Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

И. Э. Гриншпон

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1-й семестр
Курс лекций
Учебное пособие

2018

Приведен конспект лекций по разделу "Линейная алгебра", читаемых в первом семестре на первом курса ФВС. Конспект включает в себя действия с матрицами, решение матричных уравнений, решение систем линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и методом Гаусса; вводится понятие линейного пространства и его базиса; рассматриваются линейные операторы; для нахождения собственных чисел и собственных векторов линейного оператора приводятся сведения из теории многочленов одной переменной, в том числе, нахождение корней многочленов с целыми коэффициентами; рассматриваются квадратичные формы.

Теоретический материал иллюстрируется примерами.

В пособии приведены также исторические сведения об ученых-математиках.

Глава I

Линейная алгебра

При записи определений, теорем и различных формул мы будем использовать логические символы: $\forall$ — для всех, для каждого, $\exists$ — существует, $\exists!$ — существует единственный, $\vee$ — или, $\wedge$ — и, $\Rightarrow$ — влечет, $\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда.

§1. Матрицы. Действия с матрицами.

Матрицей размера $m \times n$ называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Эти числа называют ***элементами*** матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Обозначения матриц $A = (a_{ij})$, $A = (a^i_j)$, $A = [a_{ij}]$, $A = [a^i_j]$.

Матрицы играют важную роль в математике и ее приложениях. Понятие матрицы впервые появилось в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона[1] и Артура Кэли[2]. Сам термин "матрица" ввел в 1850 г.

[1]Уильям Роуэн Гамильтон (William Rowan Hamilton) (1806-1865) — выдающийся ирландский математик XIX века. Гамильтону принадлежит введение в механику наглядного приема изображения изменений величин и направлений скорости точки, совершающей какое-либо движение (годограф). Гамильтон открыл кватернионы, некоммутативную числовую структуру с тремя мнимыми единицами. Следующие 20 лет он посвятил их подробному исследованию. В ходе исследований Гамильтон попутно ввел понятие векторного поля и создал основы векторного анализа. Он открыл векторное произведение, предложил оператор "набла".

[2]Артур Кэли (Arthur Cayley) (1821-1859) — английский математик. Большая часть его работ относится к линейной алгебре, дифференциальным уравнениям и эллиптическим функциям. Кэли ввел принятое ныне обозначение для определителя, сформулировал определение группы. Он развивил теорию алгебраических инвариантов, исследовал геометрии n-мерного пространства. Кэли принадлежит более 200 работ, посвященных самым разнообразным вопросам математики.

Джеймс Сильвестр[3].

Матричные обозначения получили распространение в современной математике и ее приложениях. Основным применением матриц было решение линейных уравнений. С помощью матриц записываются многие математические соотношения, в том числе, системы алгебраических и дифференциальных уравнений и их решения. В квантовой теории матрицы используются для нахождения значений физических величин. Матричный язык применяют при выполнении различных преобразований. Исчисление матриц развивается также в направлении построения эффективных алгоритмов для численного решения большого количества задач. В информатике матрицы с элементами того или иного типа занимают особое место как структуры для хранения и передачи основной и вспомогательной информации при решении многочисленных прикладных задач, шифрования сообщений в Интернете и т.д. Матрицы в информатике называют массивами. Различают одномерные массивы, содержащие элементы в одной строке и именуемые вектором, двумерные массивы, элементы которых располагаются по строкам и столбцам, которые и называются матрицами, и многомерные массивы сложной структуры. Массивы можно рассматривать как формальное объединение нескольких однотипных объектов (чисел, символов, строк и т.п.), рассматриваемое как единое целое. К необходимости применения массивов мы приходим всякий раз, когда требуется связать и использовать целый ряд родственных величин.

Матрицу размера $1 \times n$ называют ***матрицей-строкой***, а матрицу размера $m \times 1$ – ***матрицей-столбцом***.

Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют ***нулевой*** матрицей. Матрицу размера $n \times n$ называют ***квадратной*** матрицей порядка n. Диагональ квадратной матрицы, идущая от элемента a_{11} к элементу a_{nn} называется ***главной диагональю***, вторая диагональ называется ***побочной***. Квадратная матрица, все элементы которой, не стоящие на

[3]Джеймс Джозеф Сильвестр (James Joseph Sylvester) (1814-1897) — английский математик. Известен своими работами в теории матриц, теории чисел и комбинаторике. Сильвестр известен, прежде всего, как алгебраист. Две его работы в этой области стали классическими: это теория элементарных делителей и закон инерции квадратичных форм. Сильвестр был членом Лондонского королевского общества (1841), иностранным членом-корреспондентом Петербургской Академии наук (1872).

главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ равны единице, называется ***единичной***. Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие ниже (выше) диагонали, равны нулю, называется ***треугольной***. Квадратная матрица A называется ***симметричной***, если $a_{ij} = a_{ji}$, то есть элементы матрицы симметричные относительно главной диагонали равны. Квадратная матрица A называется ***кососимметричной***, если $a_{ji} = -a_{ij}$, то есть элементы матрицы симметричные относительно главной диагонали отличаются знаком. Для любой матрицы A размера $m \times n$ можно построить матрицу A^T, заменив строки матрицы столбцами, а столбцы — строками. Матрица A^T называется ***транспонированной*** для матрицы A. Транспонированная матрица имеет размер $n \times m$.

Над матрицами можно производить различные операции.

Прежде всего введем понятие равенства матриц. Две матрицы называются ***равными***, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны. Даны две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$. Тогда $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ $(\forall\, i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n})$.

Матрицы одного размера можно складывать. ***Суммой*** двух матриц называется матрица того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц–слагаемых. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – матрицы размера $m \times n$. Тогда $C = A + B$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n})$.

Матрицу можно умножать на число. ***Произведением матрицы на число*** называется матрица, которая получается при умножении всех элементов исходной матрицы на это число. Если $A = (a_{ij})$, то $kA = (ka_{ij})$ $(\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n})$.

Однако главные применения матриц связаны с операцией их умножения. Эта операция лежит в основе целого раздела линейной алгебры — алгебры матриц.

Пусть даны две матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times k$, то есть число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В этом случае можно определить произведение матриц A и B. Матрица C размера $m \times k$ называется ***произведением*** матриц A и B, если любой элемент c_{ij} этой матрицы равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующий элемент j-того столбца матрицы B, то есть

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}. \qquad (1.1)$$

Отметим, что число строк матрицы C равно числу строк матрицы A, и число столбцов матрицы C равно числу столбцов матрицы B.

Пример 1.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-7) + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-5) \\ (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 3 & (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 24 \\ -13 & -20 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ (-7) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) & (-7) \cdot 5 + 2 \cdot 3 & (-7) \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2) & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 19 & 10 \\ -25 & -29 & 15 \\ 19 & 0 & -23 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -3 \\ -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число строк матрицы A не равно числу столбцов матрицы B.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$ — сложение матриц коммутативно. Но $AB \neq BA$ — умножение матриц не коммутативно (пример 1.1). Более того, не всегда существуют оба произведения (пример 1.2).

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ и $(AB)C = A(BC)$ — сложение и умножение матриц удовлетворяют закону ассоциативности.

3) $(A + B)C = AC + BC$ и $C(A + B) = CA + CB$, если эти произведения существуют. Это свойство называют законом дистрибутивности

умножения относительно сложения.

4) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

5) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

7) $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A — квадратная, E — единичная матрицы порядка n.

8) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

9) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

В приложениях важную роль играет свойство квадратных матриц, называемое неразложимостью. Поясним его смысл.

Согласованной перестановкой рядов квадратной матрицы A называется такая их перестановка, при которой одновременно с перестановкой i-ой и j-ой строки меняются местами i-ый и j-ый столбцы.

Квадратная матрица A называется ***разложимой***, если согласованными перестановками строк и столбцов ее можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 и A_2 – квадратные матрицы не обязательно одного и того же порядка; $\mathbf{0}$ — нулевая матрица. В противном случае матрица называется ***неразложимой***.

Если $B = 0$ и при дальнейшем разложении матриц A_1 и A_2 и их частей, стоящих на диагонали, будет получена матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2, ..., A_k – квадратные неразложимые матрицы не обязательно одного и того же порядка, то матрица A называется ***вполне разложимой***.

§2. Перестановки.

Дано множество первых n натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Это множество можно упорядочить различными способами. Всякое расположение $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определенном порядке называется ***перестановкой*** из n чисел.

Например, $(2; 7; 3; 1; 5; 4; 6)$ — перестановка из семи чисел.

Предложение 2.1. *Число различных перестановок из n чисел равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.*

Доказательство. Первый элемент i_1 можно выбрать n способами, элемент для выбора элемента i_2 осталась $n-1$ возможность и так далее, элемент i_{n-1} можно выбрать всего 2 способами, наконец берем последний элемент i_n. Всего получилось $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ различных перестановок. $\square$

Если в некоторой перестановке поменять местами два числа, а остальные оставить на месте, то получим новую перестановку. Такое преобразование перестановки называется ***транспозицией***.

Говорят, что в данной перестановке числа i и j образуют ***инверсию***, если $i > j$, но i стоит в этой перестановке раньше чем j. Перестановка называется ***четной***, если она имеет четное число инверсий, и ***нечетной*** в противном случае.

Теорема 2.2. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. Дана перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Поменяем местами два соседних элемента i_k и i_{k+1}. В этом случае число инверсий изменится на 1, и, значит, изменится и четность перестановки. Чтобы поменять местами элементы i_k и i_{k+m} нужно $2m-1$ раз переставить соседние элементы. Поэтому число инверсий изменится на нечетное число, и, значит, перестановка сменит четность. $\square$

Теорема 2.3. *1) Число четных перестановок равно числу нечетных перестановок;*
2) Любая перестановка может быть получена из любой другой перестановки с помощью нескольких транпозиций.

§3. Определители.

Понятие определителя (детерминанта) возникло в связи с необходимостью решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. Определитель матрицы A обозначается $|A|$, $detA$ или Δ. Открытие определителей приписывают немецкому математику Г. Лейбницу[4]. Современная

[4]Готфрид Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz) (1646-1716) — немецкий математик, физик, философ. Основной заслугой Лейбница в области математики является создание (вместе с И. Ньютоном) дифференциального и интегрального исчислений. Он вывел правила дифференцирования, поиска экстремумов. Лейбниц сделал немало открытий и в других областях математики: в комбинаторике, в алгебре (начала теории определителей), в геометрии.

теория определителей основывается на работах Ж. Бине[5], О. Коши[6] и К. Якоби[7].

Если $A = (a_{11})$ — матрица первого порядка, то ***определителем первого порядка*** называется число a_{11}: $\Delta_1 = a_{11}$.

Пусть A — матрица второго порядка.

Определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{3.1}$$

Пусть A — матрица третьего порядка.

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array} \tag{3.2}$$

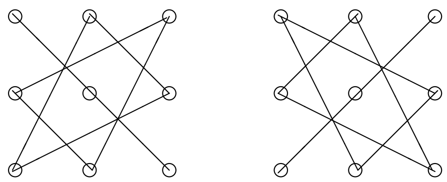
В логике, развивая учение об анализе и синтезе, Лейбниц выдвинул идею о применении в логике математической символики и построении логических исчислений, поставил задачу логического обоснования математики. Лейбниц сыграл важную роль в истории создания электронно-вычислительных машин: он предложил использовать для целей вычислительной математики бинарную систему счисления. По просьбе Петра I разработал проекты развития образования и государственного управления в России и проект учреждения Петербургской академии наук.

[5]Жак Филлип Мари Бине (Jacques Philippe Marie Binet) (1786-1856) — французский математик, механик и астроном. Один из создателей матричной алгебры, первым опубликовал правило умножения матриц, изучал линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами. Бине принадлежит ряд работ по прикладной математике и механике вращающихся тел.

[6]Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy) (1789-1857) — великий французский математик и механик. Разработал фундамент математического анализа, внес огромный вклад в анализ, алгебру, теорию чисел, арифметику, математическую физику и многие другие области математики; он один из основоположников механики сплошных сред. Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда; вел понятие радиуса сходимости степенного ряда, дал определение интеграла как предела сумм, доказал существование интегралов от непрерывных функций. В теории дифференциальных уравнений Коши впервые поставил задачу о нахождении решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями (называемую с тех пор задачей Коши), дал способ интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Коши занимался геометрией (теория многогранников, поверхности 2-го порядка), алгеброй (симметрические многочлены, свойства определителей), теорией чисел (теорема Ферма о многоугольных числах, закон взаимности). В области комплексного анализа Коши создал теорию интегральных вычетов, а также ее приложения к различным вопросам анализа. Ему принадлежат исследования по тригонометрии, механике, теории упругости, оптике, астрономии. Коши написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. Коши был членом Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и ряда других академий Европы. Имя Коши носят многие математические объекты.

[7]Карл Густав Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi) (1804-1851) — немецкий математик, внесший большой вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики.Якоби разработал методы интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, ввел в употребление функциональные определители — якобианы. Он открыл закон инерции квадратичных форм. Теория эллиптических функций, теория тета-функций, суммы Якоби и круговые поля, якобианы алгебраических кривых — это весьма неполный перечень созданного Якоби, спустя более 150 лет со времени их открытия составил математическую основу современных методов защиты информации.

Это выражение — алгебраическая сумма 6 слагаемых. В каждое слагаемое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (3.2), легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется ***правилом звездочки***. Первая звездочка – это слагаемые, входящие в определитель со знаком "плюс". Вторая звездочка – это слагаемые, входящие в определительсо знаком "минус".



Для вычисления определителя третьего порядка применяют также правило Саррюса[8]: *справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов главной диагонали и диагоналей, ей параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус".*

Пример 3.1. Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение . $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-6) -$
$- 3 \cdot 3 \cdot (-6) - 3 \cdot (-5) \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 36 - 15 - 12 + 54 - 15 + 8 = 56.$

Пусть дана квадратная матрица A порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

[8]Пьер Фредерик Саррюс (Pierre-Frederic Sarrus) (1798-1861) — французский математик. Его работы его относятся к различным областям анализа и геометрии. Исследования Саррюса в основном касаются вариационного исчисления, теории уравнений. Он является автором трактатов о решении числовых уравнений с несколькими неизвестными, о кратных интегралах и условиях их интегрируемости, об определении орбит комет.

Рассмотрим всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ $(*)$. Обозначим число инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ через s, а число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ через t. Если в перестановке $(*)$ поменять местами два сомножителя и подсчитать число инверсий в новых перестановках, то сумма $s_1 + t_1$ будет иметь ту же четность, что и сумма $s + t$ (теорема 2.2). Поэтому число $(-1)^{s+t}$ не зависит от порядка сомножителей. Не нарушая общности, можно произведение $(*)$ записывать в виде $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$.

Число различных произведений вида $(*)$ равно $n!$ (предложение 2.1).

Определение 3.1. *Определителем порядка n квадратной матрицы A порядка n называется число, равное алгебраической сумме $n!$ всех возможных различных произведений n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, умноженных на $(-1)^{s+t}$, где s — число инверсий в перестановке первых, а t — число инверсий в перестановке вторых индексов перемножаемых элементов матрицы.*

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}. \quad (3.3)$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если ее определитель $detA \neq 0$.

Свойства определителей.

1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы, то есть $|A| = |A^T|$.*

Иными словами, определитель при транспонировании не меняется. Из свойства 1 следует, что строки и столбцы матрицы равноправны. Все свойства и теоремы можно формулировать как для строк, так и для столбцов определителя.

2. *Если все элементы некоторой строки определителя равны 0, то* *определитель равен* 0.

Это свойство следует из определения, так как в каждом слагаемом есть нулевой сомножитель, и, значит, сумма равна 0.

3. *При перестановке двух строк определитель меняет знак.*

При вычислении определителя по формуле (3.3) при перестановке двух строк каждое слагаемое изменит знак, а, значит, определитель сменит знак.

4. *Определитель, имеющий две одинаковых строки, равен* 0.

Пусть определитель равен d. Поменяем местами в этом определителе две одинаковых строки. По свойству 3 определитель сменит знак и станет равным $-d$. Но так как строки одинаковы, то определитель не изменится, то есть получим $d = -d$. Откуда и следует, что $d = 0$.

5. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число.*

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t \lambda a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{3j_n} = \lambda \cdot \sum(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} =$$
$$= \lambda \cdot \Delta.$$

Свойство 5 можно сформулировать следующим образом: *общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно выносить за знак определителя.*

6. *Если две строки определителя пропорциональны, то определитель равен* 0.

Для доказательства примените свойства 5 и 4.

7. *Если все элементы i-той строки определителя представимы в виде суммы $a_{ij} = b_j + c_j$, то определитель равен сумме определителей $D = D_1 + D_2$, причем в i-той строке определителя D_1 стоят элементы b_i, в i-той строке определителя D_2 стоят элементы c_i, все остальные элементы совпадают с элементами определителя D.*

Например,

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. *Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженные на некоторое число.*

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|.$$

9. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей матриц, то есть* $|AB| = |A| \cdot |B|$.

10. *Определитель диагональной матрицы (а также верхней и нижней треугольных матриц) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, то есть* $D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

11. *Определитель вполне разложимой матрицы равен произведению определителей матриц, стоящих на ее главной диагонали.*

Пусть дана матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$. Выберем в матрице k строк и k столбцов ($1 \leqslant k \leqslant m$; $1 \leqslant k \leqslant n$). Из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, построим квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется ***минором*** порядка k матрицы A. Минор порядка k получается из матрицы A вычеркиванием $m-k$ строк и $n-k$ столбцов.

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n.

Определение 3.2. *Минором M_{ij} матрицы A порядка n, соответствующим элементу a_{ij} называется определитель матрицы порядка $n-1$, получающейся из A вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.*

Каждая квадратная матрица порядка n имеет n^2 миноров порядка $n-1$.

Определение 3.3. *Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Важное значение для вычисления определителей имеет теорема:

Теорема 3.1. *(**Лапласа**)*[9]. *Определитель D квадратной матрицы A равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения.*

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \qquad (3.4)$$

Доказательство. 1) Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы первой строки кроме a_{11} равны 0. ($a_{11} \neq 0$, $a_{1j} = 0$, $j = \overline{2;n}$). Тогда определитель

$$|A| = \sum (-1)^t a_{11}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = a_{11}\sum (-1)^t a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}$$

(под знаком суммы стоит сумма всех возможных различных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с номерами от 2 до n, умноженное на $(-1)^t$, t – число инверсий в перестановке вторых индексов и $M_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = A_{11}$).

2) Пусть теперь в матрице A в i-ой строке только один элемент a_{ij} отличен от нуля

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ij} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

($a_{ij} \neq 0$, $a_{ik} = 0$, $k \neq j$). Поменяем j-ый столбец последовательно со столбцами номер $j-1, j-2, \ldots, 1$, а затем i-ую строку со строками с номерами $i-1, i-2, \ldots, 1$. Всего сделаем $j+i-2$ перестановок строк и столбцов. Получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \ldots & a_{(i-1)(j-1)} & \ldots & a_{(i-1)n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(j-1)} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

[9] Пьер Симон маркиз де Лаплас (Pierre-Simon de Laplace) (1749-1827) — французский астроном, математик и физик, член Парижской АН. Лапласу принадлежит ряд основополагающих работ по математике и математической физике. К ним относятся работы по теории дифференциальных уравнений. Он вывел носящее его имя уравнение в частных производных, которое имеет большое значение в теориях потенциала, теплопроводности, электростатики, гидродинамики. Лаплас систематизировал математический фундамент теории вероятностей, ввел производящие функции, развил также теорию ошибок и приближений методом наименьших квадратов.

Вычислим ее определитель

$$|A| = (-1)^{i+j-2}|A'| = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$$

3) В общем случае представим определитель матрицы A в виде суммы n определителей $|A_j|$ ($|A| = \sum\limits_{j=1}^{n}|A_j|$), у которых все строки кроме i-ой одинаковы, а в i-ой строке каждого определителя только один элемент $a_{ij} \neq 0$. Тогда

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}|A_j| = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}. \qquad \square$$

Теорема 3.2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.*

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj} = a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \ldots + a_{in}A_{sn} = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Дана квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n. Рассмотрим матрицу B, у которой все строки кроме s-той совпадают со строками матрицы A, а в строке s стоят числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Подсчитаем $|B|$, разложив этот определитель по s-той строке.

$$|B| = c_1A_{s1} + c_2A_{s2} + \ldots + c_nA_{sn}.$$

Заметим, что если определители отличаются только элементами одной строки (например, s-ой), то алгебраические дополнения элементов этой строки в обоих определителях равны $A_{sj}^{(1)} = A_{sj}^{(2)}$ ($\forall j = \overline{1,n}$), так как при разложении определителя по s-ой строке строка с этим номером вычеркивается. Если положить $c_j = a_{ij}$, то в матрице B будет две одинаковых строки, и, значит, $|B| = 0$. $\square$

Пример 3.2. Вычислите двумя способами определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Решение . 1) Вычислим определитель, разложив его по первой строке

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 2\cdot 11 + 3\cdot(-1) = -27.$$

2) Вычислим определитель, получив нули в первом столбце.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 7 = -27.$$

Пример 3.3. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение . Вычислим определитель, получив нули в первом столбце

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (2-6) = -20.$$

Пусть даны матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times m$ $(m \neq n)$. Тогда их произведение AB — квадратная матрица порядка m и справедлива теорема

Теорема 3.3. (**Бине-Коши**) *Определитель матрицы AB равен 0, если $m > n$, и равен сумме произведений всех миноров порядка m матрицы A на соответствующие миноры порядка m матрицы B, если $m < n$.*

§4. Обратная матрица.

Определение 4.1. *Матрица A' называется* ***обратной*** *для матрицы A, если произведение этих матриц коммутативно и равно единичной матрице.*

$$A \cdot A' = A' \cdot A = E. \tag{4.1}$$

Из определения следует, что обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы.

Теорема 4.1. (О существовании и единственности обратной матрицы) *Любая невырожденная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу.*

Доказательство. 1) Пусть матрица $A = (a_{ij})$ – невырожденная. Значит, $|A| \neq 0$. Докажем, что для этой матрицы существует обратная. Рассмотрим матрицу $A^* = (A_{ij})$, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A, транспонируем ее и разделим на определитель $|A|$. (Матрицу A^* называют ***присоединенной***).

Покажем, что построенная таким способом матрица, является обратной для матрицы A.

$$A' = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

является обратной матрице A. Для этого рассмотрим произведение

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix}.$$

По теореме 3.1 все элементы произведения матриц, стоящие на главной диагонали, равны определителю матрицы A, а остальные элементы полученной матрицы равны нулю по теореме 3.2. Следовательно, произведение

$$A \cdot A' = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично показывается, что произведение $A' \cdot A = E$.

2) Теперь докажем единственность обратной матрицы. Пусть матрица A'' также является обратной для матрицы A. Рассмотрим произведение $A' \cdot A \cdot A''$. Имеем

$$A' \cdot A \cdot A'' = (A' \cdot A) \cdot A'' = E \cdot A'' = A'',$$

$$A' \cdot A \cdot A'' = A' \cdot (A \cdot A'') = A' \cdot E = A^{-1}.$$

Из этих равенств следует, что $A'' = A'$. □

Обозначается обратная матрица A^{-1}.

Условие невырожденности квадратной матрицы является не только достаточным, но и необходимым для существования обратной матрицы.

Теорема 4.2. *Если квадратная матрица A имеет обратную матрицу, то она невыроженная матрица.*

Доказательство. Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Тогда $A \cdot A^{-1} = E$. Значит, $|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$. По свойству 9 определителей имеем $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$. Следовательно, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Откуда вытекает, что $|A| \neq 0$. $\square$

Пример 4.1. Найдите матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение . Вычислим определитель.
$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 28 = 2 \neq 0,$
значит матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:
$A_{11} = 5, \quad A_{12} = -(-4) = 4, \quad A_{21} = -(-7) = 7, \quad A_{22} = 6$. Составим присоединенную матрицу $A^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Транспонировав ее и разделив на определитель, получим матрицу, обратную матрице A

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку. Для этого вычислим произведение

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2,5 - 7 \cdot 2 & 6 \cdot 3,5 - 7 \cdot 3 \\ -4 \cdot 2,5 + 5 \cdot 2 & -4 \cdot 3,5 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 4.2. Найдите матрицу, обратную матрице
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение . Вычислим определитель.
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -10 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0,$$
значит, матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:
$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Составим присоединенную матрицу $A^* = \begin{pmatrix} 17 & -5 & -14 \\ -10 & 10 & 10 \\ 11 & -5 & -2 \end{pmatrix}$. Транспонировав ее и разделив на определитель, получим матрицу, обратную матрице A

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 17 & -10 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \\ -14 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверку выполните самостоятельно.

Метод вычисления обратной матрицы с использованием алгебраических дополнений можно применять, если порядок матрицы мал.

Для матриц, порядки которых достаточно велики, для вычисления обратной матрицы удобно применять метод Гаусса[10]–Жордана[11], который состоит в следующем: *Справа к матрице A припишем единичную матрицу E. Используя элементарные преобразования матрицы, приведем матрицу A к единичной матрице. Тогда вторая матрица окажется равной A^{-1}*. Этим методом можно найти обратную матрицу для невырожденной квадратной матрицы любого порядка.

[10] Иоганн Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauss) (1777-1855) — немецкий математик, астроном и геодезист, почетный член Петербургской АН. Считается одним из величайших математиков всех времен, "королем математиков". С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: в алгебре, теории чисел, дифференциальной и неевклидовой геометрии, математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, а также в небесной механике, астрономии, физике. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс мгновенно получил результат. До самой старости он привык большую часть вычислений производить в уме. Гаусс доказал возможность построения с помощью циркуля и линейки правильного семнадцатиугольника, нашел критерий возможности построения правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки. В 1815 году публикует первое строгое доказательство основной теоремы алгебры. В его бумагах обнаружены заметки по тому предмету, что позже назвали топологией. В возрасте 62 лет Гаусс начал изучать русский язык, чтобы ознакомиться с трудами Лобачевского.

[11] Мари Энмон Камиль Жордан (Jordan) (1838-1922) — французский математик), издатель "Journal de mathematiques pures et appliquees"(1885-1921), член-корреспондент Петербургской АН. Работы Жордана относятся к алгебре (нормальная жорданова форма матриц), теории функций (понятие функции с ограниченным изменением), а также топологии и кристаллографии.

Пример 4.3. Методом Жордана-Гаусса найдите матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение . Припишем справа к матрице единичную матрицу и и с помощью элементарных преобразований перегоним единичную матрицу налево.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & | & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & | & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/2 & | & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & | & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & | & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/2 & | & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & | & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7/15 & 1/3 & -1/15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 17/30 & -1/3 & 11/30 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7/15 & 1/3 & -1/15 \end{pmatrix}.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{30} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{30} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{7}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 17 & -10 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \\ -14 & 10 & -2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратной матрицы.

1. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; 2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;
3. $(A^{-1})^{-1} = A$; 4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

§5. Матричные уравнения.

Пусть A — невырожденная квадратная матрица.

Поставим задачу: найти такие матрицы X и Y, чтобы были справедливы уравнения $A \cdot X = B$ и $Y \cdot A = B$ (в общем случае $X \neq Y$).

Так как A — невырожденная матрица, то для нее существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения $AX = B$ на матрицу A^{-1} слева. Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{или} \quad X = A^{-1}B.$$

Аналогично можно получить, что $Y = BA^{-1}$.

Пример 5.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$.

Решение . Матрица $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, обратная матрице A была найдена в примере 4.1.

Найдем матрицы:

$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5\cdot 7 + 7\cdot(-3) & 5\cdot(-2) + 7\cdot 9 \\ 4\cdot 7 + 6\cdot(-3) & 4\cdot(-2) + 6\cdot 9 \end{pmatrix} =$
$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 14 & 53 \\ 10 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 26,5 \\ 5 & 23 \end{pmatrix}$.

$Y = BA^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7\cdot 5 + (-2)\cdot 4 & 7\cdot 7 + (-2)\cdot 6 \\ (-3)\cdot 5 + 9\cdot 4 & (-3)\cdot 7 + 9\cdot 6 \end{pmatrix} =$
$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 27 & 37 \\ 21 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5 & 18,5 \\ 10,5 & 16,5 \end{pmatrix}$.

Этот пример еще раз подтверждает, что умножение матриц не коммутативно.

§6. Системы линейных уравнений.

В школе вы изучали системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{cases}$$

Напомню один из методов решения этой системы.

Умножим первое уравнение на b_2, а второе – на $-b_1$, а затем сложим эти уравнения
$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y &= b_2c_1, \\ -a_2b_1x - b_1b_2y &= -b_1c_2. \end{cases}$

Получим $\quad (a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2.$

Заметим, что $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Обозначим эти определители через Δ и Δ_x соответственно.

Равенство для определения x принимает вид

$$\Delta \cdot x = \Delta_x.$$

Если $\Delta \neq 0$, то

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Аналогично можно получить, что

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Так как уравнение $ax + by = c$ задает на плоскости прямую, то система двух уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение, если прямые, задающие уравнения, пересекаются; не имеет решений, если прямые параллельны; имеет бесконечно много решений, если прямые совпадают.

Аналитически эти условия можно записать следующим образом:
система имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ $(\Delta \neq 0)$,
система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ $(\Delta = 0,\ \Delta_x \neq 0,\ \Delta_y \neq 0)$,
система имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $(\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0)$.

Рассмотрим задачу, при решении который применяются системы линейных уравнений. Классическая транспортная задача — одна из задач линейного программирования о поиске оптимального распределения однородных объектов. В общем случае под названием транспортная задача, определяется широкий круг задач с единой математической моделью. Для простоты понимания она рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления с минимальными затратами на перевозки. Задача была впервые формализована французским математиком Гаспаром Монжем[12]. Существенное продвижение в решении транспортной задачи было сделано советским математиком и экономистом Леонидом Канторовичем[13]. Поэтому иногда эта проблема называется *транспортной задачей Монжа–Канторовича*.

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$. При

[12]Гаспар Монж, граф де Пелюз (Gaspard Monge, comte de Peluse) (1746-1818) — французский математик, геометр, государственный деятель. Монж разработал основы начертательной геометрии и вариационного исчисления. Он определил, что вода представляет соединение водорода и кислорода.

[13]Леонид Витальевич Канторович (1912-1986) — советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования, лауреат Нобелевской премии по экономике "за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов". Развил общую теорию приближчнных методов, построил эффективные методы решения операторных уравнений, первым применил функциональный анализ в вычислительной математике, развил идею оптимальности в экономике. Интересный факт: После того, как Л. В. Канторовичем был предложен оптимальный метод распила фанерного листа, этот метод попытались применить к разрезанию стальных листов. После внедрения методов оптимизации на производстве одной из фабрик инженерам удалось улучшить показатели, что привело, однако, к негативным последствиям: а) система социалистического планирования требовала, чтобы в следующем году план был перевыполнен, что было принципиально невозможно при имеющихся ресурсах (поскольку найденное решение было абсолютным максимумом); б) фабрика не выполнила план по металлолому, львиная доля которого складывалась из обрезков стальных листов. Руководство фабрики получило выговор от партии и больше с математиками не связывалось.

этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через c_{ij} — тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i — запасы груза в i-м пункте отправления, через b_j — потребности в грузе в j-м пункте назначения, а через x_{ij} — количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции $F = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ при условиях $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (каждый потребитель получает нужное количество продукта), $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ (каждый поставщик отгружает весь произведенный продукт) и $x_{ij} \geqslant 0$ (условие неотрицательности: поставка от какого-то пункта производства тому или иному пункту потребления может быть равна нулю, но отрицательной, следовать в обратном направлении, быть не может) ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$).

В настоящее время разработано много различных алгоритмов решения транспортной задачи: распределительный метод, метод потенциалов, дельта-метод, метод дифференциальных рент, способ двойного предпочтения, различные сетевые методы. По ним составлены десятки программ. Во многих снабженческих, транспортных и других организациях с их помощью рассчитываются маршруты доставки материалов на строительные площадки, планы длительного прикрепления поставщиков металлопроката к потребителям, планы перевозок топлива. Задачи эти часто усложняются разного рода дополнительными условиями: например, в них включается расчет не только себестоимости перевозок, но и себестоимости производства продукции (производственно-транспортная задача), оптимизируется совместно доставка взаимозаменяемых видов продукции, оптимизируется доставка грузов с промежуточными базами (складами). Кроме того, следует учитывать, что экономико-математическая модель транспортной задачи позволяет описывать множество ситуаций, весьма далеких от проблемы перевозок, в частности, находить оптимальное размещение заказов на производство изделий с разной себестоимостью.

В курсе линейной алгебры мы будем изучать системы линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Числа a_{ij} — коэффициенты системы, они образуют матрицу $A = (a_{ij})$, называемую ***матрицей системы***.

Дополняя матрицу A столбцом свободных членов, получим ***расширенную матрицу системы***

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \tag{6.2}$$

Свободные члены отделены от основной матрицы чертой.

Обозначим $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — матрицу-столбец неизвестных, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ — матрицу-столбец свободных членов. Используя операцию умножения матриц, систему (6.1) можно записать в матричном виде

$$AX = B. \tag{6.3}$$

Решением системы (6.1) называется упорядоченный набор чисел $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, при подстановке которого в систему уравнений вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждое уравнение превращается в верное числовое равенство. Система (6.1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система (6.1) называется ***определенной***, если она имеет только одно решение и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), и ***неоднородной***, если хотя один из свободных членов отличен от нуля.

При рассмотрении систем линейных уравнений возникают вопросы:
1) имеет ли система хотя бы одно решение (совместна ли система);
2) если система совместна, то сколько решений она имеет (система определенная или нет);
3) как найти все решения системы.

В курсе линейной алгебры мы рассмотрим три метода решения систем линейных уравнений: матричный метод, метод Крамера и метод Гаусса.

Пример 6.1. Решите матричным способом систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4, \\ 3x_1 - 7x_2 + 15x_3 = -16, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение . Обозначим
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 11 \end{pmatrix}.$$
Систему можно записать в матричном виде $AX = B$ и решить ее через обратную матрицы. Так как матрица A невырожденная $|A| = -9 \neq 0$, то для нее существует обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 66 & -18 & -3 \\ 31 & -9 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда $X = A^{-1}B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 66 & -18 & -3 \\ 31 & -9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
то есть $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

§7. Правило Крамера.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{cases} \tag{7.1}$$

Запишем соотвествующее матричное уравнение $AX = B$, где $A = (a_{ij})$ — матрица системы, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — матрица-столбец неизвестных, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ — матрица-столбец свободных членов.

Если матрица A — невырожденная ($\Delta = |A| \neq 0$), то для нее существует обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}(A_{ij})^T$.

Решим систему (7.1) матричным способом.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Определитель $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ получается из определителя Δ заменой первого столбца столбцом свободных членов. Его называют ***дополнительным определителем неизвестной*** x_1.

Аналогично получаем, что $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ \dots \ , x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где определитель

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

получается из определителя Δ заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \dots \ , x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{7.2}$$

называют ***формулами Крамера***[14].

Сформулируем доказанную теорему

Теорема 7.1. (Крамера) *Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера*

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad (k = \overline{1, n})$$

где Δ – определитель системы, Δ_k – дополнительный определитель неизвестной x_k.

Из формул (7.2) вытекает следствие.

Следствие 7.2. *Если определитель системы Δ равен нулю, а хотя бы один из дополнительных определителей неизвестных отличен от нуля, то система решений не имеет.*

Пример 7.1. Решите систему уравнений про формулам Крамера

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -4, \\ 3x - 7y + 15z = -16, \\ 4x + y - 2z = 11. \end{cases}$$

[14]Габриэль Крамер (Gabriel Cramer) (1704-1752) — швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры. Крамер дал алгоритм вычисления определителя, провҷл классификацию алгебраических кривых до пятого порядка включительно. Работы Крамера охватывают самые разные темы: геометрия, история математики, философия, приложения теории вероятностей. Самая известная из работ Крамера —трактат "Введение в анализ алгебраических кривых"("Introduction a l'analyse des lignes courbes algebraique").

Решение . Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ — основная матрица системы. Вычислим определитель этой матрицы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -18 \end{vmatrix} = -9.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то систему можно решать методом Крамера.

Вычислим дополнительные определители для неизвестных системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -16 & -7 & 11 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & -16 & 15 \\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & -7 & -16 \\ 4 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 9.$$

По формулам Крамера $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1$.

Часто студенты высказывают предположение, что если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ то система имеет бесконечно много решений. Однако это предположение неверно. Приведем контпример.

В системе уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ все определители $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, но система несовместна.

§8. Метод Гаусса.

Наиболее удобным для отыскания решений системы линейных уравнений с числовыми коэффициентами на практике является метод последовательного исключения неизвестных или метод Гаусса.

Дана система линейных уравнений (6.1). Рассмотрим преобразования системы, называемые ***элементарными преобразованиями***:

1) Умножение (деление) обеих частей уравнения на некоторое отличное от нуля число;

2) Прибавление к обеим частям j-ого уравнения соответствующих частей i-того уравнения, умноженных на некоторое отличное от нуля число;

3) Перестановка местами двух уравнений.

Полученная в результате такого преобразования система будет равносильна системе (6.1), то есть они либо обе несовместны, либо обе совместны и имеют одни и те же решения. Может получиться так, что после выполнений нескольких таких преобразований получим уравнение, все коэффициенты которого равны 0. Отбрасывая это уравнение, также получим систему, равносильную исходной.

Рассмотрим метод Гаусса. Идея этого метода состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований привести систему уравнений к треугольному (ступенчатому) виду. Уравнение, которое будем прибавлять к другим уравнениям назовем ***разрешающим уравнением***, а коэффициент при переменной, которую будем исключать из всех уравнений, кроме разрешающего, назовем ***разрешающим элементом***.

Дана система (6.1). Пусть для определенности $a_{11} \neq 0$. Возьмем a_{11} за разрешающий элемент. Исключим неизвестное x_1 из всех уравнений кроме первого. Для этого будем первое уравнение умножать последовательно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и прибавлять к остальным уранениям системы. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n & = & b'_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n & = & b'_m, \end{array}\right.$$

равносильную исходной. Будем считать, что $a'_{22} \neq 0$, тогда неизвестное x_2 можно исключить из всех уравнений системы кроме второго, и так далее, пока не получим систему треугольного или ступенчатого вида, из которой легко находить неизвестные.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n & = & b'_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a''_{mk}x_k + ... + a''_{mn}x_n & = & b''_m. \end{array}\right.$$

Решать систему методом Гаусса удобно, преобразовывая расширенную матрицу системы.

Пример 8.1. Решите методом Гаусса систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

Решение . Запишем расширенную матрицу системы
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & 0,5 \end{array}\right).$$

Итак, $\begin{cases} x_1 = -x_2 + 0,5x_3 + 0,5, \\ x_4 = -1,5x_3 + 0,5. \end{cases}$

Неизвестные x_2 и x_3 называются ***свободными***. Придавая им различные значения, будем получать различные частные решения системы. Например, если положить $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, то получим $x_1 = 2$, $x_4 = -1$, и $(2; -1; 1; -1)$ — частное решение системы.

§9. Арифметические векторы и действия над ними.

В школе на уроках геометрии и физики вектор определяли как направленный отрезок, вводили графически сумму и разность векторов, произведение вектора на число. Если ввести в пространстве декартову систему координат, то каждому вектору будет соответствовать упорядоченная тройка чисел $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Обобщая известные из школы факты, можно ввести следующее понятие.

Определение 9.1. ***Арифметическим n-мерным вектором*** *называется упорядоченная последовательность n действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Обозначается вектор*

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n). \tag{9.1}$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называют ***координатами вектора***.

Векторы $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называют ***равными***, если если их соотвествующие координаты равны, то есть $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots$, $a_n = b_n$.

Суммой векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n). \qquad (9.2).$$

Произведением вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число k называется вектор

$$k\overline{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n). \qquad (9.3).$$

Вектор $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, все координаты которого равны 0, называется ***нулевым***.

Вектор $-\overline{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ называется ***противоположным*** вектору $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют ***коллинеарными***, если $\overline{b} = k\overline{a}$.

Пример коллинеарных векторов дает таблица обменных курсов валют[15].

	1рубль	1 доллар	1 евро
1рубль	1	0,016	0,014
1доллар	62,45	1	0,786
1 евро	71,27	1,141	1

Любые две строки или любые два столбца этой матрицы представляют собой коллинеарные вектора.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяют условиям:

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$; 2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;
3. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$; 4. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;
5. $k(\overline{a} + \overline{b}) = k\overline{a} + k\overline{b}$; 6. $(k + l)\overline{a} = k\overline{a} + l\overline{a}$;
7. $(kl)\overline{a} = k(l\overline{a})$; 8. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

Множество n-мерных арифметических векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на чис-

[15] по курсу мая 2018 года

ло, удовлетворяющие условиям 1– 8, называется ***арифметическим*** *n-мерным векторным пространством и обозначается* $\mathbb{R}_n$.

Рассмотрим два примера.

Пример 9.1. Пусть вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — вектор цен на n видов продукции, вектор $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — вектор объема выпуска этой продукции за месяц. Тогда месячный объем товарной продукции (в рублях) равен числу $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$.

Пример 9.2. Некоторая фирма для строительства офиса взяла кредит в трех банках. Каждый из банков предоставил 150 млн., 130 млн. и 125 млн. рублей под годовую процентную ставку 25%, 30% и 32% соответственно. Получили два вектора: вектор кредитов $\overline{c} = (150, 130, 125)$ и вектор процентных ставок $\overline{p} = (25, 30, 32)$. Тогда в конце года фирме по кредитам придется уплатить $150 \cdot 1,25 + 130 \cdot 1,30 + 125 \cdot 1,32 = 521,5$ млн. рублей.

Эти примеры показывают, что полезно ввести еще одно действие над векторами.

Скалярным произведением *двух векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, равное сумме произведений их одноименных координат.*

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n. \tag{9.4}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$; 2) $(\overline{a} + \overline{b}, c) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c})$; 3) $(\alpha \overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y})$;
4) $(\overline{a}, \overline{a}) > 0$ при $\overline{a} \neq 0$ и $(\overline{a}, \overline{a}) = 0$ только тогда, когда $\overline{a} = 0$.

Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

Рассмотрим экономический пример на ортогональность векторов.

Одним из способов определения индекса цен и уровня инфляции является расчет стоимости потребительской корзины, состоящей из 300 видов товаров и услуг, получаемых потребителями. В стаблице приведен пример, как можно вычислять индекс цен. Расчет индекса цен проводится по формуле: "Расходы в текущем месяце" делим на "Расходы в предыдущем месяце".

Вид товара	количество	Цена ед. товара в текущем месяце	Расходы в текущем месяце	Цена ед. товара в предыдущем месяце	Расходы в предыдущем месяце
Яйца	15	4	60	3,9	58,5
Молоко	10	34,5	345	33	330
Хлеб	17	28	476	27,6	469,2
Картофель	24	25,5	612	25	600
Сахар	2	41	82	38	76
Общие расходы	—	—	1575	—	1533,7

Таким образом, в нашем случае, индекс инфляции составляет $\frac{1575}{1533,7} \cdot 100\% - 100\% \approx 2,7\%$.

Обозначим через $\overline{q} = (15;\ 10;\ 17;\ 24;\ 2)$ — вектор количества потребляемых товаров, $\overline{c} = (4;\ 34,5;\ 28;\ 25,5;\ 41)$ — вектор цен в текущем месяце, $\overline{c}_{-1} = (3,9;\ 33;\ 27,6;\ 25;\ 38)$ — вектор цен в предыдущем месяце.

Индекс цен вычисляется по формуле

$$p = \frac{(\overline{c},\ \overline{q})}{(\overline{c}_{-1},\ \overline{q})} \cdot 100\%.$$

Откуда $(100\overline{c},\ \overline{q}) = p \cdot (\overline{c}_{-1},\ \overline{q})$ или $(100\overline{c} - p \cdot \overline{c}_{-1},\ \overline{q}) = 0$.

Таким образом, индекс цен можно определить как численный коэффициент p, который делает вектор $\overline{q}$ ортогональным вектору $100\overline{c} - p \cdot \overline{c}_{-1}$.

Индекс инфляции расчитывается по формуле

$$i = p - 100 = \frac{(\overline{c},\ \overline{q})}{(\overline{c}_{-1},\ \overline{q})} \cdot 100 - 100 = \frac{(\overline{c} - \overline{c}_{-1},\ \overline{q})}{(\overline{c}_{-1},\ \overline{q})} \cdot 100.$$

§10. Линейная зависимость векторов.

Операции сложения и умножения векторов лежат в основе и находят многочисленные приложения в математике и физике.

Вектор $\overline{b}$ называется ***пропорциональным*** вектору $\overline{a}$, если существует число $k \neq 0$ такое, что $\overline{b} = k\overline{a}$. Обобщением понятия пропорциональности векторов является понятие их линейной комбинации.

Определение 10.1. *Пусть дана система векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ *из пространства* $\mathbb{R}_n$. *Вектор* $\overline{b}$ *вида*

$$\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m, \tag{10.1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *– действительные числа называется* ***линейной комбинацией векторов*** $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$.

Говорят также, что вектор $\overline{b}$ ***линейно выражается*** через вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$.

Если векторы заданы своими координатами, то используя определение операций над векторами, для любой координаты вектора $\overline{b}$ получим $b_i = \lambda_1\overline{a}_{1i} + \lambda_2\overline{a}_{2i} + \ldots + \lambda_m\overline{a}_{mi}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение 10.2. *Система векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ $(m \geqslant 2)$ *из пространства* $\mathbb{R}_n$ *называется* ***линейно зависимой****, если существуют такие числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$*, не равные нулю одновременно, что справедливо равенство*

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0} \tag{10.2}$$

(линейная комбинация векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ *с коэффициентами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *равна нулю). Если равенство* (10.2) *выполняется только тогда, когда все коэффициенты равны нулю* $(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0)$*, то система векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ *называется* ***линейно независимой****.*

Докажем несколько теорем о свойствах линейно зависимых векторов.

Теорема 10.1. *Система векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно зависима. По определению существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные нулю одновременно, что $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0}$. Пусть для определенности $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\overline{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\overline{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1}\overline{a}_m$. Вектор $\overline{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов системы. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для определенности вектор $\overline{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов системы, то есть выполнено равенство $\overline{a}_1 = \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m$ или $\overline{a}_1 - \lambda_2\overline{a}_2 - \ldots - \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0}$. В линейной комбинации $\overline{a}_1 - \lambda_2\overline{a}_2 - \ldots - \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0}$ не все коэффициенты равны нулю ($\lambda_1 = 1$), значит, система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно зависима. □

Теорема 10.2. *Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.*

Доказательство. Дана система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m, \overline{0}$, содержащая нулевой вектор. Коэффициенты линейной комбинации можно выбрать так: $0, 0, \ldots, 0, 1$. Линейная комбинация векторов равна нулю $0 \cdot \overline{a}_1 + 0 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \overline{a}_m + 1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$, но не все коэффициенты нулевые. □

Теорема 10.3. *Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.*

Доказательство. Дана система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$, и ее подсистема $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ ($k < m$). Так как система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ линейно зависима, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, что справедливо равенство $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}_k = \overline{0}$. Если взять коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0$, то получим верное равенство $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}_k + 0\overline{a}_{k+1} + \ldots + 0\overline{a}_n = \overline{0}$, в которой не все коэффициенты равны 0. □

Теорема 10.4. *Если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.*

Доказательство. Доказывать будем методом от противного. Предположим, что в линейно независимой системе векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ существует линейно зависимая подсистема. По теореме 10.3 тогда и вся система векоров будет линейно зависима. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно, и система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно независима. □

Теорема 10.5. *Система векторов, содержащая два коллинеарных вектора, линейно зависима.* (Докажите эту теорему самостоятельно.)

Примером линейно независимых векторов являются два неколлинеарных вектора на плоскости. В самом деле, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы и в равенстве $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = 0$, например, $\lambda_1 \neq 0$, то $\overline{b} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a}$ и, значит, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Также линейно независимыми являются три некомпланарных вектора в пространстве $\mathbb{R}_3$ (векторы называются ***компланарными***, если они параллельны некоторой плоскости).

Данное выше определение линейно зависимой системы векторов предполагает, что эта система содержит конечное число векторов. Однако часто приходится рассматривать и бесконечные системы. Мы условимся бесконечную систему считать ***линейно зависимой***, если линейно зависимой будет какая-нибудь ее подсистема, и ***линейно независимой***, если любая ее подсистема является линейно независимой. С бесконечными линейно независимыми системами мы встретимся в курсе анализа.

Возникает вопрос: сколько линейно независимых векторов может содержать система n-мерных векторов. Для ответа на него рассмотрим систему векторов

$$\bar{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0),\ \bar{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0),\ \ldots,\ \bar{e}_n = (0; 0; \ldots; 1) \tag{10.3}$$

Эта система векторов линейно независима. Действительно, линейная комбинация векторов (10.3) обращается в 0 только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Значит, существует система, состоящая из n линейно независимых n-мерных векторов.

А может ли существовать система n-мерных линейно независимых векторов, число векторов в которой больше n? Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема 10.6. *Всякие k n-мерных векторов при $k > n$ линейно зависимы.*

§11. Линейные пространства. Базис линейного пространства. Подпространства.

Для построения общей теории систем линейных уравнений недостаточно того аппарата, который мы до этого применяли. Помимо матриц и определителей нам необходимо понятие линейного пространства.

Определение 11.1. *Множество $\mathbb{V}$ элементов произвольной природы называется* ***линейным пространством****, если*

а) задана внутренняя операция – сложение элементов пространства (правило, по которому $\forall x, y \in \mathbb{V}$ ставится в соответствие эле-

мент $z \in \mathbb{V}$), то есть $z = x + y$;

б) задана внешняя операция – умножение элемента на число (правило, по которому $\forall x \in \mathbb{V}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) ставится в соответствие элемент $w \in \mathbb{V}$), то есть $w = \alpha \cdot x$.

Эти операции удовлетворяют следующим условиям:

I. 1) $x + y = y + x,\ \ \forall x, y \in \mathbb{V}$;

2) $(x + y) + z = x + y + z,\ \ \forall x, y\, z \in \mathbb{V}$;

3) $\exists\, 0 \in \mathbb{V}$ (нулевой элемент), такой что $0 + x = x,\ \ \forall x \in \mathbb{V}$;

4) $\forall x \in \mathbb{V}\ \exists x' \in \mathbb{V}$ (противоположный элемент), такой что $x + x' = 0$;

II. 5) $1 \cdot x = x,\ \forall x \in \mathbb{V}$;

6) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,\ \ \forall x \in \mathbb{V},\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,\ \ \forall x \in \mathbb{V},\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

8) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,\ \ \forall x, y \in \mathbb{V},\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Исходя из определения линейного пространства можно доказать следующие утверждения:

Предложение 11.1. *1. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент;*

2. $\forall x \in \mathbb{V}$ существует единственный противоположный элемент, который равен $(-1) \cdot x = -x$;

3. Произведение $0 \cdot x = 0,\ \forall x \in \mathbb{V}$;

4. Произведение $\alpha \cdot 0 = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

5. Если произведение $\alpha \cdot x = 0$, то либо $\alpha = 0$, либо $x = 0$.

Доказательство. Доказывать утверждения 1 и 2 будем от противного.

1. Предположим, что в линейном пространстве существуют два нулевых элемента 0_1 и 0_2. Тогда с одной стороны $0_1 + 0_2 = 0_1$, с другой стороны $0_1 + 0_2 = 0_2$. Откуда следует равенство $0_1 = 0_2$.

2. Предположим, что в линейном пространстве для любого элемента x существуют два противоположных элемента x' и x''. Имеем $x' + x + x'' = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''$ или $x' + x + x'' = x' + (x + x'') = x' + 0 = x'$. Откуда $x' = x''$.

3. Пусть $0 \cdot x = 0$. Тогда $0 \cdot x = (\alpha - \alpha)x = \alpha x - \alpha x = 0$.

4. Пусть $\alpha \cdot 0 = 0$. Тогда $\alpha \cdot (x - x) = \alpha x - \alpha x = 0$.

5. Пусть $\alpha \cdot x = 0$, но $\alpha \neq 0$. Тогда $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) x = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$ □

Примеры линейных пространств.

1. Множество матриц размера $m \times n$ с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

2. Множество многочленов степени меньше или равной n с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на число.

3. Множество $\mathbb{R}_n$ n-мерных векторов с введенными в предыдущем параграфе операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

4. Множество $C[a; b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$. Введем на этом множестве операции сложения функций и умножения функции на число по следующим правилам: сумма функций $f + g$ находится по правилу $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, произведение функции f на число α находится по правилу $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Определение 11.2. *Линейное векторное пространство $\mathbb{V}$ называется **n-мерным**, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов уже являются линейно зависимыми.*

Другими словами, ***размерность пространства*** — это максимальное число содержащихся в этом пространстве линейно независимых векторов. Обозначают n-мерное пространство $\mathbb{R}_n$.

Определение 11.3. *Максимальная совокупность линейно независимых векторов называется **базисом** линейного векторного пространства.*

Теорема 11.2. *Все базисы конечномерного линейного векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Теорема 11.3. *Каждый вектор $\overline{x}$ линейного векторного пространства $\mathbb{R}_n$ можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса.*

$$\overline{x} = x_1\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2 + \ldots + x_n\overline{f}_n. \tag{11.1}$$

Доказательство. Пусть векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_n$. Так как любые $n + 1$ векторов в $\mathbb{R}_n$ линейно зависимы, то система $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n, \overline{x}$ будет линейно зависимой. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, не равные одновременно нулю, такие что $\lambda_1\overline{f}_1 + \lambda_2\overline{f}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{f}_n + \lambda\overline{x} = 0$. При этом $\lambda \neq 0$, ибо в противном случае система $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ будет линейно зависима. Следовательно, $\overline{x} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\overline{f}_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda}\overline{f}_2 - \ldots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda}\overline{f}_n$. Обозначив $x_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda}$, получим

$$\overline{x} = x_1\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2 + \ldots + x_n\overline{f}_n.$$

Это выражение $\overline{x}$ через $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$, единственное, так как если существует другое выражение вектора $\overline{x}$ через векторы базиса, например, $\overline{x} = y_1\overline{f}_1 + y_2\overline{f}_2 + \ldots + y_n\overline{f}_n$, то вычитая из этого равенства равенство (11.1), получим $(y_1 - x_1)\overline{f}_1 + (y_2 - x_2)\overline{f}_2 + \ldots + (y_n - x_n)\overline{f}_n = 0$. В силу линейной независимости векторов $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$, получим $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \ldots = y_n - x_n = 0$ или $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$. □

Равенство (11.1) называется ***разложением вектора $\overline{x}$ по базису*** $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$. Коэффициенты в разложении вектора по базису называют ***координатами вектора*** в данном базисе.

В n-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}_n$ базис состоит из n векторов. Система векторов (10.3) содержит n векторов и линейно независима. Значит, эти векторы образуют базис. Базис, состоящий из векторов $\overline{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $\overline{e}_n = (0; 0; \ldots; 1)$, называют ***каноническим***.

Теорема 11.4. *При сложении векторов их координаты (относительно одного базиса) складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

В произвольном n-мерном пространстве понятие линейной комбинации элементов, их линейной зависимости, базиса пространства вводятся аналогично. После выбора базиса задание любого элемента сводится к заданию упорядоченного набора из n чисел — координат элемента в данном базисе. Все линейные пространства одной конечной размерности n устроены одинаково (говорят они ***изоморфны***), поэтому обозначать их мы будем также $\mathbb{R}_n$.

Определение 11.4. *Множество $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}_n$ называется* ***подпространством****, если оно само является линейным пространством относительно введенных в $\mathbb{R}_n$ операций, то есть*
1. $\forall x, y \in \mathbb{L}$ их сумма $x + y \in \mathbb{L}$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{L}$ произведение $\alpha x \in \mathbb{L}$.

Определение 11.4 эквивалентно определению

Определение 11.5. *Множество* $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}_n$ *называется* подпространством*, если* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и* $\forall x, y \in \mathbb{L}$ *имеем* $\alpha x + \beta y \in \mathbb{L}$.

Если векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k \in \mathbb{R}_n$, то ***линейной оболочкой*** этой системы векторов называется множество их всевозможных линейных комбинаций

$$\mathbb{L}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k) = \{\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{a}_k\}.$$

Линейная оболочка является подпространством в $\mathbb{R}_n$.

Простейший способ построения подпространств состоит в следующем. Выберем систему векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k \in \mathbb{R}_n$ и рассмотрим линейную оболочку этой системы. Согласно определению 11.4 эта линейная оболочка образует в $\mathbb{R}_n$ подпространство. Базисом подпространства будет максимальная линейно независимая подсистема в $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k \in \mathbb{R}_n$.

§12. Ранг матрицы.

Дана матрица A размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы можно рассматривать как n-мерные вектора, а столбцы как m-мерные вектора.

Минором порядка k называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении выбранных k строк и k столбцов матрицы (см. §3).

Определение 12.1. *Число* r *называется* ***рангом матрицы*** *, если в матрице существует минор* M *порядка* r*, отличный от* 0*, а все миноры порядка* $r+1$*, если они существуют, равны* 0.

Другими словами ***рангом матрицы*** называется порядок наибольшего отличного от 0 минора матрицы.

Из определения ранга матрицы следует, что ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров, то есть $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

В общем случае нахождение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения вычислений матрицу приводят к более простому виду с помощью некоторых преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие ее преобразования:

1) Перестановка двух строк или двух столбцов;
2) Умножение всех элементов строки на любое число $k \neq 0$;
3) Прибавление ко всем элементам строки элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;
4) Отбрасывание нулевой строки.

Теорема 12.1. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.*

С помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду. Ранг новой матрицы вычислить намного легче, так как число миноров, отличных от 0 будет небольшим.

Пример 12.1. Найдите с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение . $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \end{pmatrix}.$$

Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -14$. Следовательно, $r(A) = 3$.

Для рангов матриц справедливы следующие свойства:

1) $r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)$; 2) $r(A + B) \geqslant |r(A) - r(B)|$;

3) $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$;

4) $r(AB) = r(A)$, если B невырожденная квадратная матрица.

Если ранг $r(A) = r$, то минор порядка r, отличный от 0, называется ***базисным***, а входящие в него строки и столбцы ***базисными***. Заметим, что о базисных строках и столбцах можно говорить только после выбора базисного минора.

Строки матрицы можно рассматривать как n-мерные вектора. Поэтому понятия ***линейной комбинации*** и ***линейной зависимости*** строк вводятся также как в §10 эти понятия вводились для векторов.

Теорема 12.2. (теорема о базисном миноре) *Любая строка (любой столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).*

Доказательство. Пусть $r(A) = r$. Не умаляя общности можно считать, что отличный от 0 минор M стоит в правом верхнем углу (при перестановке строк и столбцов по теореме 12.1 ранг не меняется). Пусть s и t – целые числа такие, что $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant n$.

Рассмотрим определитель порядка $r + 1$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1t}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2t}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rt}\\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & a_{st} \end{vmatrix}$$

Он равен 0. В самом деле, при $s < r$ в определителе две одинаковых строки, а при $t < r$ — два одинаковых столбца. Значит, $D = 0$. При $s > r$, $t > r$ определитель $D = 0$ как минор порядка $r + 1$.

Разложим D по последнему столбцу:

$$D = a_{1t}A_{1t} + a_{2t}A_{2t} + \ldots + a_{rt}A_{rt} + a_{st}A_{st} = 0.$$

Алгебраическое дополнение $A_{st} = M \neq 0$ и не зависит от выбора чисел s и t. Обозначим через $\lambda_{si} = -\dfrac{A_{it}}{A_{st}}$ $(i = \overline{1,r})$. Тогда $a_{st} = \lambda_{1s}a_{1t} + \lambda_{2s}a_{2t} + \ldots + \lambda_{rs}a_{rt}$ (для всех $t = \overline{1;n}$). Таким образом, строка с номером s является линейной комбинацией базисных строк. $\square$

Сформулируем несколько следствий из теоремы о базисном миноре.

Следствие 12.3. *Если число строк матрицы больше ее ранга r, то строки матрицы линейно зависимы. Если число строк совпадает с рангом матрицы, то строки матрицы линейно независимы.*

Следствие 12.4. *Определитель квадратной матрицы A равен* 0 *тогда и только тогда, когда одна из строк является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть A – матрица порядка n, определитель которой $|A| = 0$. Тогда $r(A) = r < n$. После выделения базисного минора в матрице A найдется строка, не вошедшая в этот минор. По теореме 12.2 она является линейной комбинацией базисных строк.
2. Достаточность. Пусть k-тая строка матрицы A является линейной комбинацией строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$: $a_{ki} = \lambda_1 a_{i_1 j} + \lambda_2 1 a_{i_2 j} + \ldots + \lambda_r a_{i_r j}$. Вычтем из k-той строки i_1-ю строку, умноженную на λ_1, i_2-ю, умноженную на λ_2, …, i_r-ю, умноженную на λ_r. Получим $a_{kj} - \lambda_1 a_{i_1 j} - \lambda_2 1 a_{i_2 j} - \ldots - \lambda_r a_{i_r j} = 0$. Новая k-ая строка нулевая, значит, определитель $|A| = 0$. $\square$

Следствие 12.5. *Определитель квадратной матрицы A равен* 0 *тогда и только тогда, когда ее строки линейно зависимы.*

Так как строки матрицы, входящие в базисный минор, линейно независимы (следствие 12.3), и любая совокупность строк, число которых больше ранга матрицы, линейно зависима, то справедлива теорема

Теорема 12.6. *Ранг матрицы равен числу ее линейно независимых строк.*

Эта теорема может быть взята за определение ранга матрицы.

Теорема о ранге матрицы играет принципиально важную роль в матричном анализе, в частности, при исследовании систем линейных уравнений.

§13. Теорема Кронекера–Капелли.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right. \tag{13.1}$$

Обозначим через $A = (a_{ij})$ — основную матрицу системы, через $\widetilde{A} = (a_{ij}|b_i)$ — расширенную матрицу системы.

Ответ на вопрос о разрешимости системы (13.1) дает теорема

Теорема 13.1. (Кронекера-Капелли) *Система* (13.1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы, то есть $r(A) = r(\widetilde{A})$.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть система (13.1) совместна и вектор $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ — ее решение. Тогда, подставив его в систему, получим

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \ldots + a_{1n}x_n^\circ & = & b_1, \\ a_{21}x_1^\circ + a_{22}x_2^\circ + \ldots + a_{2n}x_n^\circ & = & b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \ldots + a_{mn}x_n^\circ & = & b_m. \end{array}\right.$$

Это означает, что последний столбец матрицы $\widetilde{A}$ является линейной комбинацией остальных столбцов и его вычеркивание не меняет ранга матрицы. Следовательно, $r(A) = r(\widetilde{A})$.

б) Достаточность. Пусть $r(A) = r(\widetilde{A})$. Это значит, что базисный минор матрицы A является базисным минором матрицы $\widetilde{A}$. Столбец свободных членов, не вошедший в базисный минор, является линейной комбинацией остальных столбцов, то есть

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ является решением системы (13.1), то есть система (13.1) совместна. $\square$

§14. Исследование систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases} \tag{14.1}$$

Найдем ранги $r(A)$ и $r(\widetilde{A})$ основной и расширенной матриц системы.

Если $r(A) \neq r(\widetilde{A})$, то система несовместна. Пусть $r(A) = r(\widetilde{A}) = r$, то есть система совместна. Будем считать, что базисный минор M расположен в левом верхнем углу. Тогда последние $m - r$ уравнений являются линейной комбинацией первых r уравнений (являются следствиями первых уравнений) и система (14.1) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n &= b_r \end{cases} \tag{14.2}$$

Если $n = r$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение, так как $\Delta = M \neq 0$.

Пусть $n > r$. Оставим в левой части системы первые r неизвестных, остальные перенесем в правую часть.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_r &= b_m - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{14.3}$$

Неизвестные, коэффициенты при которых не входят в базисный минор, называются ***свободными***. Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются ***базисными*** или ***зависимыми***. Очевидно, число свободных неизвестных равно $n - r$.

Решая систему (14.3) любым известным нам способом, найдем зависимые неизвестные

$$\begin{cases} x_1 & = & f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_r & = & f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{14.4}$$

где f_i – линейные функции от переменных x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots$, x_n .

По формулам (14.4) находят ***общее решение*** системы (14.3), а, значит, и системы (14.1). Придавая свободным неизвестным произвольные значения, будем получать ***частные решения*** системы.

Сформулируем основные теоремы о числе решений системы линейных уравнений:

Теорема 14.1. *Система линейных уравнений* (14.1) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц совпадают с числом неизвестных, то есть* $r(A) = r(\widetilde{A}) = n$ *(система является определенной).*

Теорема 14.2. *Система линейных уравнений* (14.1) *имеет бесконечно много решение тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц совпадают, но меньше числа неизвестных, то есть* $r(A) = r(\widetilde{A}) < n$ *(система является неопределенной).*

При решении системы (14.1) наиболее часто применяют метод Гаусса, причем преобразования выполняют не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы. Достоинствами метода Гаусса являются: а) меньшая по сравнению с другими методами трудоемкость, б) возможность одновременно исследовать систему на совместность, и если система является совместной, получить ее общее решение.

Пример 14.1. Решите систему $\begin{cases} 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3, \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1. \end{cases}$

Решение . Хотя число уравнений равно числу неизвестных $m = n$, но определитель системы $\Delta = 0$ и по методу Крамера систему решать нельзя.

Будем решать систему методом Гаусса. Преобразуем матрицу $\widetilde{A}$, найдем ее ранг и сравним с рангом матрицы A.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -3 & | & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & | & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & | & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & | & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & | & -5 \end{pmatrix}.$$

Значит, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$ и по теореме Кронекера-Капелли система совместна. За свободные неизвестные примем x_2 и x_4. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = & 2 + 2x_2 - 2x_4, \\ 2x_3 & = & -5 - 9x_2 + 7x_4. \end{cases}$$

Ее общее решение имеет вид $\begin{cases} x_1 & = & -0,5 - 2,5x_2 + 1,5x_4, \\ x_3 & = & -2,5 - 4,5x_2 + 3,5x_4. \end{cases}$

Пример 14.2. Корм для птицы, составленный из четырех видов зерна, должен содержать 17 единиц вещества A, 35 единиц вещества B, 44 единицы вещества C и 26 единиц вещества D. Известно содержание единиц полезных веществ в 1 кг. зерна каждого вида и цена 1 кг. зерна каждого вида:

Вид	Содержание полезных веществ (ед. в 1 кг.)				Цена 1 кг. (д.е.)
	A	B	C	D	
1	1	3	4	2	5
2	2	4	5	3	7
3	1	1	1	1	2
4	1	3	4	2	5
Итого	17	35	44	26	

Найдите все возможные составы корма, обеспечивающие необходимое количество полезных веществ. Существует ли состав корма, стоимость которого равна 60 д. е.?

Решение . Обозначим через x_i вес зерна i-того вида $(i = 1, 2, 3, 4)$ и составим систему уравнений для нахождения состава корма на каждый день

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 17, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 35, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 44, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 26. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Будем последовательно исключать неизвестные x_1 и x_2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 35 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 44 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -24 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

Ранги основной и расширенной матриц равны. Значит, система имеет решение. Решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 - x_4, \\ x_2 = 8 - x_3. \end{cases}$$

Это решение имеет смысл, если все переменные неотрицательны. Тогда необходимо, чтобы $x_3 \in [0;\, 8]$, $x_4 \in [0;\, x_3 + 1]$.

Ответим на второй вопрос примера. Для этого в систему нужно добавить еще одно уравнение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 35, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 44, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 26, \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 60. \end{cases}$$

Решая эту систему,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 35 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 44 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 26 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -24 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

получим, что ранги основной и расширенной матриц различны. Значит, эта система решений не имеет. Нельзя составить рацион, стоимость которого равнялась бы 60 д. е. Проверьте, можно ли составить рацион, стоимость которого равнялась бы 61 д. е.

Метод Гаусса применяют при решении компьтерном систем линейных уравнений. Программистский вариант метода Гаусса имеет три отличия от математического:

1. индексы строк и столбцов матрицы начинаются с нуля;

2. недостаточно найти просто ненулевой элемент в столбце. В программировании все действия с вещественными числами производятся приближенно, поэтому можно считать, что точного равенства вещественных чисел вообще не бывает. Поэтому вместо проверки на равенство нулю числа a_{ij} следует сравнивать его абсолютную величину с достаточно маленьким числом ε. Если $a_{ij} < \varepsilon$, то следует считать элемент a_{ij} нулевым.

3. при обнулении элементов j-го столбца, начиная со строки $i+1$, мы к s-й строке, где $s > i$, прибавляем i-ю строку, умноженную на коэффициент $k = -\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$. Такая схема работает хорошо только тогда, когда коэффициент k по абсолютной величине не превосходит единицы. В противном случае, ошибки округления умножаются на большой коэффициент и, таким образом, растут. Математики называют это явление *неустойчивостью* вычислительной схемы. Если вычислительная схема неустойчива, то полученные с ее помощью результаты не имеют никакого отношения к исходной задаче. Схема Гаусса устойчива, когда коэффициент $k = -\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}} \leqslant 1$. Поэтому при поиске разрешающего элемента в j-м столбце необходимо найти не первый попавшийся ненулевой элемент, а ***максимальный по абсолютной величине***.

§15. Системы линейных однородных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases} \qquad (15.1)$$

Система (15.1) всегда совместна так как имеет нулевое (тривиальное) решение $(0, 0, \ldots, 0)$. Поэтому интересен вопрос, при каких условиях система имеет нетривиальные решения. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 15.1. *Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела нетривиальные решения необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных, то есть* $r(A) = r < n$. (Доказать самостоятельно.)

Следствие 15.2. *Если в системе* (15.1) *число уравнений совпадает с числом неизвестных* ($m = n$)*, то система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен* 0*, то есть* $\Delta = 0$.

Решения системы линейных однородных уравнений (15.1) обладают свойствами:

1. Если вектор $X = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ является решением системы, то для любого числа k вектор $kX = (kx_1^\circ, kx_2^\circ, \ldots, kx_n^\circ)$ также является решением этой системы;

2. Если векторы $X = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ и $Y = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ)$ являются решениями системы, то вектор $X + Y = (x_1^\circ + y_1^\circ, x_2^\circ + y_2^\circ, \ldots, x_n^\circ + y_n^\circ)$ также является решением этой системы.

Из этих свойств вытекает теорема

Теорема 15.3. *Любая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.*

Так как решение системы линейных однородных уравнений с n неизвестными есть n-мерный вектор и линейная комбинация решений является решением системы, то множество решений системы линейных однородных уравнений образует линейное пространство, которое является подпространством в пространстве $\mathbb{R}_n$. Базис пространства решений системы линейных однородных уравнений называется ***фундаментальной системой решений***. То есть решения, входящие в фундаментальную систему решений, линейно независимы и любое решение системы является линейной комбинацией решений из фундаментальной системы.

Теорема 15.4. *Если ранг матрицы A системы линейных однородных уравнений* (15.1) *равен r и меньше числа неизвестных n, то фундаментальная система решений системы* (15.1) *существует и содержит $n - r$ решений.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r и меньше числа неизвестных $r < n$. Пусть базисный минор $M \neq 0$ стоит в левом верхнем углу. Перенеся свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в первых r уравнениях в правую часть, получим систему

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = & -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots & & \qquad\qquad\qquad\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_r & = & -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right. .$$

Зададим свободные неизвестные $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$, получим решение системы $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_r^1, 1, 0, \ldots, 0)$. Аналогично, задавая свободные неизвестные

$x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, …, $x_n = 0$, получим решение $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_r^2, 0, 1, \ldots, 0)$ и так далее. Так найдем $k = n - r$ решений системы
$e_1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_r^1, 1, 0, \ldots, 0)$;
$e_2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_r^2, 0, 1, \ldots, 0)$;
$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
$e_k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_r^k, 0, 0, \ldots, 1)$.
Эти k решений линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_r^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_r^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots & \alpha_r^k & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

равен k. В этой матрице есть минор порядка k, отличный от нуля, например, содержащий последние k столбцов.

Решения $e_1, e_2, \ldots, e_k$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы (15.1) имеет вид
$X = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ke_k$. □

Пример 15.1. Решите систему однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 17x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 11x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение . Методом Гаусса найдем ранг матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 5 & 8 & 8 & -6 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & -11 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 18 & -21 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & -14 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2 (в матрице есть минор порядка 2, отличный от нуля). Неизвестные x_3, x_4 и x_5 — свободные неизвестные, перенесем их в правую часть и получим решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 10x_4 + 3x_5, \\ x_2 = -6x_3 + 7x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений системы заданной линейных однородных уравнений имеет вид $e_1 = (8; -6; 1; 0; 0)$, $e_2 = (-10; 7; 0; 1; 0)$, $e_3 = (3; -4; 0; 0; 1)$ и ее общее решение $X = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + c_3 \cdot e_3 = c_1(8; -6; 1; 0; 0) + c_2(-10; 7; 0; 1; 0) + $
$+c_3(3; -4; 0; 0; 1)$.

§16. Метрические и евклидовы пространства.

Определение 16.1. *Линейное пространство $\mathbb{V}$, в котором для любых двух элементов x, y определено число $\rho(x, y)$ (**расстояние** между точками или **метрика**), удовлетворяющее условиям:*

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

2. $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$ и $\rho(x, x) = 0$;

3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (неравенство треугольника)

*называется **метрическим пространством**.*

Расстояние можно вводить различными способами, при этом будем получать различные метрические пространства. Например, можно ввести расстояние через скалярное произведение. Скалярное произведение векторов в n-мерном арифметическом пространстве было введено в § 9

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

где $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и там же рассмотрены его свойства.

*Линейное пространство $\mathbb{R}_n$, в котором введено скалярное произведение называется **евклидовым** и обозначается $\mathbb{E}_n$.*

Длиной (***нормой***) вектора $\overline{x}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ называется число $|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}$. Длина вектора $\overline{x}$ вычисляется по формуле

$$|\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Для длины вектора справедливы свойства:

1. $|\overline{x}| = 0$, при $\overline{x} = 0$; 2. $|\alpha\overline{x}| = |\alpha| \cdot |\overline{x}|$;
3. $|\overline{x} + \overline{y}| \leqslant |\overline{x}| + |\overline{y}|$ (неравенство треугольника);
4. $|(\overline{x}, \overline{y})| \leqslant |\overline{x}| \cdot |\overline{y}|$ (неравенство Коши-Буняковского);

Докажем неравенство Коши-Буняковского. Рассмотрим вектор $\lambda\overline{x} - \overline{y}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). По свойству 4 определения 16.1 $(\lambda\overline{x} - \overline{y}, \lambda\overline{x} - \overline{y}) \geqslant 0$. То есть $\lambda^2(\overline{x}, \overline{x}) - 2\lambda(\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{y}, \overline{y}) \geqslant 0$. Квадратный трехчлен принимает неотрицательные значения, значит его дискриминант $D \leqslant 0$. Имеем

$$D/4 = (\overline{x}, \overline{y})^2 - (\overline{x}, \overline{x})(\overline{y}, \overline{y}) \leqslant 0$$

$$(\overline{x}, \overline{y})^2 \leqslant (\overline{x}, \overline{x})(\overline{y}, \overline{y}) = |\overline{x}|^2 \cdot |\overline{y}|^2.$$

Извлекая квадратный корень, получим неравенство Коши-Буняковского.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что дробь

$$-1 \leqslant \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{|\overline{x}| \cdot |\overline{y}|} \leqslant 1.$$

Поэтому данную дробь можно считать косинусом некоторого угла φ :

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{|\overline{x}| \cdot |\overline{y}|}$$

Угол φ назовем ***углом*** между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется ***нормированным***. Два вектора, скалярное произведение которых равно 0, называются ***ортогональными***.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 16.1. *Всякая система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$, векторы которой попарно ортогональны, линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию данных векторов $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{a}_m = 0 \quad (*)$. Найдем, при каких значениях коэффициентов α_i она обращается в 0. Умножим $(*)$ скалярно на $\overline{a}_i$. $\alpha_1(\overline{a}_1, \overline{a}_i) + \ldots + \alpha_i(\overline{a}_i, \overline{a}_i) + \ldots + \alpha_m(\overline{a}_m, \overline{a}_i) = 0$. Получим $\alpha_i(\overline{a}_i, \overline{a}_i) = 0$, так как $(\overline{a}_i, \overline{a}_j) = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, для каждого $i = \overline{1, m}$ имеем $\alpha_i = 0$. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно независима. □

Определение 16.2. *Векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ образуют в пространстве $\mathbb{E}_n$* ***ортонормированный базис****, если длина каждого равна 1 и векторы попарно ортогональны, то есть $(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|\overline{e}_i| = 1$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Теорема 16.2. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ существует ортонормированный базис.*

Примером ортонормированного базиса является канонический базис: $\overline{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $\overline{e}_n = (0; 0; \ldots; 1)$.

§17. Формулы перехода от одного базиса к другому.

Пусть в пространстве R_n заданы два базиса

$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ — "старый" базис и $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ — "новый" базис.

Так как векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ образуют базис, то векторы $\overline{f}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}\overline{e}_i$ можно выразить через этот базис.

Из координат векторов $\{\overline{f}_j\}$ $(j = \overline{1,n}\,)$ составим матрицу C, записывая координаты векторов $\{\overline{f}_j\}$ в столбцы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{17.1}$$

Матрицу C называют ***матрицей перехода*** от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$.

Матрица C – невырожденная. Векторы $\{f_j\}$ линейно независимы, значит, ранг матрицы C равен n или $|C| \neq 0$. В матричной форме формулы перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$ можно записать

$$(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n) = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)C. \tag{17.2}$$

Аналогично, так как $\{\overline{f}_j\}$ – базис, выразим через него векторы $\overline{e}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\overline{f}_j$. Матрица A, элементы которой координаты векторов $\overline{e}_i$, записанные в столбцы, является матрицей перехода от базиса $\{\overline{f}_j\}$ к базису $\{\overline{e}_i\}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}..$$

Тогда формулы перехода от базиса $\{\overline{f}_j\}$ к базису $\{\overline{e}_i\}$ имеют вид

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n) = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n)A. \tag{17.3}$$

Из (17.2) и (17.3) следует, что $A = C^{-1}$.

Выведем формулы, связывающие координаты вектора в "старом" и "новом" базисах. Пусть $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\overline{e}_i$ и $\overline{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j\overline{f}_j$. Тогда

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \overline{f}_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j (\sum_{i=1}^{n} c_{ij} \overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \eta_j c_{ij}) \overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{e}_i$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \eta_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \eta_n \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \dots \\ c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

Формулы вычисления координат вектора при изменении базиса

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \qquad (17.4)$$

Пример 17.1. В базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ заданы векторы $\overline{f}_1 = (1;3;1)$, $\overline{f}_2 = (1;2;-1)$, $\overline{f}_3 = (2;8;7)$. Докажите, что векторы $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\overline{x} = (1;7;10)$ в новом базисе.

Решение . Составим матрицу C перехода от "старого" базиса к "новому":
$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Если векторы $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$ линейно независимы, то столбцы матрицы C линейно независимы, то есть $r(C) = 3$ или $|C| \neq 0$.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

Матрица C невырожденная и является матрицей перехода от "старого" базиса к "новому". Найдем матрицу C^{-1}, обратную к C.

$$C^{-1} = -\begin{pmatrix} 22 & -9 & 4 \\ -13 & 5 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 9 & -4 \\ 13 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$ имеют вид

$$(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора $\overline{x}$ в "новом" базисе:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 9 & -4 \\ 13 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\overline{x} = (1; -2; 1)$.

Пусть базисы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ и $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ пространства $\mathbb{E}_n$ ортонормированы, то есть векторы базисов единичные и попарно ортогональны: $|\overline{e}_i| = 1,\ |\overline{f}_i| = 1,\ (\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0,\ (\overline{f}_i, \overline{f}_j) = 0.$

Пусть заданы координаты векторов $\overline{f}_i = (q_{1i}, q_{2i}, \ldots, q_{ni})$ в "старом" базисе $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем $|\overline{f}_i|^2 = (q_{1i})^2 + (q_{2i})^2 + \ldots + (q_{ni})^2 = 1$ и $(\overline{f}_i, \overline{f}_j) = q_{1i}q_{1j} + q_{2i}q_{2j} + \ldots + q_{ni}q_{nj} = 0$ при $i \neq j$.

Матрица перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$ имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \tag{17.5}$$

Определение 17.1. *Матрица, в которой сумма квадратов элементов каждого столбца равна* 1, *а сумма произведений соответствующих элементов двух столбцов равна* 0 *называется* ***ортогональной****.*

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 17.1. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной.*

Теорема 17.2. *Матрица, обратная ортогональной матрице, совпадает с транспонированной, то есть* $Q^{-1} = Q^T$.

Доказательство. Вычислим произведение

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = E. \qquad \square$$

Следствие 17.3. *Определитель ортогональной матрицы равен* ± 1 *(*$|Q| = \pm 1$*).*

Доказательство. $|Q^{-1} \cdot Q| = |Q^T \cdot Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 = 1.$ $\square$

§18. Линейный оператор.

Одно из фундаментальных понятий алгебры матриц — это понятие линейного оператора.

Рассмотрим два линейных пространства $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}_m$. Отображение, ставящее любому вектору $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$ единственный вектор $\overline{y} \in \mathbb{R}_m$ называется ***оператором*** из $\mathbb{R}_n$ в $\mathbb{R}_m$ ($A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$). Обозначается оператор $\overline{y} = A(\overline{x})$ или просто $\overline{y} = A\overline{x}$. Вектор $\overline{y}$ называется ***образом*** вектора $\overline{x}$.

Определение 18.1. *Оператор* $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$ *называется* ***линейным****, если для любых двух векторов* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}_n$ *и любого действительного числа* α *выполняются условия:*
1) $A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y}$ *;*
2) $A(\alpha\overline{x}) = \alpha A\overline{x}$*.*

Условия 1) и 2) можно объединить:

Определение 18.2. *Оператор* A *называется* ***линейным****, если для любых векторов* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}_n$ *и любых чисел* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *выполнено условие* $A(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y}$*.*

Если $\mathbb{R}_m = \mathbb{R}_n$ то отображение $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ называется ***преобразованием*** пространства $\mathbb{R}_n$.

Примеры линейных операторов.

1.Тождественный оператор I: $I\overline{x} = \overline{x}$ для всех векторов $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$;

2. нулевой оператор: $A\overline{x} = \overline{0}$ для всех векторов $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$;

3. оператор проектирования: $P : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$ и $P\overline{a} = \overline{b}$, если

$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (a_1, a_2)$.

4. оператор подобия: $A\overline{x} = k\overline{x}$ для всех векторов $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$;

5. оператор поворота на угол φ: $A\overline{x} = (r\cos(\alpha+\varphi), r\sin(\alpha+\varphi))$ для всех векторов $\overline{x} = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \in \mathbb{R}_n$;

6. оператор дифференцирования: $f(x) \to f'(x)$;

7. оператор интегрирования: $f(x) \to F(x)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$.

Если из того, что $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$ следует, что $A\overline{x}_1 \neq A\overline{x}_2$, и для любого вектора $\overline{y} \in \mathbb{R}_m$ существует вектор $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$ такой, что $\overline{y} = A\overline{x}$, то говорят, что оператор A действует ***взаимно-однозначно***.

Пусть заданы два линейных оператора $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ и $B : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$.

Суммой линейных операторов A и B называется оператор $A + B$, действующий по закону $(A + B)(\overline{x}) = A\overline{x} + B\overline{x}$.

Произведением линейного оператора A на число α называется оператор αA, действующий по закону $(\alpha A)\overline{x} = \alpha(A\overline{x})$.

Произведением линейных операторов A и B называется оператор AB, действующий по закону $(AB)\overline{x} = A(B\overline{x})$. В общем случае $AB \neq BA$.

Линейный оператор B называется ***обратным*** оператору A, если произведение $AB = I$ (тождественный оператор). Обозначается обратный оператор A^{-1}.

Теорема 18.1. *Для того чтобы для линейного оператора A существовал обратный оператор необходимо и достаточно, чтобы оператор A действовал взаимно-однозначно.*

Определим как действует линейный оператор $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$.

Выберем в пространстве $\mathbb{R}_n$ базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, а в пространстве $\mathbb{R}_m$ базис $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_m$.

Найдем образы базисных векторов

$$A\overline{e}_1 = a_{11}\overline{f}_1 + a_{21}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{f}_m = \sum_{j=1}^{m} a_{j1}\overline{f}_j = (a_{11}; a_{21}; \ldots; a_{n1});$$

$$A\overline{e}_2 = a_{21}\overline{f}_1 + a_{22}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m2}\overline{f}_m = \sum_{j=1}^{m} a_{j2}\overline{f}_j = (a_{12}; a_{22}; \ldots; a_{n2});$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots;$$

$A\overline{e}_n = a_{1n}\overline{f}_1 + a_{2n}\overline{f}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{f}_m = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{jn}\overline{f}_j = (a_{1n}; a_{2n}; \ldots; a_{nn})$.

Из чисел a_{ji} составим матрицу A, записывая координаты векторов $A\overline{e}_i$ в столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{18.1}$$

A — матрица размера $m \times n$. Матрица A называется ***матрицей линейного оператора*** A. Таким образом, каждому линейному оператору можно поставить в соответствие матрицу. Задание матрицы полностью определяет линейный оператор.

Выведем формулу для вычисления координат образа произвольного вектора $\overline{x}$. Пусть оператор $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$. Выберем базисы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ в пространстве $\mathbb{R}_n$, и $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_m$ в пространстве $\mathbb{R}_m$.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i$ — произвольный вектор в $\mathbb{R}_n$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j\overline{f}_j \in \mathbb{R}_m$ — образ вектора $\overline{x}$, $A = (a_{ij})$ — матрица линейного оператора A. Тогда

$\overline{y} = A\overline{x} = A(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A\overline{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\overline{f}_j) = \sum\limits_{j=1}^{m}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i)\overline{f}_j$.

Запишем эти выкладки подробней в координатах

$\overline{y} = A\overline{x} = x_1(a_{11}\overline{f}_1 + a_{21}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{f}_m) + x_2(a_{12}\overline{f}_1 + a_{22}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m2}\overline{f}_m) + \ldots + x_n(a_{1n}\overline{f}_1 + a_{2n}\overline{f}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{f}_m) = (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n})\overline{f}_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n})\overline{f}_2 + \ldots + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + x_na_{mn})\overline{f}_m$.

В силу единственности разложения вектора $\overline{y}$ по базису имеем $y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ia_{ji}$ или в координатной

$$\begin{cases} y_1 &= x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n}, \\ y_2 &= x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n}, \\ \ldots & \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ y_m &= x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} \end{cases} \tag{18.2}$$

и матричной форме

$$\left(y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_m \right)^T = A \left(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n \right)^T. \qquad (18.3)$$

Мы показали, что для задания линейного оператора $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ достаточно задать образы базисных векторов. Заданием этих образов оператор определяется однозначно.

Сформулируем несколько теорем о линейных операторах:

Теорема 18.2. *Пусть* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *– базис в пространстве* $\mathbb{R}_n$, $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ *– произвольные вектора в пространстве* $\mathbb{R}_m$. *Тогда существует единственный оператор* $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ *такой что* $A\overline{e}_i = \overline{f}_i$.

Так как все операции над линейными операторами можно свести к операциям над матрицами операторов, то справедлива теорема

Теорема 18.3. *Матрица произведения операторов* AB *равна произведению матриц операторов* A *и* B.

В пространстве $\mathbb{R}_n$ базис можно выбрать различными способами, но тогда и матрицы оператора в разных базисах будут разными. Связь между матрицами оператора в разных базисах выражается теоремой

Теорема 18.4. *Матрицы* A *и* A^* *линейного оператора* A *в базисах* $\{\overline{e}_i\}$ *и* $\{\overline{f}_j\}$ *связаны соотношением* $A^* = C^{-1}AC$, *где* C *– матрица перехода от базиса* $\{\overline{e}_i\}$ *к базису* $\{\overline{f}_j\}$.

Теорема 18.5. *Определитель матрицы линейного оператора не меняется при переходе к новому базису.*

Пример 18.1. Докажите, что оператор A, действующий по закону $A\overline{x} = (2x_1+x_2+x_3, \ x_1+x_2, \ 2x_2-3x_3)$, линейный. Найдите матрицу оператора в каноническом базисе и образ вектора $\overline{a} = (3; 2; -1)$ двумя способами.

Решение . Докажем линейность оператора A.
1) $(2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 2(x_2 + y_2) - 3(x_2 + y_3)) =$
$= (2x_1 + x_2 + x_3, \ x_1 + x_2, \ 2x_2 - 3x_3) + (2y_1 + y_2 + y_3, \ y_1 + y_2, \ 2y_2 - 3y_3),$
то есть $A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y}$;
2) $A(\alpha\overline{x}) = (2\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, \ \alpha x_1 + \alpha x_2, \ 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3) =$
$= \alpha(2x_1 + x_2 + x_3, \ x_1 + x_2, \ 2x_2 - 3x_3) = \alpha A\overline{x}.$

По определению оператор A — линейный.

Найдем матрицу оператора. Для этого найдем образы базисных векторов $A\overline{e}_1 = (2, 1, 0)$, $A\overline{e}_2 = (1, 1, 2)$, $A\overline{e}_3 = (1, 0, -3)$ и составим матрицу оператора $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдем образ вектора $\overline{a}$, подставив его координаты в формулу, которой задается оператор: $A\overline{a} = (6 + 2 - 1;\ 3 + 2;\ 2 + 3) = (7;\ 5;\ 5)$ и используя матрицу оператора $A\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

§19. Элементы теории многочленов.

Многочленом от переменной x называется выражение вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{19.1}$$

где n — целое неотрицательное число, a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$, a_n – любые числа; причем $a_0 \neq 0$. Число n называется ***степенью многочлена*** $f(x)$. Коэффициент a_0 – называют *старшим коэффициентом* многочлена $f(x)$, а сам одночлен a_0x^n – его ***старшим членом***. Коэффициент a_n называется ***свободным членом***. Многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется ***приведенным***. Многочлены, как и любые алгебраические выражения, можно складывать, вычитать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных.

Вместо переменной x в многочлен $f(x)$ можно подставить любое число c. В результате получится некоторое число. Это число называется ***значением многочлена*** $f(x)$ ***при*** $x = c$ (или в точке c) и обозначается через $f(c)$. Число c называется ***корнем многочлена*** $f(x)$, если значение многочлена в точке c равно нулю.

Введем понятие равенства многочленов. Два многочлена называются ***равными***, если они имеют одинаковую степень и их соответствующие коэффициенты равны. Такое равенство многочленов называется ***равенством в алгебраическом смысле***, то есть если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ \ g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

и многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны, то $m = n$ и $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Однако многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ можно рассматривать как функцию. Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются ***равными***, если для любого $c \in \mathbb{R}$ $f(c) = g(c)$. Такое равенство многочленов называется ***равенством в функциональном смысле***.

Нетрудно доказать, что эти определения эквивалентны.

Для многочленов можно ввести операцию деления многочлена на многочлен. Будем говорить, что многочлен $f(x)$ ***делится*** на многочлен $g(x) \neq 0$, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется равенство

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) \tag{19.2}$$

Если $f(x)$ делится на $g(x)$, то это принято записывать так $f(x) \vdots g(x)$. Многочлен $q(x)$ в равенстве (19.2) называется ***частным*** от деления $f(x)$ на $g(x)$. Заметим, что многочлен $q(x)$ в равенстве (19.2) определяется однозначно.

Делимость многочленов своими свойствами похожа на делимость целых чисел. Перечислим некоторые свойства деления многочленов:

1) если два многочлена $f(x)$ и $p(x)$ делятся на $g(x)$, то их сумма и разность также делятся на $g(x)$;

2) если $f(x)$ делится на $g(x)$ и $h(x)$ — некоторый многочлен, то и произведение $f(x)h(x)$ делится на $g(x)$;

3) если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ делится на $h(x)$;

4) степень частного равна разности степеней делимого и делителя;

5) любой многочлен делится на многочлен нулевой степени, то есть любой многочлен делится на число;

6) нулевой многочлен делится на любой многочлен, отличный от нуля.

Укажем на еще одну важную аналогию.

Теорема 19.1. (**о делении с остатком**). *Для любого многочлена $f(x)$ и любого ненулевого многочлена $g(x)$ существует единственная пара* *многочленов $q(x)$ и $r(x)$, для которой выполняется равенство*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{19.3}$$

где многочлен $r(x)$ либо нулевой, либо имеет степень, меньшую чем степень $g(x)$.

На практике для нахождения частного и остатка обычно применяют метод вычисления, названный "деление углом".

Ясно, что $f(x)$ делится на $g(x)$ тогда и только тогда, когда остаток $r(x)$ от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю.

Рассмотрим деление многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x - \alpha$.

Теорема 19.2. **(Безу)**[16] *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен значению многочлена $f(x)$ в точке $x = \alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный многочлен $f(x)$ и разделим его с остатком на двучлен $x - \alpha$. Так как степень этого двучлена равна 1, то остаток либо равен нулю, либо имеет нулевую степень. И в том и в другом случае остаток r есть число. Значит, многочлен можно записать в виде $f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$. Положив в этом тождестве $x = \alpha$, получим, что $f(\alpha) = r$. □

Рассмотрим несколько следствий из этой теоремы.

Следствие 19.3. *Многочлен $f(x)$ делится на $x - \alpha$ тогда и только тогда, когда число α является его корнем.*

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) \tag{19.4}$$

Следствие 19.4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на произведение $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)$.*

$$f(x) = ((x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)) \cdot q(x) \tag{19.5}$$

Следствие 19.5. *Число различных корней многочлена, отличного от нуля, не больше чем его степень.*

[16] Этьен Безу (Bezout) (1730-1783) — французский математик, член Парижской АН. Основные работы относятся к высшей алгебре. С его именем связаны многие теоремы алгебры, касающиеся свойств многочленов, и теория уравнений со многими неизвестными. развил метод неопределенных множителей: его именем назван способ решения систем уравнений, основанный на этом методе. Наряду с Г.Крамером, Безу разрабатывал теорию определителей, развивал теорию исключения неизвестных из системы уравнений. Он доказал теорему о том, что две кривые порядка m и n пересекаются не более чем в $m - n$ точках.

Теорема Безу позволяет найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x-\alpha$. Но при решении некоторых задач необходимо знать не только остаток, но и частное. При делении многочлена на двучлен $x-\alpha$ для отыскания частного и остатка применяют метод, называемый "схемой Горнера".

Частное от деления многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ на двучлен $x-\alpha$ будет иметь степень на 1 меньше. Запишем частное в виде $g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, и пусть остаток равен r. Коэффициенты частного и остаток вычисляются по формулам:
$b_0=a_0,\quad b_1=a_1+\alpha b_0,\quad b_2=a_2+\alpha b_1,\ldots,b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$, $r=a_n+\alpha b_{n-1}$. Схему Горнера удобно записывать в виде таблицы

<table>
<tr><td colspan="6">коэффициенты делимого</td></tr>
<tr><td></td><td>a_0</td><td>a_1</td><td>$\ldots$</td><td>a_{n-1}</td><td>a_n</td></tr>
<tr><td>α</td><td>$b_0=a_0$</td><td>$b_1=a_1+\alpha b_0$</td><td>$\ldots$</td><td>$b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$</td><td>$r=a_n+\alpha b_{n-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">коэффициенты частного</td><td>остаток</td></tr>
</table>

Если число α является корнем многочлена $f(x)$, то по теореме Безу $f(x)$ делится на $x-\alpha$. При этом может оказаться, что число α является корнем частного, тогда $f(x)$ будет делиться на $(x-\alpha)^2$ и так далее. В таких случаях число α называется ***кратным корнем многочлена***.

Число α называется ***корнем кратности*** k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$, то есть $f(x)=(x-\alpha)^k\cdot q(x)$ и $q(\alpha)\neq 0$. Корни кратности 1 называют ***простыми*** корнями.

В теории многочленов важным является вопрос о существовании корней многочлена. Ответ на этот вопрос дает *основная теорема* алгебры многочленов.

Теорема 19.6. (**основная теорема алгебры многочленов**). *Всякий многочлен степени $n\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами*[17] *имеет, по крайней мере, один комплексный корень.*

Приведенная выше теорема впервые была строго доказана Гауссом и

[17]Комплексным числом называется число вида $a+bi$, где $a,b\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$.

часто называется поэтому теоремой Гаусса. Большой интерес представляют следствия, которые вытекают из основной теоремы алгебры многочленов.

Следствие 19.7. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами раскладывается в произведение n линейных множителей.*

Следствие 19.8. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет n корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.*

Следствие 19.9. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами, имеющими действительные коэффициенты.*

В случае многочленов с целыми коэффициентами всегда можно отыскать его рациональные, в частности, целые корни, если, конечно, они существуют. Способ отыскания рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами дается следующей теоремой.

Теорема 19.10. *Если несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на p, а старший коэффициент делится на q.*

Из этой теоремы вытекает важное

Следствие 19.11. *Все рациональные корни приведенного многочлена с целыми коэффициентами — целые и являются делителями свободного члена.*

§20. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Пусть оператор $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ (отображает $\mathbb{R}_n$ в себя).

Определение 20.1. *Вектор $\overline{x} \neq 0$ называется* ***собственным вектором****, а число λ —* ***собственным числом*** *линейного оператора A, если они связаны соотношением*

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x} \tag{20.1}$$

(говорят, что в этом случае собственный вектор $\overline{x}$ отвечает собственному числу λ).

Из определения следует, что собственный вектор $\overline{x} \neq 0$ при действии оператора A переходит в коллинеарный вектор. В связи с этим понятие собственного вектора является полезным и удобным при изучении многих вопросов матричной алгебры и ее приложений.

Возникает вопрос: при каких условиях линейный оператор имеет собственные векторы. Так у оператора подобия все векторы собственные, а оператор поворота на угол $\varphi \neq \pi$ не имеет собственных векторов.

Найдем условия, при которых линейный оператор имеет собственные векторы.

Пусть $A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ и $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ — собственный вектор линейного оператора A, то есть $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ и A — матрица этого оператора. Перепишем равенство (20.1) в координатном виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{cases}$$

В матричном виде эта система имеет вид:

$$(A - \lambda E)\overline{x} = 0. \tag{20.2}$$

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен 0.

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{20.3}$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{20.4}$$

Определитель $|A-\lambda E|$ является многочленом степени n относительно λ и называется ***характеристическим многочленом***, а равенство (20.3) называется ***характеристическим уравнением*** оператора A. Решим уравнение (найдем его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$). Подставляя найденные собственные значения λ_i в систему (20.2), найдем собственные векторы $\overline{x}_i$, отвечающие собственным числам λ_i.

Все вычисления корректны, так как справедлива теорема:

Теорема 20.1. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть A — матрица оператора A в базисе $\{\overline{e}_i\}$, A^* — матрица оператора A в базисе $\{\overline{f}_j\}$, C — матрица перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$. По теореме 19.4 $A^* = C^{-1}AC$. Рассмотрим и преобразуем характеристический многочлен $|A^* - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}||A - \lambda E||C| = |A - \lambda E||C^{-1}C| = |A - \lambda E|$. □

Пример 20.1. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $A\overline{x} = (2x_1 + 3x_2,\ 2x_1 + x_2,\ x_1 - 3x_2 + 2x_3)$.

Решение . Найдем образы векторов канонического базиса: $A\overline{e}_1 = (2, 2, 1)$; $A\overline{e}_2 = (2, 1, 0)$; $A\overline{e}_3 = (1, -3, 2)$ и запишем матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по третьему столбцу, получим уравнение
$(2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)-6)=0$ или $(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)=0$. Решив его, найдем собственные числа оператора: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=2$.

Чтобы найти собственные векторы, для каждого значения λ решим систему

$$(A-\lambda E)X=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0.$$

Рассмотрим $\lambda_1=-1$. Запишем систему уравнений
$\begin{cases} 3x_1+3x_2 & = & 0, \\ 2x_1+2x_2 & = & 0, \\ x_1-3x_2+3x_3 & = & 0. \end{cases}$ Ее общее решение $\begin{cases} x_2 & = & -x_1, \\ x_3 & = & -\frac{4}{3}x_1. \end{cases}$
Получили собственный вектор $\bar{c}_1=(3,\,-3,\,-4)$ (можно взять любой коллинеарный ему вектор).

Рассмотрим $\lambda_2=4$. Запишем систему уравнений
$\begin{cases} -2x_1+3x_2 & = & 0, \\ 2x_1-3x_2 & = & 0, \\ x_1-3x_2-2x_3 & = & 0. \end{cases}$ Ее общее решение $\begin{cases} x_2 & = & -1,5x_1, \\ x_3 & = & -0,5x_1. \end{cases}$
Получили собственный вектор $\bar{c}_2=(2,\,-3,\,-1)$.

Рассмотрим $\lambda_3=2$. Запишем систему уравнений
$\begin{cases} 3x_2 & = & 0, \\ 2x_1-x_2 & = & 0, \\ x_1-3x_2 & = & 0. \end{cases}$ Ее общее решение $\begin{cases} x_1 & = & 0, \\ x_2 & = & 0. \end{cases}$
Получили собственный вектор $\bar{c}_3=(0,\,0,\,1)$ (x_3 – свободное неизвестное).

Собственные векторы оператора A: $\bar{c}_1=(3,\,-3,\,-4)$ отвечает собственному числу $\lambda_1=-1$, $\bar{c}_2=(2,\,-3,\,-1)$ отвечает собственному числу $\lambda_2=4$, $\bar{c}_3=(0,\,0,\,1)$ отвечает собственному числу $\lambda_3=2$.

Пример 20.2. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение . Для матрицы A составим и решим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ 8 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Раскладывая определитель по первому строке, получим уравнение
$(3-\lambda)((-1-\lambda)(5-\lambda)+8)+1(4(5-\lambda)-16)+1(-16-8(-1-\lambda))=0$ или $-\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=0$. Решив его, найдем собственные числа оператора: $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=5$.

Чтобы найти собственные векторы, для каждого значения λ решим систему

$$(A-\lambda E)X = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ 8 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим $\lambda = 1$. Запишем систему уравнений

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0. \end{cases}$ Ее общее решение $x_3 = x_2 - 2x_1$.

Получили, что собственному числу $\lambda = 1$ отвечают две линейно независимых собственных вектора $\overline{c}_1 = (1,\,0,\,-2)$ и $\overline{c}_2 = (0,\,1,\,1)$.

Рассмотрим $\lambda = 5$. Запишем систему уравнений

$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 8x_1 - 4x_2 &= 0. \end{cases}$ Ее общее решение $\begin{cases} x_2 &= 2x_1, \\ x_3 &= 4x_1. \end{cases}$

Получили собственный вектор $\overline{c}_3 = (1,\,2,\,4)$.

Собственные векторы оператора A: $\overline{c}_1 = (1,\,0,-2)$ и $\overline{c}_2 = (0,\,1,\,1)$ отвечают собственному числу $\lambda = 1$, $\overline{c}_3 = (1,\,2,\,4)$ отвечает собственному числу $\lambda = 5$.

Рассмотрим свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора A.

1) *Если собственный вектор $\overline{x} \neq 0$ отвечает собственному числу λ, то для любого числа $\alpha \neq 0$ вектор $\alpha\overline{x}$ также будет собственным вектором.*

Действительно, $A(\alpha\overline{x}) = \alpha A\overline{x} = \alpha(\lambda\overline{x}) = \lambda(\alpha\overline{x})$.

2) *Линейная комбинация собственных векторов оператора A, отвечающих одному собственному числу λ, также является собственным вектором этого оператора.*

Если $\overline{x} \neq 0$ и $\overline{y} \neq 0$ – собственные векторы, отвечающие одному числу λ, то для любых чисел α и β вектор $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \neq 0$ также будет собственным вектором. Действительно, $A(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y} = \alpha\lambda\overline{x} + \beta\lambda\overline{y} = \lambda(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y})$.

3) *Множество собственных векторов, отвечающих одному собственному числу λ вместе с нулевым вектором образует линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}_n$.*

Определитель $|A - \lambda E|$ является многочленом степени n относительно λ. По теореме Безу, если λ_0 – корень многочлена, то есть $P(\lambda_0) = 0$, то $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$, где $Q(\lambda_0) \neq 0$. Если $k = 1$, то λ_0 – простой корень многочлена, если $k > 1$, то λ_0 – корень многочлена кратности k.

4) *Если* λ_0 *– корень характеристического многочлена кратности* k*, то ему соответствует не более* k *собственных векторов.*

5) *Собственные векторы* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ *линейного оператора* A*, отвечающие различным собственным числам* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *линейно независимы.*

6) *Число, отличных от нуля собственных чисел матрицы* A*, равно ее рангу. В частности, все собственные числа матрицы* A *отличны от нуля только тогда, когда матрица* A *невырожденная.*

Наиболее простыми линейными операторами являются операторы, которые имеют n линейно независимых собственных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, относящихся к различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Приняв векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ за базис (это можно сделать, так как они линейно независимы), и вычислив их образы $A\overline{e}_i = \lambda_i \overline{e}_i$, найдем матрицу линейного оператора в этом базисе

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Справедлива теорема

Теорема 20.2. *Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из собственных векторов этого оператора, имеет диагональный вид.*

Верно и обратное утверждение:

Теорема 20.3. *Если матрица линейного оператора* A *в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса — собственные векторы линейного оператора.*

Из теорем 20.2 и 20.3 следует важное условие, достаточное для того, что для оператора A существовал базис, состоящий из собственных векторов.

Теорема 20.4. *Если оператор* A *имеет* n *различных действительных собственных значений, то в линейном пространстве* $\mathbb{R}_n$ *существует* *базис из собственных векторов линейного оператора и матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид.*

Собственные числа линейного оператора обладают следующими свойствами:

1) *Сумма собственных чисел матрицы A равна следу этой матрицы, то есть сумме ее диагональных элементов.*

2) Произведение собственных чисел матрицы A равно определителю этой матрицы.

3) Если λ_0 — собственное число невырожденной матрицы A, то $1/\lambda_0$ — собственное число матрицы A^{-1}.

Рассмотрим линейный оператор A, матрица которого является симметрической. Собственные числа и собственные вектора такого оператора обладают свойствами:

1. *Все собственные числа симметричной матрицы действительны.*

2. *Собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Для примера рассмотрим матрицу второго порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ — симметрическая матрица порядка 2. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$. Дискриминант полученного квадратного уравнения $D = (a-c)^2 + 4b^2$ неотрицателен. Значит, уравнение имеет два действительных корня.

Пример 20.3. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение . Матрица A — симметрическая. Покажем, что собственные числа этой матрицы действительные, а собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, попарно ортогональны.

Составим и решим характеристическое уравнение
$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$
Раскладывая определитель по первому столбцу, получим уравнение
$-\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10=0$. Решив его, найдем собственные числа оператора: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$. Найдем собственные векторы.

Собственные векторы оператора A: $\bar{c}_1=(2,1,-1)$ отвечает собственному числу $\lambda_1=-1$, $\bar{c}_2=(1,-1,1)$ отвечает собственному числу $\lambda_2=2$, $\bar{c}_3=(0,1,1)$ отвечает собственному числу $\lambda_3=5$.

Проверим, что собственные векторы ортогональны. Так
$(\bar{c}_1,\bar{c}_2)=2\cdot1+1\cdot(-1)-1\cdot1=0$, $(\bar{c}_1,\bar{c}_3)=2\cdot0+1\cdot1-1\cdot1=0$, $(\bar{c}_2,\bar{c}_3)=1\cdot0-1\cdot1+1\cdot1=0$. Из равенства нулю скалярных произведений следует попарная ортогональность векторов $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3$.

§21. Квадратичные формы.

При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

Определение 21.1. ***Квадратичной формой*** $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом.*

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (21.1)$$

Будем считать, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} — действительные числа, причем $a_{ij}=a_{ji}$. Матрица $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,\ldots,n)$, составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется ***матрицей квадратичной формы***. Матрица A является симметричной.

В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$L=XAX^T, \qquad (21.2)$$

где $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — матрица-строка переменных.

Пример 21.1. Запишите в матричном виде квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 14x_2x_3 + 3x_2^2 - 9x_3^2$.

Решение . Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, то есть 4, 1, -3, а другие — половине соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Поэтому матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ и квадратичную форму можно записать

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

Пусть матрицы-столбцы переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ связаны соотношением $X = CY$, где $C = (c_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n.

При невырожденном линейном преобразовании переменных $X = CY$ матрица квадратичной формы принимает вид $A^* = C^TAC$.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ называется ***канонической*** (имеет *канонический вид*), если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2. \qquad (21.3)$$

Матрица квадратичной формы, заданной в каноническом виде, является диагональной.

Справедлива теорема.

Теорема 21.1. *Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.*

Пример 21.2. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $L(x, y) = 3x^2 - 12xy + 2y^2$.

Решение . Сначала выделим полный квадрат при переменной x:
$L(x,y) = 3(x^2-4xy+4y^2)-12y^2+2y^2 = 3(x-2y)^2-10y^2$.

Получили, что невырожденное линейное преобразование $x_1 = x-2y,\ y_1 = y$ приводит данную квадратичную форму к виду: $L_1(x_1,y_1) = 3x_1^2-10y_1^2$.

Можно преобразовать квадратичную форму и другим способом.
$L(x,y) = 2(y^2-6xy+9x^2)-18x^2+2x^2 = 2(3x-y)^2-15x^2$. Итак, выполнив преобразование $x_2 = x,\ y_2 = 3x-y$, получим другой канонический вид квадратичной формы $L(x_2,y_2) = -15x_2^2+2y_2^2$.

Пример 21.3. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1,x_2,x_3) = x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2$.

Решение . Сначала выделим полный квадрат при x_1, а затем при x_2:
$L = \left[x_1^2-2x_1\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)+\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2\right]-\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2+2x_2x_3+x_3^2 = \left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+6x_2x_3-4x_3^2+2x_2x_3+x_3^2 = \left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2^2-\frac{32}{9}x_2x_3+\frac{256}{81}x_3^2\right)+\frac{9}{4}\cdot\frac{256}{81}x_3^2-3x_3^2 = \left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2-\frac{16}{9}x_3\right)^2+ +\frac{37}{9}x_3^2$. Получили, что невырожденное линейное преобразование $y_1 = x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3$, $y_2 = x_2-\frac{16}{9}x_3,\ y_3 = x_3$ приводит данную квадратичную форму к виду:
$L_1(y_1,y_2,y_3) = y_1^2-\frac{9}{4}y_2^2+\frac{37}{9}y_3^2$.

Можно преобразовать квадратичную форму и другим способом. Так, выполнив преобразование $z_1 = x_1,\ z_2 = 2x_1+x_2+x_3,\ z_3 = \frac{7}{2}x_1+x_2$, получим другой канонический вид квадратичной формы $L_2(z_1,z_2,z_3) = \frac{37}{4}z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

Мы видим, что канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным. Одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду разными способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств.

Теорема 21.2. *(***Закон инерции квадратичных форм***) Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами канонического вида квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду.*

Следует отметить. что *ранг матрицы квадратичной формы*, называемый также *рангом квадратичной формы*, равен числу отличных от нуля коэффициентов канонического вида квадратичной формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются ***главными осями квадратичной формы***. Главные оси квадратичной формы совпадают с ортонормированным базисом, состоящим из собственных векторов, канонические коэффициенты – с собственными числами матрицы квадратичной формы.

В примере 21.3 матрица является симметричной, поэтому ее можно рассматривать как матрицу квадратичной формы $L(x, y, z) = 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 4yz$. Собственные числа и собственные векторы этой квадратичной формы: $\overline{c}_1 = (2, 1, -1)$ отвечает собственному числу $\lambda_1 = -1$, $\overline{c}_2 = (1, -1, 1)$ отвечает собственному числу $\lambda_2 = 2$, $\overline{c}_3 = (0, 1, 1)$ отвечает собственному числу $\lambda_3 = 5$. По теореме 21.6 векторы $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$ и $\overline{c}_3$ линейно независимы. Ранее мы показали, что эти векторы попарно ортогональны. Нормируем вектора:

$|\overline{c}_1| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, тогда $\overline{c}_1' = \left(2/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}\right)$;
$|\overline{c}_2| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, тогда $\overline{c}_2' = \left(1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\right)$;
$|\overline{c}_3| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$, тогда $\overline{c}_3' = \left(0; 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right)$.

Векторы $\overline{c}_1'$, $\overline{c}_2'$, $\overline{c}_3'$ образуют ортонормированный базис.

Теорема 21.3. *Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях.*

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***положительно (отрицательно) определенной***, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, справедливо неравенство

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \quad (L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0).$$

Теорема 21.4. *Для того, чтобы квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была положительно (отрицательно) определенной необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа λ_i матрицы A квадратичной формы были положительны (отрицательны).*

В ряде случаев при установлении знакопостоянства квадратичной формы удобно бывает применить следующий критерий.

Теорема 21.5. (**критерий Сильвестра**) *Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, то есть $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$. Квадратичная форма будет отрицательно определенной, если знаки главных миноров чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.*

Пример 21.4. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$. Докажем, что она является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной).

Решение . Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1 способ. Найдем собственные числа этой матрицы. Для этого решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, то есть $\begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0$. Получили, что $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 4$. Так как корни характеристического уравнения положительны, то квадратичная форма положительно определена.

2 способ. Согласно критерию Сильвестра $\Delta_1 = 13 > 0$, $\Delta_2 = 56 > 0$. Значит, квадратичная форма положительно определена.

Пример 21.5. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 3x_3^2$. Докажем, что она является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной).

Решение . Найдем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Согласно критерию Сильвестра $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 7 > 0$, $\Delta_3 = 5 > 0$. Квадратичная форма положительно определена.

Литература

[1] Гриншпон И. Э., Магазинников Л. И., Магазинникова А. Л., Гутова Л.А. Линейная алгебра: Учебное пособие — 2012. 101 с. [Электронный ресурс] — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/2278.

[2] Магазинникова А. Л., Магазинников Л. И. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учебное пособие — 2010. 176 с. [Электронный ресурс] — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/2244.

[3] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник Москва : Физматлит, 2008. — 307 с. Ч Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/48199.

[4] Курош А.Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учебник — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/30198.

[5] Ильин В.А.Позняк Э.Г. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учебник — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2008. — 280 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2178.

[6] Ильин, В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2009. — 224 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2179.

[7] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 480 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/251.

[8] Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я.С. Бугров, С.М. Никольский; Москва: Дрофа. – 2008. – 288 с.

[9] Гриншпон И.Э., Гриншпон С.Я. Многочлены от одной переменной (теория и практика). Учебное пособие. ТУСУР. – Томск: ТУСУР, 2011. – 78 с.

[10] Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин, М .Н. Фридман; Москва: ЮНИТИ, 2003. – 471 с.

[11] Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2008. — 464 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2095.

[12] Коршунова Н.И. Математика в экономике. Учебное пособие. / Н.И. Коршунова, В.С. Плясунов – Москва: Вита-Пресс, 1996. – 367 с.

[13] Солодовников А.С. Математика для экономистов. Учебник. В 2 ч. **Ч.1.** / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов; – Москва: Финансы и статистика. 2001. – 224 с.

[14] Идельсон А.В. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. Учебное пособие. В 6 т. **Т. 1** / А.В. Идельсон, И.А. Блюмкина; – Москва: ИНФРА-М. 2000. –200 с.

[15] Головина М.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – Москва: Наука. – 1979. – 392 с.

Оглавление