



**РКФ**

Радиоконструкторский  
факультет

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»**

---

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой РЭТЭМ

\_\_\_\_\_ **В.И.Туев**

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2018 г.

## **Программный комплекс MathCAD в задачах статистической обработки данных**

Лабораторный практикум  
по дисциплине «Статистическая обработка данных» для студентов направления  
050306 «Экология и природопользование» (бакалавриат)

Разработчик:

Доцент кафедры РЭТЭМ

\_\_\_\_\_ **Д.В.Озеркин**

Томск 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

1	Лабораторная работа №1 – Статистические исследования электромагнитного загрязнения окружающей среды по методу Монте-Карло...	3
1.1	Цель работы.....	3
1.2	Порядок выполнения лабораторной работы.....	3
1.3	Статистический анализ электрической схемы - источника инфранизких частот.....	3
1.4	Пример для повторения.....	9
1.5	Лабораторное задание .....	15
1.6	Контрольные вопросы.....	15
1.7	Варианты заданий.....	15
2	Лабораторная работа №2 – Полный факторный эксперимент при анализе источников электромагнитного излучения .....	17
2.1	Цель работы.....	17
2.2	Порядок выполнения работы.....	17
2.3	Основные понятия планирования эксперимента.....	17
2.4	Пример для повторения.....	24
2.5	Лабораторное задание .....	29
2.6	Контрольные вопросы.....	29
2.7	Варианты заданий.....	30
	Список литературы .....	31

# 1 Лабораторная работа №1 – Статистические исследования электромагнитного загрязнения окружающей среды по методу Монте-Карло

## 1.1 Цель работы

В ходе выполнения настоящей работы предусматривается:

- 1) изучение статистического метода исследования по Монте-Карло;
- 2) знакомство со способами задания случайных величин в программе MathCAD;
- 3) приобретение навыков построения гистограмм распределения случайных величин;
- 4) знакомство с некоторыми свойствами нормального закона распределения случайных величин.

## 1.2 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Изучить методические указания к лабораторной работе.
2. Письменно, в отчете по лабораторной работе ответить на контрольные вопросы.
3. Внимательно ознакомиться с методическим примером, приведенным в пункте 1.4.
4. Выполнить лабораторное задание согласно варианту задания.
5. Сделать выводы по работе.

**Внимание!** Отчет по лабораторной работе в обязательном порядке должен содержать: схемы включения, графики зависимостей, все необходимые расчеты и их результаты, текстовые пояснения. На графиках в отчете должны присутствовать единицы измерения, масштаб, цена деления.

## 1.3 Статистический анализ электрической схемы - источника инфранизких частот

Природа не дает человеку в готовом виде всего того, что ему необходимо для удовлетворения его потребностей. Возникла необходимость в труде и производственной деятельности. Прогресс развития человечества, рост производства, образование инфраструктуры (транспорт, связь и т.п.) привели к резкому возрастанию обмена веществ и энергии между человеческим обществом и биосферой. Воздействия человека на окружающую среду – это антропогенное воздействие. Одним из видов антропогенного воздействия является антропогенное загрязнение. Загрязнение вообще – это неблагоприятное изменение нашего окружения, являющееся полностью или в основном побочным результатом деятельности человека. Загрязнение, связанное с деятельностью человека, называют антропогенным загрязнением. Антропогенное загрязнение – это вещество и энергия либо вообще не характерные для биосферы, либо не характерны их концентрации и

интенсивности. В виде энергии окружающая среда загрязняется теплом, ионизирующим излучением, электромагнитными полями (ЭМП), световой энергией (в том числе ультрафиолетовым и инфракрасным излучением), акустическим шумом, вибрацией, ультразвуком. С точки зрения экологии ЭМП – это один из видов энергетического загрязнения окружающей среды (рис. 1.1).



Рис. 1.1 – Классификация антропогенных загрязнений

Энергетические загрязнители (кроме теплового и радиационного) не аккумулируются в природе, а оказывают влияние на биосферу лишь во время их производства. Аккумулирующееся загрязнение – это вредные вещества и некоторые виды энергии, способные в отличие от неаккумулирующихся накапливаться в окружающей среде и живых организмах. Согласно международной регламентации, электромагнитный спектр до 3 ТГц делится на 12 частотных диапазонов. Эти диапазоны обозначены номерами, как показано в таблице 1.1, в которой приведены только диапазоны, используемые для телекоммуникаций.

Для того чтобы уменьшить взаимное влияние различных технических средств друг на друга, а также снизить уровень радиопомех, проведена международная регламентация каждого используемого диапазона. Для каждого типа излучающих технических средств отведены свои участки. Определенные поддиапазоны отведены для радиовещания, для телевидения, для различных видов радиосвязи, для радиолокации и т. д. Свои участки диапазона имеют технические средства военного назначения, отдельно выделены поддиапазоны для радиолучителей. Установленные жесткие требования и ограничения на уровни, так называемых, внеполосных излучений позволяют обеспечить электромагнитную совместимость излучающих средств – возможность одновременной работы или работы по графику. Подсчитано, что человечество использует миллиарды тонн минерального сырья, топлива, воды, биомассы, атмосферного кислорода, а в полезный продукт переходит лишь один процент затраченных природных ресурсов. Это в полной мере относится и к электромагнитному полю.

Таблица 1.1. Частотные диапазоны электромагнитного спектра в полосе частот 300 Гц - 300 ГГц

Номер полосы частотного спектра	Диапазон частот (включая верхнюю и исключая нижнюю частоты)	Обозначение полосы	Метрическое наименование волн
3	0.3...3 кГц	ИНЧ (инфранизкие частота)	Гектокилометровые
4	3...30 кГц	ОНЧ (очень низкие частоты)	Мириаметровые
5	30...300 кГц	НЧ (низкие частоты)	Километровые
6	0.3...3 МГц	СЧ (средние частоты)	Гекаметровые
7	3...30 МГц	ВЧ (высокие частоты)	Декаметровые
8	30...300 МГц	ОВЧ (очень высокие частоты)	Метровые
9	0.3...3 ГГц	УВЧ (ультравысокие частоты)	Дециметровые
10	3...30 ГГц	СВЧ (сверхвысокие частоты)	Сантиметровые
11	30...300 ГГц	КВЧ (крайне высокие частоты)	Миллиметровые
12	300...3000 ГГц	КВЧ (крайне высокие частоты)	Децимиллиметровые

Приведем такой гипотетический пример. Технические средства радиосвязи, радиовещания и телевидения излучают огромное количество электромагнитной энергии. Мощности передатчиков изменяются от милливатт (например, мощность передатчика радиотелефонной трубки) до сотен киловатт и даже единиц мегаватт (радиовещательные передатчики НЧ и СЧ диапазонов). Электромагнитная энергия, излучаемая телекоммуникационными средствами, имеет вполне определенное назначение – она должна воздействовать на входные цепи приемных устройств. Если предположить, что для нормальной работы каждого приемного устройства необходима мощность 1 мВт, то нетрудно подсчитать, что для полного изъятия из окружающей среды электромагнитной энергии одного передатчика мощностью 100 кВт необходимо иметь 100 млн. приемников. Таких передатчиков только в России сотни и даже тысячи... Что же происходит с электромагнитной энергией? На что она расходуется? Как проявляется ее действие? Часть ее уходит в космическое пространство, а остальная рассеивается (поглощается) окружающей средой: атмосферой, окружающими предметами, в том числе и биологическими объектами. Следует учитывать, что электромагнитную энергию излучают и множество других технических средств, основные функции которых не связаны с преднамеренным процессом излучения,

например, энергетические установки, электрифицированный транспорт, линии электропередач (ЛЭП), бытовые приборы, компьютеры и т.п. Уровень электромагнитного загрязнения пока не приобрел глобально опасного характера, если не считать появившегося в последнее столетие и постоянно увеличивающегося уровня радифона, под которым понимают суммарный эффект всех излучающих средств Земного шара. Электромагнитное излучение высокого уровня локализовано вблизи источников и существует только в периоды работы излучающих технических средств.

Метод статистического анализа элементов электрических схем на ЭВМ имеет много общего с экспериментальными статистическими методами в расчетных соотношениях, применяемых для обработки выходных параметров. Основное различие этих методов заключается в способах задания случайных значений внутренним параметрам схемы.

При экспериментальном исследовании образцов схем, построенных на дискретных компонентах, корреляционные связи существуют в основном между внутренними параметрами, относящимися к комплектующим приборам (диодам, транзисторам). Их учитывают автоматически при изготовлении образцов схем. Если, например, параметр  $\tau$  транзистора имеет корреляционную связь с параметром  $B$ , то при установке в экспериментальные схемы разных образцов транзисторов и измерении их параметров эта связь будет учтена, так как транзистор представляет собой единый прибор. При машинных методах статистического анализа схем внутренние корреляционные связи необходимо учитывать при задании набора значений для очередного варианта расчета параметров выходных сигналов. Исходные данные для статистической обработки требуют проведения  $N$  вариантов расчета выходных параметров. Для каждого из вариантов необходим набор значений внутренних параметров  $x_i$ , представляющих собой случайные величины. Законы распределения случайных величин должны соответствовать законам распределения внутренних параметров как по форме, так и по числовым характеристикам.

Многовариантный статистический анализ схемы возможен при наличии сведений о законах распределения и взаимных корреляционных связях внутренних параметров. Эти сведения можно получить путем достаточно большого количества измерений параметров изготовленных дискретных или интегральных компонентов. При идентичной технологии и условиях производства статистические сведения о параметрах компонентов могут быть распространены на обширные группы схем, построенных на этих компонентах.

Количественная оценка отклонений выходных параметров за счет изменений внутренних и внешних параметров может быть проведена на основе соотношения, показывающего зависимость  $j$ -ого выходного параметра  $y_j$ :

$$y_j = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; q_1, \dots, q_k, \dots, q_m), \quad (1.1)$$

где  $x_i$  – значения внутренних параметров;  $q_k$  – значения дестабилизирующих (внешних) факторов.

Если зависимость (1.1) известна, то, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора с точностью до первых членов, получим:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; q_1, \dots, q_k, \dots, q_m)}{\partial x_i} \Delta x_i + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; q_1, \dots, q_k, \dots, q_m)}{\partial q_k} \Delta q_k. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для практических применений более удобны безразмерные относительные величины, т.е.:

$$\begin{aligned} \delta y_i &= \frac{\Delta y_j}{y_{j0}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; q_1, \dots, q_k, \dots, q_m)}{\partial x_i} \times \\ &\times \frac{x_{i0}}{f(x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0}; q_{10}, \dots, q_{k0}, \dots, q_{m0})} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_{i0}} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; q_1, \dots, q_k, \dots, q_m)}{\partial q_k} \times \\ &\times \frac{q_{k0}}{f(x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0}; q_{10}, \dots, q_{k0}, \dots, q_{m0})} \cdot \frac{\Delta q_k}{q_{k0}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.3) выходные, внутренние и внешние параметры представлены в виде безразмерных относительных величин  $\delta y_j = \frac{\Delta y_j}{y_{j0}}$ ;  $\delta x_i = \frac{\Delta x_i}{x_{i0}}$ ;  $\delta q_k = \frac{\Delta q_k}{q_{k0}}$ .

Коэффициенты, стоящие перед абсолютными  $\Delta x_i$  и  $\Delta q_k$  и относительными  $\delta x_i$  и  $\delta q_k$  отклонениями, характеризуют степень влияния отклонений соответствующего параметра  $x_i$  или  $q_k$  на изменение  $j$ -ого выходного параметра.

Величины  $A_{ji}$ ,  $A_{jk}$  и  $B_{ji}$ ,  $B_{jk}$  называют соответственно абсолютными и относительными коэффициентами чувствительности. Например,  $B_{ji}$  – относительный коэффициент чувствительности  $j$ -ого выходного параметра от  $i$ -ого внутреннего параметра:

$$A_{ji} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; q_1, \dots, q_k, \dots, q_m)}{\partial x_i}; \quad (1.4)$$

$$A_{jk} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; q_1, \dots, q_k, \dots, q_m)}{\partial q_k}; \quad (1.4a)$$

$$B_{ji} = A_{ji} \frac{x_{i0}}{f(x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0}; q_{10}, \dots, q_{k0}, \dots, q_{m0})}; \quad (1.5)$$

$$B_{jk} = A_{jk} \frac{q_{k0}}{f(x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0}; q_{10}, \dots, q_{k0}, \dots, q_{m0})}. \quad (1.5a)$$

Зависимости (1.2), как правило, нелинейны. Поэтому применение метода квадратичного суммирования для вычисления среднеквадратического отклонения выходного параметра допустимо лишь при условии достаточной малости  $\Delta x_i$ . В рамках аналитического вероятностного метода трудно получить ответ на вопрос о том, какие  $\Delta x_i$  можно считать достаточно малыми. Казалось бы, что этот вопрос легко решить, оценивая члены второго порядка в разложении (1.2) в ряд Тейлора. Однако такая оценка практически возможна

лишь в случаях, когда зависимость (1.2) задана в аналитическом виде. Чаще инженер не имеет аналитических выражений и получает коэффициенты влияния с помощью экспериментальных методов анализа чувствительности. Например, чтобы показать, какими могут быть погрешности применения (1.2) к анализу нелинейных электронных схем, были определены выходные параметры схемы инвертора для двух вариантов, различавшихся значениями  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . В каждом варианте анализ проводился на основе нелинейной математической модели схемы в виде системы дифференциальных уравнений и упрощенной линейной математической модели в виде (1.2), полученной после анализа чувствительности схемы. При случайном задании  $\mathbf{X}$  в пределах 20-процентных отклонений от  $\mathbf{X}_{\text{ном}} = (x_{1\text{ном}}, x_{2\text{ном}}, \dots, x_{n\text{ном}})$  получены расхождения  $\Delta y_j = y_j - y_{j\text{ном}}$  в нелинейной и линейной моделях, достигающие для некоторых  $y_j$  сотен процентов.

Следовательно, линеаризация (1.2) – главный и решающий недостаток аналитического вероятностного метода. Кроме того, в этом методе оценка вероятности выполнения условий работоспособности просто решается лишь при допущении о том, что законы распределения выходных параметров нормальные. Если обозначить совокупность технических требований вектором  $\mathbf{TT} = TT_1, TT_2, \dots, TT_m$ , то вероятность  $P$  выполнения условия работоспособности типа  $y_j < TT_j$  (уменьшение значения параметра соответствует улучшению свойств элемента) определяется так:

$$P(y_j < TT_j) = \Phi \left[ \frac{(TT_j - M_j)}{\sigma_j} \right] + 0.5,$$

где  $\Phi$  – функция Лапласа (интеграл вероятностей).

Как можно видеть, машинное проектирование требует пересмотра основ расчетных методов, поскольку методы, ориентированные на ручные вычисления, как правило, не обеспечивают необходимой точности и имеют заметные ограничения на области их применения. Очевидно, что по указанным выше причинам основу статистического анализа нелинейных электронных схем на ЭВМ не могут составить аналитические вероятностные методы.

Отказ от линеаризации математической модели схемы (ММС) означает, что связь  $y_j$  с  $x_i$  и  $q_k$  дается системой дифференциальных:

$$\frac{dV}{dt} = f(V, t),$$

или алгебраических уравнений:

$$\mathbf{f}(\mathbf{V}) = 0,$$

где  $\mathbf{V}$  – вектор переменных состояния;  $t$  – время.

Таким образом, основным методом статистического анализа схем должен быть метод Монте-Карло (метод статистических испытаний) [1], а аналитические вероятностные методы могут применяться только как вспомогательные.

## 1.4 Пример для повторения

Требуется провести статистический анализ по методу Монте-Карло активного фильтра инфранизких частот (ИФНЧ), типовая схема и идеализированная логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) которого представлены на рис. 1.2.

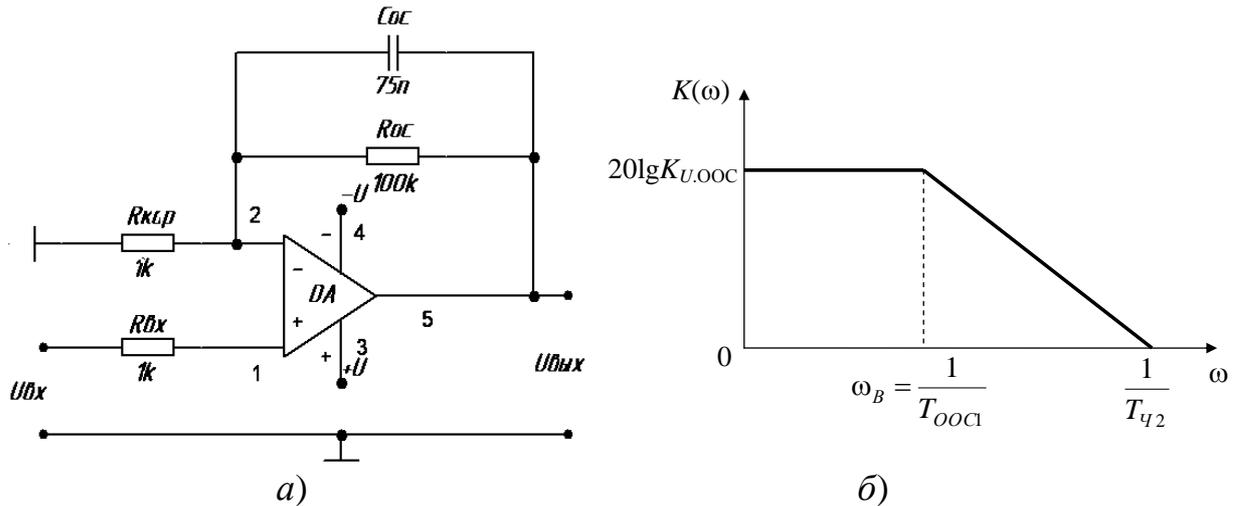


Рис. 1.2 – Типовая схема фильтра ИФНЧ (а) и его идеализированная ЛАЧХ (б)

Предполагается, что партия электрорадиоэлементов  $R_{Ос} = 100\text{ кОм}$  и  $C_{Ос} = 75\text{ нФ}$  в условиях серийного производства имеет случайный 10% разброс своих значений от номинального. Разброс значений подчинен нормальному (гауссовскому) распределению, что обуславливает случайные значения выходных параметров ИФНЧ: верхней частоты полосы пропускания  $f_B$  и коэффициента передачи  $K_U$ . Сопротивления резисторов  $R_{Кор} = R_{Вх} = 1\text{ кОм}$ , коэффициент усиления ОУ  $K_{U0} = 10^6$ .

Необходимо построить гистограмму распределения верхней частоты полосы пропускания ИФНЧ по результатам измерений на партии из  $N = 100$  штук электрорадиоэлементов (ЭРЭ)  $R_{Ос}$  и  $C_{Ос}$ . Требуется также найти основные числовые характеристики полученного распределения.

Полоса пропускания активного ИФНЧ лежит в диапазоне от 0 Гц до значения верхней частоты  $f_B$ :  $[0; f_B]$ . Верхняя частота полосы пропускания  $f_B$  определяется по уровню  $-3\text{ дБ}$  от максимального значения коэффициента передачи фильтра  $K_U$ . При проведении исследования применяется «правило трех сигма» [2]: имея уровень доверительной вероятности 99.7%, будем утверждать, что случайные величины  $R_{Ос}$  и  $C_{Ос}$  отклоняются от своего математического ожидания не более, чем на  $3\sigma$ . Т.к. разброс значений  $R_{Ос}$  и  $C_{Ос}$  от номинального значения известен заранее ( $\delta = 10\%$ ), можно вычислить среднеквадратичное отклонение нормального распределения:

$$\sigma_x = \frac{\delta\%}{100\%} \cdot \frac{M_x}{3},$$

где  $M_x$  – математическое ожидание случайной величины, в нашем случае равное номинальному значению величины  $R_{OC}$  или  $C_{OC}$ .

Ниже представлен листинг первой части исследования в MathCAD. Для большей наглядности приведена иллюстрация (рис. 1.3) поля рассеяния случайных величин  $R_{OC}$  и  $C_{OC}$ . Можно видеть, что эти случайные величины не имеют взаимной корреляционной связи. Такой вид поля рассеяния характерен для параметров дискретных ЭРЭ.

```

Сопротивление Rвх   Rin := 1000

Сопротивление Rкор   Rkor := 1000

Коэффициент усиления
операционного усилителя   Ku0 := 10^6

Количество ЭРЭ в партии   N := 100

Погрешность параметров ЭРЭ в партии, %   δ := 10

Среднеквадратическое отклонение при
уровне доверительной вероятности 99.7%   σd := 3

Математическое ожидание сопротивления
резистора Roc   Mr := 100000

Среднеквадратическое отклонение
сопротивления резистора Roc   σr := (δ / 100) * (Mr / σd)   σr = 3.333 × 10^3

Математическое ожидание емкости
конденсатора Cos   Mc := 75 · 10^-9

Среднеквадратическое отклонение емкости
конденсатора Cos   σc := (δ / 100) * (Mc / σd)   σc = 2.5 × 10^-9

Задание вектора нормально
распределенных значений
сопротивления резистора   Roc := morm(N, Mr, σr)

Задание вектора нормально
распределенных значений
емкости конденсатора   Cos := morm(N, Mc, σc)
    
```

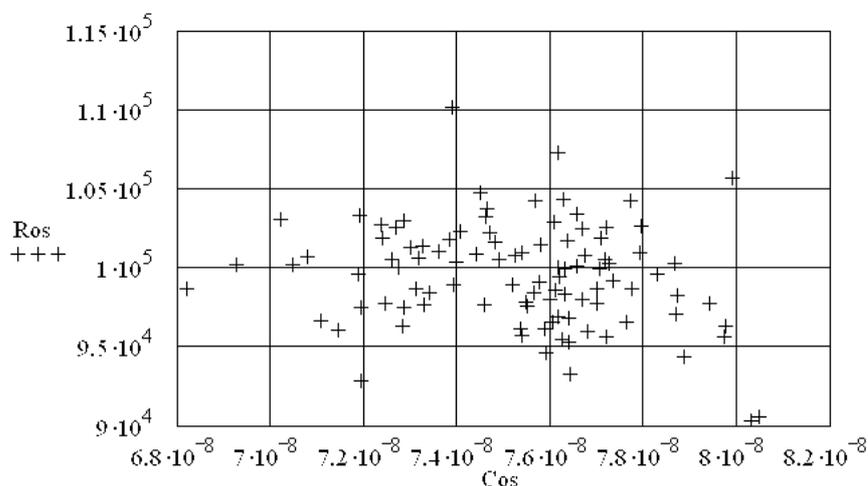


Рисунок 1.3 – Поле рассеяния случайных величин  $R_{OC}$  и  $C_{OC}$

Построение ЛАЧХ требует, чтобы значения аргумента (частоты) представляли собой геометрическую прогрессию. Пусть шаг геометрической прогрессии  $Step = 1.007$ ; количество расчетных точек  $K = 1401$ . Тогда каждое новое значение аргумента будет вычисляться по формуле  $f_j = Step^j$ , где  $j = 0, 1, 2, \dots, 1400$ . При этом диапазон значений аргумента [1 Гц; 17 428 Гц].

Передаточная функция четырехполосника, включенного в цепь ООС усилителя (рис. 1.2, а), имеет вид [3]:

$$W_q(p) = \frac{K_q(T_{q1}p + 1)}{T_{q2}p + 1},$$

где

$$K_q = \frac{R_{kop}}{R_{kop} + R_{oc}};$$

$$T_{q1} = R_{oc}C_{oc};$$

$$T_{q2} = \frac{R_{oc}R_{kop}C_{oc}}{R_{kop} + R_{oc}}.$$

Тогда передаточная функция усилителя с  $W_q(p)$  в цепи ООС равна:

$$W_{OY\_OOC}(p) = \frac{K_{u0}}{1 + K_q K_{u0}} \cdot \frac{T_{q2}p + 1}{\frac{(T_{q2} + K_q K_{u0} T_{q1})p}{1 + K_q K_{u0}} + 1},$$

где  $K_{u0}$  – коэффициент усиления ОУ на постоянном токе.

Если подставить в передаточную функцию ФНЧ номинальные значения  $R_{oc}$  и  $C_{oc}$  во всех расчетных точках, то получится АЧХ фильтра, соответствующая номинальным значениям и построенная в диапазоне [1 Гц; 17 428 Гц]. Верхняя частота полосы пропускания фильтра по условию должна определяться на уровне  $-3$  дБ от максимального значения коэффициента передачи. Известно [3], что для ФНЧ максимальный коэффициент передачи имеет место на постоянном токе, однако для нашего случая первая расчетная точка с максимальным значением функции соответствует  $f = 1$  Гц. Последовательно перебирая все расчетные точки, начиная с первой, можно в программном цикле найти номер той точки, которая соответствует уровню АЧХ в  $-3$  дБ.

В нижеприведенном листинге найдена верхняя частота полосы пропускания фильтра  $f_B \approx 21$  Гц. Следовательно, при номинальных значениях  $R_{oc}$  и  $C_{oc}$  полоса пропускания ФНЧ по уровню  $-3$  дБ составляет 21 Гц (рис. 1.4).

Шаг геометрической прогрессии для  
вычисления очередного значения частоты Step := 1.007

Диапазон расчетных точек j := 0..1400

Табулирование диапазона частот от 1 Гц до 17 кГц  $f_j := \text{Step}^j$

Номинальные значения компонентов передаточной функции фильтра

$$K_{chnom} := \frac{R_{kor}}{R_{kor} + M_r} \quad T_{ch1nom} := M_r \cdot M_c \quad T_{ch2nom} := \frac{M_r \cdot R_{kor} \cdot M_c}{R_{kor} + M_r}$$

Табулированная функция АЧХ фильтра для номинальных значений

$$W_{nom_j} := 20 \cdot \log \left[ \left| \frac{K_{u0}}{1 + K_{chnom} \cdot K_{u0}} \cdot \frac{T_{ch2nom} \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_j) + 1}{(T_{ch2nom} + K_{chnom} \cdot K_{u0} \cdot T_{ch1nom}) \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_j)} \right| \frac{1}{1 + K_{chnom} \cdot K_{u0}} + 1 \right]$$

Нахождение номера отсчета, соответствующего уровню в -3дБ  
от максимального коэффициента передачи

```
Number_nom :=
  j ← 0
  while Wnom_j > Wnom_0 - 3
    j ← j + 1
  j
```

Нахождение пороговой частоты по уровню в -3дБ

$$\text{Freq\_nom} := \text{Step}^{\text{Number\_nom}} \quad \text{Freq\_nom} = 21.228$$

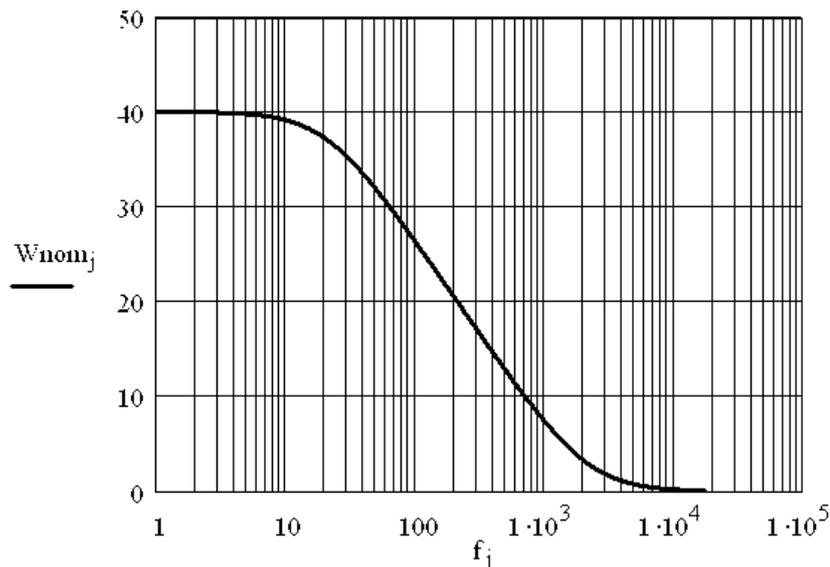


Рис. 1.4 – ЛАЧХ при номинальных значениях  $R_{oc}$  и  $C_{oc}$

С точки зрения системы MathCAD, реализация статистического исследования по методу Монте-Карло заключается в составлении матрицы размерностью  $N \times K$ . Здесь  $N$  – число реализаций по методу Монте-Карло;  $K$  – число расчетных точек для построения ЛАЧХ. В каждой конкретной реализации в компоненты передаточной функции  $K_{\text{ч}}$ ,  $T_{\text{ч1}}$  и  $T_{\text{ч2}}$  подставляются значения случайных величин  $R_{\text{ос}}$  и  $C_{\text{ос}}$ .

На рис. 1.5 представлено семейство ЛАЧХ, построенное для первых десяти реализаций, из которого видно, что случайный разброс  $R_{\text{ос}}$  и  $C_{\text{ос}}$  обуславливает девиацию полосы пропускания фильтра. В нижеприведенном листинге найден вектор *Freq* значений верхней частоты полосы пропускания фильтра для каждой из  $N$  реализаций.

Диапазон реализаций  $i := 0..(N - 1)$

Векторы значений для компонентов передаточной функции фильтра

$$K_{\text{ch}_i} := \frac{R_{\text{kor}}}{R_{\text{kor}} + R_{\text{ос}_i}} \quad T_{\text{ch1}_i} := R_{\text{ос}_i} \cdot C_{\text{ос}_i} \quad T_{\text{ch2}_i} := \frac{R_{\text{ос}_i} \cdot R_{\text{kor}} \cdot C_{\text{ос}_i}}{R_{\text{kor}} + R_{\text{ос}_i}}$$

Семейство табулированных АЧХ фильтра

$$W_{i,j} := 20 \cdot \log \left[ \left| \frac{K_{\text{u0}}}{1 + K_{\text{ch}_i} \cdot K_{\text{u0}}} \cdot \frac{T_{\text{ch2}_i} \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_j) + 1}{(T_{\text{ch2}_i} + K_{\text{ch}_i} \cdot K_{\text{u0}} \cdot T_{\text{ch1}_i}) \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_j)} \right| \right]$$

Вектор коэффициентов передачи фильтра на постоянном токе для каждой реализации

$$W_{\text{post}_i} := W_{i,0}$$

Вектор номеров отсчетов, соответствующих уровню в -3дБ от максимального коэффициента передачи для каждой реализации

$$\text{Number}(i) := \begin{cases} j \leftarrow 0 \\ \text{while } W_{i,j} \geq [W_{\text{post}_i} - 3] \\ \quad j \leftarrow j + 1 \\ j \end{cases}$$

Вектор пороговых частот по уровню в -3дБ для каждой реализации -  
суть полоса пропускания фильтра низких частот

$$\text{Freq}_i := \text{Step}^{\text{Number}(i)}$$

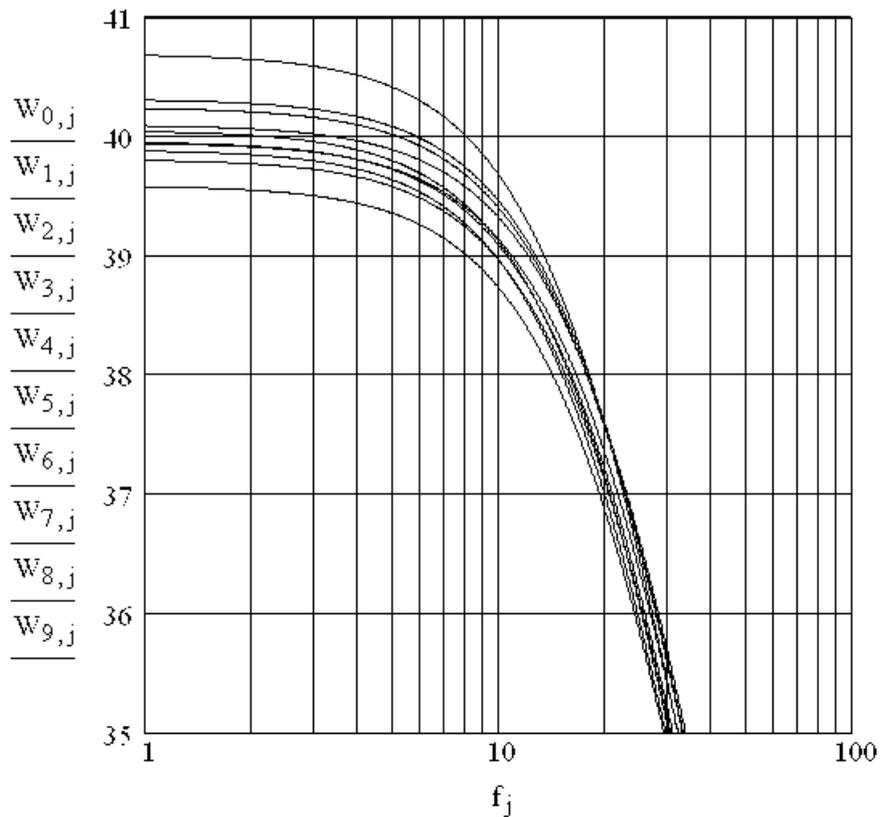


Рис. 1.5 – Семейство ЛАЧХ для первых десяти реализаций (увеличенный фрагмент ИНЧ области)

Заключительная часть исследования в MathCAD связана со статистической обработкой вектора *Freq* значений верхней частоты фильтра (нижеприведенный листинг) и построением гистограммы распределения (рис. 1.6). Количество интервалов разбиения вычисляется по правилу Старджесса.

Минимальное значение полосы пропускания	$\text{Min}\Delta f := \min(\text{Freq})$	$\text{Min}\Delta f = 18.986$
Максимальное значение полосы пропускания	$\text{Max}\Delta f := \max(\text{Freq})$	$\text{Max}\Delta f = 23.901$
Математическое ожидание полосы пропускания	$\text{mean}(\text{Freq}) = 21.364$	
Среднеквадратическое отклонение полосы пропускания	$\text{stdev}(\text{Freq}) = 0.891$	
Количество интервалов в гистограмме	$\text{int} := \text{round}(1 + 3.3 \cdot \log(N), 0)$	$\text{int} = 8$
Ширина интервала	$h := \frac{\text{Max}\Delta f - \text{Min}\Delta f}{\text{int}}$	$h = 0.614$
Построение гистограммы	$g := \text{histogram}(\text{int}, \text{Freq})$	

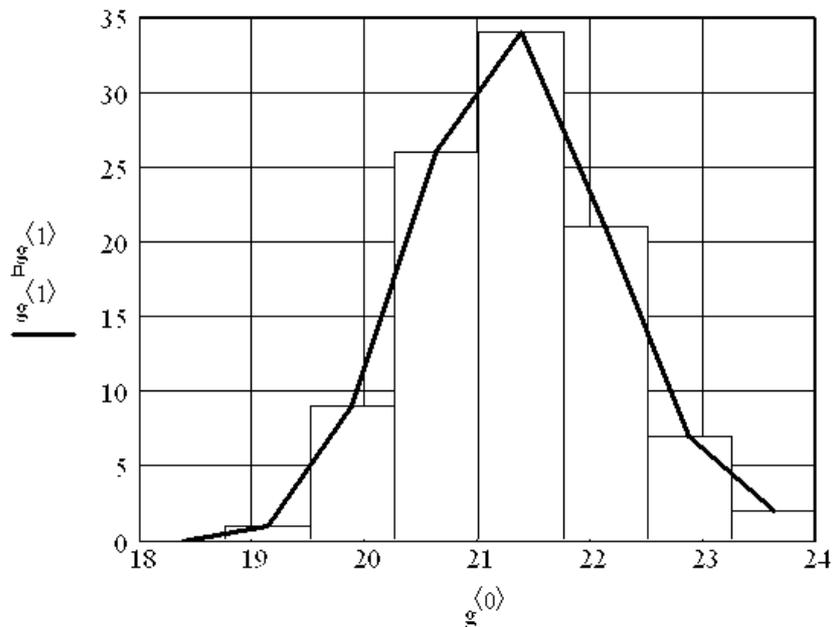


Рис. 1.6 – Гистограмма распределения верхней частоты фильтра ИНЧ

### 1.5 Лабораторное задание

Повторить методический пример, приведенный выше, по исходным данным Вашего варианта. Построить гистограммы распределения случайных величин с количеством интервалов разбиения 8, 9, 10, 11. Сравнить их внешний вид; по результатам сравнения выбрать и включить в отчет вариант наиболее близкий к виду теоретической кривой плотности нормального распределения.

### 1.6 Контрольные вопросы

1. В чем заключается основное различие метода статистического анализа на ЭВМ и экспериментального статистического метода?
2. Каковы недостатки аналитического вероятностного метода исследования?
3. Почему возрастает объем исходной информации в случае статистического анализа электрических схем?
4. Какие процедуры включает в себя метод Монте-Карло?
5. Каково должно быть количество необходимых испытаний по методу Монте-Карло?

### 1.7 Варианты заданий

- Во всех вариантах задания одинаковыми являются следующие данные:
- коэффициент усиления ОУ  $K_{U0} = 10^6$ ;
  - нормальный закон распределения случайных величин;
  - отсутствие корреляционной связи между параметрами ЭРЭ;

- количество реализаций по методу Монте-Карло равно 100;
- верхняя или нижняя частота измеряется по уровню  $-3\text{дБ}$ .

№ варианта	Номинальные значения ЭРЭ, которые имеют случайный разброс параметров	Величина разброса параметров ЭРЭ $\delta$	Доверительная вероятность
1	$r_{oc}=10\text{ кОм}; c_{oc}=15\text{ нф}$	5%	99%
2	$r_{oc}=50\text{ кОм}; c_{oc}=5\text{ нф}$	15%	99.9%
3	$r_{oc}=150\text{ кОм}; c_{oc}=10\text{ нф}$	20%	99.7%
4	$r_{oc}=75\text{ кОм}; c_{oc}=1\text{ нф}$	3%	95.5%
5	$r_{oc}=35\text{ кОм}; c_{oc}=55\text{ нф}$	5%	95.5%
6	$r_{oc}=5\text{ кОм}; c_{oc}=40\text{ нф}$	3%	99.0%
7	$r_{oc}=100\text{ кОм}; c_{oc}=10\text{ нф}$	20%	95%
8	$r_{oc}=25\text{ кОм}; c_{oc}=25\text{ нф}$	10%	95.5%
9	$r_{oc}=120\text{ кОм}; c_{oc}=5\text{ нф}$	10%	99.7%
10	$r_{oc}=80\text{ кОм}; c_{oc}=60\text{ нф}$	3%	99.9%
11	$r_{oc}=30\text{ кОм}; c_{oc}=15\text{ нф}$	15%	99%
12	$r_{oc}=70\text{ кОм}; c_{oc}=40\text{ нф}$	5%	95%
13	$r_{oc}=15\text{ кОм}; c_{oc}=20\text{ нф}$	15%	99.9%

## 2 Лабораторная работа №2 – Полный факторный эксперимент при анализе источников электромагнитного излучения

### 2.1 Цель работы

В ходе выполнения настоящей работы предусматривается:

- 1) изучение методики проведения полного факторного эксперимента;
- 2) приобретение навыков построения различных полиномиальных моделей применительно к исследуемой технической системе;
- 3) знакомство со способами автоматизации математических расчетов при обработке результатов экспериментальных данных.

### 2.2 Порядок выполнения работы

1. Изучить методические указания к лабораторной работе.
2. Письменно, в отчете по лабораторной работе ответить на контрольные вопросы.
3. Внимательно ознакомиться с методическим примером, приведенным в пункте 2.4.
4. Выполнить лабораторное задание согласно варианту задания.
5. Сделать выводы по работе.

**Внимание!** Отчет по лабораторной работе в обязательном порядке должен содержать: схемы включения, графики зависимостей, все необходимые расчеты и их результаты, текстовые пояснения. На графиках в отчете должны присутствовать единицы измерения, масштаб, цена деления.

### 2.3 Основные понятия планирования эксперимента

В технике часто встречается следующая задача. Имеется  $k$  переменных  $x_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) и зависящая от них величина  $y$ . Сами переменные могут быть неслучайными величинами, так как их значения заданы. Однако на величину  $y$  влияют и другие, не поддающиеся точному контролю переменные, поэтому величина  $y$  носит случайный характер. Для этих условий необходимы методы экспериментального определения влияния переменных на величину  $y$ .

На математическом языке задача формулируется следующим образом: нужно получить некоторое представление о функции отклика:

$$\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (2.1)$$

где  $\eta$  – параметр процесса, подлежащий оптимизации;  $x_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) – независимые переменные, которые можно изменять при постановке экспериментов.

Рассмотрим самый общий случай, когда исследование поверхности отклика ведется при неполном знании механизма изучаемых явлений. Естественно, что в этом случае аналитическое выражение функции отклика неизвестно. Поэтому приходится ограничивать представление функции отклика полиномом:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (2.2)$$

где  $\beta_0, \beta_i, \beta_{ii}, \beta_{ij}$  – теоретические коэффициентами регрессии.

В результате эксперимента получают коэффициенты  $b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij}$ , которые являются оценками теоретических коэффициентов. После этого уравнение (2.2) принимает вид:

$$\hat{\eta} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i < j < l}^k b_{ijl} x_i x_j x_l, \quad (2.3)$$

где  $\hat{y}$  – расчетное значение параметра оптимизации ( $y$  – выборочная оценка для  $\eta$ ).

Из формулы (2.3) видно, что планирование эксперимента связано с новым для экспериментатора языком алгебраических (полиномиальных) моделей. Но прежде, чем приступить к проведению эксперимента, основной целью которого является построение математической модели в виде уравнения (2.3), необходимо последовательно решить следующие задачи: выбрать критерий (или критерии) оптимизации  $y$ ; выбрать независимые переменные  $x_i$ -факторы; вычислить коэффициенты регрессии  $b_i$ ; определить вид функции отклика и планирования.

**Критерий оптимизации.** Выбирая критерий оптимизации  $y$  в математической модели (2.3), необходимо учитывать многие соображения. Критерий оптимизации желательно иметь таким, чтобы он однозначно и с достаточной полнотой характеризовал эффективность объекта исследования. Следует стремиться к тому, чтобы критерий был только один, мог оцениваться количественно с максимальной статистической эффективностью и имел ясный физический смысл. Иногда критерий оптимизации приходится изменять из-за технических трудностей, например в связи с отсутствием необходимых приборов, достоверных методов оценки. В этих условиях можно применять критерии, дающие косвенную оценку, тогда поиск экстремума становится интуитивным, и усложняется интерпретация результатов. Не рекомендуется выбирать в качестве критерия оптимизации параметры, которые нельзя измерять, например выражаемые в процентах, в логарифмических и тригонометрических функциях и т.д.

Когда имеется несколько критериев оптимизации, следует рассмотреть возможность уменьшения их числа до минимума. Если не удастся уменьшить число критериев до одного, то при проведении исследований нужно решить компромиссные задачи или провести переформулировку задачи, заменив задачу с несколькими критериями оптимизации последовательными задачами с меньшим числом критериев в каждой. Критерий оптимизации, выбранный на стадии предварительного изучения объекта исследования, можно заменить другими в процессе экспериментальной работы.

**Критерий (или параметр) оптимизации – это реакция (отклик) на воздействия факторов, которые определяют поведение изучаемой системы.** Параметры оптимизации в технических системах могут быть экономическими, технико-экономическими, статистическими,

психологическими, тактико-техническими и т.д. Параметр оптимизации должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Быть количественным и задаваться одним числом; допускать измерение при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов (множество значений, которые принимает параметр оптимизации, называется областью его определения);

2. Быть универсальным, т.е. всесторонне характеризовать объект исследования;

3. Иметь простой физический смысл;

4. Существовать для всех стадий проведения эксперимента; быть эффективным – это требование сводится к выбору параметра оптимизации для технической системы, который определяется с наибольшей возможной точностью, наглядностью результатов, удобством пользования, однозначностью и т.д.

После выбора критериев оптимизации выбирают управляемые факторы – переменные, воздействие которых на объект исследования можно изменять целенаправленно.

**Независимые переменные (факторы).** После того как выбраны объект исследования и параметры оптимизации, необходимо включить в рассмотрение все существующие факторы, которые могут оказывать воздействия на исследуемый объект. Число выбранных факторов обуславливает размерность изучаемого факторного пространства. Факторы определяют сам объект исследования или его состояние. Выбирая факторы, целесообразно учитывать область, ограничивающую их возможное варьирование, а также размерность факторов, так как при движении в область оптимума планирование эксперимента обычно не инвариантно к размерности факторов. Желательно, чтобы факторы имели количественную оценку, хотя планирование эксперимента возможно, если некоторые факторы представлены качественно. Важным требованием, предъявляемым к управляемым факторам, является отсутствие их взаимозаменяемости. Можно сформулировать следующие требования к факторам:

1. Независимость, т.е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условие невыполнимо, то планировать эксперимент невозможно.

2. Совместимость. При планировании эксперимента обычно одновременно изменяется несколько факторов. Поэтому очень важно сформулировать требования, которые предъявляются к совокупности факторов. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны.

3. Управляемость. Это значит, что экспериментатор, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т.е. может управлять фактором. Планировать эксперимент можно в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора.

4. Точность замера. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. Если факторы измеряют с большой ошибкой или

особенность объекта исследования такова, что значения факторов трудно поддерживать на заданном уровне (уровень фактора «плывет»), то экспериментатору следует обратиться к другим методам исследования объекта.

5. Однозначность, т.е. непосредственное воздействие факторов на объект. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов. Но в планировании могут участвовать и сложные факторы, состоящие из нескольких простых факторов. Необходимость введения сложных факторов возникает при необходимости предоставления динамических особенностей объекта в статистической форме.

Степень точности математической модели определяется диапазоном изменения факторов. В результате предварительной работы для каждого  $i$ -го фактора устанавливают следующие значения:  $x_{i0}$  – основной уровень фактора;  $x_{i\max}$ ,  $x_{i\min}$  – верхний и нижний уровни  $i$ -го фактора, принимаемые во время опытов;  $\Delta x_i$  – интервал варьирования (изменения).

При проведении экспериментов используются кодированные значения уровней факторов. При этом основной уровень принимается равным нулю, верхний кодируется как  $+1$ , а нижний кодируется как  $-1$ . Кодирование осуществляется по формуле:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Число всех точек факторного пространства при двухуровневой системе изменения факторов, в которых экспериментально необходимо определить значение функции отклика, равно  $2^k$ , где  $k$  – число факторов.

**Определение коэффициента регрессии.** Для определения коэффициентов уравнения регрессии (2.3) экспериментально находят значения величины  $y$  в  $N$  точках факторного пространства. В общем случае число повторений опытов в точках факторного пространства может быть различным, однако практически это число принимается единым для всего эксперимента. Задача определения коэффициентов регрессии является типичной для регрессионного анализа. Основы этого анализа, применительно к планированию эксперимента, заключаются в следующем:

1. Результаты измерения  $y_1, y_2, \dots, y_N$  величины  $y$  в  $N$  точках факторного пространства представляют собой реализацию нормально распределенной случайной величины;

2. Дисперсии реализаций  $\sigma^2\{y_i\}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) равны между собой, т.е. дисперсия  $y$  не зависит от абсолютного значения этой величины;

3. Факторы  $x_1, x_2, \dots, x_k$  – независимые величины и измеряются с пренебрежительно малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении значения величины.

Коэффициенты при независимых переменных в аппроксимирующем полиноме указывают на степень влияния факторов. Если коэффициент положительный, то с увеличением фактора возрастает и выходной параметр системы, при отрицательном коэффициенте с возрастанием фактора наблюдается уменьшение величины  $y$ . Коэффициент при линейных членах

соответствует вкладу данного фактора в значение параметра системы  $y$  при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний. Главным эффектом фактора принято называть вклад фактора при переходе от нижнего уровня к верхнему.

**Вид функции отклика и планирования.** Поскольку истинное описание функции отклика (2.1) установить невозможно, то ее описывают с помощью аппроксимирующего полинома (2.2) с коэффициентами:

$$\beta_i = \frac{\partial \eta(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i}; \quad \beta_{ij} = \frac{\partial^2 \eta(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \beta_{ii} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i^2}.$$

Аппроксимирующий полином (2.2) принимают первой, второй и реже третьей степени, причем порядок его можно менять в зависимости от этапа эксперимента, либо специфики решаемой задачи. Коэффициенты полинома (2.2) из-за отсутствия истинного описания функций (2.1) нельзя определить теоретически. Их определяют экспериментально, проводя опыты при некоторых фиксированных значениях факторов. Экспериментально найденные коэффициенты  $b_i$  являются оценками теоретических  $\beta_i$ .

Экспериментальное исследование систем ставит своей задачей изучение влияния факторов системы на выходную величину  $y$ . Полином (2.3) позволяет установить воздействие на функцию отклика не только каждого из факторов, но и любой их комбинации при условии, что полином содержит соответствующие этой комбинации члены.

При планировании экспериментов для исследования технических систем вначале проверяют возможность линейной аппроксимации функции отклика. В этом случае предполагают, что в полиномах более высокого порядка коэффициенты при нелинейных членах малы по сравнению с главными эффектами ( $b_{ij} \rightarrow 0$ ;  $b_{ii} \rightarrow 0$ ;  $b_{ijl} \rightarrow 0$ ), и модель функции отклика имеет вид:

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i. \quad (2.4)$$

Главный эффект может оказаться смешанным с одним или несколькими взаимодействиями высшего порядка, поэтому в этом случае не ясно, следует считать полученный эффект равным главному эффекту, эффекту взаимодействия или их комбинации. Если существуют главные эффекты и их парные взаимодействия, т.е. коэффициенты  $b_i \neq 0$ ;  $b_{ij} \neq 0$ ;  $b_{ii} \rightarrow 0$  и  $b_{ijl} \rightarrow 0$ , тогда полином (2.3) преобразуется к виду:

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j. \quad (2.5)$$

Может оказаться, что на параметр оптимизации значительное влияние оказывают члены, в которых коэффициенты типа  $b_{ii}$  тоже не равны нулю. В этом случае получим новую модель функции отклика:

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2. \quad (2.6)$$

Для случая, когда коэффициенты при тройных взаимодействиях не равны нулю  $b_{ijl} \neq 0$ , уравнение регрессии можно представить в виде полинома (2.3).

Таким образом, оперируя в процессе проведения планирования эксперимента одними и теми же переменными  $x_i$ , можно получать различные функции откликов. Поэтому вопрос построения планов и получения математической модели, тождественной (адекватной) изучаемому объекту исследования, является важным в теории планирования эксперимента.

**Факторный эксперимент** связан с варьированием одновременно всех факторов и проверкой достоверности результатов математико-статистическими методами. Факторы в эксперименте можно варьировать на бесконечном множестве уровней. При планировании эксперимента, чтобы получить результаты эксперимента в виде удобных для анализа полиномов, достаточно изменять факторы на двух, трех или пяти уровнях. Проведение экспериментов со многоуровневыми факторами затруднительно, поэтому они находят ограниченное применение в практике инженерного эксперимента.

Если в эксперименте при двухуровневой системе измерений факторов реализуются все возможные сочетания уровней факторов, т.е.  $N = 2^k$ , то такой эксперимент называется полным факторным экспериментом (ПФЭ) или планом. ПФЭ удобно представить в виде матрицы планирования. Матрица планирования для трехфакторного эксперимента при кодированных значениях уровней факторов показана в таблице 2.1.

Столбцы матрицы ПФЭ обладают одним из важнейших для планирования эксперимента свойств – ортогональностью. Для полного понимания смысла этого термина необходимо иметь минимальные представления о матрицах и матричной алгебре.

Как видно из матрицы (таблица 2.1), условие ортогональности выполняется для всех восьми столбцов:  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$ . Произведение первого столбца ( $x_0$ ) с остальными дает простое повторение этих столбцов. Столбец с фактором  $x_0$  вводится для определения свободного члена уравнения (2.3). Ортогональность столбцов матрицы планирования позволяет определять коэффициенты регрессии по довольно простой формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij} y_i}{N} . \quad (2.7)$$

Таблица 2.1 - Матрица планирования для трехфакторного эксперимента

Номер опыта	Факторы				Произведение факторов				Параметр оптимизации $\bar{y}$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	
1	1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$
2	1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$y_3$
4	1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$y_4$
5	1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$
6	1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$
7	1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$
8	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$

Полные факторные планы обладают рядом важных для планирования эксперимента свойств, основными из которых являются следующие:

1. Симметричность относительно центра эксперимента, означающая, что алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю, т.е.:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0; \quad i = 1, \dots, k,$$

где  $i$  – номер фактора;  $N$  – число опытов;

2. Условие нормировки, при котором сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N; \quad i = 1, \dots, k;$$

3. Ортогональность, характеризующая свойство совокупности столбцов матрицы: сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов равна нулю, т.е.:

$$\sum_{u=1}^N a_{iu} x_{ju} = 0; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, k;$$

4. Ротатабельность, означающая, что точность предсказания значения функции отклика одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента, точки эксперимента лежат на поверхности сферы, центром которой является точка основного уровня.

Полные факторные планы позволяют выявить влияние на функцию отклика у не только каждого фактора в отдельности, но и совместное влияние их комбинаций, т.е. исследовать так называемый эффект взаимодействия. При определении коэффициентов уравнения регрессии (2.7) экспериментально находят значения у в  $N$  точках факторного пространства.

Планируя эксперимент, на первом этапе всегда стремятся получить линейную модель. Однако нет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования процесс описывается линейной моделью. И модель типа  $y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots$  не всегда можно получить. На практике приходится прибегать к более сложным зависимостям.

ПФЭ позволяет количественно оценить эффекты взаимодействия. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов. При вычислении коэффициента, соответствующего эффекту взаимодействия, с новым вектор-столбцом можно обращаться так же, как с вектор-столбцом любого фактора. Очень важно, что при добавлении столбцов эффектов взаимодействий все рассмотренные свойства матриц планирования сохраняются. Модель для ПФЭ типа  $2^3$  выглядит следующим образом:

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

В столбцах  $x_1, x_2, x_3$  (см. таблицу 2.1) задают планирование – по ним непосредственно определяются условия опытов, а остальные столбцы  $x_0, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$  служат только для расчета.

Если производят планирование на  $\gamma$  уровнях для факторов, то ПФЭ, т.е. эксперимент, исчерпывающий все возможные сочетания факторов, обозначают  $\gamma^k$ .

Если же экспериментальные данные не согласуются с полиномами вида (2.4) и (2.5), то исследуемый процесс стремятся описать поверхностью второго порядка (2.6). Используя концепцию факторного пространства, можно дополнить двухуровневый план ПФЭ определенными (звездными) точками (рисунок 2.1).

Такие планы называются центральными, композиционными (ЦКП). Различают ортогональные (почти ортогональные) и ротатабельные ЦКП.

Большим преимуществом этих планов является то, что их можно получать из планов  $2^n$ . Для этого к реализованному плану линейного полинома добавляют опыты в промежуточных «звездных» точках и в центре плана. Полученную при этом «композицию» используют для математического описания процесса в виде многочлена второй степени (2.6).

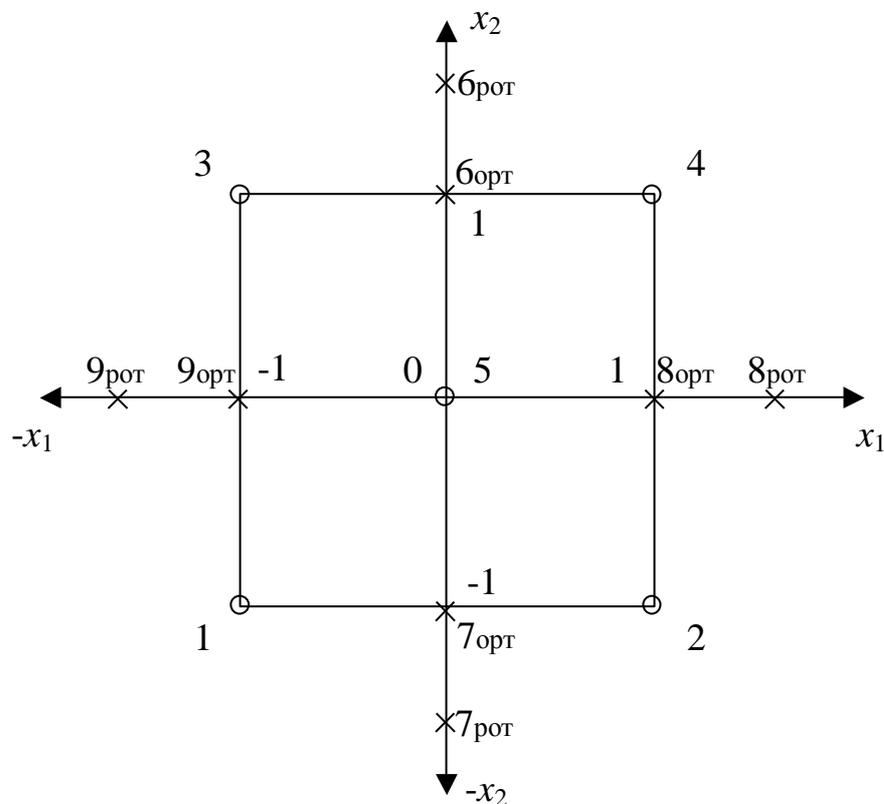


Рис. 2.1 – Планы для функций  $y = f(x_1, x_2)$

## 2.4 Пример для повторения

Необходимо исследовать изменение верхней частоты полосы пропускания активного фильтра инфранизких частот (ИНЧ) в зависимости от сопротивления и емкости частотно-задающей цепи. Типовая схема фильтра ИНЧ представлена на рис. 2.2, из которого видно, что частотно-задающая цепь образована электрорадиоэлементами (ЭРЭ)  $R_{oc}C_{oc}$ .

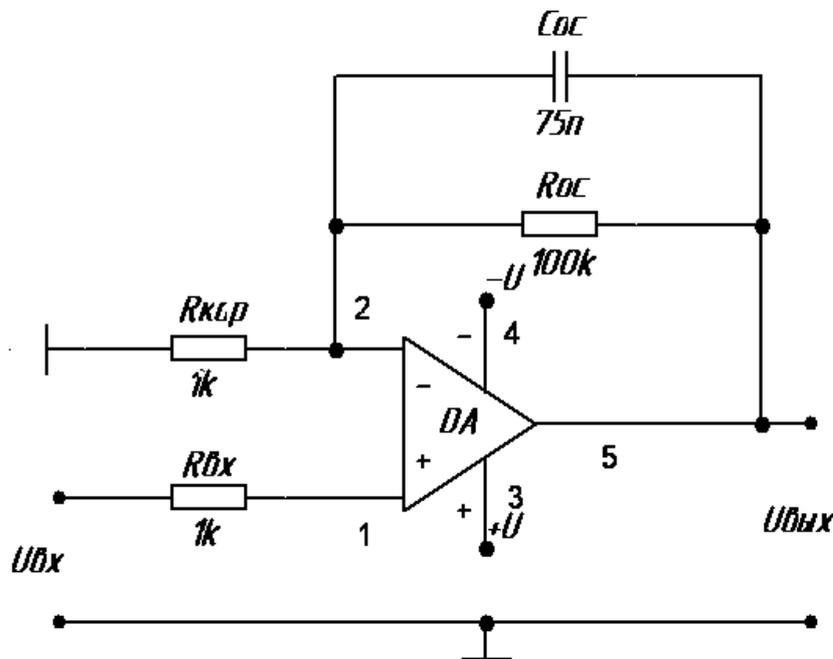


Рис. 2.2 – Типовая схема активного фильтра ИНЧ

Величины сопротивления и емкости ЭРЭ варьируются в пределах  $\pm 10\%$  от номинальных значений. Полоса пропускания ФНЧ лежит в диапазоне от 0 Гц до значения верхней частоты  $F_B$ :  $[0; F_B]$ . Верхняя частота полосы пропускания определяется по уровню  $-3$  дБ от максимального значения коэффициента передачи фильтра  $K_U$ .

Требуется провести полный факторный эксперимент с целью установления, какая из двух полиномиальных моделей (2.4) или (2.5) наиболее адекватно описывает функциональную зависимость  $F_B = f(R_{OC}, C_{OC})$ .

#### Реализация задания.

*Критерий оптимизации* – верхняя частота полосы пропускания  $F_B$  активного ФНЧ. Единица измерения – Герц.

*Независимые переменные (факторы)* – сопротивление и емкость ЭРЭ  $R_{OC}$  и  $C_{OC}$ , образующие частотно-задающую цепь ФНЧ. Единицы измерения – килоом и нанофард, соответственно. Предполагается, что в эксперименте участвуют  $R_{OC}$  и  $C_{OC}$  в дискретном исполнении, поэтому корреляционной связи между их параметрами не существует. Количество факторов  $k = 2$ . Число опытов в матрице планирования  $N = 2^k = 4$ .

Номинальные значения независимых переменных:  $R_{OC} = 100$  кОм;  $C_{OC} = 75$  нФ. Интервалы варьирования:  $\Delta R_{OC} = \pm 10$  кОм;  $\Delta C_{OC} = \pm 7.5$  нФ.

Кодированная запись факторов:

$$x_1 = \frac{z_1 - 100}{10} \text{ для } R_{OC}; \quad x_2 = \frac{z_2 - 75}{7.5} \text{ для } C_{OC}.$$

Основные характеристики плана эксперимента приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Основные характеристики плана эксперимента

Характеристика	Значение фактора $z_1$	Кодовое значение фактора $x_1$	Значение фактора $z_2$	Кодовое значение фактора $x_2$
Основной уровень, $z_{0i}$	100	0	75	0
Интервал варьирования, $\Delta z_i$	10	---	7.5	---
Верхний уровень, $z_{imax}$	110	1	82.5	1
Нижний уровень, $z_{imin}$	90	-1	67.5	-1

Для ведения эксперимента применяют план  $2^2$  (ПФЭ), составляют рабочую таблицу планирования (таблица 2.3) и в соответствии с ней проводят эксперимент, результаты которого записывают в столбец экспериментальных значений выходного параметра  $y_э$ . Столбцы  $y_T$  и  $\Delta y^2$  заполняются на последующих этапах.

Таблица 2.3 – Матрица планирования эксперимента

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$z_1$	$z_2$	$y_э$	$y_T$	$\Delta y^2$
1	+1	-1	-1	90	67.5	26.150	25.934	0.046
2	+1	-1	+1	90	82.5	21.415	21.630	0.046
3	+1	+1	-1	110	67.5	21.412	21.627	0.046
4	+1	+1	+1	110	82.5	17.539	17.323	0.046
							$\Sigma \Delta y^2 =$	0.186

Вычислительный факторный эксперимент выполнен по расчетной формуле верхней частоты полосы пропускания [3]:

$$f_B = \frac{1}{2\pi RC}$$

Результаты записаны в столбец  $y_э$ .

Расчет коэффициентов регрессии по формуле (2.7) дал следующие результаты:

$$a_0 = \frac{26.150 + 21.415 + 21.412 + 17.539}{4} = 21.629;$$

$$a_1 = \frac{-26.150 - 21.415 + 21.412 + 17.539}{4} = -2.153;$$

$$a_2 = \frac{-26.150 + 21.415 - 21.412 + 17.539}{4} = -2.152.$$

Следовательно, линейный полином имеет вид:

$$y = 21.629 - 2.153x_1 - 2.152x_2.$$

С помощью полученного линейного полинома вычисляют теоретическое значение выходного параметра  $y_T$  в каждом опыте, результаты заносят в предпоследний столбец  $y_T$  таблицы 2.3:

$$y_{T1} = 21.629 - 2.153 \cdot (-1) - 2.152 \cdot (-1) = 25.934;$$

$$y_{T2} = 21.629 - 2.153 \cdot (-1) - 2.152 \cdot 1 = 21.630;$$

$$y_{T3} = 21.629 - 2.153 \cdot 1 - 2.152 \cdot (-1) = 21.627;$$

$$y_{T4} = 21.629 - 2.153 \cdot 1 - 2.152 \cdot 1 = 17.323.$$

Последний столбец  $\Delta y^2$  таблицы 2.3 содержит значения квадратов разности между экспериментальным и теоретическим значениями выходного параметра. Итоговая сумма квадратов разности значений для линейного полинома составляет 0.186.

Для проверки возможности нелинейного полинома следует сделать дополнение к базовой матрице планирования. Помимо столбцов  $x_1$  и  $x_2$ , вводится столбец произведения двух факторов  $x_1x_2$ , учитывающий эффект взаимодействия (таблица 2.4).

Таблица 2.4 – Дополненная матрица планирования эксперимента

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$z_1$	$z_2$	$y_э$	$y_T$	$\Delta y^2$
1	+1	-1	-1	+1	90	67.5	26.150	26.150	0
2	+1	-1	+1	-1	90	82.5	21.415	21.415	0
3	+1	+1	-1	-1	110	67.5	21.412	21.412	0
4	+1	+1	+1	+1	110	82.5	17.539	17.539	0
								$\Sigma \Delta y^2 =$	0

Как уже было отмечено в пункте 2.3, при добавлении столбцов эффектов взаимодействий все свойства матрицы планирования сохраняются. Таким образом, проводить повторно вычислительный эксперимент не требуется – значения выходного параметра  $y_э$  автоматически переносятся из таблицы 2.3.

Расчет коэффициента взаимодействия  $a_{12}$  выполняют по формуле (2.7):

$$a_{12} = \frac{26.150 - 21.415 - 21.412 + 17.539}{4} = 0.216.$$

Следовательно, нелинейный полином имеет вид:

$$y = 21.629 - 2.153x_1 - 2.152x_2 + 0.216x_1x_2.$$

Вычислим теоретические значения  $y_T$  выходного параметра:

$$y_{T1} = 21.629 - 2.153 \cdot (-1) - 2.152 \cdot (-1) + 0.216 \cdot 1 = 26.150;$$

$$y_{T2} = 21.629 - 2.153 \cdot (-1) - 2.152 \cdot 1 + 0.216 \cdot (-1) = 21.415;$$

$$y_{T3} = 21.629 - 2.153 \cdot 1 - 2.152 \cdot (-1) + 0.216 \cdot (-1) = 21.412;$$

$$y_{T4} = 21.629 - 2.153 \cdot 1 - 2.152 \cdot 1 + 0.216 \cdot 1 = 17.539.$$

Сравнительный анализ суммы квадратов в таблицах 2.3 и 2.4 позволяет сделать вывод, что нелинейная полиномиальная модель является более адекватной.

Полученный нелинейный полином можно представить в натуральных значениях факторов  $z_1$  и  $z_2$ :

$$F_B = 21.629 - 2.153\left(\frac{z_1 - 100}{10}\right) - 2.152\left(\frac{z_2 - 75}{7.5}\right) + 0.216\left(\frac{z_1 - 100}{10}\right)\left(\frac{z_2 - 75}{7.5}\right) = 86.279 - 0.4313z_1 - 0.5749z_2 + 0.00288z_1z_2.$$

Ниже приведен листинг программы в MathCAD по расчету коэффициентов регрессии и проверки возможности линейных и нелинейных полиномов.

Для вычисления свободного члена уравнения регрессии используется стандартная функция *mean*. При вычислении коэффициентов регрессии и теоретических значений выходного параметра применяется операция умножения матриц (вводится обычным знаком умножения). Следует помнить, что по правилам математики для умножения матриц необходимо, чтобы число столбцов первой матрицы (вектора) было равно числу строк второй матрицы (вектора).

Количество факторов в эксперименте  $m := 2$

Количество опытов в эксперименте  $N := 2^m$

Вектор значений выходного параметра - верхняя частота полосы пропускания

$$Y := \begin{pmatrix} 26.150 \\ 21.415 \\ 21.412 \\ 17.539 \end{pmatrix}$$

Матрица планирования для линейного полинома

$$MPL := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица планирования для нелинейного полинома

$$MPN := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Свободный член уравнения регрессии - математическое ожидание выходного параметра:

$$b0 := \text{mean}(Y) \quad b0 = 21.629$$

Вычисление коэффициентов регрессии для линейного полинома

$$BL := \frac{Y^T \cdot MPL}{N} \quad BL^T = \begin{pmatrix} -2.153 \\ -2.152 \end{pmatrix}$$

Вычисление коэффициентов регрессии для нелинейного полинома

$$BN := \frac{Y^T \cdot MPN}{N} \quad BN^T = \begin{pmatrix} -2.153 \\ -2.152 \\ 0.216 \end{pmatrix}$$

Вычисление теоретических значений выходного параметра для линейного полинома

$$YTL := b0 + BL \cdot MPL^T \quad YTL := YTL^T \quad YTL = \begin{pmatrix} 25.934 \\ 21.63 \\ 21.627 \\ 17.323 \end{pmatrix}$$

Вычисление суммы квадратов невязок для линейного полинома

$$SKL := (Y - YTL)^2 \quad SKL = \begin{pmatrix} 0.046 \\ 0.046 \\ 0.046 \\ 0.046 \end{pmatrix} \quad \sum SKL = 0.186$$

Вычисление теоретических значений выходного параметра для нелинейного полинома

$$YTN := b_0 + B_N \cdot MPN^T \quad YTN := YTN^T \quad YTN = \begin{pmatrix} 26.15 \\ 21.415 \\ 21.412 \\ 17.539 \end{pmatrix}$$

Вычисление суммы квадратов невязок для нелинейного полинома

$$SKN := (Y - YTN)^2 \quad SKN = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sum SKN = 0$$

Традиционно, при проведении физического факторного эксперимента выполняют проверку значимости коэффициентов регрессии и проверку адекватности полиномиальной модели по критерию Фишера [4]. В основе таких проверок лежит понятие дисперсии воспроизводимости, которое характеризует степень разброса измеренных значений при повторных опытах.

Учитывая специфику проведения вычислительного факторного эксперимента на ЭВМ, дисперсия воспроизводимости в таком эксперименте равна нулю. Другими словами, повторные опыты (вычисления) в одной и той же точке факторного пространства всегда дают одинаковый результат. В связи с этим применение традиционных проверок лишено смысла – любой коэффициент регрессии будет являться значимым, любая полиномиальная модель будет являться адекватной.

## 2.5 Лабораторное задание

Повторить методический пример, приведенный выше, по исходным данным Вашего варианта.

## 2.6 Контрольные вопросы

1. Какие задачи необходимо решить, прежде чем приступить к проведению факторного эксперимента?
2. Что такое критерий (или параметр) оптимизации?
3. Каким требованиям должен удовлетворять параметр оптимизации?

4. Какие требования предъявляются к факторам, которые оказывают воздействия на объект исследования во время эксперимента?
5. Каким образом кодируются верхний и нижний уровни факторов в факторном эксперименте?
6. Что такое главный эффект фактора?
7. Какой вид аппроксимации при планировании эксперимента проверяют в первую очередь?
8. Какими свойствами обладают полные факторные планы?

## 2.7 Варианты заданий

№ варианта	Нулевой уровень варьирования	Интервалы варьирования
1	$r_{oc}=10 \text{ кОм}; c_{oc}=15 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 2 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 3 \text{ нф}$
2	$r_{oc}=50 \text{ кОм}; c_{oc}=5 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 10 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 1 \text{ нф}$
3	$r_{oc}=150 \text{ кОм}; c_{oc}=10 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 50 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 2 \text{ нф}$
4	$r_{oc}=75 \text{ кОм}; c_{oc}=1 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 25 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 1 \text{ нф}$
5	$r_{oc}=35 \text{ кОм}; c_{oc}=55 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 7 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 11 \text{ нф}$
6	$r_{oc}=5 \text{ кОм}; c_{oc}=40 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 0.5 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 4 \text{ нф}$
7	$r_{oc}=100 \text{ кОм}; c_{oc}=10 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 10 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 1 \text{ нф}$
8	$r_{oc}=25 \text{ кОм}; c_{oc}=25 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 2 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 3 \text{ нф}$
9	$r_{oc}=120 \text{ кОм}; c_{oc}=5 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 50 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 0.5 \text{ нф}$
10	$r_{oc}=80 \text{ кОм}; c_{oc}=60 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 25 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 6 \text{ нф}$
11	$r_{oc}=30 \text{ кОм}; c_{oc}=15 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 7 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 3 \text{ нф}$
12	$r_{oc}=70 \text{ кОм}; c_{oc}=40 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 10 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 5 \text{ нф}$
13	$r_{oc}=15 \text{ кОм}; c_{oc}=20 \text{ нф}$	$\Delta r_{oc}=\pm 2 \text{ кОм}; \Delta c_{oc}=\pm 5 \text{ нф}$

## Список литературы

1. Бусленко И.П. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Под ред. Шнейдера Ю.А. М.: Физматгиз, 1962.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Высш. школа, 2000. – 480 с.
3. Опадчий Ю.Ф. и др. Аналоговая и цифровая электроника (Полный курс): Учебник для вузов / Ю.Ф.Опадчий, О.П.Глудкин, А.И.Гуров; Под ред. О.П.Глудкина. – М.: Горячая Линия – Телеком, 2002. – 768 с.
4. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
5. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. - СПб.: БХВ-Петербург, 2007. - 368 с.
6. Каганов В.И. Радиотехника + компьютер + Mathcad. - М.: Горячая линия - Телеком, 2001. - 416 с.
7. Поршнева С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе MathCAD. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 464 с.
8. Панферов А.И., Лопарев А.В., Пономарев В.К. Применение Mathcad в инженерных расчетах: Учеб. пособие. - СПб.: СПбГУАП, 2004. - 88 с.
9. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в Mathcad 12. - СПб.: Питер, 2006. - 544 с.
10. Васильев А.Н. Mathcad 13 на примерах. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006. - 528 с.
11. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В., Пеньков А.А.. Новые информационные технологии: Учебное пособие. Часть 3. Основы математики и математическое моделирование. - Смоленск: СГПУ, 2003. - 192 с.
12. Фриск В.В. Основы теории цепей. Расчеты и моделирование с помощью пакета компьютерной математики MathCAD. - М.: СОЛОН-Пресс, 2006. - 88 с.
13. ОС ТУСУР 01-2013 (СТО 02069326.1.01-2013). Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления. - Томск: ТУСУР, 2013. – 57 с.