 мин поступит: а) 4 вызова; б) менее 4 вызовов; в) не менее 4 вызовов. (Принять $e^{-6} \approx 0{,}0025$).

8.30. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найдите вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

8.31. Вероятность появления события А в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найдите вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

8.32. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найдите наивероятнейшее число девочек из 600 новорожденных.

8.33. Из трёх орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго — 0,85, для третьего — 0,9. Найдите вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

8.34. Магазин получил 1000 стеклянных бутылок кетчупа. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну. (Принять $e^{-3} \approx 0{,}04979$).

8.35. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найдите вероятность того, что за 4 мин поступило: а) три вызова; б) менее трёх вызовов; в) не менее трёх вызовов.

Ответы

8.7. 3/16; 13/16. **8.8.** $\approx 0{,}97$. **8.9.** а) $\approx 0,74$; б) $\approx 0{,}95$; в) $\approx 0{,}05$. **8.10.** 11 или 12. **8.11.** У второй. **8.12.** $\approx 0{,}32$. **8.13.** а) $\approx 0{,}999$; б) $\approx 0{,}011$; в) $\approx 0{,}2565$; г) $\approx 0{,}744$; д) $\approx 0{,}871$. **8.14.** 21. **8.15.** а) 1 или 2; б) 2. **8.16.** 24 или 25. **8.17.** а) 0,328; б) 0,59; в) 0,00001; г) 0,00046; д) 0,999. **8.18.** а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62. **8.19.** 0,0231. **8.20.** а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056. **8.21.** 14. **8.22.** 22 или 23. **8.23.** 0,6827. **8.24.** а) 0,504; б) 0,398; в) 0,092; г) 0,006. **8.25.** а) 0,72; б) 0,26; в) 0,02; г) 0,98. **8.26.** 0,09. **8.27.** а) 0,0613; б) 0,9197; в) 0,019; г) 0,632. **8.28.** Не меньше 300. **8.29.** а) 0,135; б) 0,1525; в) 0,8475. **8.30.** $\approx 0,81$. **8.31.** а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5. **8.32.** ≈ 291. **8.33.** а) 0,612; б) 0,329; в) 0,056; г) 0,003; д) 0,997. **8.34.** а) 0,224; б) 0,1992; в) 0,5768; г) 0,95. **8.35.** а) 0,0256; б) 0,0123; в) 0,9877.

Случайные величины и законы их распределения

9. Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате опыта примет одно и только одно из возможных значений, заранее неизвестно какое именно. Случайные величины бывают дискретные и непрерывные. Дискретной называется случайная величина, которая принимает счетное либо конечное множество значений. Непрерывной называется случайная величина, множество значений которой непрерывно. Случайные величины будем обозначать через X, Y, Z и так далее. Их возможные значения — малыми буквами с индексами: x_1, x_2, $\dots$, x_n.

Пусть X — случайная величина, а x_1, x_2, $\dots$, x_n — ее возможные значения, каждое из которых она принимает с определенной вероятностью: $P(X = x_i) = p_i$, где $i = 1, 2, \dots n$. События $X = x_1$, $X = x_2$, $\dots$, $X = x_n$ — несовместные и составляют полную группу, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Составим таблицу:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Эта таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины. В этой таблице сумма вероятностей равна единице: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Дискретная случайная величина считается заданной, если известен ее ряд распределения. Ряд распределения является одним из способов задания закона распределения. Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной системе координат строят точки с координатами (x_i, p_i) и соединяют их отрезками прямых. Полученная фигура называется многоугольником распределения.

Функцией распределения или интегральной функцией распределения $F(x)$ называется вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Она обладает следующими свойствами:

- Значение интегральной функции распределения принадлежит отрезку $[0, 1]$, то есть $0 \leq F(x) \leq 1$.
- Функция $F(x)$ неубывающая. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq$ $\leq F(x_2)$.
- Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то:

  1) $F(x) = 0$ при $x < a$, 2) $F(x) = 1$ при $x > b$.
- Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку $[a, b]$, равна

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Если же все возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси OX, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Для характеристики непрерывной случайной величины вводится дифференциальная функция распределения или плотность распределения вероятностей. Плотностью распределения вероятностей случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x, x + \triangle x)$ к длине $\triangle x$ отрезка $[x, x + \triangle x]$, когда последняя стремится к нулю:

$$\rho(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{P\Big(x < X < x + \triangle x\Big)}{\triangle x}, \tag{1}$$

то есть

$$\rho(x) = F'(x). \tag{2}$$

График функции плотности распределения называется кривой распределения. Зная функцию $\rho(x)$, можно найти интегральную функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(x)\,dx. \tag{3}$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

- Плотность распределения $\rho(x)$ — неотрицательная функция, то есть $\rho(x) \geq 0$;
- В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения: $F'(x) = \rho(x)$;
- Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty; +\infty)$ от плотности распределения $\rho(x)$ равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

- Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), определяется формулой

$$P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} \rho(x)\,dx. \tag{5}$$

- Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то $\rho(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$.

9.1. Составьте:

1) закон распределения числа выпавших очков при бросании игральной кости;

2) функцию распределения этой случайной величины и изобразите ее графически.

Решение. Обозначим через X — число выпавших очков при бросании игральной кости. Эта случайная величина может принимать одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6 с одинаковой вероятностью $\frac{1}{6}$. Отсюда закон распределения ее будет иметь вид

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Составим функцию распределения случайной величины X. Известно,что функция распределения $F(x) = P(X < x)$, тогда:

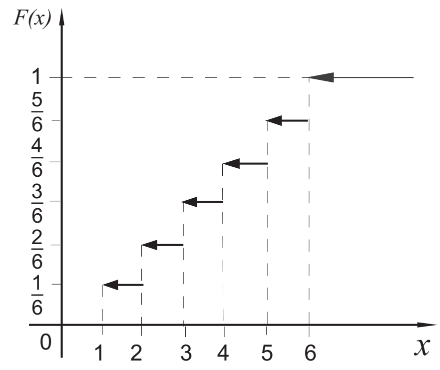
1) при $x \leq 1 \quad P(X < x) = 0$, так как ни одно значение x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ не является меньше x, то есть $F(x) = 0$;

2) при $1 < x \leq 2 \quad P(X < x) = \frac{1}{6}$, так как только значение $x_1 = 1$ будет меньше x, а событие $X = 1$ появляется с вероятностью, равной $\frac{1}{6}$, то есть $F(x) = \frac{1}{6}$;

3) при $2 < x \leq 3 \quad P(X < x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, так как значениями, меньшими x, будут $X = 1$ и $X = 2$, а так как случайная величина X может принять либо первое, либо второе значение, то вероятность того, что $X < x$ будет равна сумме вероятностей $p_1 = \frac{1}{6}$ и $p_2 = \frac{1}{6}$, то есть $F(x) = \frac{1}{3}$, и так далее. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 1, \\ \frac{1}{6} & \text{при} \quad 1 < x \leq 2, \\ \frac{2}{6} & \text{при} \quad 2 < x \leq 3, \\ \frac{3}{6} & \text{при} \quad 3 < x \leq 4, \\ \frac{4}{6} & \text{при} \quad 4 < x \leq 5, \\ \frac{5}{6} & \text{при} \quad 5 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.



Заметим, что при построении ряда распределения случайной величины могут быть использованы и комбинаторика, и действия над событиями. Задачи 9.2, 9.3, приведенные ниже, допускают решение двумя способами.

9.2. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, остальные — красные. Из этой урны извлекаются три шара. Постройте ряд распределения числа появившихся в выборке голубых шаров.

Решение. Пусть случайная величина X — число голубых шаров в выборке. Среди трех наудачу извлеченных шаров голубой может не появиться ни разу, один раз, дважды и три раза. Соответственно случайная величина X примет значения 0, 1, 2, 3. Найдем вероятность появления голубого шара в каждом случае.

Обозначим событие, состоящее в появлении голубого шара через “Г”, красного — через “К”.

$X = 0$. Если в выборке не оказалось ни одного голубого шара, следовательно, все три извлеченные шара красного цвета. Вероятность извлечь подряд три шара красного цвета (используя теорему об умножении вероятностей)

$$P(X=0) = P(\text{ККК}) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{35}.$$

$X = 1$. Событие A наступает в случае ГКК, КГК, ККГ. Тогда

$$P(X=1) = P(\text{ГКК}) + P(\text{КГК}) + P(\text{ККГ}) = 3\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{12}{35}.$$

$X = 2$. Событие A наступает в случае ГГК, ГКГ, КГГ. Тогда

$$P(X=2) = P(\text{ГГК}) + P(\text{ГКГ}) + P(\text{КГГ}) = 3\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{18}{35}.$$

$X = 3$. Событие A наступает в случае ГГГ. Тогда

$$P(X = 3) = P(\text{ГГГ}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

Составляем ряд:

X	0	1	2	3
P	1/35	12/35	18/35	4/35

Отметим, что $1/35 + 12/35 + 18/35 + 4/35 = 1$, то есть выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

9.3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Постройте ряд распределения числа стандартных извлеченных деталей.

Решение. Среди 2-х взятых наудачу деталей может не оказаться ни одной стандартной, могут появиться одна или две стандартные детали. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Найдем вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Следовательно, случайная величина X имеет закон распределения:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

9.4. В билете три вопроса. Вероятность того, что студент правильно ответит на один вопрос, равна $3/4$. Постройте ряд распределения числа правильных ответов.

Решение. Из трех вопросов билета студент может не ответить ни на один вопрос, дать ответ на один вопрос, на два, знать ответ на все три вопроса билета. Следовательно, случайная величина X может принимать значения: $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$. Вычислим соответствующие вероятности и составим таблицу. Обозначим через A_i — событие, состоящее в том, что студент знает ответ на вопрос, и $\overline{A_i}$ — студент не знает ответа на вопрос. Вероятность того, что студент не знает билета вообще:

$$P(X = 0) = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

Вероятность того, что студент знает какой-нибудь один вопрос из трех предложенных:

$$P(X = 1) = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 = \\ = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{64}.$$

Вероятность того, что студент знает каких-нибудь два вопроса из трех предложенных:

$$P(X = 2) = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 = \\ = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{27}{64}.$$

Вероятность того, что студент знает весь билет:

$$P(X = 3) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}.$$

Итак, ряд распределения вероятностей имеет вид:

X	0	1	2	3
P	1/64	9/64	27/64	27/64

При составлении ряда распределения случайной величины X здесь можно было использовать формулу Бернулли (13). Тогда по условию задачи $n = 3$, $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$. Искомые вероятности:

$$P(X = 0) = C_3^0 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \tfrac{1}{64};$$
$$P(X = 1) = C_3^1 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{64};$$
$$P(X = 2) = C_3^2 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^1 = \tfrac{27}{64};$$
$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^0 = \tfrac{27}{64}.$$

Случайная величина X — число правильных ответов — подчинена биномиальному распределению.

9.5. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(1, 2)$.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (5):

$$P(1 < X < 2) = \int\limits_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

9.6. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{x^2}{1+x^2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найдите ее плотность распределения.

Решение. Плотность распределения $\rho(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны соотношением (2). В соответствии с равенством (2) находим:

$$\begin{array}{l} \rho(x) = F'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x(1+x^2)-2x\cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \\ = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{при} \qquad x > 0; \\ \rho(x) = F'(x) = 0 \qquad \text{при} \qquad x \le 0. \end{array}$$

Итак, плотность распределения вероятностей данной случайной величины определяется функцией

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

9.7. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$\rho(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0,\\ a\cdot\sin x & \text{при} \quad 0\le x\le\pi,\\ 0 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Найдите:

1) параметр a;

2) интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) вероятность попадания случайной величины на участок $(\pi/2,\pi)$.

Постройте графики $F(x)$ и $\rho(x)$.

Решение. 1) Параметр a определяем, исходя из свойства плотности распределения вероятностей (4). Данная функция $\rho(x)$ отлична от нуля на отрезке $[0;\pi]$, поэтому

$$\int\limits_0^\pi a\cdot\sin x\,d\,x=1,$$

отсюда

$$a\cdot\left(-\cos x\Big|_0^\pi\right)=1, \qquad a=\frac{1}{2}.$$

2) Находим интегральную функцию распределения по формуле (3)

$$F(x)=\int\limits_0^x\rho(t)d\,t=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sin t\,d\,t=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos x.$$

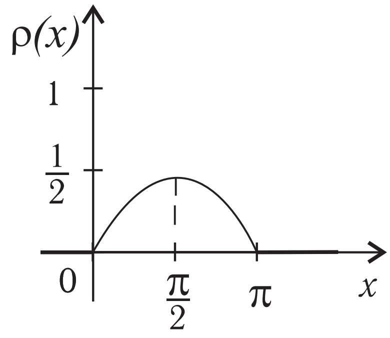
Согласно свойствам интегральной функции $F(x)$ имеем

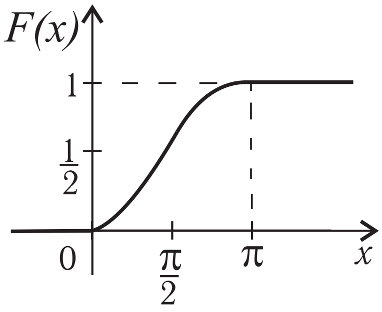
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos x & \text{при} \quad 0\le x\le\pi,\\ 1 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

3) Вычисляем вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный участок по формуле (5)

$$P(\pi/2<X<\pi)=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin x\,d\,x=\frac{1}{2}(1+\cos x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{2}.$$

Строим графики функций:





9.8. Найдите функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, плотность вероятности которой определена функцией

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0 \quad \text{и} \quad x > 2, \\ x & \text{при} \quad 0 < x \leq 1, \\ 2 - x & \text{при} \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Решение. Чтобы найти функцию распределения $F(x)$, воспользуемся формулой (3).

При $x \leq 0$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx = 0$.

При $0 < x \leq 1$ находим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \rho(t)dt + \int\limits_{0}^{x} \rho(t)dt =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} t dt = 0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

При $1 < x \leq 2$ находим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \rho(t)dt + \int\limits_{0}^{1} \rho(t)dt + \int\limits_{1}^{x} \rho(t)dt =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int\limits_{0}^{1} t dt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)dt = 0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x =$$
$$= \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 2$ получаем

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = F(2) + \int\limits_{2}^{x} 0 \cdot dt = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{при} \quad 0 < x \leq 1, \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{при} \quad 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

9.9. Составьте закон распределения суммы числа очков, выпавших при одновременном бросании двух игральных костей.

9.10. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Постройте ряд и многоугольник распределения числа очков, засчитанных стрелку.

9.11. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым 0,4. Составьте закон распределения числа попаданий в мишень и постройте многоугольник распределения.

9.12. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Составьте:

1) закон распределения числа израсходованных патронов;

2) функцию распределения числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 1/4.

9.13. Партия из 20 изделий содержит три бракованных. Наудачу берутся 4 изделия. Среди этих четырех изделий число бракованных является случайной величиной X. Найдите ряд распределения случайной величины.

9.14. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при} \quad -1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Постройте ее график и найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1)$.

9.15. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x) & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найдите: 1) плотность распределения $\rho(x)$; 2) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0, \pi/4)$. Постройте графики $F(x)$ и $\rho(x)$.

9.16. Случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ bx^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдите: 1) коэффициент b; 2) функцию $F(x)$; 3) вероятность попадания на участок $(0, 3)$. Постройте графики функций $F(x)$ и $\rho(x)$.

9.17. Контролер проверяет из партии не более 4 деталей. При обнаружении нестандартной детали проверка прекращается и партия задерживается. Составьте закон распределения случайной величины числа подвергшихся проверке деталей, если известно, что вероятность выхода нестандартной детали равна 0,1.

9.18. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составьте:

1) закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе всего 4 библиотеки и все они имеют нужную ему книгу;

2) функцию распределения этой случайной величины.

9.19. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$\rho(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}, \quad (-\infty < X < +\infty).$$

Определите: 1) коэффициент A; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) вероятность того, что случайная величина X примет значение не меньше 1.

9.20. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -\pi/2, \\ a \cdot \cos x & \text{при} \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Найдите: 1) параметр a; 2) функцию $F(x)$; 3) вероятность попадания величины X на участок $(0, \pi/4)$.

Ответы

9.9.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

9.10.

X	0	5	10	15
P	0,216	0,432	0,288	0,064

9.11.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

9.12. 1)

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$

$$2)\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \ge 1, \\ \frac{1}{4} & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ \frac{7}{16} & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ \frac{37}{64} & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

9.13.

X	0	1	2	3
P	$\frac{C_{17}^4 \cdot C_3^0}{C_{20}^4}$	$\frac{C_{17}^3 \cdot C_3^1}{C_{20}^4}$	$\frac{C_{17}^2 \cdot C_3^2}{C_{20}^4}$	$\frac{C_{17}^1 \cdot C_3^3}{C_{20}^4}$

9.14. $P(0 < X < 1) = 1/3$.

9.15. 1)$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \sin x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi, \end{cases}$

2)$P(0 < X < \pi/4) \simeq 0{,}15$. **9.16.** 1) $b = 3/8$;

2)$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1/8 \cdot x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$ 3) $P(0 < X < 3) = 1$.

9.17.

X	1	2	3	4
P	0,1	0,09	0,081	0,729

9.18. 1)

X	1	2	3	4
P	0,3	0,21	0,147	0,343

2)$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0,3 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0,51 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 0,657 & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$ **9.19.** 1) $A = 2/\pi$;

2)$F(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^x$; 3)$P(X \ge 1) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e$.

9.20. 1) $a = 1/2$;

2) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le \pi/2, \\ 1/2 \cdot (1 + \sin x) & \text{при} \quad -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi/2, \end{cases}$

3) $P(0 < X < \pi/4) \simeq \sqrt{2}/4$.

10. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности принятия этих значений. Обозначается математическое ожидание символом $M[X]$. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин вычисляются соответственно по формулам:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{6}$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,d\,x, \tag{7}$$

где $\rho(x)$ — плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

- Математическое ожидание постоянной величины равно ей самой: $M[C] = C, \quad C = const.$
- $M[C \cdot X] = C \cdot M[X], \quad C = const.$
- Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий, то есть $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$.
- Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, то есть $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$. (Пусть даны две случайные величины X и Y. Рассмотрим два события $A(X < x)$ и $B(Y < y)$. Случайные величины X и Y называются независимыми, если события A и B независимы, и зависимыми, если эти события зависимы. При этом закон распределения одной из них не зависит от того, какое из возможных значений приняла другая величина).

Дисперсия. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D[X] = M\Big[(X - M[X])^2\Big]. \tag{8}$$

При расчетах обычно пользуются формулой:

$$D[X] = M\Big[X^2\Big] - \Big[M[X]\Big]^2, \tag{9}$$

то есть дисперсия равна математическому ожиданию квадрата случайной величины без квадрата ее математического ожидания.

Величина $\sigma(x) = \sqrt{D[X]}$ называется средним квадратическим отклонением случайной величины.

Дисперсия обладает следующими свойствами:

- Дисперсия постоянной величины равна нулю, то есть $D[C] = 0$, $C = const$.
- Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$, где $C = const$.
- Дисперсия алгебраической суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий: $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$.

Моменты, асимметрия и эксцесс.

Кроме характеристик положения — средних значений случайной величины, — употребляются еще ряд характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения. В качестве таких характеристик чаще всего применяются так называемые моменты двух видов: начальные и центральные.

Начальным моментом k-го порядка m_k случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой случайной величины

$$m_k = M[X^k].$$

Для дискретной случайной величины:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i.$$

Для непрерывной случайной величины:

$$m_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot \rho(x)\, dx.$$

Очевидно, математическое ожидание случайной величины представляет собой первый начальный момент : $M[X] = m_1$.

Центральным моментом k-го порядка μ_k случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$\mu_k = M\left[(X - M[X])^k\right].$$

Для дискретной случайной величины:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^k \cdot p_i.$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^k \cdot \rho(x)\, dx.$$

Очевидно, для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю, а рассмотренная ранее дисперсия является центральным моментом второго порядка

$$D[X] = \mu_2.$$

Между начальными и центральными моментами различных порядков существует следующая связь:

$$\mu_1 = 0; \qquad \mu_2 = m_2 - m_1^2,$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3,$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4.$$

Моменты более высоких порядков применяются редко.

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии (или "скошенности" распределения). Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все моменты нечетного порядка (если они существуют) равны нулю и асимметрия $S = 0$. Естественно поэтому в качестве характеристики асимметрии распределения выбрать какой-либо из нечетных моментов, например простейший из них — третий. Асимметрия вычисляется по формуле

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{10}$$

Четвертый центральный момент служит для характеристики так называемой "крутости", то есть островершинности или плосковершинности распределения. Числовая величина — эксцесс — описывает эти свойства распределения. Эксцессом случайной величины X называется число

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{11}$$

Число 3 вычитается из отношения $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ потому, что для весьма важного и широко распространенного в природе нормального закона распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Таким образом, для нормального распределения эксцесс равен нулю; кривые, более островершинные по сравнению с нормальной, обладают положительным эксцессом; кривые более плосковершинные — отрицательным эксцессом.

10.1. Производится один выстрел по мишени; вероятность попадания равна p. Определите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа попаданий.

Решение. Обозначим X — число попаданий. Ряд распределения величины X имеет вид:

X	0	1
P	q	p

где $q = 1 - p$ — вероятность промаха. По формуле (6) находим математическое ожидание величины X:

$$M[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Дисперсию числа попаданий определяем по формуле (9)

$$D[X] = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = pq,$$

откуда $\sigma[X] = \sqrt{pq}$.

10.2. Дан закон распределения случайной величины X

X	0	1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, асимметрию, эксцесс этой случайной величины.

Решение. Найдем математическое ожидание данной случайной величины

$$M[X] = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,1 = 1,4.$$

Дисперсию вычислим по формуле (9). Составим закон распределения квадрата случайной величины X

X^2	0	1	4	9
P	0,2	0,3	0,4	0,1

и найдем $M[X^2] = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,1 = 2,8$. Тогда $D[X] = 2{,}8 - 1{,}96 = 0{,}84$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \approx 0{,}92$.

Асимметрию находим по формуле (10). Для ее определения сначала составляем закон распределения случайной величины

$X - M[X]$	-1,4	-0,4	0,6	1,6
P	0,2	0,3	0,4	0,1

затем — закон распределения случайной величины

$\Big[X - M[X]\Big]^3$	-2,744	0,064	0,216	4,096
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Теперь вычислим центральный момент третьего порядка

$$\mu_3 = M\Big[X - M[X]\Big]^3 = -2,744 \cdot 0,2 - 0,064 \cdot 0,3 + \\ +0,216 \cdot 0,4 + 4,096 \cdot 0,1 \approx -0,072.$$

И, наконец, зная, что $\sigma^3 = (0{,}92)^3$, находим

$$S = \frac{-0,072}{(0,92)^3} \simeq -0,092.$$

Эксцесс вычислим по формуле (11). Для его определения составим закон распределения случайной величины $\Big[X - M[X]\Big]^4$

$\Big[X - M[X]\Big]^4$	3,842	0,0256	0,1296	6,554
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Найдем

$$\mu_4 = M\Big[X - M[X]\Big]^4 = 3,842 \cdot 0,2 - 0,0256 \cdot 0,3 + \\ +0,1296 \cdot 0,4 + 6,554 \cdot 0,1 \approx 1,48332.$$

Зная $\sigma^4 = (0{,}92)^4 = 0,7157$, можно подсчитать

$$E_x = \frac{1,48322}{0,7157} - 3 \approx -0,926.$$

10.3. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью: $\rho(x) = A \cdot e^{-|x|}$. Найдите коэффициент A. Определите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, асимметрию, эксцесс величины X.

Решение. Для определения A воспользуемся свойством плотности распределения (4):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho\,(x)\,dx = 2A \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1; \qquad \text{отсюда} \quad A = \frac{1}{2}.$$

Вычисляем математическое ожидание величины X:

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\,x \cdot e^{-|x|}\,dx = 0.$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение равны, соответственно:

$$D[X] \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{-x}\,dx = 2;$$

$$\begin{aligned}\sigma[X] &= \sqrt{D[X]} = \sqrt{2}.\\ \mu_3 &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-|x|}\,dx = 0, \qquad S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0.\end{aligned}$$

Для вычисления эксцесса находим μ_4:

$$\mu_4 = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2}x^4 e^{-x}\,dx = 24, \qquad \text{откуда} \quad E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 3.$$

10.4. Составьте закон распределения случайной величины $Z = X + Y$, если независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	0	1	2
P	0,1	0,2	0,7

Y	1	3
P	0,6	0,4

Проверьте справедливость теоремы о математическом ожидании и дисперсии суммы независимых случайных величин.

Решение. Значения величины Z равны возможным суммам $x_i + y_j$ значений величин X и Y. Вероятности этих сумм определяются по теореме умножения независимых событий, а именно: $P(x_i) \cdot P(y_j)$

$Z = X + Y$	$P(Z) = P(X) \cdot P(Y)$
$0 + 1 = 1$	$0,1 \cdot 0,6 = 0,06$
$0 + 3 = 3$	$0,1 \cdot 0,4 = 0,04$
$1 + 1 = 2$	$0,2 \cdot 0,6 = 0,12$
$1 + 3 = 4$	$0,2 \cdot 0,4 = 0,08$
$2 + 1 = 3$	$0,7 \cdot 0,6 = 0,42$
$2 + 3 = 5$	$0,7 \cdot 0,4 = 0,28$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{6} P(z_k) = 1.$$

Применив теорему сложения для равных значений Z, получим

$$P(z = 3) = P\left[(0+3)\text{или } (2+1)\right] = 0,04 + 0,42 = 0,46.$$

Закон распределения Z:

Z	1	2	3	4	5
P	0,06	0,12	0,46	0,08	0,28

Математическое ожидание $M[X]$ случайной величины X

$$M[X] = \sum x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,7 = 1,6.$$

Аналогично вычисляются $M[Y] = 1{,}8$; $M[Z] = 3{,}4$. Так как $3{,}4 = 1{,}6 + 1{,}8$, убеждаемся, что $M[Z] = M[X+Y] = M[X] + M[Y]$.

Для нахождения дисперсии случайной величины X составим вспомогательную таблицу:

X^2	0	1	4
P(X^2)	0,1	0,2	0,7

Далее определяем: $M[X^2] = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,7 = 3.$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = 3 - (1,6)^2 = 0,44.$$

Аналогично вычисляются $D[Y] = 0{,}96$; $D[Z] = 1{,}40$. Так как $1{,}40 = 0{,}44 + 0{,}96$, убеждаемся, что $D[Z] = D[X+Y] = D[X] + D[Y]$.

Задачи для самостоятельного решения

10.5. Заработная плата рабочих цеха распределяется следующим образом:

з/плата	75	85	95	105	115	125
число рабочих	10	25	40	50	50	25

Найдите математическое ожидание заработной платы рабочих.

10.6. Найдите закон распределения случайной дискретной величины X, которая может принимать только два значения: x_1 с вероятностью p_1 и x_2 с вероятностью p_2, причем $x_1 < x_2$, если $M[X] = 1{,}9$, $D[X] = 0{,}09$, $p_1 = 0{,}1$.

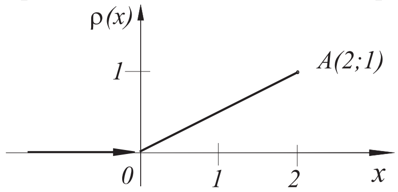
10.7. Завод получает сырье от трех поставщиков (от каждого по отдельности по одной автомашине). Вероятность прибытия автомашины от первого поставщика равна 0,2, от второго — 0,5, от третьего — 0,1. Составьте закон распределения случайной величины — числа прибывших машин; вычислите математическое ожидание, асимметрию и эксцесс этой случайной величины.

10.8. Плотность распределения случайной величины X записывается так

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ a\sin x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Чему равно a? Вычислите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

10.9. Случайная величина X подчинена закону распределения, плотность которого задана графически.



Запишите выражение плотности распределения. Найдите математическое ожидание, дисперсию, асимметрию.

10.10. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при} \quad -1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения $\rho(x)$, математическое ожидание, дисперсию, асимметрию, эксцесс, постройте графики функций $F(x)$ и $\rho(x)$.

10.11. Проводятся испытания трех приборов. Вероятность, что приборы выдержат испытание, соответственно равна 0,9, 0,8, 0,7. Случайная величина X — число приборов, выдержавших испытание. Найдите:

а) ряд распределения случайной величины X;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание; г) дисперсию;

д) $P(1,3 < X < 2,4)$.

10.12. Дана функция случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq -1, \\ Ax^3 + B & \text{при} \quad -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найдите: а) постоянные A и B; б) плотность распределения $\rho(x)$; в) $M[X]$; г)$D[X]$; д) $P(0 < X < 0,5)$; е) постройте графики функций $F(x)$ и $\rho(x)$.

10.13. Закон распределения случайной величины X дан в таблице

X	-1	0	2
P	0,6	0,3	0,1

1) Составьте законы распределения случайных величин $Y = 2X$, $Z = X + X$ и убедитесь, что это различные случайные величины, то есть что $X + X \neq 2X$;

2) Вычислите математические ожидания случайных величин Y и Z;

3) Найдите дисперсии случайных величин Y и Z. Можно ли для $Z = X + X$ применить теорему о дисперсии суммы:

$$\sigma_{u+v}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2?$$

10.14. Случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	0	1	4
P	0,25	0,5	0,25

Запишите ряды распределения случайных величин $Y = X^2$ и $Z = X \cdot X$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

10.15. Два стрелка стреляют по мишени. Случайные величины X и Y числа выбиваемых каждым из них очков даются следующими таблицами:

X	2	3	4
P	0,4	0,5	0,1

Y	3	4	5
P	0,3	0,5	0,2

Составьте закон распределения суммарного числа очков, выбиваемых обоими стрелками $Z = X + Y$, и вычислите $M[Z]$ и $D[Z]$.

10.16. Законы распределения независимых случайных величин X и Y характеризуются следующими таблицами:

X	0	2	4
P	0,1	0,7	0,2

Y	3	5
P	0,4	0,6

Составьте закон распределения случайной величины $Z = X \cdot Y$ и проверьте свойство математического ожидания $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$.

10.17. Две независимые случайные величины X и Y характеризуются следующими рядами распределения:

X	2	4	6
P	0,2	0,5	0,3

Y	2	3	4
P	0,1	0,6	0,3

Составьте закон распределения:

1) случайной величины $Z = X \cdot Y$;

2) случайной величины $T = X + Y$;

3) случайной величины $Q = 3 \cdot (X + Y^2)$.

Ответы

10.5. 104. **10.6.**

X	1	2
P	0,1	0,9

10.7.

X	0	1	2	3
P	0,36	0,49	0,14	0,01

$M[X] = 0,80, \quad S = 0,475, \quad E_x = -0,31.$

10.8. $a = 1/2, \quad M[X] = \pi/2, \quad D[X] = \pi^2/4 - 2.$

10.9. $\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases} \quad M[X] = \frac{4}{3}, \quad D[X] = \frac{2}{9},$

$S = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **10.10.** $M[X] = 1/2, \quad D[X] = 3/4, \quad S = 0,$ $E_x = -1{,}2$. **10.11.** $M[X] = 2{,}4; \quad D[X] = 0{,}46; \quad P = 0{,}398.$

10.12. $A = B = 1/2; \quad M[X] = 0; \quad D[X] = 0{,}6; \quad P = 1/16.$

10.13. $M[X + X] = M[Z] = -0{,}8; \quad D[2X] = 3{,}36; D[X + X] = 1{,}68.$ **10.14.** $M[X^2] = 4{,}5; \quad M[X \cdot X] = 2{,}25.$

10.15.

Z	$2+3$	$2+4$	$2+5$	$3+3$	$3+4$
P	$0,4 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,5$	$0,4 \cdot 0,2$	$0,5 \cdot 0,3$	$0,5 \cdot 0,5$

$3+5$	$4+3$	$4+4$	$4+5$
$0,5 \cdot 0,2$	$0,1 \cdot 0,3$	$0,1 \cdot 0,5$	$0,1 \cdot 0,2$

После выполнения указанных действий имеем:

Z	5	6	7	6	7	8	7	8	9
P	0,12	0,20	0,08	0,15	0,25	0,10	0,03	0,05	0,02

И в результате:

Z	5	6	7	8	9
P	0,12	0,35	0,36	0,15	0,02

$M[Z] = 6{,}6, \quad D[Z] = 0{,}9.$

10.16. Составляем закон распределения случайной величины:

$X \cdot Y$	$0 \cdot 3$	$0 \cdot 5$	$2 \cdot 5$	$4 \cdot 3$	$4 \cdot 5$
P	$0,1 \cdot 0,4$	$0,1 \cdot 0,6$	$0,7 \cdot 0,4$	$0,2 \cdot 0,4$	$0,2 \cdot 0,6$

И в результате получим:

$X \cdot Y$	0	6	10	12	20
P	0,1	0,28	0,42	0,08	0,12

Вычисляем: $M[X \cdot Y] = 9{,}24, \quad M[X] = 2{,}2, \quad M[Y] = 4{,}2,$
$M[X] \cdot M[Y] = 2{,}2 \cdot 4{,}2 = 9{,}24.$

10.17.

Z	4	6	8	12	16	18	24
P	0,02	0,12	0,11	0,33	0,15	0,18	0,09

T	4	5	6	7	8	9	10
P	0,02	0,12	0,11	0,30	0,18	0,18	0,09

Q	18	24	30	33	39	45	54	60	66
P	0,02	0,05	0,03	0,12	0,30	0,18	0,06	0,15	0,09

11. Закон равномерного распределения. Нормальный и показательный законы распределения

Закон равномерного распределения вероятностей

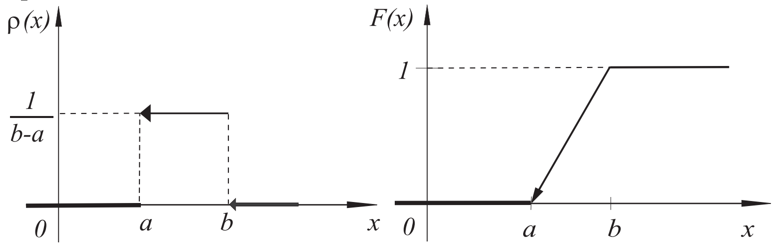
Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале (a, b), которому принадлежат всевозможные значения случайной величины, плотность вероятностей принимает постоянное значение, то есть имеет вид

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Функция распределения вероятностей записывается так:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 1 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Плотность равномерного распределения и функция распределения имеют вид:



Основные числовые характеристики закона равномерного распределения вероятностей: математическое ожидание

$$M[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2};$$

дисперсия

$$D[X] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

11.1. Поезда метрополитена идут с интервалом в две минуты. Пассажир выходит на платформу в какой-то момент времени. Время, в течение которого он будет ожидать поезд, представляет случайную величину, имеющую равномерное распределение. Определите дифференциальную и интегральную функции распределения этой случайной величины, ее математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале от 1 до 2.

Решение. Пусть случайная величина X — время в течение которого пассажир будет ожидать поезда. Возможные значения этой случайной величины заключены в промежутке $[0, 2]$. По определению равномерного распределения плотность распределения равна нулю всюду, кроме промежутка $[0, 2]$, где она сохраняет постоянное значение, обозначим его через A. Найдем A. Известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

В данном случае

$$\int_{0}^{2} A\,dx = 1, \text{ откуда } A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей примет вид:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при} \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Зная плотность распределения, найдем функцию распределения по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)\,dt.$$

При $x < 0 \quad F(x) = 0$, так как $\rho(x) = 0$. При $0 \leq x \leq 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \rho(t)\,dt + \int_{0}^{x} \rho(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\,dt = \frac{x}{2}.$$

При $x > 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \rho(t)\,dt + \int_{0}^{2} \rho(t)\,dt + \int_{2}^{x} \rho(t)\,dt = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\,dt = 1.$$

Следовательно, интегральная функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины находится в центре этого интервала, то есть $M[X] = (a + b)/2 = 1$. Дисперсия равномерно распределенной случайной величины равна $D[X] = (b-a)^2/12 = 1/3$. Вероятность попадания случайной величины X на интервал $(1, 2)$: $P\,(1 < X < 2) = 1/2$.

Закон нормального распределения

Плотность распределения вероятностей имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (12)$$

где a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α, β) вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (13)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, определяемая равенством

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz.$$

Значения этой функции приведены в таблице приложения 2. Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превзойдет некоторого положительного числа ε, то есть $|X - a| < \varepsilon$, определяется так:

$$P\,(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

11.2. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a = 2$, $\sigma = 4$. Найдите выражение для плотности распределения и функции распределения этой случайной величины.

Решение. Для заданных в условии задачи параметров плотность распределения (12) имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}.$$

Найдем функцию распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)\,dt = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-2)^2}{32}}\,dt.$$

В последнем интеграле, делая подстановку $(t-2)/4 = u$, $dt = 4\,du$ и меняя пределы интегрирования, приводим его к виду

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-2}{4}} e^{-u^2/2}\,du = \Phi\left(\frac{x-2}{4}\right).$$

11.3. Плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{c}}.$$

Найдите параметр c; вероятность попадания случайной величины в интервалы $(-2;0)$; $(1;1{,}5)$.

Решение.

Известно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1, \quad \text{то есть} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2)^2}{c}}\,dx = 1.$$

Введем новую переменную $t = (x-2)/\sqrt{c}$, тогда $dx = \sqrt{c}\,dt$. Учитывая, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi},$$

получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{c}\,dt = 1, \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1, \quad c = 2.$$

Итак, параметр $c = 2$. Этот же результат можно получить, сравнивая вид распределения $\rho(x)$ с видом нормального распределения (12).

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервалы $(-2;0)$; $(1;1,5)$. Для этого воспользуемся формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\Big(\frac{\beta - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{\alpha - a}{\sigma}\Big).$$

Здесь $a = 2$ — математическое ожидание случайной величины, σ — среднее квадратическое отклонение. Тогда

$$\begin{aligned} P(-2 < x < 0) &= \Phi\Big(\frac{-2}{1}\Big) - \Phi\Big(\frac{-2-2}{1}\Big) = \\ &= \Phi(4) - \Phi(2) \approx 0{,}023. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 < x < 1,5) &= \Phi\Big(\frac{1,5-2}{1}\Big) - \Phi\Big(\frac{1-2}{1}\Big) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(0,5) \approx 0{,}152. \end{aligned}$$

11.4. В период учений на полосу укреплений “противника” было сброшено 100 серий бомб. При сбрасывании одной такой серии математическое ожидание числа попаданий равно 2, а среднее квадратическое отклонение числа попаданий равно 1,5. Найдите вероятность того, что в полосу укреплений попадет от 180 до 220 бомб.

Решение. Представим общее число S_{100} попаданий в 100 сериях как сумму чисел попаданий бомб в отдельных сериях, то есть

$$S_{100} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{100},$$

где x_i $(i = 1, 2, \ldots, 100)$ — случайное число попаданий в i-серии. Величины x_i одинаково распределены и независимы. Считая $n = 100$ достаточным для применения формулы (13), получим

$$P(180 < S_{100} < 220) \approx \Phi(\tfrac{220-200}{\sqrt{225}}) - \Phi(\tfrac{180-200}{\sqrt{225}}) \approx$$
$$\approx 2\Phi(1{,}33) \approx 0{,}816.$$

Здесь учтено, что $M[S_{100}] = \sum\limits_{i=1}^{100} M[x_i] = 200, \quad D[S_{100}] = $ $= \sum\limits_{i=1}^{100} D[x_i] = \sum\limits_{i=1}^{100} \sigma_i^2 = 225$. Итак, с вероятностью, приблизительно равной 0,816, можно утверждать, что общее число попаданий бомб в полосу укреплений находится в пределах от 180 до 220.

11.5. Срок службы некоторого прибора представляет собой непрерывную случайную величину X, подчиненную нормальному закону распределения вероятностей с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным трем годам. Определите надежность (вероятность безотказной работы) прибора за промежуток времени от 10 до 20 лет.

Решение. Согласно условию задачи, $M[X] = 15$, $\sigma[X] = 3$, $\alpha = 10$, $\beta = 20$. Требуется отыскать $P(\alpha < X < \beta)$. Применяя формулу (13) и используя таблицу значений функции Лапласа, получим

$$\begin{aligned} P(10 < X < 20) &= \Phi\left(\frac{20-15}{3}\right) - \Phi\left(\frac{10-15}{3}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}9050. \end{aligned}$$

11.6. Пусть масса пойманной рыбы является непрерывной нормально распределенной случайной величиной X с параметрами $M[X] = 375$ г, $\sigma[X] = 25$ г. Найдите вероятность того, что масса одной пойманной рыбы будет находиться:

а) в пределах от 300 г до 400 г; б) не более 450 г;

в) больше 300 г.

Решение. Воспользуемся формулой (13), полагая в ней:

а) $a = 375$, $\sigma = 25$, $\alpha = 300$, $\beta = 425$. Получаем

$$P(300 < X < 425) = \Phi\left(\frac{425-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3) \approx 0,477250 + 0,498650 \approx 0{,}9759.$$

б) Находим

$$P(X < 425) = \Phi\left(\frac{450-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{0-375}{25}\right) =$$
$$= \Phi(3) - \Phi(-15) = \Phi(3) + \Phi(15) \approx 0,49865 + 0,5 \approx 0{,}9987.$$

в) Получаем

$$P(X > 300) = P(300 < X < +\infty) =$$
$$= \Phi\left(\frac{+\infty-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) =$$
$$= \Phi(+\infty) - \Phi(-3) = \Phi(+\infty) + \Phi(3) \approx 0,5 + 0,49865 \approx 0{,}9759.$$

Показательное распределение

Случайная величина T, заданная функцией распределения

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t > 0, \end{cases}$$

называется показательно (экспоненциально) распределенной. Здесь λ — параметр показательного распределения. Плотность показательного распределения случайной величины имеет вид

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики случайной величины T: $M[T] = \frac{1}{\lambda}$, $D[T] = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma[T] = \frac{1}{\lambda}$. Из этих формул видно, что особенность показательного распределения состоит в том, что $M[T] = \sigma[T]$.

Если случайная величина T — время безотказной работы элемента, то $\frac{1}{\lambda}$ — среднее время безотказной работы; $P(T > t)$ — вероятность безотказной работы элемента в течение времени t: $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Вероятность отказа $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

11.7. Найдите вероятность попадания в интервал (α, β) значений случайной величины X, распределенной по показательному закону.

Решение. Воспользуемся функцией распределения $F(x)$ и формулой
$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$
Так как $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x > 0$ и $F(x) = 0$ при $x \le 0$, $F(\beta) = 1 - e^{-\lambda\beta}$, $F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda\alpha}$, то
$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = (1 - e^{-\lambda\beta}) - (1 - e^{-\lambda\alpha}),$$
$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

11.8. Время восстановления (устранения повреждения) канала связи имеет показательное распределение, при этом среднее время восстановления равняется 10 мин. Найдите вероятность следующих событий: а) канал войдет в строй не позже чем через пять минут после возникновения повреждения;
б) время восстановления будет в пределах от 5 до 15 мин.

Решение. Пусть случайная величина T — время восстановления канала связи. Тогда среднее время восстановления $\bar{t} = 1/\lambda = 10$, отсюда $\lambda = 0{,}1$. В условии а) требуется определить $P(0 \le t < 5)$, а в условии б) — $P(5 \le t \le 15)$. Для вычисления вероятностей этих событий воспользуемся формулой
$$P(t_1 \le T \le t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho(t)\, dt,$$
где $\rho(t)$ — плотность показательного распределения. Так как $\lambda = 0{,}1$, то $\rho(t) = 0,1 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$. Итак,
$$P(0 \le t < 5) = \int\limits_0^5 0,1 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}\, dt = -\, e^{-0{,}1\cdot t}\Big|_0^5 =$$
$$= 1 - e^{-0{,}5} \approx 0,394;$$
$$P(5 \le t \le 15) = \int\limits_5^{15} 0,1 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}\, dt = -\, e^{-0{,}1\cdot t}\Big|_5^{15} =$$
$$= e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5} \approx 0,606 - 0,224 \approx 0,382.$$

Задачи для самостоятельного решения

11.9. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

11.10. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $(-2; 2)$. Найдите плотность и функцию распределения, постройте их графики.

11.11. Определите начальные и центральные моменты третьего и четвертого порядков для непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно на промежутке $[-1; 1]$.

11.12. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2; 8)$.

11.13. Плотность распределения случайной величины X задана выражением

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-k(x-2)^2}.$$

Найдите коэффициент k.

11.14. Плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,5} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{c}}.$$

Найдите: параметр c; вероятность попадания случайной величины в интервалы $(0; 1{,}5)$, $(-1; 2)$.

11.15. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, подчиненной нормальному закону, задана функцией

$$\rho(x) = A \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$

Найдите: а) $P(2 < X \leq 5)$; б) $M[X]$; в) $D[X]$; г) $\sigma[X]$.

11.16. Полученная в результате физического эксперимента непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение с числовыми характеристиками $M[X] = -2$, $\sigma[X] = 1$. Напишите формулу для нахождения плотности распределения вероятностей X, а также укажите промежуток, в который X попадет с вероятностью 0,9973 (то есть практически достоверно).

11.17. Известно, что детали, выпускаемые цехом, по своим линейным размерам распределяются по нормальному закону со средним значением $\overline{x} = 20$ см и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}04$. Найдите вероятность того, что взятые на контрольную выборку детали будут иметь размеры, заключенные в пределах от
19 см до 20,7 см.

11.18. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание равно 5 см, а дисперсия — 0,81. Найдите вероятность того, что диаметр выбранной наудачу детали:
а) заключен в пределах от 4 до 7 см; б) отличается от математического ожидания не более чем на 2 см. Укажите пределы, в которых может находиться диаметр детали, чтобы вероятность невыхода за эти пределы была равна 0,95.

11.19. Коробка с мармеладом упаковывается автоматически. В среднем масса одной коробки равна 1,06 кг. Найдите среднее квадратическое отклонение, если 5% коробок имеют массу меньше 1 кг (предполагается, что массы коробок распределены по нормальному закону).

11.20. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактическая же длина изготовленных деталей колеблется от 40 до 60 мм. Найдите вероятность того, что длина выбранной наудачу детали: а) не более 45 мм; б) не менее 52 мм.

11.21. Размер деталей подчинен нормальному закону распределения со средним арифметическим 15 мм и дисперсией 0,25. Определите ожидаемый процент брака, если допустимые размеры находятся в пределах от 14 до 17 мм.

11.22. Размер диаметра втулок, изготавливаемых цехом, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a = 2{,}5$ см и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}0001$. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,997?

11.23. Бомбардировщик ВВС США сбросил бомбы на мост длиною 60 м и шириною 12 м. Рассеяние попаданий происходит по нормальному закону с дисперсией, равной 225 по длине и 36 по ширине, средняя точка попадания — центр моста. Рассеяние по длине и ширине независимы. Найдите вероятность попадания в мост при сбрасывании одной бомбы.

11.24. Время T между сбоями вычислительной машины распределено показательно с параметром λ. Определите, каким должно быть λ, чтобы вероятность безотказной работы вычислительной машины в течение 6 часов не превышала 0,0497.

11.25. Напишите плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 6$.

11.26. Время T безотказной работы фотоэлемента — случайная величина, распределенная по показательному закону

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 0{,}02 \cdot e^{-0{,}02t} & \text{при} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что фотоэлемент проработает без отказа в течение 100 часов, запишите интегральную функцию распределения. Определите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

11.27. Непрерывная случайная величина T распределена по показательному закону $\rho(t) = 5 \cdot e^{-5t}$ при $t \geq 0$;
$\rho(t) = 0$ при $t < 0$. Найдите математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию T.

Ответы

11.9. 3/5. **11.10.** $\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ 1/4 & \text{при} \quad -2 < x < 2, \\ 0 & \text{при} \quad x \geq 2. \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ (x+2)/4 & \text{при} \quad -2 < x < 2, \\ 1 & \text{при} \quad x \geq 2. \end{cases}$ **11.11.** $\nu_3 = \mu_3 = 0$; $\nu_4 = \mu_4 = 0{,}2$. **11.12.** $M[X] = 5$, $D[X] = 3$, $\sigma[X] = \sqrt{3}$.
11.13. $k = 1$. **11.14.** $c = 0{,}5$, $P(0 < X < 1{,}5) \approx 0{,}82$, $P(-1 < X < 2) \approx 0{,}98$. **11.15.** а) $\approx 0{,}3749$; б) 4; в) 9; г) 3.
11.16. $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}$; $(-5;1)$. **11.17.** 0,68269.
11.18. а) $\approx 0{,}8504$; б) $\approx 0{,}9722$; $(3{,}2; 6{,}8)$ см.
11.19. $\approx 0{,}0365$ кг. **11.20.** Из равенства $P(40 < X < 60) = 1$ предварительно найдите $\sigma[X]$. Тогда: а) $P(40 < X \leq 45) \approx$ $\approx 0{,}0228$; б) $P(50 \leq X < 60) \approx 0{,}2119$. **11.21.** 2,3%.
11.22. $2{,}47 < X < 2{,}53$. **11.23.** 0,6515. **11.24.** $\lambda > 0{,}5$.
11.25. $\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 6 \cdot e^{-6 \cdot t} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$

$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 1 - e^{-6 \cdot t} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$

11.26. $P(T > 100) = 0,135$; $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 1 - e^{-0{,}02 \cdot t} & \text{при} \quad t > 0, \end{cases}$
$M[T] = 50$ ч.; $D[T] = 2500$ ч. **11.27.** $\lambda = 5$, $M[T] = 1/5$, $\sigma[T] = 1/5$, $D[T] = 1/25$.

12. Характеристические функции

Характеристической функцией случайной величины X называется функция

$$g(t) = M\left[e^{itX}\right],$$

где i — мнимая единица. Функция $g(t)$ представляет собой математическое ожидание некоторой комплексной случайной величины $U = e^{itX}$, функционально связанной с величиной X. При решении многих задач теории вероятностей оказывается удобнее пользоваться характеристическими функциями, чем законами распределения. Зная закон распределения случайной величины X, легко найти ее характеристическую функцию.

Если X — дискретная случайная величина с рядом распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

то ее характеристическая функция

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot e^{itx_k}. \tag{14}$$

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $\rho(x)$, то ее характеристическая функция

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \rho(x)\, dx.$$

Отметим некоторые свойства характеристической функции:

- Для непрерывной случайной величины плотность вероятностей выражается через характеристическую функцию как прямое преобразование Фурье

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-itx}\, dt.$$

- Если случайные величины X и Y связаны соотношением $Y = aX + b$, где a, b постоянные числа, то их характеристические функции $g_x(t)$ и $g_y(t)$ связаны соотношением
$$g_y(t) = g_x(at) \cdot e^{itb}.$$

- Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций.

- Если случайная величина X имеет начальный момент n-го порядка, то характеристическая функция величины X дифференцируема n раз и при $k \le n$

$$m_k = M[X^k] = \frac{1}{i^k} g^{(k)}(0) = (-i)^k g^{(k)}(0).$$

Начальные моменты случайной величины могут быть найдены по формуле

$$m_k = \frac{1}{i^k} \cdot C_k \cdot k!,$$

где C_k — коэффициент при t^k ряда Маклорена характеристической функции случайной величины.

Для упрощения вычислений часто рассматривают также функцию

$$\varphi(t) = \ln g(t),$$

называемую кумулянтной функцией. Математическое ожидание и дисперсия просто выражаются через производные кумулянтной функции:

$$M[X] = -i\varphi'(0), \qquad D[X] = -\varphi''(0).$$

12.1. Найдите характеристическую функцию числа попаданий при одном выстреле, если вероятность попадания при одном выстреле равна p.

Решение. Случайная величина X — число попаданий при одном выстреле есть дискретная случайная величина и ее возможные значения 0 и 1. Построим ряд распределения

X	0	1
P	1-p	p

По формуле (14) имеем:

$$g(t) = e^{it\cdot 0}(1-p) + e^{it\cdot 1}p = q + e^{it}p.$$

12.2. Найдите характеристическую функцию и начальные моменты случайной величины X, плотность распределения которой $\rho(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Решение. Найдем характеристическую функцию случайной величины X:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)e^{itx}dx = \tfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-|x|}dx = \\ &= \tfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(1+it)}dx + \tfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{x(it-1)}dx = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1+it}e^{x(1+it)}\Big|_{-\infty}^{0} + \tfrac{1}{1-it}e^{-x(1-it)}\Big|_{0}^{+\infty}\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1+it} + \tfrac{1}{1-it}\right) = \tfrac{1}{1+t^2}; \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left|e^{x(1+it)}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0.$$

Аналогично

$$\lim_{x\to+\infty}\left|e^{-x(1-it)}\right| = 0.$$

Итак,

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Известно, что $m_k = M[X^k] = (-i)^k g^{(k)}(0)$. Следовательно, для нахождения начальных моментов надо найти производную k-го порядка от характеристической функции $g(t)$. Для упрощения нахождения производной воспользуемся рядом Маклорена для функции $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$, в котором коэффициент при t^k равен искомой производной $g^{(k)}(0)$.

Итак,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots$$

Ряд Маклорена содержит только четные степени t. Отсюда следует, что

$$g^{(k)}(0) = \begin{cases} k!\cdot i^k & \text{при } k \text{ четном}, \\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном}. \end{cases}$$

Начальные моменты

$$m_k = \begin{cases} k! & \text{при} \quad k \quad \text{четном}, \\ 0 & \text{при} \quad k \quad \text{нечетном}. \end{cases}$$

12.3. Найдите характеристическую функцию биномиального распределения и определите с помощью этой функции математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, подчиняющейся биномиальному распределению.

Решение. Найдем характеристическую функцию случайной величины

$$\begin{aligned} g(t) &= \left[n\left(q+pe^{it}\right)^{n-1} \cdot pie^{it}\right]' = \\ &= n(n-1)\left(q+pe^{it}\right) \cdot p^2 i^2 e^{2it} + n\left(q+pe^{it}\right)^{n-1} \cdot p \cdot i^2 e^{it}. \end{aligned}$$

Найдем $M[X]$, для этого воспользуемся формулой $M[X] = -ig'(0)$, где $g'(t) = n\left(q+pe^{it}\right)^{n-1} pie^{it}$ и $g'(0) = npi$. Тогда $M[X] = np$.

Для вычисления дисперсии случайной величины применим формулу (9): $D[X] = M\left[X^2\right] - M^2[X]$, где

$$M\left[X^2\right] = \frac{1}{i^2} g''(0) = -g''(0);$$

Найдем $g''(0) = [n(n-1)p^2 + np]i^2$.

Отсюда, $M\left[X^2\right] = n(n-1) \cdot p^2 + np$ и

$$\begin{aligned} &D[X] = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = \\ &= np(1-p) = npq. \end{aligned}$$

12.4. Характеристическая функция некоторой случайной величины имеет вид $g(t) = \left[1 + 0{,}2\left(e^{it} - 1\right)\right]^3$. Найдите $P(X = 2)$.

Решение. Известно, что характеристическая функция случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, определяется выражением

$$g(t) = \left[1 + p\left(e^{it} - 1\right)\right]^n.$$

Сравнивая, видим, что число испытаний $n = 3$, вероятность наступления события равна $p = 0{,}2$. Тогда,

$$P\,(X = 2) = C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} = C_2^2 (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}032.$$

12.5. Найдите характеристическую функцию случайной величины, распределенной по закону Пуассона. Используя характеристическую функцию, найдите $M\,[X]$ и $D\,[X]$.

Решение. Согласно предположению, случайная величина X принимает только целые значения: 0, 1, 2, 3, ..., причем

$$P_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!}. \tag{15}$$

Характеристическая функция величины X равна:

$$\begin{aligned} g(t) &= M\left[e^{itX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \tfrac{a^k e^{-a}}{k!} = \\ &= e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(ae^{it}\right)^k}{k!} = e^{-a}\left(1 + \frac{ae^{it}}{1!} + \frac{\left(ae^{it}\right)^2}{2!} + \cdots\right) = \\ &= e^{-a} \cdot e^{ae^{it}} = e^{a(e^{it}-1)}. \end{aligned}$$

Известно, что $M\,[X] = -ig'(0)$, где $g'(t) = e^{a(e^{it}-1)} aie^{it}$, $g'(0) = ai$. Тогда $M\,[X] = \frac{1}{i} ai = a$. Найдем дисперсию случайной величины X. Воспользуемся формулой $D\,[X] = M\left[X^2\right] -$
$- M^2\,[X]$, где $M\left[X^2\right] = -g''(0)$ и $M\,[X]$ известно.

Находим $g''(t) = e^{a(e^{it}-1)} \cdot e^{it}(-a^2 - a)$, $g''(0) = -a^2 - a$, $M\left[X^2\right] = a^2 + a$.

Тогда $D\,[X] = a^2 + a - a^2 = a$.

12.6. Найдите характеристическую функцию случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения.

Решение. Нормальный закон распределения имеет вид:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Характеристическая функция случайной величины X равна

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{itx}\, dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx. \end{aligned}$$

Подстановкой $z = \frac{x-a}{\sigma} - it\sigma$ функция $g(t)$ приводится к виду:

$$g(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Известно, что при любом вещественном α

$$\int\limits_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi}.$$

Следовательно,

$$g(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

12.7. Дана характеристическая функция $g(t) = \frac{2}{2-it}$. Найдите плотность вероятностей случайной величины. (*Указание.* Для вычисления интеграла воспользуйтесь теорией вычетов.)

12.8. Найдите характеристическую функцию случайной величины, плотность вероятности которой

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ e^{-x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

12.9. Найдите характеристическую функцию, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной по показательному закону.

12.10. Характеристическая функция дискретной случайной величины имеет вид $g(t) = \frac{1}{10}e^{2it} + \frac{1}{2}e^{4it} + \frac{2}{5}e^{6it}$. Найдите ряд распределения случайной величины.

12.11. Дана характеристическая функция непрерывной случайной величины $g(t) = e^{3it} \cdot \frac{1}{1+2t^2}$. Найдите $M[X]$, $D[X]$.

12.12. Дана случайная величина X, и $M\left[e^{itX}\right] = e^{3it-4t^2}$. Запишите кумулянтную функцию случайной величины $Y = 2X$.

12.13. Случайные величины X и Y независимы, и $M\left[e^{itX}\right] = e^{3it-2t^2}$, $M\left[e^{itY}\right] = e^{-it-t^2}$. Запишите кумулянтную функцию случайной величины $Z = X + 3Y + 4$.

12.14. Характеристическая функция некоторой случайной величины имеет вид $g(t) = \left[1 + 0{,}2\left(e^{it} - 1\right)\right]^4$. Найдите закон распределения X, $M[X]$, $D[X]$.

12.15. Случайная величина X задана плотностью распределения $\rho(x) = e^{-2|x|}$. Найдите характеристическую функцию $g(t)$, $M[X]$, $D[X]$.

12.16. Найдите кумулянтную функцию $\varphi(t)$ случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\left[(x-1)^2 + 1\right]}.$$

(*Указание.* Ограничьтесь случаем $t > 0$.)

12.17. Найдите вещественную часть характеристической функции $g(t)$ случайной величины, заданной плотностью распределения

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \geq 0; \\ \sin x, & \text{если} \quad 0 < x \leq \pi/2; \\ 0, & \text{если} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

В ответе укажите значение $\operatorname{Re} g(2)$.

12.18. Найдите характеристическую функцию $g(t)$ случайной величины X, если

$$P(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдите также $M[X]$ и $D[X]$.

Ответы

12.7. $\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 2e^{-2x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$ **12.8.** $g(t) = \frac{1}{1-it}$.

12.9. $g(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$, $M[X] = \frac{1}{\lambda}$, $D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

12.10.

X	2	4	6
P	1/10	1/2	2/5

12.11. $M[X] = 3$, $D[X] = 4$.

12.12. $16it - 16t^2$. **12.13.** $4it - 11t^2$. **12.14.** 0,8, 0,64.

12.15. 0, 1/2. **12.16.** $-t$. **12.17.** $-1/3$. **12.18.** 1; 2.

Системы случайных величин

13. Функции случайных величин. Случайные двумерные величины

Часто в вероятностных моделях приходится рассматривать сразу несколько случайных величин. Например, при стрельбе по плоской мишени случайная точка попадания имеет две координаты, которые являются случайными величинами; при изучении плоского броуновского движения положение частицы, наблюдаемой под микроскопом в данный момент, есть двумерная случайная величина.

Упорядоченная пара (X, Y) случайных величин X и Y называется двумерной случайной величиной, или случайным вектором двумерного пространства. Двумерная случайная величина (X, Y) называется также системой случайных одномерных величин X и Y. Множество всех возможных значений дискретной двумерной случайной величины с их вероятностями называется законом распределения этой случайной величины.

Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) считается заданной, если известен ее закон распределения:

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{ij},\ (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Этот закон можно записать в виде таблицы:

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2n}	p_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{in}	p_i
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}	$\cdots$	p_{mn}	p_m
$\sum$	q_1	q_2	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_n	1

События $(X = x_i, Y = y_j)$ образуют полную группу событий, поэтому сумма всех вероятностей p_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \ j =$

$= 1, 2, \ldots, n$), указанных в таблице, равна 1, то есть

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

По теореме сложения получаем

$$\sum_{j=1}^{n} P\left(x_i, y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i = P\left(X = x_i\right), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} P\left(x_i, y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = q_j = P\left(Y = y_j\right). \tag{2}$$

Если известен закон распределения двумерной случайной величины (X, Y), то можно найти законы распределения составляющих X и Y. Действительно, возможные значения x_1, x_2, …, x_m величины X и y_1, y_2, …, y_n величины Y содержатся в таблице, а вероятности этих значений определяются формулами (1) и (2). Тогда для определения вероятностей $P\left(X = x_i\right) = p_i$ надо в таблице просуммировать вероятности в i-ой строке, а для определения вероятности $P\left(Y = y_j\right) = q_j$ — просуммировать вероятности в j-ом столбце.

Если для любой пары возможных значений $X = x_i$, $Y = y_j$ справедливо равенство

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right), \tag{3}$$

то случайные величины называются независимыми. Равенство (3) выражает необходимое и достаточное условие независимости случайных величин X и Y.

По теореме умножения

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j / X = x_i\right),$$

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(Y = y_j\right) \cdot P\left(X = x_i / Y = y_j\right),$$

откуда

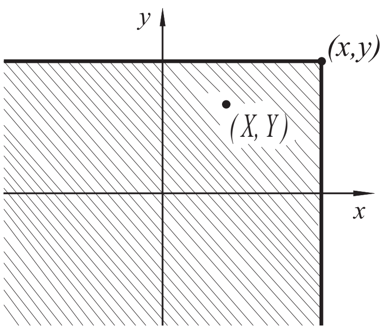
$$P\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)}, \tag{4}$$

$$P\left(X=x_i/Y=y_j\right)=\frac{P\left(X=x_i,Y=y_j\right)}{P\left(Y=y_j\right)}. \qquad (5)$$

Условным законом распределения дискретной случайной величины X при $Y = y_j$ называется множество значений $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ и условных вероятностей $P(x_1/y_j)$, $P(x_2/y_j)$, …, $P(x_m/y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ уже наступило (формула (4)). Аналогично определяется условный закон распределения дискретной случайной величины Y при $X = x_i$. Этот закон задается формулой (5).

Функцией распределения двумерной случайной величины (системы двух случайных величин) называется функция двух действительных переменных, определяемая равенством

$$F(x,y)=P\left(X<x,Y<y\right), \qquad (6)$$



то есть функция распределения есть вероятность попадания точки с координатами (X, Y) в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x, y), так что точка (X, Y) будет левее и ниже указанной вершины.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Все значения функции распределения $F(x, y)$ принадлежат отрезку $[0; 1]$: $\ 0 \le F(x, y) \le 1$.

2. Функция распределения $F(x, y)$ монотонно возрастает по обеим переменным: если $x_1 < x_2$, то $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$; если $y_1 < y_2$, то $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y)$;

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x)$, то есть при одном из аргументов системы, равном $+\infty$, функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующую другому аргументу.

4. Вероятность попадания точки с координатами (X, Y) в прямоугольник $[(x,y) : a \le x < b,\ c \le y < d]$ может быть найдена по формуле:

$$P\left[(a \le X < b,\ c \le Y < d)\right] = F(a,c) + F(b,d) - \\ -F(a,d) - F(b,c). \tag{7}$$

Условными функциями распределения называют функции $F(y/x) = P\,(Y < y/X < x)$ и $F(x/y) = P\,(X < x/Y < y)$. Выражение $P\,(Y < y/X < x)$ означает вероятность того, что случайная величина Y примет значение, меньшее y, если случайная величина X уже приняла значение, меньшее x. Формулы

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F(y/x), \quad F(x,y) = F_2(y) \cdot F(x/y) \tag{8}$$

выражают правило умножения законов распределения вероятностей.

Двумерная случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x,y)$ имеет непрерывную смешанную производную второго порядка: $F''_{xy} = F''_{yx}$.

Плотность распределения вероятностей $\rho(x,y)$ непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) определяется формулой $\rho(x,y) = F''_{xy}$. В этом случае

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \rho(x,y)\,dx\,dy. \tag{9}$$

Отметим некоторые свойства плотности вероятностей:

1. $\rho(x,y) \ge 0$.

2. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D может быть вычислена по формуле:

$$P[(X,Y) \in D] = \iint\limits_{(D)} \rho(x,y)\,dx\,dy. \qquad (10)$$

3.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

4. Плотность вероятностей одномерной случайной величины может быть найдена через плотность вероятностей системы случайных величин по формуле:

$$\rho_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dy; \qquad \rho_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dx.$$

Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда совместная функция распределения системы этих случайных величин равна произведению одномерных функций распределения этих случайных величин. Аналогично, совместная плотность вероятностей равна произведению одномерных плотностей вероятностей.

Для произвольных непрерывных случайных величин имеет место равенство:

$$\rho(x,y) = \rho_1(x) \cdot \rho(y/x), \qquad \rho(x,y) = \rho_2(y) \cdot \rho(x/y), \qquad (11)$$

где $\rho(x/y)$ и $\rho(y/x)$ есть условные плотности вероятностей, то есть плотности вероятностей случайной величины X (аналогично Y) при условии, что случайная величина Y приняла значение y (аналогично $X = x$).

Иногда, исследуя взаимосвязь двух случайных величин, можно найти их условные математические ожидания. Математическое ожидание случайной величины X, если случайная величина Y приняла фиксированное значение y,

называется условным математическим ожиданием величины X при $Y =$
$= y$. Обозначают условное математическое ожидание $M\,[X/Y]$. Аналогично определяется условное математическое ожидание $M\,[Y/X]$ величины Y при $X = x$. Для нахождения условных математических ожиданий дискретных случайных величин X и Y воспользуемся формулами:

$$M\,[Y/X = x_i] = \sum_k y_k \cdot P(y_k/x_i), \tag{12}$$

$$M\,[X/Y = y_j] = \sum_i x_i \cdot P(x_i/y_j). \tag{13}$$

Для непрерывных величин X и Y находим:

$$M\,[X/Y = y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \rho(x/y)\,dx, \tag{14}$$

$$M\,[Y/X = x] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \rho(y/x)\,dy. \tag{15}$$

Ковариацией двух случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения их отклонений:

$$Cov\,(X, Y) = M\Big[\,[X - M\,[X]\,] \cdot [\,Y - M\,[Y]\,]\,\Big].$$

После преобразования правой части эта формула принимает вид

$$Cov\,(X, Y) = M\,[X \cdot Y] - M\,[X] \cdot M\,[Y]\,. \tag{16}$$

Если случайные величины независимы, то их ковариация равна нулю:

$$Cov\,(X, Y) = 0.$$

Коэффициент корреляции r_{xy} случайных величин X и Y определяется формулой

$$r_{xy} = \frac{Cov\,(X, Y)}{\sigma\,[X] \cdot \sigma\,[Y]}.$$

13.1. Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) задана матрицей распределения вероятностей

$X \diagdown Y$	10	14	18
3	0,25	0,15	0,32
6	0,10	0,05	0,13

а) Зависимы ли случайные величины X и Y ? б) Найдите условный закон распределения Y, если известно, что случайная величина X приняла значение 3; в) Найдите условный закон распределения X, если известно, что случайная величина $Y = 14$.

Решение. а) Пользуясь формулами (1) и (2), находим ряды распределения X и Y:

X	3	6
P	0,72	0,28

Y	10	14	18
P	0,35	0,20	0,45

Так как, например, $P\,(X = 3, Y = 10) = 0{,}25 \neq 0{,}72 \cdot 0{,}35$, то случайные величины X и Y зависимы.

б) Пользуясь формулой (4), получаем, что

$$\begin{aligned} P\,(Y = 10/X = 3) &= \tfrac{0{,}25}{0{,}72} = \tfrac{25}{72}; \\ P\,(Y = 14/X = 3) &= \tfrac{0{,}15}{0{,}72} = \tfrac{15}{72}; \\ P\,(Y = 18/X = 3) &= \tfrac{0{,}32}{0{,}72} = \tfrac{32}{72}. \end{aligned}$$

Таким образом, найден ряд распределения Y при $X = 3$:

Y	10	14	18
$P\,(Y/X = 3)$	$\frac{25}{72}$	$\frac{15}{72}$	$\frac{32}{72}$

в) Аналогично находим условный закон распределения X, если $Y = 14$, пользуясь формулой (5).

$$P\,(X = 3/Y = 14) = \frac{0,15}{0,20} = \frac{3}{4}; \qquad P\,(X = 6/Y = 14) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

X	3	6
$P\,(X/Y = 14)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

13.2. Дана матрица распределения системы дискретных случайных величин (X, Y)

X \ Y	-2	0	2
-1	0,15	0,01	0,18
1	0,03	0,25	0,04
2	0,02	0,20	0,12

Найдите условные математические ожидания $M[X/Y=-2]$, $M[X/Y=0]$, $M[X/Y=2]$.

Решение. Пользуясь формулой (2), находим ряд распределения Y:

Y	-2	0	2
P	0,20	0,46	0,34

Пользуясь формулой (5), находим

$$\begin{aligned} P\left(X=-1/Y=-2\right) &= \tfrac{15}{20}; \\ P\left(X=1/Y=-2\right) &= \tfrac{3}{20}, \\ P\left(X=2/Y=-2\right) &= \tfrac{2}{20}. \end{aligned}$$

По формуле (13)

$$M\left[X/Y=-2\right]=-1\cdot\frac{15}{20}+1\cdot\frac{3}{20}+2\cdot\frac{2}{20}=-\frac{8}{20}=-\frac{2}{5}.$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} P\left(X=-1/Y=0\right) &= \tfrac{1}{46}; \\ P\left(X=1/Y=0\right) &= \tfrac{25}{46}, \\ P\left(X=2/Y=0\right) &= \tfrac{20}{46}. \end{aligned}$$

По формуле (13)

$$M\left[X/Y=0\right]=-1\cdot\frac{1}{46}+1\cdot\frac{25}{46}+2\cdot\frac{20}{46}=\frac{44}{46}=\frac{22}{23}.$$

$$\begin{aligned} P\left(X=-1/Y=2\right) &= \tfrac{18}{34}; \\ P\left(X=1/Y=2\right) &= \tfrac{4}{34}, \\ P\left(X=2/Y=2\right) &= \tfrac{12}{34}. \end{aligned}$$

По формуле (13)

$$M\left[X/Y=0\right]=-1\cdot\frac{18}{34}+1\cdot\frac{4}{34}+2\cdot\frac{12}{34}=\frac{10}{34}=\frac{5}{17}.$$

13.3. Дана матрица распределения системы дискретных случайных величин

$X \backslash Y$	0,1	0,3	0,5
1	0,15	0,01	0,02
3	0,05	0,09	0,07
5	0,10	0,25	0,26

Найдите ковариацию случайных величин X и Y и коэффициент корреляции.

Решение. $M\left[X\cdot Y\right]=\sum\limits_{i,j}x_i\cdot y_j\cdot p_{ij}$,

$$\begin{aligned}M\left[X\cdot Y\right] &= 1\cdot 0,1\cdot 0,15+3\cdot 0,1\cdot 0,05+5\cdot 0,1\cdot 0,1+\\&+1\cdot 0,3\cdot 0,01+3\cdot 0,3\cdot 0,09+5\cdot 0,3\cdot 0,25+\\&+1\cdot 0,5\cdot 0,02+3\cdot 0,5\cdot 0,07+5\cdot 0,5\cdot 0,26=\\&=1,304,\end{aligned}$$

Математические ожидания $M\left[X\right]$ и $M\left[Y\right]$ подсчитываются по одномерным рядам распределения случайных величин X и Y:

X	1	3	5
P	0,18	0,21	0,61

Y	0,1	0,3	0,5
P	0,3	0,35	0,35

Получаем:

$$\begin{aligned}M\left[X\right] &= 1\cdot 0,18+3\cdot 0,21+5\cdot 0,61=3,85,\\M\left[Y\right] &= 0,1\cdot 0,3+0,3\cdot 0,35+0,5\cdot 0,35=0,31,\\M\left[X^2\right] &= 1\cdot 0,18+9\cdot 0,21+25\cdot 0,61=17,32,\\M\left[Y^2\right] &= 0,01\cdot 0,3+0,09\cdot 0,35+0,25\cdot 0,35=0,122.\end{aligned}$$

Найдем дисперсии и средние квадратические отклонения составляющих X и Y:

$$D\left[X\right] = M[X^2]-M^2[X],\ D\left[X\right]=17,32-(3,85)^2\approx 2,50,$$

$$
\begin{aligned}
D\,[Y] &= M[Y^2]-M^2[Y],\ D\,[Y]=0,12-(0,31)^2\approx 0,54,\\
\sigma[X] &= \sqrt{D[X]}=\sqrt{2,50}\approx 1,58,\\
\sigma[Y] &= \sqrt{D[Y]}=\sqrt{0,54}\approx 0,73.
\end{aligned}
$$

Находим $Cov\,(X,Y)$, пользуясь формулой (16):

$$Cov\,(X,Y)=1,304-3,85\cdot 0,31=1,304-1,1935=0,1105.$$

Находим коэффициент корреляции:

$$r_{xy}=\frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma\,[X]\cdot\sigma\,[Y]}=\frac{0,1105}{1,58\cdot 0,73}\approx 0{,}096.$$

13.4. Из коробки, в которой три красных и три зеленых карандаша, производится последовательное извлечение (без возвращения) карандашей до первого появления красного карандаша. Пусть X — случайное число извлеченных при этом карандашей. Затем извлечение карандашей продолжается до первого появления зеленого карандаша. Пусть Y — случайное число извлеченных при этом карандашей во второй серии. Требуется составить закон совместного распределения (X,Y).

Решение. Случайная величина X может принимать значения 1, 2, 3, 4, а случайная величина Y — значения 1, 2, 3. Вычислим соответствующие вероятности:

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{20},\quad p_{12}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20},\\
p_{13} &= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{20},\quad p_{21}=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{20},\\
p_{22} &= \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{20},\quad p_{23}=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{20},\\
p_{31} &= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{20},\quad p_{32}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{20},\\
p_{33} &= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{20},\quad p_{41}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{20},\\
p_{42} &= p_{43}=0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, таблица распределения для случайного вектора (x, y) имеет вид:

$X \setminus Y$	1	2	3	$\sum$
1	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$
3	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$
4	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{20}$
$\sum$	$\frac{11}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	1

Отсюда, законы распределения X и Y:

X	1	2	3	4
P	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Y	1	2	3
P	$\frac{11}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$

13.5. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}, & \text{если} \quad x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

Найдите функции распределения случайных величин X и Y.

Решение. Пользуясь свойствами $F(x, y)$, находим

$$F_1(x) = \lim_{y \to +\infty} (1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}) = 1 - 5^{-x}, \quad \text{если } x \geq 0,$$

$F_1(x) = 0$, если $x < 0$. Аналогично находим

$$F_2(y) = \begin{cases} 1 - 5^{-y}, & \text{если} \quad y \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad y < 0. \end{cases}$$

13.6. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & \text{если} \quad x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность попадания случайной точки (x, y) в квадрат, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$.

Решение. По формуле (7) находим

$$P(1 \le X \le 2, 1 \le Y \le 2) = F(2,2) - F(1,2) - F(2,1) + \\ + F(1,1) = 1 - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{81} - 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{27} - 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{27} + \\ + 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{4}{81}.$$

13.7. Система случайных величин (X, Y) задана функцией распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 5^{-y} + 10^{-x-y}, & \text{если} \quad x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

1) Выясните, зависимы или нет случайные величины X и Y.
2) Найдите условные функции распределения $F(x/y)$, $F(x/2)$.

Решение. 1) Находим

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = 1 - 2^{-x}, \quad \text{если} \quad x \ge 0; \\ F_1(x) &= 0, \quad \text{если} \quad x < 0. \\ F_2(y) &= \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = 1 - 5^{-y}, \quad \text{если} \quad y \ge 0; \\ F_2(y) &= 0, \text{ если} \quad y < 0. \end{aligned}$$

Так как $F_1(x) \cdot F_2(y) = 1 - 2^{-x} - 5^{-y} + 2^{-x} \cdot 5^{-y} \ne F(x,y)$, то случайные величины X и Y зависимы.

2) Из формул (8) находим

$$F(x/y) = \frac{F(x,y)}{F_2(y)}.$$

В нашем случае

$$F(x/y) = \begin{cases} \frac{1-2^{-x}-5^{-y}+10^{-x-y}}{1-5^{-y}}, & \text{если} \quad x \ge 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

При $y = 2$ получаем

$$F(x/2) = \begin{cases} (\frac{24}{25} - 2^{-x} + \frac{1}{100} \cdot 10^{-x}) \cdot \frac{24}{25}, & \text{если} \quad x \ge 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

13.8. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 4^{-x} - 4^{-y} - 4^{-x-y}, & \text{если} \quad x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения $\rho(x,y)$ случайных величин X и Y.

Решение. Так как $F(x,y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков, то $\rho(x,y) = F''_{xy}(x,y)$. Найдем частные производные:

$$\begin{aligned} F'_x &= 4^{-x} \cdot \ln 4 + 4^{-x-y} \cdot \ln 4 = \ln 4 \cdot \left(4^{-x} + 4^{-x-y}\right), \\ F''_{xy} &= \left(\ln 4 \cdot \left(4^{-x} + 4^{-x-y}\right)\right)'_y = \ln^2 4 \cdot (-4^{-x-y}). \end{aligned}$$

Получаем

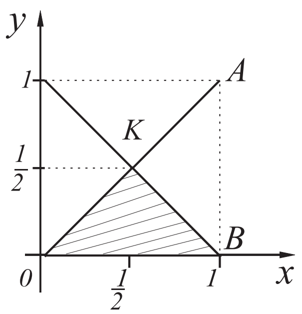
$$\rho(x,y) = \begin{cases} -4^{-x-y} \cdot \ln^2 4, & \text{если} \quad x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

13.9. Система случайных величин (X,Y) задана плотностью распределения вероятностей вида

$$\rho(x,y) = \begin{cases} C \cdot (x+y), & \text{при} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите постоянную C и $P\,(X + Y < 1)$.

Решение.



Из условия нормировки находим

$$C \cdot \iint\limits_{(D)} (x+y)\,dx\,dy = 1,$$

где D — область, ограниченная сторонами OAB, следовательно,

$$C \cdot \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)\,dy = C \cdot \int\limits_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2})\,dx = \frac{C}{2} = 1.$$

Отсюда $C=2$. По формуле (10)

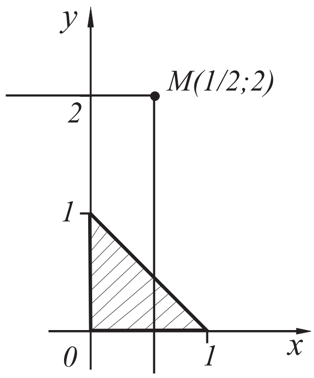
$$P\,(X+Y<1)=2\cdot\iint\limits_{D_1}(x+y)\,dx\,dy,$$

где D_1 — треугольник OKB. Поэтому

$$P\,(X+Y<1)=2\cdot\int\limits_0^{1/2}dy\int\limits_y^{1-y}(x+y)\,dx=$$
$$=2\cdot\int\limits_0^{1/2}\left(\tfrac{1}{2}-2y^2\right)dy=\tfrac{1}{3}.$$

13.10. Система случайных величин (X,Y) задана плотностью распределения вероятностей вида

$$\rho(x,y)=\begin{cases}24\cdot xy, & \text{если}\quad (x,y)\in D,\\ 0, & \text{в остальных точках,}\end{cases}$$



где D — треугольник, ограниченный прямой $y=1-x$ и координатными осями. Найдите: а) $P\left(X<\frac{1}{2},Y<2\right)$; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ случайных величин X и Y, входящих в систему; в) условные плотности распределения случайных величин, входящих в систему.

Решение. а) Искомая вероятность $P\left(X<\frac{1}{2},Y<2\right)$ равна значению функции распределения системы $F(x,y)$ в точке $M(1/2;2)$. По формуле (9) находим

$$P\left(X<\tfrac{1}{2},Y<2\right)=F(\tfrac{1}{2},2)=24\cdot\int\limits_0^{1/2}x dx\int\limits_0^{1-x}y\,dy=$$
$$=12\cdot\int\limits_0^{1/2}x(1-x)^2\,dx=12\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^{1/2}=$$
$$=12\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\frac{1}{64}\right)=\frac{11}{16}.$$

б) Учитывая область задания системы и формулу

$$\rho_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dy,$$

получаем, что $\rho_1(x) = 0$, если либо $x < 0$, либо $x > 1$. Если $0 < x < 1$, то при фиксированном x из $(0,1)$ переменная y меняется от 0 до $1-x$:

$$\rho_1(x) = 24 \int\limits_0^{1-x} xy\,dy = 12x(1-x)^2,$$

Аналогично можно найти, что

$$\begin{aligned} \rho_2(y) &= 24 \int\limits_0^{1-y} xy\,dy = 12y(1-y)^2, \quad \text{если} \quad 0 < y < 1, \\ \rho_2(y) &= 0 \quad \text{в других точках.} \end{aligned}$$

в) Используя формулы (11), при $x \neq 1$ и $y \neq 1$ находим

$$\rho(x/y) = \begin{cases} \frac{2x}{(1-y)^2}, & \text{если} \quad (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin D. \end{cases}$$

$$\rho(y/x) = \begin{cases} \frac{2y}{(1-x)^2}, & \text{если} \quad (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin D. \end{cases}$$

13.11. Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения

$$\rho(x,y) = \begin{cases} A \cdot x \cdot y, & \text{в треугольнике OBC} \\ & O(0;0), B(1;0), C(1;1); \\ 0, & \text{в других точках.} \end{cases}$$

Найдите: а) параметр A; б) плотности $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$ компонент X и Y; в) ковариацию случайных величин X и Y ($cov\,(X,Y)$)

и коэффициент корреляции (r_{xy}); г) условные математические ожидания $M\left[X \big/ Y = \frac{1}{4}\right]$, $M\left[Y \big/ X = \frac{1}{2}\right]$.

Решение.

а) Из условия нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dx\,dy = 1$$

находим

$$\begin{aligned} 1 &= A\cdot\int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^x y\,dy = A\cdot\int\limits_0^1 \tfrac{x^3}{2}\,dx = \\ &= A\cdot\left(\tfrac{x^4}{8}\right)\Big|_0^1 = \tfrac{A}{8}, \quad \text{то есть} \quad A = 8. \end{aligned}$$

б) Найдем плотности $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$ компонент X и Y:

$$\rho_1(x) = 8\int\limits_0^x xy\,dy = 4x^3, \quad (0 \le x \le 1).$$

$$\rho_2(y) = 8\int\limits_y^1 xy\,dy = 4y - 4y^3, \quad (0 \le y \le 1).$$

Таким образом,

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 4y^3, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1. \end{cases}$$

$$\rho_2(y) = \begin{cases} 4y - 4y^3, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & y < 0,\ y > 1. \end{cases}$$

в) Найдем ковариацию случайных величин X и Y. Сначала найдем математические ожидания $M[X]$, $M[Y]$.

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\rho_1(x)\,dx = \int\limits_0^1 x\cdot 4x^3 dx = \frac{4x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{5};$$

$$
\begin{aligned}
M\,[Y] &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\rho_2(y)\,dy = \int\limits_0^1 y\cdot(4y-4y^3)dy = \\
&= \Big(\frac{4y^3}{3}-\frac{4y^5}{5}\Big)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}-\frac{4}{5} = \frac{8}{15};\\
M\,[X\cdot Y] &= \int\int\limits_{\triangle OBC} xy\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 8x^2dx\int\limits_0^x y^2dy = \\
&= \frac{8}{3}\int\limits_0^1 x^5\,dx = \frac{8}{3}\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{4}{9};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M\left[X^2\right] &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\rho_1(x)dx = \int\limits_0^1 x^2\cdot 4x^3dx = \frac{4x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{2}{3};\\
M\left[Y^2\right] &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot\rho_2(y)dy = \int\limits_0^1 y^2\cdot(4y-4y^3)dy = \\
&= \Big(y^4-\frac{4y^6}{6}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{3};\\
D[X] &= M[X^2]-M^2[X] = \frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{75};\\
D[Y] &= M[Y^2]-M^2[Y] = \frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225};\\
\sigma[X] &= \sqrt{D[X]} = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}};\\
\sigma[Y] &= \sqrt{D[Y]} = \frac{\sqrt{11}}{15}.
\end{aligned}
$$

Тогда ковариация случайных величин X и Y равна

$$
Cov\,(X,Y) = M\Big[X\cdot Y\Big] - M\Big[X\Big]\cdot M\Big[Y\Big] = \frac{4}{9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15} = \frac{4}{225}.
$$

Находим коэффициент корреляции случайных величин X и Y:

$$r_{xy} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma\,[X]\cdot\sigma\,[Y]} = \frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{2}{75}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{15}} \approx 0{,}49.$$

г) Найдем условные математические ожидания.

$$M\,[X/Y=1/4] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\rho\left(x/y=\frac{1}{4}\right)dx,$$

где

$$\rho\left(x/y=\frac{1}{4}\right) = \frac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}\bigg|_{y=\frac{1}{4}} = \frac{32}{15}x.$$

Эта условная плотность отлична от нуля только при $1/4 \le x \le 1$, так как вдоль прямой $y = 1/4$ плотность $\rho(x,y) = 0$ при $x < 1/4, \quad x > 1$. Таким образом,

$$M\,[X/Y=1/4] = \int\limits_{1/4}^{1} x\cdot\frac{32}{15}xdx = \frac{32}{45}\Big(1-\frac{1}{64}\Big) = \frac{7}{10}.$$

Аналогично находим $M\,[Y/X=1/2] = 1/3$.

13.12. Двумерная непрерывная случайная величина (X,Y) распределена по всей плоскости с плотностью распределения вероятностей

$$\rho(x,y) = \frac{A}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Найдите: а) функцию распределения $F(x,y)$; б) вероятность попадания точки $M(x;y)$ в прямоугольник H: $\{(x;y){:}0 \le x \le \alpha,$ $0 \le y \le \beta\}$.

Решение. Определим сначала параметр A. Воспользуемся условием нормировки

$$1 = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)\,dx\,dy = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{dy}{1+y^2} =$$
$$= A\,\mathrm{arctg}\,x|_{-\infty}^{+\infty}\,\mathrm{arctg}\,y|_{-\infty}^{+\infty} = A\pi^2, \text{ то есть } A = \tfrac{1}{\pi^2}.$$

а) Функцию распределения находим, пользуясь формулой (9):

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\Big(\mathrm{arctg}\ x + \frac{\pi}{2}\Big)\Big(\mathrm{arctg}\ y + \frac{\pi}{2}\Big) = \Big(\frac{\mathrm{arctg}\ x}{\pi} + \frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{\mathrm{arctg}\ y}{\pi} + \frac{1}{2}\Big).$$

б) На основании формулы (10) получаем

$$P\,(M \in H) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\alpha}\int\limits_{0}^{\beta}\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{\mathrm{arctg}\ \alpha \cdot \mathrm{arctg}\ \beta}{\pi^2}.$$

Случайные величины X и Y независимы. Действительно,

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)} = \rho_1(x)\cdot\rho_2(y).$$

Задачи для самостоятельного решения

13.13. Дана матрица распределения системы дискретных случайных величин

$X \backslash Y$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найдите: а) законы распределения случайных величин X и Y; б) условный закон распределения Y при $X = 0{,}4$; в) условный закон распределения X при $Y = 5$.

13.14. Дана матрица распределения системы дискретных случайных величин (X, Y)

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Найдите: а) законы распределения случайных величин X и Y; б) закон распределения Y при $X = 1$; в) вероятность события $(X = 1, Y \geq 0)$. Выясните, зависимы ли случайные величины X и Y.

13.15. Дана матрица распределения системы дискретных случайных величин

$X \backslash Y$	-0,1	0	0,2
0	0,02	0,03	0,05
1	0,06	0,12	0,02
2	0,08	0,20	0,22
3	0,04	0,15	0,01

Найдите: а) условный закон распределения X при $Y = 0$; б) вероятность события $(X \leq 2, Y < 0)$. Выясните, зависимы ли случайные величины X и Y.

13.16. Дана матрица распределения системы дискретных случайных величин (X, Y)

$X \backslash Y$	-1	0	1
-2	0,01	0,03	0,06
-1	0,02	0,24	0,09
0	0,05	0,15	0,16
1	0,03	0,06	0,10

Найдите законы распределения случайных величин $X + Y$ и $X \cdot Y$.

13.17. Двумерная случайная величина (X, Y) задана матрицей распределения вероятностей

$X \backslash Y$	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Найдите: а) математические ожидания $M[X]$, $M[Y]$; б) дисперсии $D[X]$, $D[Y]$.

13.18. Двумерная случайная величина (X, Y) задана матрицей распределения вероятностей

$X \backslash Y$	-1	1	2
-2	0,1	0,05	0,05
1	0,2	0,15	0,15
3	0,1	0,1	0,1

Найдите: а) ряды распределения компонент X и Y, $M[X]$, $M[Y]$; б) ковариацию случайных величин X и Y; в) условные математические ожидания $M[X/Y=1]$, $M[Y/X=1]$.

13.19. Дана таблица, определяющая закон распределения системы двух случайных величин (X, Y):

$X \backslash Y$	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Найдите: а) λ; б) математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$.

13.20. Найдите математические ожидания и дисперсии двумерных случайных величин X и Y, заданных таблицей распределения вероятностей

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

13.21. Задана двумерная плотность вероятности

$$\rho(x,y) = \frac{C}{(x^2+y^2+1)^3}$$

системы случайных величин (X, Y). Найдите постоянную C. (*Указание.* Перейдите к полярным координатам.)

13.22. В первом квадранте задана функция распределения системы двух случайных величин

$$F(x,y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}.$$

Найдите вероятность попадания случайной точки $(x; y)$ в треугольник с вершинами $A(1;3)$, $B(3;3)$, $C(2;8)$.

13.23. Плотность непрерывного совместного распределения двух случайных величин X и Y задана формулой

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{A}{x^3y^3}, & x \geq 1,\ y \geq 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите $Cov(x, y)$.

13.24. Плотность непрерывного совместного распределения двух случайных величин x и y задана формулой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} A(1 - xy^3), & |x| \le 1,\ |y| \le 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите коэффициент корреляции $r(x, y)$.

13.25. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(2x + y), & \text{в} \triangle OAB \\ & O(0;0), A(1;1), B(1;-1); \\ 0, & \text{в других точках.} \end{cases}$$

Найдите: а) плотности $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$ компонент X и Y; б) ковариацию случайных величин X и Y; в) условные математические ожидания $M[X/Y = 1/2]$, $M[Y/X = 1]$.

13.26. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$\rho(x, y) = \begin{cases} a \cdot x \cdot y & \text{в области D ,} \\ 0 & \text{вне области D .} \end{cases}$$

Область D — треугольник, ограниченный прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Найдите постоянную a, математические ожидания $M[X]$, $M[Y]$.

13.27. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 5 \cdot e^{-5x} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

$$\rho_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y < 0, \\ 2 \cdot e^{-2y} & \text{при} \quad y > 0. \end{cases}$$

Найдите: а) плотность совместного распределения системы случайных величин; б) функцию распределения системы случайных величин.

13.28. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в круге радиуса r с центром в начале координат. Докажите, что X и Y независимы, но некоррелированы.

13.29. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) & \text{в квадрате} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{вне квадрата.} \end{cases}$$

Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих.

13.30. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y} & \text{при} \quad x \ge 0, \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

Найдите двумерную плотность вероятностей системы.

13.31. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$\rho(x,y) = \frac{2}{\pi} \cdot e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}.$$

Найдите плотности распределения составляющих.

13.32. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) равна

$$\rho(x,y) = C \cdot e^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

Найдите постоянный коэффициент C и плотности распределения составляющих.

13.33. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \cos x \cdot \cos y & \text{в квадрате} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}. \\ 0 & \text{вне квадрата.} \end{cases}$$

Докажите, что составляющие X и Y независимы.

Ответы

13.13. а)

X	0,4	0,8
P	0,80	0,20

Y	2	5	8
P	0,20	0,42	0,38

б)

Y/X=0,4	2	5	8
P	3/16	3/8	7/16

в)

X/Y=5	0,4	0,8
P	5/2	7/2

13.14. а)

X	0	1
P	0,3	0,7

Y	-1	0	1
P	0,3	0,5	0,2

б)

Y/X=1	-1	0	1
P	2/7	3/7	2/7

в) 5/7.

13.15. а)

X/ Y=0	0	1	2	3
P	0,06	0,24	0,4	0,3

б) 0,66.

13.16.

$X+Y$	-3	-2	-1	0	1	2
P	0,01	0,05	0,35	0,27	0,22	0,1

$X \cdot Y$	-2	-1	0	1	2
P	0,06	0,12	0,69	0,12	0,01

13.17. а) $M[X] = 0{,}10$, $M[Y] = 0{,}55$; б) $D[X] = 0{,}59$, $D[Y] = 0{,}2475$.

13.18. а)

X	-2	1	3
P	0,2	0,5	0,3

Y	-1	1	2
P	0,4	0,3	0,3

$M[X] = 1$, $M[Y] = 0{,}5$; б) $Cov(X,Y) = 0{,}7$;
в) $M[X/Y = 1] = 7/6$, $M[Y/X = 1] = 1/2$. **13.19.** $\lambda = 1/20$; $M[X] = 22$; $M[Y] = 41$. **13.20.** $M[X] = 7/3$; $M[Y] = 11/6$; $D[X] = 19/18$; $D[Y] = 17/36$. **13.21.** $C = 2/\pi$. **13.22.** $\rho(x,y) = \ln^2 2 \cdot 2^{-x-y}$ в первом квадранте, вне квадранта $\rho(x,y) = 0$; $P = 5/3 \cdot 2^{12}$. **13.23.** 0. **13.24.** $-0{,}2$. **13.25.** а) $\rho_1(x) = 6x^2$, $\rho_2(y) = 3 + 3y - 6y^2$; б) $Cov(x,y) = -14/5$; в) $M[X/Y = 1/2] = 37/96$, $M[Y/X = 1] = 1/6$. **13.26.** $a = 24$; $M[X] = M[Y] = 2/5$. **13.27.** $\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0, \\ 10 \cdot e^{-(5x+2y)} & \text{при} \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$

$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0, \\ (1 - e^{-5x}) \cdot (1 - e^{-2y}) & \text{при} \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$

13.28. *Указание.* Сравните плотности распределения составляющих и условные плотности, убедитесь, что коэффициент корреляции равен нулю. $\rho_1(x) = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$, $\rho_2(y) = \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}$, $\rho(x/y) = \frac{1}{2}\sqrt{r^2-y^2}$, $\rho(y/x) = \frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}$. **13.29.**

$M[X] == M[Y] = \pi/4$, $D[X] = D[Y] = \pi/2 + \pi^2/16 - 2 \approx 0{,}187$.

13.30. $\rho(x,y) = \begin{cases} \ln^2 5 \cdot 5^{-x-y} & \text{при} \quad x \geq 0, \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$

13.31. Найдем плотность распределения составляющей X: $\rho_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dy = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+2x6+5y^2}{2}}\,dy$. Вынесем за знак интеграла множитель $e^{-x^2/2}$, не зависящий от переменной интегрирования y, и дополним оставшийся показатель степени до полного квадрата. Тогда

$$\frac{2}{\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{10}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\frac{5}{2}}y + \sqrt{\frac{2}{5}}x)^2} d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y + \sqrt{\frac{2}{5}}x\right).$$

Учитывая, что интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} d\,u = \sqrt{\pi}$, окончательно получим плотность распределения составляющей X: $\rho_1(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} \cdot e^{-0{,}4x^2}$. Аналогично найдем плотность распределения составляющей Y: $\rho_2(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-2y^2}$.

13.32. $C = \sqrt{3}/\pi$, $\rho_1(x) = \sqrt{3}/(2\sqrt{\pi}) \cdot e^{-0{,}75x^2}$, $\rho_2(y) = \sqrt{3}/\sqrt{\pi} \cdot e^{-3y^2}$. **13.33.** *Указание.* Убедитесь, что плотности распределения составляющих равны соответствующим условным плотностям.

Элементы математической статистики

Математическая статистика занимается разработкой методов сбора, описания и обработки опытных данных, то есть результатов наблюдений, с целью получения научных и практических выводов.

14. Статистическое распределение. Полигон и гистограмма

Статистическим распределением выборки называется соответствие между вариантами и их частотами (или относительными частотами). Статистическое распределение может быть задано, например, с помощью таблицы, в которой указаны варианты и соответствующие им частоты.

14.1. Задано распределение частот выборки объема $n = 60$:

x_i	4	10	16	20	24	30
n_i	15	18	6	4	5	12

Найдите распределение относительных частот.

Решение. Относительной частотой ω_i варианты x_i называется отношение ее частоты к объему выборки:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}.$$

Применяя эту формулу, вычисляем относительные частоты:

$$\omega_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \quad \omega_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}, \quad \omega_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10},$$

$$\omega_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}, \quad \omega_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}, \quad \omega_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

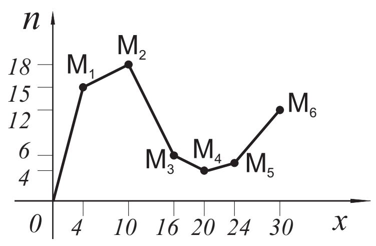
Следовательно, распределение относительных частот определяется таблицей

x_i	4	10	16	20	24	30
n_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{5}$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{6} \omega_i = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} = 1.$$

В целях наглядности статистическое распределение изображается графически.



Если статистическое распределение задано перечнем вариант x_i и соответствующих частот n_i, то на оси абсцисс откладывают варианты x_i, на оси ординат — частоты n_i. Строят точки $M_1(x_1, n_1)$, $M_2(x_2, n_2)$, …, $M_k(x_k, n_k)$ и последовательно соединяют их отрезками прямых; полученная ломаная называется полигоном частот. На рисунке изображен полигон частот распределения для задачи 14.1.

Аналогично строится полигон относительных частот, то есть ломаная, отрезки которой последовательно соединяют точки $M_1(x_1, \omega_1)$, $M_2(x_2, \omega_2)$, …, $M_k(x_k, \omega_k)$, где ω_i — относительная частота x_i.

Кроме дискретных вариационных рядов рассматриваются интервальные вариационные ряды, в которых значения признака могут меняться непрерывно. Пусть имеются результаты измерений непрерывной случайной величины X, для которой a и b — соответственно наименьшее и наибольшее значения. Отрезок $[a, b]$ разобьем на k элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $x_0 = a$, $x_k = b$. Обозначим через n_i число значений величины X, принадлежащих интервалу x_{i-1}, x_i. Построим таблицу:

Значения признака	Частота
(x_0, x_1)	n_1
(x_1, x_2)	n_2
…	…
(x_{k-1}, x_k)	n_k
Сумма	n(объем выборки)

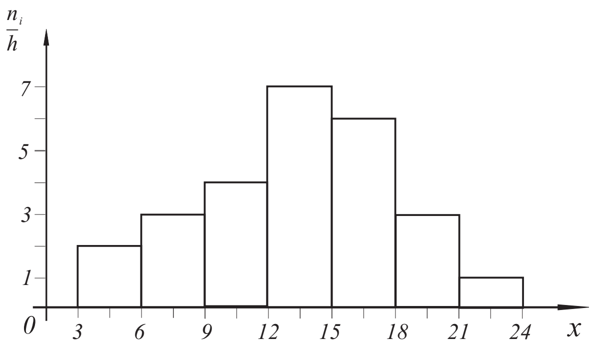
Эта таблица называется интервальным вариационным рядом. Относительной частотой, соответствующей i-му интервалу, называется отношение частоты n_i к объему выборки n, где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Очевидно, $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1$.

Интервальный вариационный ряд будет наиболее простым, когда все интервальные разности равны между собой, то есть $x_i - x_{i-1} = h$, плотность распределения частот на i-м интервале в этом случае равна n_i/h.

Если статистическое распределение задано перечнем интервалов и соответствующих им частот, то строят гистограмму частот. Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $h_i = x_i - x_{i-1}$ и высотами n_i/h_i. На оси абсцисс откладывают частичные интервалы длины h_i, над i-м интервалом строят прямоугольник высотой n_i/h_i (плотность частоты). Отметим, что площадь S гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки. Аналогично строится гистограмма относительных частот, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых равны h_i — длина каждого частичного интервала, а высоты — ω_i/h_i — плотность относительной частоты.

14.2. Имеются статистические данные распределения объема $n = 75$. Постройте гистограмму частот.

$x_i - x_{i+1}$	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
n_i	6	9	12	21	18	6	3
n_i/h	2	3	4	7	6	2	1



Решение. Построим на оси абсцисс заданные интервалы длины $h = 3$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частоты n_i/h. Например, над интервалом $(3, 6)$ построим отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии $n_i/h = 6/3 = 2$; аналогично строят остальные отрезки. Получаем искомую гистограмму частот распределения.

Задачи для самостоятельного решения

14.3. Ниже приведена выборка объема $n = 79$. Постройте полигон и гистограмму относительных частот.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	4	13	14	24	16	3	3	2

14.4. Имеются результаты испытаний крепости нитей.

Крепость нити (г)	120–140	140–160	160–180	180–200
Число нитей (м)	1	4	10	14

200–220	220–240	240–260	260–280
12	6	2	1

По этим данным постройте гистограмму и полигон частот распределения. (*Указание.* Для построения полигона найдите середины интервала и примите их в качестве вариант.)

14.5. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов. Постройте полигон и гистограмму относительных частот распределения.

Рост	154–158	158–162	162–166	166-170
Число студентов	10	14	26	28

170–174	174–178	178—182
12	8	2

15. Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения, или функцией распределения выборки, называется функция, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Обозначим эмпирическую функцию распределения через $F^*(x)$; если n_x — число вариант, меньших x, n — объем выборки, то по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Из определения эмпирической функции следует, что $F^*(x)$ обладает следующими свойствами:

- значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$;
- $F^*(x)$ — неубывающая функция;
- если a — наименьшая, b — наибольшая варианты, то $F^*(x) = 0$ при $x \le a$; $F^*(x) = 1$ при $x > b$.

Функцию $F(x)$ в отличие от эмпирической функции $F^*(x)$ распределения выборки называют теоретической функцией распределения. Различие между эмпирической и теоретической функциями распределения состоит в том, что эмпирическая определяет относительную частоту события $X < x$, а теоретическая — вероятность того же события.

15.1. Найдите эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Варианты x_i	6	8	12	15
Частоты n_i	2	3	10	5

Решение. Объем выборки $n = \sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 2 + 3 + 10 + 5 = 20$. Наименьшая варианта $x_1 = 6$, поэтому $F^*(x) = 0$, если $x \le 6$. Значение $X < 8$, то есть $x_1 = 6$, наблюдалось 2 раза, поэтому $F^*(x) = \frac{2}{20} = 0{,}1$, если $6 < x \le 8$.

Значения $X < 12$, то есть $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, наблюдались $2 + 3 = 5$ раз, поэтому $F^*(x) = \frac{5}{20} = 0{,}25$, если $8 < x \le 12$.

Значения $X < 15$, то есть $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = 12$, наблюдались $2 + 3 + 10 = 15$ раз, поэтому $F^*(x) = \frac{15}{20} = 0{,}75$, если $12 < x \le 15$. Поскольку $x_4 = 15$ — наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$, если $x > 15$. Итак, искомая эмпирическая функция определяется соотношениями

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 6, \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 6 < x \le 8, \\ 0,25 & \text{при} \quad 8 < x \le 12, \\ 0{,}75 & \text{при} \quad 12 < x \le 15, \\ 1 & \text{при} \quad x > 15. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

15.2. Найдите закон распределения случайной величины по результатам исследования:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	8	20	42	22	8

15.3. Найдите функцию распределения случайной величины по результатам исследования:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Ответы

15.2. $$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}08 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}28 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}7 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}92 & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

15.3. $$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}02 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}05 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}15 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}37 & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}63 & \text{при} \quad 4 < x \le 5, \\ 0{,}83 & \text{при} \quad 5 < x \le 6, \\ 0{,}95 & \text{при} \quad 6 < x \le 7, \\ 1 & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

Построение доверительных интервалов для параметров распределения

На практике довольно часто по результатам наблюдений требуется оценить наблюдаемую величину. Наиболее распространенная при этом задача — оценка неизвестных параметров, входящих в известное распределение изучаемой по выборке случайной величины. Эта задача имеет два различных решения:

1) неизвестному параметру (параметрам) по определенным правилам ставится в соответствие единственное число (точка) — его оценка (статистика). Совокупность приемов и методов получения таких оценок рассматривается в теории точечных оценок;

2) неизвестному параметру ставится в соответствие специально построенный интервал числовой оси. Это может быть сделано при помощи метода доверительных интервалов.

При точечном оценивании параметров оценки являются случайными величинами, так как они вычисляются по выборочным значениям и, вообще говоря, будут различными для разных выборок. Естественно, возникают вопросы: "Какую ошибку мы совершаем, принимая вместо точного (истинного) значения параметра некоторое, хотя и построенное по определенным формулам приближенное значение? Как сильно меняется точечная оценка одного и того же параметра от одной выборки к другой?"

Пусть оценивается один скалярный параметр θ. В методе доверительных интервалов найдем два числа, построенных по выборке $\hat{\theta}^{\text{н}}$, $\hat{\theta}^{\text{в}}$, такие, что $\hat{\theta}^{\text{н}} < \hat{\theta}^{\text{в}}$, и для которых при заранее заданном $\beta \in (0, 1)$ выполняется условие

$$P\left(\hat{\theta}^{\text{н}} < \theta < \hat{\theta}^{\text{в}}\right) \geq \beta. \tag{1}$$

Интервал числовой оси $\left(\hat{\theta}^{\text{н}}, \hat{\theta}^{\text{в}}\right)$, удовлетворяющий условию (1), называется β-доверительным интервалом для параметра θ; число β — доверительным уровнем или доверительной вероятностью; $\hat{\theta}^{\text{н}}$, $\hat{\theta}^{\text{в}}$ — нижней и верхней доверительными границами. Таким образом, β-доверительный интервал — это случайный интервал длины $\triangle = \hat{\theta}^{\text{в}} - \hat{\theta}^{\text{н}}$, зависящий от выборки (но не от истинного значения параметра θ), который содержит (накрывает) параметр θ с вероятностью, не меньшей β. На языке экспериментатора длина доверительного интервала $\triangle$ соответствует ошибке в определении параметра. Выполнение условия (1) означает следующее. Пусть производится большое число не зависящих друг от друга наблюдений за случайной величиной X. Оценивают θ и используют следующее статистическое правило: значение неизвестного параметра θ лежит в интервале $\left(\hat{\theta}^{\text{н}}, \hat{\theta}^{\text{в}}\right)$. Это правило иногда может быть и ошибочным, но число таких случаев при $\beta = 1$ мало и составляет $(1-\beta)\cdot 100\%$ общего числа применения этого правила. На практике β обычно выбирают заранее из небольшого набора близких к единице значений: 0,9; 0,95; 0,99 и так далее. Величина $\alpha = 1 - \beta$ отражает "степень готовности мириться с возможностью ошибки".

Очевидно, что доверительный интервал при фиксированном β из (1) находится не единственным образом. Но у разных интервалов будет разная длина $\triangle$. Естественно, что при прочих равных условиях следует выбирать такой интервал, который заключает параметр в более узкую область. Отметим, что во многих случаях доверительный интервал минимальной длины — это интервал вида:

$$(\hat{\theta} - \varepsilon; \hat{\theta} + \varepsilon) \Leftrightarrow |\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon,$$

где $\hat{\theta}$ — какая-либо точечная оценка θ. В этом случае (1) принимает вид:

$$P(|\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon) \geq \beta \Leftrightarrow P(\hat{\theta} - \varepsilon < \theta < \hat{\theta} + \varepsilon) \geq \beta$$

и длина такого интервала $\triangle = 2\varepsilon$. Заметим, что ε, β и объем выборки n являются связанными величинами: задав значения двум из них, определим третью.

16. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение, причем параметр σ известен. Пусть имеется выборка объема n. Построим доверительный интервал для параметра $\theta = a$.

Зададим доверительную вероятность β. Наилучшей точечной оценкой для a в рассматриваемом случае является $\overline{m}_1$ — выборочное среднее, то есть

$$\hat{\theta} \equiv \overline{m}_1 = \sum_{i}^{n} \frac{x_i}{n}.$$

Можно доказать, что выборочное среднее $\overline{m_1}$ также подчиняется нормальному распределению:

$$\rho_{\overline{m}_1}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2 n}{2\sigma^2}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&P(|\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon) = P(|\overline{m}_1 - a| < \varepsilon) = \\
&= P(a - \varepsilon < \overline{m}_1 < a + \varepsilon) = \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \rho_{\overline{m}_1}(x)\, dx = \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-\frac{n(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx \equiv I = \beta.
\end{aligned}$$

В интеграле I выполним подстановку $\sqrt{n}(x-a)/\sigma = y$, тогда $x = a + (\sigma y/\sqrt{n})$, $dx = \sigma dy/\sqrt{n}$. Найдем новые пределы интегрирования и в результате имеем

$$I = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \int\limits_{-\sqrt{n}\varepsilon/\sigma}^{\sqrt{n}\varepsilon/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, dy = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

где $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$ — затабулированная функция Лапласа (см. приложение 2). Тогда

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{\beta}{2}.$$

Из таблиц функции Лапласа по вероятности $\beta/2$ находим аргумент функции Φ; пусть это t_β. Поэтому для определения ε имеем равенство

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = t_\beta, \quad \text{откуда} \quad \varepsilon = t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

И окончательно имеем:

$$\overline{m}_1 - t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{m}_1 + t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{3}$$

Интервал (3) и является доверительным для параметра a нормального распределения с известной дисперсией. Анализ равенства (2) показывает, что

- увеличение объема выборки n повышает точность оценки (ε уменьшается);
- увеличение доверительной вероятности β увеличивает доверительный интервал (снижает точность);
- если задать точность оценки ε и доверительную вероятность β, то из (2)

  $$n = \frac{t_\beta^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2},$$

  где n — минимальный объем выборки, обеспечивающий заданную точность.

Заметим, что интервал (3) в силу центральной предельной теоремы пригоден в качестве приближенного для любых распределений. С ростом объема выборки погрешность от замены неизвестного нам точного интервала интервалом (3) уменьшается.

16.1. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение. Постройте доверительный интервал для математического ожидания a при доверительной вероятности 0,95, если среднее арифметическое 16 наблюдений за X составило 18,6.

Решение. В условии задачи $\beta = 0{,}95$, $\overline{m}_1 = 18,6$. Из таблицы значений функции Лапласа по $\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ находим $t_\beta = 1{,}96$. Поэтому (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} 18,6 - \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{16}} < \quad a \quad &< 18,6 + \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{16}}, \quad \text{откуда} \\ 17{,}62 < \quad a \quad &< 19{,}58. \end{aligned}$$

Смысл полученного результата: если будет произведено достаточно большое число выборок объема $n = 16$, то в 95% случаев доверительные интервалы накроют параметр a.

16.2. Среднее квадратическое отклонение случайной нормальной величины X равно 10 единицам. Для выборки объема 100 постройте доверительный интервал для оценки математического ожидания X с надежностью 99%, если выборочное среднее равно 6 единицам.

Решение. Требуется найти доверительный интервал

$$\overline{m}_1 - t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{m}_1 + t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Все величины, кроме t_β, известны. Найдем t_β из соотношения $\Phi(t) = 0{,}99/2 = 0{,}495$. По таблице приложения 2 находим $t_\beta = 2{,}58$. Подставив $t_\beta = 2{,}58$, $\overline{m}_1 = 6$, $\sigma = 10$, $n = 100$ в формулу, получим искомый доверительный интервал $3{,}42 < a < 8{,}58$.

16.3. X — нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением, равным 15 единицам, и по выборкам из X с заданной доверительной вероятностью 0,925 производятся интервальные оценивания неизвестного математического ожидания величины X (с помощью выборочного среднего). Каков должен быть минимальный объем выборки, чтобы точность оценки была равна двум единицам?

Решение. Воспользуемся формулой, определяющей минимальный объем выборки, если задана точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней:

$$n = \frac{t_\beta^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

По условию $\beta = 0{,}925$; следовательно, $\Phi(t) = 0{,}925/2 = 0{,}4625$. По таблице приложения 2 найдем $t_\beta = 1{,}78$. Подставив $t_\beta = 1{,}78$, $\sigma = 15$ и $\varepsilon = 2$ в формулу, получим искомый объем выборки $n = 80$.

Задачи для самостоятельного решения

16.4. Среднее квадратическое отклонение случайной нормальной величины X равно 20. Объемы двух выборок из генеральной совокупности X равны 16 и 25. Выборочные средние равны соответственно 3 и 4. Постройте доверительные интервалы для оценки математического ожидания X с надежностью 95%.

16.5. X — отклонение длины изготавливаемых однотипных деталей от их проектной длины. Среднее квадратическое отклонение случайной величины X равно 4 мм. Из пробной партии в 25 деталей определено для X выборочное среднее 18 мм и построен доверительный интервал для математического ожидания величины X с надежностью (доверительной вероятностью) 99%. Определите этот интервал.

16.6. Цех производит электролампы одного типа, относительно которых известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы равно 30 часов. Найдите минимальное число радиоламп в выбранной наугад партии, при котором с надежностью 0,975 можно утверждать, что точность оценки средней продолжительности горения лампы будет равна 10 часам.

16.7. Сколько должно быть произведено выстрелов, чтобы с надежностью 0,95 можно было утверждать, что выборочное среднее отклонений X точки разрыва снаряда от цели оценивает математическое ожидание величины X с точностью 3 м, если среднее квадратическое отклонение случайной величины X равно 6 м?

16.8. Отклонение X разрыва снаряда от цели — нормально распределенная случайная величина, и ее дисперсия равна 9 м^2. Произведено сто выстрелов по цели. Какова должна быть надежность, что выборочное среднее отклонений X отличается от математического ожидания величины X не более чем на 0,6 м? Ответ округлите до половины процента.

Ответы

16.4. $-6{,}8 < a < 12{,}8$; $-4{,}84 < a < 10{,}84$.
16.5. $15{,}94 < a < 20{,}06$. **16.6.** 46. **16.7.** 16. **16.8.** 95,4%.

17. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии

Как и в предыдущем случае, пусть случайная величина X имеет нормальное распределение, но параметры a и σ — неизвестны. Доказано, что при нормальном распределении величины X случайная величина

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{m}_1 - a}{s}$$

имеет распределение Стьюдента $S(t, n)$ с $k = n - 1$ степенями свободы; здесь s — "исправленное" среднее квадратическое отклонение, то есть величина

$$s = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{m}_1)^2}{n - 1}}.$$

Функция $S(n, t)$ — четная относительно t, имеет достаточно сложный вид, но важно, что интегралы от нее в разных пределах затабулированы. Построим доверительный интервал для a.

$$\begin{aligned}
&P\left(|a-\overline{m}_1|<\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon<\overline{m}_1-a<\varepsilon\right)=\\
&=P\left(-\tfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}<T<\tfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}\right)=\\
&=\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}/s}^{\varepsilon\sqrt{n}/s}S(t,n)\,dt=2\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{n}/s}S(t,n)\,dt=\beta.
\end{aligned}$$

По таблицам распределения Стьюдента (приложение 3) по доверительной вероятности β и числу n находим верхний предел интегрирования $t_\beta=\varepsilon\cdot\sqrt{n}/s$. Поэтому окончательно доверительный интервал имеет вид

$$\overline{m}_1-\frac{s\cdot t_\beta}{\sqrt{n}}<a<\overline{m}_1+\frac{s\cdot t_\beta}{\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Формула (4) служит для оценки истинного значения измеряемой величины. А именно, пусть производится n независимых измерений некоторой физической величины, истинное значение которой a — неизвестно. Результаты отдельных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — случайные независимые величины, имеют одно и то же математическое ожидание a и одинаковую дисперсию σ^2 (равноточные измерения). Эмпирически установлено, что x_i имеют нормальное распределение. Поэтому при обработке экспериментальных результатов для оценки значения измеряемой величины можно пользоваться формулой (4), и так как обычно σ неизвестно, то она является предпочтительной.

17.1. Выполняя лабораторную работу, студент снял девять замеров, на основании которых вычислил среднее значение 42,319 и “исправленное” среднее квадратическое отклонение $s = 5$. Оцените с надежностью 0,95 истинное значение измеряемой величины.

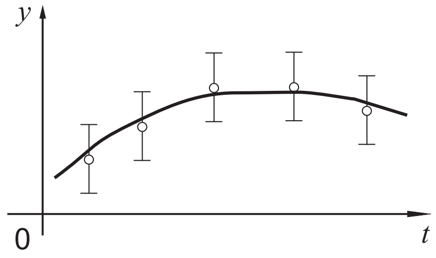
Решение. По условию $\overline{m}_1=42{,}319,\quad s=5,\quad \beta=0{,}95,$
$n=9$. Из приложения 3 по β и $n=9$ находим $t_\beta(9)=2{,}31$, и выражение (4) принимает вид:

$$42{,}319-\frac{2{,}31\cdot 5}{\sqrt{9}}<\quad a\quad<42{,}319+\frac{2{,}31\cdot 5}{\sqrt{9}}\quad\text{или}$$

$$38{,}469 < \quad a \quad < 46{,}169.$$

То есть с надежностью 95% истинное значение измеряемой величины накрывается этим интервалом.

Для того чтобы можно было сравнивать результаты измерений, выполненных различными авторами, результаты нужно приводить в виде доверительного интервала.



Если результатом является экспериментальная кривая, то на ней так же приводятся доверительные границы. Здесь кружком отмечены средние значения величины y, подсчитанной по результатам нескольких замеров; интервалами отмечены доверительные интервалы при различных значениях t. Чем уже доверительный интервал, тем больше "доверия" к измерениям в соответствующей точке.

17.2. Пусть 2,015, 2,020, 2,025, 2,020, 2,015 — результаты независимых равноточных измерений толщины металлической пластинки: а) с надежностью 95% оцените истинную толщину пластинки; б) найдите минимальное число измерений, которое надо провести, чтобы с той же надежностью можно было утверждать, что предельная погрешность точечной оценки толщины не превышает 0,003.

Решение. а) По условию $n = 5$, $\beta = 0{,}95$, из таблицы приложения 3 находим $t_\beta = 2{,}776$ (значение t_β здесь взято с точностью до третьего знака после запятой); находим выборочное среднее

$$\overline{m}_1 = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(2{,}015 + 2{,}020 + 2{,}025 + 2{,}020 + 2{,}015)}{5} = 2{,}019.$$

Далее находим "исправленное" среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{m}_1)^2}{n-1}} = 0{,}0042$$

и вычисляем доверительный интервал по формуле (4). Искомый доверительный интервал имеет границы (2,014; 2,024).

б) Для вычисления необходимого числа измерений имеем

$$\varepsilon = t_\beta \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \frac{t_\beta^2 \cdot s^2}{\varepsilon^2} = \frac{(2{,}766)^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5}}{9 \cdot 10^{-6}} \approx 16.$$

Следовательно, для того чтобы предельная погрешность ε истинного значения толщины пластины не превышала 0,003, следует провести еще $16 - 5 = 9$ измерений и заново вычислить доверительный интервал.

17.3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

варианта x_i	-2	1	2	3	4	5
частота n_i	2	1	2	2	2	1

Оцените с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Решение. Выборочную среднюю и "исправленное" среднее квадратическое отклонение найдем соответственно по формулам:

$$\overline{m}_1 = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum n_i(x_i - \overline{m}_1)^2}{n-1}}.$$

Подставив в эти формулы данные задачи, получим $\overline{m}_1 = 2$, $s = 2{,}4$. Найдем t_β. Пользуясь таблицей приложения 3, по $\beta = 0{,}95$ и $n = 10$ находим $t_\beta = 2{,}26$. Найдем искомый доверительный интервал:

$$\overline{m}_1 - t_\beta s/\sqrt{n} < a < \overline{m}_1 - t_\beta s/\sqrt{n}.$$

Подставляя $\overline{m}_1 = 2$, $t_\beta = 2{,}26$, $s = 2{,}4$, $n = 10$, получим искомый доверительный интервал $0{,}3 < a < 3{,}7$, покрывающий неизвестное математическое ожидание a с надежностью 0,95.

В случае большого числа экспериментальных данных для нахождения доверительных интервалов рекомендуется использовать пакет "Mathcad" (раздел "Статистика").

17.4. По данным 144 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{m}_1 = 189{,}07$ и "исправленное" среднее квадратическое отклонение $s = 12$. Оцените истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\beta = 0{,}99$. Предполагается, что результаты распределены нормально.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию a. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала

$$\overline{m}_1 - t_\beta s/\sqrt{n} < a < \overline{m}_1 - t_\beta s/\sqrt{n}.$$

Все величины, кроме t_β, известны. Найдем t_β. По таблице приложения 3 по $\beta = 0{,}99$ и $n = 144$ находим $t_\beta = 2{,}576$. Подставив $\overline{m}_1 = 189{,}07$, $t_\beta = 2{,}576$, $s = 12$, $n = 144$ в формулу, получим искомый доверительный интервал: $186{,}49 < a < 191{,}65$.

Задачи для самостоятельного решения

17.5. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	3	2	1	1

Оцените с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала.

17.6. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

варианта x_i	-3,9	-2,9	-1,9	0,9	0,1	1,2	2,2	3,2	4,3	5,3
частота n_i	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1

Оцените с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

17.7. Оцените с надежностью 0,99 истинное значение измеряемой величины a по результатам исследования:

x_i	0,7	1,2	1,4	1,7	2,3	3,1
n_i	1	2	1	1	2	2

17.8. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{m}_1 = 84{,}28$ и “исправленное” среднее квадратическое отклонение $s = 8$. Оцените истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\beta = 0{,}999$. Предполагается, что результаты распределены нормально.

Ответы

17.5. $\overline{m}_1 = 23$, $s = 1{,}49$, $1{,}23 < a < 3{,}37$. **17.6.** $\overline{m}_1 = 0{,}625$, $s = 2{,}87$, $-1{,}20 < a < 2{,}45$. **17.7.** $\overline{m}_1 = 1{,}89$, $s = 0{,}86$, $0{,}93 < a < 2{,}85$. **17.8.** $76{,}14 < a < 92{,}42$.

18. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение. Построим доверительный интервал для σ. Пусть имеется n независимых наблюдений случайной величины X. По экспериментальным данным вычислим s — “исправленное” среднее квадратическое отклонение и примем эту величину в качестве оценки σ. Пусть доверительные интервалы покрывают σ с вероятностью β:

$$P \quad (|\sigma - s| < \varepsilon) = \beta \quad \text{или}$$
$$P \quad (s - \varepsilon < \sigma < s + \varepsilon) = \beta.$$

Неравенство $s - \varepsilon < \sigma < s + \varepsilon$ запишем в виде

$$s\left(1 - \frac{\varepsilon}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right).$$

Обозначим $\varepsilon/s = q$, тогда

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q). \tag{5}$$

Введем в рассмотрение случайную величину

$$z = \frac{s\sqrt{(n-1)}}{\sigma}.$$

Статистика z^2 имеет так называемое χ^2-распределение и зависит от n:

$$R(z,n) = \frac{z^{n-2} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Интегралы от этого распределения затабулированы. Неравенство (5) преобразуем так, чтобы свести его к величинам z.

Если $q < 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(1+q)} &< \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)} \quad \text{или} \\ \frac{\sqrt{n-1}}{1+q} &< \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}, \quad \text{то есть} \\ \frac{\sqrt{n-1}}{1+q} &< z < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Пусть число β задано. Тогда

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < z < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}\right) = \beta = \int\limits_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} R(z,n)\,dz.$$

Пользуясь таблицей приложения 4, по заданным n и β находим q. Итак, доверительный интервал найден:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q). \tag{6}$$

Если $q > 1$, то неравенство (5) принимает вид

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < z < \infty.$$

Значения q при $q > 1$ можно найти из условия

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\infty} R(z,n)\,dz = \beta.$$

И в этом случае для отыскания q по известным n и β пользуемся таблицей приложения 4. Итак, доверительный интервал в этом случае имеет вид:

$$0 < \sigma < s(1+q). \tag{7}$$

Заметим, что в теории ошибок принято точность измерений (точность прибора) характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерений, то есть доверительным интервалом вида (5).

18.1. Найдите 95% доверительный интервал для среднего квадратического отклонения, если известно, что величина X распределена нормально, число измерений равно 20, а найденное по экспериментальным данным “исправленное” среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}4$.

Решение. Задача сводится к отысканию доверительного интервала

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \quad \text{если} \quad q < 1,$$

или

$$0 < \sigma < s(1+q), \quad \text{если} \quad q > 1.$$

По данным $\beta = 0{,}95$, $n = 20$ по таблице приложения 4 находим $q = 0{,}37$. Так как $q < 1$, то, подставив $s = 0{,}4$, $q = 0{,}37$ в формулу (6), находим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения: $(0{,}25; 0{,}55)$.

18.2. Произведено 10 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем “исправленное” среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,8. Найдите точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение. Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала (5), покрывающего σ с заданной надежностью $\beta = 0{,}95$. По данным $\beta = 0{,}95$ и $n = 10$ по таблице приложения 4 находим $q = 0{,}65$. Подставив $s = 0{,}8$, $q = 0{,}65$ в соотношение (6), окончательно получим $0{,}28 < \sigma < 1{,}32$.

Задачи для самостоятельного решения

18.3. По данным выборки объема n из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака найдено "исправленное" среднее квадратическое отклонение s. Найдите доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,999, если:
а) $n = 6$, $s = 6{,}85$; б) $n = 20$, $s = 5{,}4$.

18.4. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем "исправленное" среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,4. Найдите точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Ответы

18.3. а) $0 < \sigma < 33{,}43$; б) $0{,}65 < \sigma < 10{,}15$.

18.4. $0{,}04 < \sigma < 0{,}76$.

Приложение 1. Таблица значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продолжение приложения 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2. Таблица значений функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Приложение 3. Таблица значений $t_\beta = t(\beta, n)$

	β				β		
n	0,95	0,99	0,999	n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4. Таблица значений $q = q(\beta, n)$

	β				β		
n	0,95	0,99	0,999	n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2, 67	5,64	20	0,37	0, 58	0,88
6	1,09	2, 01	3,88	25	0,32	0, 49	0,73
7	0,92	1, 62	2,98	30	0,28	0, 43	0,63
8	0,80	1, 38	2,42	35	0,26	0, 38	0,56
9	0,71	1, 20	2,06	40	0,24	0, 35	0,50
10	0,65	1, 08	1,80	45	0,22	0, 32	0,46
11	0,59	0, 98	1,60	50	0,21	0, 30	0,43
12	0,55	0, 90	1,46	60	0,188	0, 269	0,38
13	0,52	0, 83	1,33	70	0,174	0, 245	0,34
14	0,48	0, 78	1,23	80	0,161	0, 226	0,31
15	0,46	0, 73	1,15	90	0,151	0, 211	0,29
16	0,44	0, 70	1,07	100	0,143	0, 198	0,27
17	0,42	0, 66	1,01	150	0,115	0, 160	0,211
18	0,40	0, 63	0,96	200	0,099	0, 136	0,185
19	0,39	0, 60	0,92	250	0,089	0, 120	0,162

Литература

1. Магазинников Л.И. Высшая математика 4. Теория вероятностей: Учебное пособие. — Томск: ТУСУР, 1998. — 118 с.

2. Венцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962. — 564 с.

3. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973. — 365 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988. — 448с.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1977. — 480с.

6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 1979. — 400 с.

7. Гнеденко Б. В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982. – 156 с.

8. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1975. — 111 с.

9. Желдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики. — Киев: Высшая школа, 1989. — 262 с.

10. Севостьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1980. — 224 с.

11. Самойлова М.В., Пестова Н.Ф. Практические занятия по теории вероятностей. Часть 1, 2. — Томск, 1970.

12. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Справочное пособие к решению задач: Теория вероятностей. — Мн.: Тетрасистемс, 1999. — 288 с.

13. Подольский В.А., Суходольский А.М. Сборник задач по высшей математике. — М.: Высшая школа, 1974. — 351 с.

14. Орлова Л.Г., Хацкевич М.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей (учебное пособие). — Тюмень, 1977. — 145 с.

15. Лозинский С.Н. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Статистика, 1967. — 127 с.

16. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и

математической статистике. — М.: Высшая школа, 1991. — 156 с.

17. Трофименко В.А. Индивидуальные задания по теории вероятностей. — Томск: ТАСУР, 1994. — 101 с.

18. Томиленко В.А. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы на тему “Теория вероятностей”. — Томск: ТИАСУР, 1987. — 61 с.