

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования**  
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

**Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)**

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

Методические указания к лабораторным работам  
и организации самостоятельной работы  
для студентов направления  
«Программная инженерия»  
(уровень бакалавриата)

**Турунтаев Леонид Петрович**

Исследование операций и теория принятия решений: Методические указания к лабораторным работам и организации самостоятельной работы для студентов направления «Программная инженерия» (уровень бакалавриата) / Л.П.Турунтаев. – Томск, 2018. – 66 с.

## Оглавление

1 Введение.....	4
2 Методические указания к проведению лабораторных работ.....	5
2.1 Лабораторная работа «Построение моделей задач объектов управления».....	5
2.2 Лабораторная работа «Решение одноиндексных задач ЛП с помощью программных средств».....	12
2.3 Лабораторная работа «Анализ линейных моделей задач линейного программирования».....	16
2.4 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач линейного программирования общего вида».....	19
2.5 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач целочисленного программирования».....	28
2.6 Лабораторная работа «Задачи линейного программирования транспортного типа».....	37
2.7 Лабораторная работа «Сетевое планирование и управление».....	40
2.8 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач управления векторной оптимизации».....	46
2.9 Лабораторная работа «Задачи принятия решений в условиях риска и неопределенности».....	52
3 Методические указания для организации самостоятельной работы.....	60
3.1 Общие положения.....	60
3.2 Проработка лекционного материала.....	61
3.3 Подготовка к лабораторным работам.....	62
3.4 Самостоятельное изучение тем теоретической части курса.....	62
4 Рекомендуемая литература.....	66

## 1 Введение

Данное руководство предназначено для выполнения лабораторных работ и изучения тем теоретической части курса, выносимых на самостоятельное освоение, по дисциплине «Исследование операций и теория принятия решений» с целью закрепления знаний поиска решения задач, возникающих в системах организационного управления. Методологической основой поиска решений является математическое моделирование деятельности объектов и субъектов управления.

В лабораторных работах рассматриваются формализованные процедуры оценки и принятия решений для хорошо- и слабоструктуризованных задач выбора. Хорошо структуризованные задачи (проблемы) многовариантны по существу, но поскольку четко поддаются формализации и описанию в терминах количественных переменных, то могут быть однозначно решены с помощью построения и оптимизации детерминированной математической модели. Задачи такого рода называют задачами исследования операций. Для задач исследования операций присущ объективный характер используемых моделей объекта управления. Математические модели являются средством отражения объективно существующей реальности. Если проблема, требующая решения, ясна, критерий определен, то сразу видно, насколько найденное оптимальное решение лучше существующего.

Для задач другого плана, в которых необходимо учитывать особенности внешнего воздействия на задачу принятия решений, присущ субъективный характер используемых моделей субъекта управления. Математические модели строятся с учетом мнений лица, принимающего решения. Вопросы, связанные с моделированием предпочтений субъекта управления и описанием формализованных процедур оценки и принятия решений для многокритериальных задач выбора в условиях риска и неопределенности, рассматриваются в теории принятия решений.

Каждая лабораторная работа включает краткое описание соответствующей задачи принятия решений и задания на их выполнение.

## 2 Методические указания к проведению лабораторных работ

### 2.1 Лабораторная работа «Построение моделей задач объектов управления»

#### Цель работы

Закрепить навыки построения оптимизационных моделей для решения задач исследования операций линейного вида.

#### Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

#### Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

#### Теоретические основы

Рассмотрим некоторые постановки задач исследования операций.

#### ЗАДАЧА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

Рассмотрим задачу линейного программирования об оптимальном использовании ресурсов. Её часто называют задачей планирования производства.

Пусть предприятие изготавливает  $n$  видов продуктов (рис. 2.1), располагая  $m$  видами ресурсов в количестве  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Известна матрица  $A = \|a_{ij}\|$  расходов  $i$ -го ресурса на изготовление одной единицы  $j$ -го продукта ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ). Эффективность (прибыль) выпуска единицы  $j$ -го продукта равна  $c_j$ . Требуется определить план выпуска продукции  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , максимизирующий прибыль предприятия.

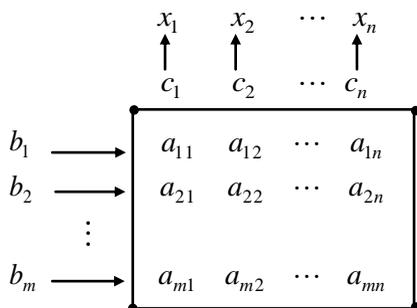


Рис. 2.1. Формализованное описание задачи

Для задачи, сформулированной выше, математическая модель имеет следующий вид: максимизировать

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

#### ТРАСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛП

Имеется  $m$  поставщиков и  $n$  потребителей однородной продукции, возможности и потребности которых соответственно равны  $a_i$  и  $b_j$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта  $i$  в пункт  $j$  равна  $C_{ij}$ . Определить план перевозки продукции от поставщиков к потребителям  $x_{ij}$ , минимизирующий общую стоимость всех перевозок.

Математическая постановка задачи:

$$\min : Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2.4)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.6)$$

Ограничение (2.5) накладывается на спрос  $j$ -го потребителя, ограничение (2.6) — на возможности  $i$ -го поставщика. Если  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , то задача называется закрытой, в противном случае — открытой.

## ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Имеется  $m$  потенциальных исполнителей ( $j = \overline{1, m}$ ) соответственно одной из имеющихся  $m$  работ ( $i = \overline{1, m}$ ). Известны затраты  $c_{ij}$  на выполнение  $j$ -м исполнителем  $i$ -й работы. Требуется назначить каждого исполнителя на одну работу так, чтобы минимизировать суммарные затраты. Математическая постановка задачи:

$$\min: Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2.7)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.9)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ поручается } j\text{-му исполнителю;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Ограничение (2.8) указывает, что на каждую  $i$ -ую работу должен быть назначен только один исполнитель. Ограничение (2.9) указывает, что каждый  $j$ -й исполнитель должен быть назначен для выполнения только одной работы. Если число работ не равно числу потребителей, то задача о назначениях называется задачей открытого типа, в противном случае — закрытого.

## ЗАДАЧА О КОММИВОЯЖЕРЕ

Коммивояжер (посыльный, развозчик заказанной продукции) должен посетить каждый из  $n$  пунктов, связанных между собой дорогами, только один раз и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути.

Формализуем задачу.

Пусть известна матрица  $C = \|c_{ij}\|$  расстояний между пунктами  $i$  и  $j$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; i \neq j$ ). В качестве неизвестной величины введем переменную

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из пункта } i \text{ переезжает в пункт } j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Модель задачи о коммивояжере будет иметь вид

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2.11)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.12)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.13)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.14)$$

Еще одно ограничение сформулируем следующим образом: искомые переменные  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  должны образовывать полный контур, включающий все пункты.

Ограничение (2.12) говорит о том, что коммивояжер должен в каждый пункт  $j = \overline{1, n}$  заехать только один раз, а ограничение (2.13) – из каждого пункта  $i = \overline{1, n}$  выехать только один раз. Ограничения (2.12)–(2.14) и дополнительное ограничение на маршруте коммивояжера создают так называемый гамильтоновский контур (по имени ирландского математика У. Гамильтона).

### Порядок выполнения работы

1. Математическое моделирование тестовой задачи.
2. Получение индивидуальных заданий.
3. Выполнение индивидуального задания.
  - а) Для каждой задачи ввести формализованные обозначения управляемых и неуправляемых переменных;
  - б) сделать содержательную постановку задачи с введенными обозначениями по формату «Дано: из условия задачи; Требуется найти решение X с целью»;
  - в) сделать оптимизационную постановку задачи в виде модели математического программирования;
  - г) составить отчет по лабораторной работе, в котором представляется:

формулировка индивидуального задания, математическая модель и пояснение к её построению.

### Варианты заданий

1. Для приготовления комбикорма совхоз может закупить зерно 3-х сортов, отличающихся друг от друга содержанием питательных компонентов. Для обеспечения нормального питания скота в течение планируемого периода комбикорм должен содержать не менее  $V_j$  единиц питательного компонента  $j$ -го типа ( $j=1, n$ ). Одна тонна зерна  $i$ -го сорта стоит  $R_i$  рублей и содержит  $A_{ij}$  единиц питательного компонента  $j$ -го типа. Складские помещения позволяют хранить не более  $A$  тонн зерна. Определить, какое минимальное количество средств должен вложить совхоз в закупку зерна, чтобы обеспечить заданную питательность комбикорма с учетом емкости складских помещений. Сколько зерна каждого сорта необходимо закупить?

2. Цех производит изделия трех типов. Заказ на производство изделий  $i$ -го типа составляет  $V_i$  штук. Изделия, изготовленные сверх заказа, могут быть реализованы на свободном рынке. Все изделия обрабатываются последовательно на трех станках, плановый фонд времени  $k$ -го станка составляет  $T_k$  часов. Технология изготовления каждого изделия предусматривает три способа обработки. Норма времени на обработку  $i$ -го изделия  $j$ -м способом на  $k$ -ом станке составляет  $t_{ijk}$  часов, себестоимость  $i$ -го изделия при  $j$ -м способе обработки равна  $C_{ij}$  рублей, оптовая цена  $i$ -го изделия равна  $A_i$  рублей. Рассчитать план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

3. На  $n$  железнодорожных станциях  $S_i$  имеются пустые товарные вагоны в количестве  $M_i$  штук ( $i=1, \dots, m$ ). На станциях  $D_j$  не хватает для перевозки грузов  $N_j$  вагонов ( $j=1, \dots, n$ ). Расстояние между станциями  $S_i$  и  $D_j$  равно  $L_{ij}$  км. Найти план перегона вагонов, обеспечивающий минимум суммарных затрат на перегон, если стоимость перегона одного вагона пропорциональна расстоянию между станциями. Общее количество свободных вагонов больше их суммарной потребности.

4. В порту имеется  $n$  судов грузоподъемностью  $Q_i$  тыс. тонн ( $i=1, \dots, n$ ), с помощью которых необходимо доставить грузы в  $n$  портов назначения. Расстояние до  $j$ -го порта назначения равно  $S_j$  км, и туда необходимо доставить  $R_j$  тыс. тонн груза. Распределить суда по маршрутам так, чтобы минимизировать суммарную величину неиспользуемой

провозной способности (в тонно-километрах). Грузоподъемность любого судна достаточна для перевозки груза в любой порт.

5. В цехе имеется  $m$  станков, на которых могут быть изготовлены  $n$  типов деталей. Время, необходимое для изготовления детали  $j$ -го типа на  $i$ -ом станке, равно  $t_{ij}$  час.  $i$ -й станок в течение планового периода может работать  $T_i$  часов. За это время необходимо изготовить  $N_j$  деталей  $j$ -го типа. Распределить задания по выработке деталей между станками так, чтобы эксплуатационные расходы были минимальны. Затраты на эксплуатацию  $i$ -го станка равны  $P_i$  руб./час.

6. Строительной организации необходимо выполнить  $n$  видов земляных работ, объем которых составляет  $V_j$  куб. м ( $j=1, \dots, n$ ). Для их осуществления можно использовать  $m$  механизмов. Производительность  $i$ -го механизма при выполнении  $j$ -ой работы составляет  $P_{ij}$  куб. м в час., а себестоимость одного часа работы  $S_{ij}$  руб. Плановый фонд рабочего времени  $i$ -го механизма составляет  $T_i$  часов. Составить план организации работ, обеспечивающий его выполнение с минимальными затратами.

7. В состав производственного объединения входит  $n$  заводов, производственные мощности каждого из которых позволяют выполнить в установленные сроки лишь один из  $n$  заказов, имеющихся в портфеле заказов объединения. Затраты на выполнение  $i$ -го заказа на  $j$ -ом заводе составляют  $P_{ij}$  тыс. рублей. Распределить заказы между заводами так, чтобы затраты всего объединения на выполнение заказов были минимальны.

8. Деревообрабатывающая фабрика получает  $m$  типов лесоматериалов в количестве  $V_i$  куб.м в месяц. Из этих материалов изготавливается  $n$  видов фанеры. На производство одного кв. метра фанеры  $j$ -го типа расходуется  $Q_{ij}$  куб.м  $i$ -го материала. Заказ на производство  $j$ -го вида фанеры составляет  $P_j$  кв.м. Составить план производства фанеры на месяц, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль, если  $i$ -й лесоматериал обходится фабрике в  $C_i$  руб./куб.м, расходы на производство одного кв. м фанеры  $j$ -го типа составляют  $V_j$  руб., а реализуется эта фанера по цене  $R_j$  руб./кв.м.

9. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено  $A$  тыс. руб. Его предполагается разместить на площади  $S$  кв.м. Участок может быть оснащен машинами пяти типов. Машина  $i$ -го типа стоит  $R_i$  тыс. руб., занимает площадь  $Q_i$  кв.м и

производит  $P_i$  единиц продукции в смену. Определить, какое количество машин каждого типа необходимо закупить, чтобы обеспечить максимальную производительность участка.

10. В плановом году в городе будут сооружаться дома  $m$  типов. Количество  $g$ -комнатных квартир в доме  $i$ -го типа равно  $Q_i$ . Стоимость строительства одного дома  $i$ -го типа составляет  $R_i$  тыс.руб. За год необходимо сдать в эксплуатацию не менее  $Q_g$   $g$ -комнатных квартир. Рассчитать план строительства жилых домов, обеспечивающий минимальные затраты на строительство.

11. Сухогруз может принять на борт не более  $A$  тонн груза, общий объем которого не должен превосходить  $D$  куб.м. На причале находятся грузы  $n$  наименований. Вес  $i$ -го груза составляет  $V_i$  тонн, он занимает объем  $V_i$  куб. м и стоит  $R_i$  тыс.руб. На судно можно погрузить не более одной единицы груза каждого наименования. Найти вариант загрузки судна с максимальной стоимостью груза

12. Авиатранспортное предприятие располагает самолетами  $m$  типов, которые должны быть использованы для перевозки пассажиров по  $n$  маршрутам. Самолет  $i$ -го типа может перевезти по  $j$ -му маршруту за месяц  $A_{ij}$  пассажиров, при этом эксплуатационные расходы составляют  $C_{ij}$  тыс. руб. По статистическим данным по  $j$ -му маршруту в месяц летает не менее  $V_j$  пассажиров. Распределить самолетный парк по маршрутам так, чтобы обеспечить перевозку всех желающих при минимальных эксплуатационных расходах.

13. Предприятие, находящее в городе  $A$ , должно отправить потребителям в город  $B$  станки  $m$  типов. Вес одного станка  $i$ -го типа равен  $G_i$  тонн. Потребителями заказано  $N_i$  станков. За недопоставку станка  $i$ -го типа в установленный срок предприятие платит штраф  $R_i$  рублей. Железная дорога может предоставить предприятию транспортные средства общей грузоподъемностью  $Q$  тонн. Определить количество станков каждого типа, которые необходимо отправить потребителям, чтобы потери от неудовлетворительного спроса были бы минимальны.

14. Судно может принять на борт не более  $A$  тонн груза общим объемом не более  $V$  куб. м. На причале находятся грузы  $m$  наименований. Количество груза  $i$ -го наименования равно  $N_i$  единиц. Вес одной единицы груза  $i$ -го типа равен  $G_i$  тонн, объем  $Q_i$  куб.м, цена  $C_i$  тыс. рублей. Найти вариант загрузки судна наиболее ценным грузом.

### **Контрольные вопросы.**

1. Назовите основные классы задач исследования операций.
2. В чем заключается сущность моделирования?
3. Чем отличается оптимизационная модель от имитационной?
4. Назовите основные этапы процесса построения модели исследования операций.
5. Дайте содержательную и математическую постановку задачи использования ресурсов.
6. Дайте содержательную и математическую постановку задачи о раскрое материалов.
7. Дайте содержательную и математическую постановку задачи о диете питания.

## **2.2 Лабораторная работа «Решение одноиндексных задач ЛП с помощью программных средств»**

### **Цель работы**

Закрепить знания по методам и алгоритмам решения задач линейного программирования (ЗЛП), освоить программные средства решения ЗЛП и закрепить навыки поиска и анализа решения задач на ПЭВМ.

### **Форма проведения**

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### **Форма отчетности**

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### **Теоретические основы**

Для задачи использования ресурсов, сформулированной выше, математическая модель имеет следующий вид: максимизировать

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Ограничения представляют собой многогранное множество допустимых решений ЗЛП. Если многогранное множество ограничено, то оно называется многогранником. Многогранное множество в ЗЛП выпукло, содержит крайние (угловые) точки  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , удовлетворяющие следующим условиям

- 1) любая точка  $X$  может быть представлена как выпуклая линейная комбинация угловых точек;
- 2) каждой угловой точке соответствует базисный допустимый план ЗЛП.

Базисный план задачи всегда имеет не более  $m$  (если ограничения являются линейно независимыми ( $m < n$ )) отличных от нуля координат. Они называются базисными. Если таких координат, отличных от нуля, меньше  $m$ , то базисный план называется вырожденным. Допустимый план  $X$  ЗЛП называется оптимальным, если целевая функция достигает своего экстремального значения в точке(ах)  $X^*$ . Оптимальный план  $X^*$  всегда является базисным планом.

На рис. 2.2 представлена геометрическая интерпретация ЗЛП для случая двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Геометрически целевая функция — семейство параллельных прямых уровня цели  $Z$ , множество допустимых решений — выпуклый многоугольник.

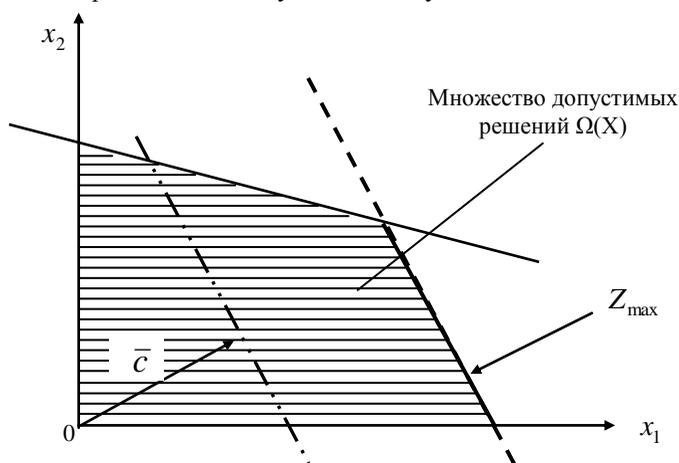


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация ЗЛП

Для решения ЗЛП Г. Данцигом был предложен симплекс-метод. В основу симплекс-метода положено поэтапное движение к оптимуму  $X^*$  от исходной угловой точки области допустимых решений к рядом лежащей угловой точке, позволяющее последовательно улучшать значение целевой функции. Так как угловая точка характеризуется  $m$  базисными переменными, то на каждом этапе встают вопросы: какие переменные выбирать за базисные, а какие — за небазисные. Ответы на вопросы дает симплекс-алгоритм, который характеризуется сходимостью (последовательностью улучшения решений) и конечностью в силу конечности множества угловых точек.

### Порядок выполнения работы

- 1) ознакомиться с существующими программными средствами решения задач ЛП;
- 2) получить задачу у преподавателя;
- 3) решить полученную задачу графически;
- 4) решить ее с помощью программного средства;
- 5) подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

### Варианты заданий

1.	$-x_2 \rightarrow \min$	2.	$2x_1 + x_2 \rightarrow \max$
	$x_1 + x_2 \geq 1$		$x_1 - 2x_2 \leq 6$
	$x_1 + x_2 \leq 2$		$x_1 + 3x_2 \leq 8$
	$x_1 - x_2 \leq 1$		$x_1 \leq 4$
	$x_1 - x_2 \leq -1$		$x_2 \leq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
3.	$2x_1 + x_2 \rightarrow \max$	4.	$x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$
	$x_1 + x_2 \leq 4$		$-2x_1 + x_2 \leq 8$
	$x_1 - x_2 \leq 0$		$x_1 - 2x_2 \leq 12$
	$x_1 \leq 4$		$x_1 \geq 10$
	$x_2 \leq 5$		$x_2 \geq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		

5.	$8x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$	6.	$2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$
	$2x_1 + x_2 \leq 10$		$-5x_1 + 3x_2 \leq 15$
	$x_1 + x_2 \leq 2$		$x_1 - 2x_2 \geq 4$
	$4x_1 + x_2 \leq 8$		$5x_1 - 4x_2 \leq 40$
	$x_1 + 4x_2 \leq 10$		$-2x_1 + x_2 \leq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
7.	$3x_1 + x_2 \rightarrow \min$	8.	$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$
	$3x_1 + 5x_2 \geq 15$		$6x_1 + 2x_2 \geq 6$
	$5x_1 + 3x_2 \geq 15$		$3x_1 - 2x_2 \leq 6$
	$x_1 \geq 1$		$3x_1 - x_2 \geq -3$
	$x_2 \geq 1$		$x_1 + x_2 \leq 5$
			$x_1, x_2 \geq 0$
9.	$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$	10.	$5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$
	$x_1 + 5x_2 \geq 16$		$2x_1 + 3x_2 \leq 3$
	$3x_1 + 2x_2 \geq 12$		$x_1 + 3x_2 \leq 4$
	$x_1 + x_2 \geq 8$		$-x_1 + x_2 \leq 5$
	$x_1 \geq 1$		$5x_1 + 4x_2 \leq 6$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
11.	$x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$	12.	$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$
	$-x_1 - 4x_2 \leq -12$		$-x_1 - 4x_2 \leq -12$
	$x_1 + x_2 \leq 14$		$x_1 + x_2 \leq 14$
	$-3x_1 + x_2 \leq 6$		$-3x_1 + x_2 \leq 6$
	$x_1 - x_2 \leq 2$		$-x_1 + x_2 \leq -2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
13.	$2x_1 + x_2 \rightarrow \max$	14.	$6x_1 - x_2 \rightarrow \max$
	$x_1 + 4x_2 \leq 12$		$x_1 + 4x_2 \leq 12$
	$x_1 + x_2 \leq 14$		$x_1 + x_2 \leq 14$
	$-3x_1 + x_2 \leq 6$		$-3x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 - x_2 \leq 2$	$-x_1 + x_2 \leq -2$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$

### Контрольные вопросы

1. Дайте экономическую и геометрическую интерпретацию задач линейного программирования.
2. В чем заключается сущность методов математического программирования?
3. Какова идея симплекс-метода решения задач линейного программирования?
4. В чем отличие прямого, двойственного и двухэтапного симплекс-алгоритмов?

## 2.3 Лабораторная работа «Анализ линейных моделей задач линейного программирования»

### Цель работы

Закрепить навыки поиска решения задач ЛП и научиться делать анализ результатов решения задачи

### Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### Теоретические основы

Для любой задачи ЛП всегда существует обратная (двойственная) ей задача.

$$\text{Если прямая задача:} \quad \max : Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.15)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.16)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.17)$$

то двойственной будет задача:

$$f = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.19)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.20)$$

Пара задач (2.15)–(2.17) и (2.18)–(2.20) называется симметричной парой двойственных задач, где  $y_i$  — двойственная оценка. В содержательной постановке, если  $x_j$  — продукт,  $b_i$  — ресурс,  $c_j$  — прибыль, то в двойственной задаче  $y_i$  — оценка ресурса (его дефицитность).

В линейном программировании существуют следующие теоремы двойственности.

1. Если одна из двойственных задач ЛП имеет оптимальное решение, то и другая его имеет, причем  $\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ , в других случаях  $\sum_{j=1}^n c_j x_j < \sum_{i=1}^m b_i y_i$ . Если целевая функция одной из ЗЛП не ограничена, то система условий другой противоречива.

2. Чтобы допустимые решения  $X$  и  $Y$  пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j \cdot \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$y_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Получить решение двойственной задачи можно из оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи. Допустим из оптимальной симплекс-таблицы получили оптимальные значения основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач:

Строка $Z_{opt}$	$0 \cdot x_1$	$5 \cdot x_2$	$0 \cdot x_3$	$12 \cdot x_4$	$0 \cdot x_5$
Решение $X^*$	Основные			Дополнительные	
	$x_1 = 6$	$x_2 = 0$	$x_3 = 4$	$x_4 = 0$	$x_5 = 8$
Решение $Y^*$	Дополнительные			Основные	
	$y_3 = 0$	$y_4 = 5$	$y_5 = 0$	$y_1 = 12$	$y_2 = 0$

Тогда:

$x_j$  (основные),  $j = \overline{1, n}$  — план выпуска продукции;

$y_j$  (дополнительные),  $j = \overline{n+1, n+m}$  — остаток ресурса  $b_i$ ;

$y_i$  (основные) — оценка дефицитности ресурса  $i$ , отражающая изменение целевой функции при изменении ресурса на одну единицу;

$$y_i \text{ (основные)} = \frac{\Delta Z}{\Delta b_i}, \quad i = \overline{1, m};$$

$y_i$  (дополнительные),  $i = \overline{m+1, m+n}$  свидетельствуют об убытке производства продуктов  $x_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

### Порядок выполнения работы

- 1) получить задачу у преподавателя (варианты заданий в лабораторной работе №2);
- 2) решить ее с помощью программных средств;
- 3) перейти от исходной задачи ЛП к двойственной, решить ее с помощью программных средств;
- 4) показать справедливость утверждений теорем линейного программирования:
  - о расположении точки оптимума в ограниченном и неограниченном множестве допустимых решений;
  - о составляющих вектора оптимальных решений для вырожденного и невырожденного базисного плана, для множества оптимальных решений;
  - о необходимом и достаточном условии существования точки оптимума прямой и двойственной задач;
- 5) найти связь между прямой и обратной задачами ЛП для случая вырожденности и множеством оптимальных решений;
- 6) дать анализ оптимального решения задачи ЛП на чувствительность:
  - на изменение одного из дефицитных ресурсов;
  - на изменение цены одного из продуктов.

### Варианты заданий

Находятся в лабораторной работе 2.

### Контрольные вопросы

1. Как делается анализ дефицитности ресурсов? Как определить интервалы изменения запасов ресурсов при их дефицитности?
2. Как делается анализ цен на продукты?
3. Сформулируйте теоремы двойственности.
4. Дайте экономическую интерпретацию теорем двойственности.

## **2.4 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач линейного программирования общего вида»**

### **Цель работы**

Закрепить навыки моделирования задач объектов управления, поиска и анализа решения

### **Форма проведения**

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### **Форма отчетности**

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### **Теоретические основы**

В качестве теоретической базы необходимо использовать теоретический материал, рассмотренный в лабораторных работах «Построение моделей задач объектов управления», «Решение одноиндексных задач ЛП с помощью программных средств», «Анализ линейных моделей задач линейного программирования». Особо следует обратить внимание на формализацию построения математической модели объекта управления, проверку целевой функции и ограничений задачи на их единицы измерения.

### **Порядок выполнения работы**

- 1) получить задачу у преподавателя;
- 2) составить математическую постановку задачи;
- 3) решить ее с помощью программного средства;
- 4) провести анализ решения задачи ЛП;
- 5) составить подробный отчет по лабораторной работе, в котором представляется:
  - формулировка индивидуального задания,
  - математическая модель и пояснение к её построению,
  - входная таблица с экрана монитора и выходные таблицы для всех опций программы и содержательные пояснения к ним,
  - выводы по лабораторной работе.

### **Варианты заданий**

Задача 1.

На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий может быть использована ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней так

же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Исходные данные

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество о ткани
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Цена изделия (руб.)	9	6	4	7	

Задача 2.

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице.

Исходные данные

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	1	2	3	4	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	-	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	-	340
Прибыль от реализации единицы продукции (руб.)	8	3	2	1	

В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Задача 3.

Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на

различных линиях характеризуются данными, приведёнными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии. Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации.

#### Исходные данные

Тип судна	Производительность судов (млн.тонномиль в сутки) на линии			Общее время эксплуатации судов
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Заданный объём перевозок (млн. Тонно-миль)	3000	5400	3300	

#### Задача 4.

Найти решение, состоящее в определении плана изготовления изделий А, В и С, обеспечивающего максимальный их выпуск, в стоимости выраженной с учётом ограничений на возможное использование сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья, приведены в таблице.

#### Исходные данные

Вид сырья	Нормы затрат (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	-

## Задача 5.

На ткацкой фабрике для изготовления трёх артикулов ткани используются станки двух типов, пряжа и красители. В таблице указаны производительность станка каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 метра ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющих в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

## Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-ч):				
I типа	0,02	-	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа (кг)	1,0	1,5	2,0	15000
Красители (кг)	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1 м ткани (руб.)	5	8	8	-
Выпуск ткани (м):				
Минимальный	1000	2000	2500	-
Максимальный	2000	9000	4000	-

## Задача 6.

Машиностроительное предприятие для изготовления четырёх видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия.

Кроме того, сборка изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов на изготовление каждого из изделий приведены в таблице.

В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-го вида.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

## Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия				Общий объём ресурсов
	1	2	3	4	
Производительность оборудования (человек-ч):					
Токарного	550	-	620	-	64270
Фрезерного	40	30	20	20	4800
Сверлильного	86	110	150	52	22360
Расточного	160	92	158	128	26240
Шлифовального	-	158	30	50	7900
Комплекующие изделия (шт)	3	4	3	3	520
Сборочно-наладочные работы (человек-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	315	278	573	370	-
Выпуск (шт.):					
Минимальный	-	40	-	-	-
Максимальный	-	-	120	-	-

## Задача 7.

Для обогрева помещений используются четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, имеющемся в количествах 90, 110, 70, 80 и 150 т. Потребность в топливе каждого из агрегатов соответственно равна 80, 120, 140 и 160 т. Теплотворная способность  $i$ -ого сорта топлива при использовании его на  $j$ -ом агрегате задается матрицей

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

## Задача 8.

Изготавливаемый на пяти кирпичных заводах кирпич поступает на шесть строящихся объектов. Ежедневное производство кирпича и потребность в нём указаны в таблице. В ней же указана цена перевозок 1000 шт. кирпича с каждого из заводов к каждому из объектов.

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

## Исходные данные

Кирпичный завод	Цена перевозки 1 тыс. шт. Кирпича к строящемуся объекту						Производство кирпича (тыс. шт.)
	1	2	3	4	5	6	
I	8	7	5	10	12	8	240
II	13	8	10	7	6	13	360
III	12	4	11	9	10	11	180
IV	14	6	12	13	7	14	120
V	9	12	14	15	8	13	150
Потребность в кирпиче (тыс. шт.)	230	220	130	170	190	110	-

## Задача 9.

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в таблице.

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

## Исходные данные

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	рыба	молоко	Масло	сыр	крупы	картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	-	-	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов (руб.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

## Задача 10.

Для перевозок трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице.

## Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (норм-ч):				
I типа	2	-	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырьё (кг):				
1-го вида	10	15	20	1495
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	-
Выпуск (шт.):				
Минимальный	10	20	25	-
Максимальный	20	40	100	-

В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготавливаемой продукции максимальна.

## Задача 11.

При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операции, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

## Исходные данные

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляции	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Освинцевание	3,0	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля	1,2	0,8	1,0	1,3	-

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготавливаемой продукции является максимальной.

## Задача 12.

На мебельной фабрике изготавливается пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице. В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объёмов может изготавливаться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от её реализации является максимальной. Найти решение задачи, а также провести после оптимизационный анализ полученного решения.

## Исходные данные

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (человека-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина (м <sup>3</sup> )	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	-	-	6	4	5	2400
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	8	10	16	14	12	-
Выпуск (шт.): Минимальный	120	90	20	40	30	-
Максимальный	480	560	180	160	120	-

## Задача 13.

Из трёх видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. – вещества В и 24 ед. – вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее необходимого количества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

## Исходные данные

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
А	1	1	-	4
В	2	-	3	5
С	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья (руб.)	5	6	7	8

**Контрольные вопросы**

1. Какие ресурсы являются дефицитными в Вашей задаче?

2. Что произойдет, если дефицитный ресурс уменьшить на 10 единиц?

3. Какие ещё программные средства позволяют решить и сделать анализ решения Вашей задачи?

## **2.5 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач целочисленного программирования»**

### **Цель работы**

Закрепить навыки построения математических моделей задач принятия решений и освоить методы решения задач целочисленного программирования на контрольных примерах

### **Форма проведения**

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### **Форма отчетности**

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### **Теоретические основы**

Для выполнения работы следует знать методы целочисленного решения задач ЛП. Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с.104-120.

### **Порядок выполнения работы**

1. Сформулировать математическую модель
2. Решить задачу с использованием прикладных программ
3. Дать анализ результатов
4. Подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

### **Варианты заданий**

Задача 1.

Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные

варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в следующей таблице:

Длина заготовки (см)	Вариант разреза					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Величина отходов (см)	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы обеспечить нужное количество заготовок каждого вида при минимальных отходах.

Как изменится модель и решение задачи, если из заготовок выпускаются комплекты: 2 заготовки по 45 см., 3 заготовки по 35 см., 1 заготовка по 50 см.

Максимизируется число комплектов. Число прутьев, которое имеется, взять из решения первоначальной задачи. Как при этом изменятся отходы?

Задача 2.

Для выполнения работ могут быть использованы  $n$  механизмов. Производительность  $i$ -го механизма ( $i=1, n$ ) при выполнении  $j$ -ой работы ( $j=1, n$ ) равна  $c_{ij}$ . Предполагая, что каждый механизм может быть использован только на одной работе и каждая работа может выполняться только одним механизмом, определить закрепление механизмов за работами, обеспечивающее максимальную производительность.

Построить математическую модель задачи.

Как изменится модель и решение, если имеется 2 механизма 1-го типа, 3 механизма 2-го типа, 1 механизм 3-го типа и 2 механизма 4-го типа и при этом на объекте не может находиться более 7 механизмов.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

Министерству необходимо составить план развития каждого из  $m$  предприятий, выпускающих однородную продукцию. Число возможных вариантов развития  $i$ -го предприятия различно и равно  $n_i$ .

Реализация  $j$ -го варианта развития  $i$ -го предприятия ( $j=1, n$ ) требует капитальных затрат, равных  $K_{ij}$ , и обеспечивает выпуск продукции в объеме  $b_{ij}$  единиц. При этом экономический эффект от капитальных вложений на развитие  $i$ -го предприятия по  $j$ -му варианту равен  $c_{ij}$ . Учитывая, что необходимо выпустить продукции в количестве  $B$  единиц и что общая величина капиталовложений ограничена и равна  $K$ , составить такой план развития предприятий, при котором экономический эффект от реализации выбранных вариантов развития предприятий является максимальным.

$$K=10 \quad B=40$$

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{млн. руб.} \quad b_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 30 & 12 & 17 \\ 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Как изменится решение, если  $K$  и  $B$  уменьшатся на 20 %.

Задача 4.

В аэропорту для перевозки пассажиров по  $n$  маршрутам может быть использовано  $m$  типов самолётов. Вместимость самолёта  $i$ -го типа равна  $a_i$  человек, а количество пассажиров, перевозимых по  $j$ -му маршруту за сезон, составляет  $b_j$  человек. Затраты, связанные с использованием самолёта  $i$ -го типа на  $j$ -ом маршруте, составляет  $c_{ij}$  руб.

Определить, сколько самолётов данного типа и на каком из маршрутов следует использовать, чтобы удовлетворить потребности в перевозках при наименьших общих затратах.

$$a_1=100 \\ b_1=10т$$

$$a_2=150 \\ b_2=20т$$

$$a_3=200 \\ b_3=8т$$

$$b_4=30т$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Подсчитать количество самолетов каждого типа в оптимальном решении. Как изменится решение, если самолетов 2-го типа есть только 100, а 3-го типа меньше 100.

Задача 5.

В обувном производственном объединении производится раскрой  $m$  различных партий материалов, причём каждая из партий состоит из  $b_i$  единиц материала, имеющего одинаковую форму (например, пластины) и размер. Из материалов всех партий требуется выкроить максимальное количество комплектов деталей обуви, в каждый из которых входит  $d_j$  ( $j=1, n$ ) деталей  $j$ -того вида, если при раскросе единицы материала  $i$ -ой партии по  $k$ -му варианту ( $k=1, K$ ) получается  $a_{ikj}$  деталей  $j$ -го вида.

$$\begin{array}{llll}
 b_1=100 & b_2=200 & & \\
 d_1=2 & d_2=1 & & \\
 a_{111}=2 & a_{112}=4 & a_{121}=3 & a_{122}=1 \\
 a_{211}=4 & a_{212}=7 & a_{221}=5 & a_{222}=6
 \end{array}$$

Задача 6.

Для выполнения четырёх видов землеройных работ могут быть использованы экскаваторы четырёх типов. Производительность экскаватора  $i$ -го типа при выполнении  $j$ -ой работы задаётся матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.7 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что на каждой из работ может быть занят только лишь один экскаватор и что все экскаваторы должны быть задействованы, найти такое распределение экскаваторов между работами, которое обеспечивает максимальную производительность. Как изменится модель и решение, если имеется 2 экскаватора 1-го типа, 3 экскаватора 2-го типа, 1 экскаватор 3-го типа, 2 экскаватора 4-го типа, а общее число экскаваторов не может превышать 6?

## Задача 7.

Пароход может быть использован для перевозки 10 наименований груза, масса, объём и цена единицы каждого из которых приведены в следующей таблице:

Параметры единицы груза	Номер груза									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65
Объём (м <sup>3</sup> )	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114
Цена (тыс. руб.)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9

На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объёмом, не превышающим 600 м<sup>3</sup>. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход так, чтобы общая стоимость размещённого груза была максимальной. Как изменится решение, если количество единиц каждого груза ограничено величинами соответственно: 2;1;4;2;2;3;4;4;4;3?

## Задача 8.

Из листового проката нужно выкроить заготовки четырёх видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в таблице.

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

Длина заготовки (см)	Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа при разрезе определенным способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	-	-	-	-	-
50	-	1	-	-	2	-	1	1	3	2	1	-	2
65	-	-	1	-	-	2	1	-	-	1	2	1	-
85	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-
Величина отходов (см)	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Как изменится модель и решение, если в окончательное изделие (комплект) входит 2 заготовки 1-го и 2-го вида и 3 заготовки 3-го и 4-го

вида. Максимизируется число комплектов. Изменяются ли отходы для такого оптимального решения? (Общее число листов взять из результатов 1-й постановки задачи)

Задача 9.

Имеются одинаковые заготовки, которые могут быть раскроены тремя способами. Из имеющихся заготовок нужно получить не менее 10 деталей 1-го типоразмера, не менее 8-ми деталей 2-го типоразмера и не менее 10-ти деталей 3-го типоразмера. Способы раскроя определяются матрицей вида:

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь  $a_{ij}$  – количество деталей типоразмера  $i$ , получаемое из одной заготовки путём её раскроя способом  $j$ .

Количество заготовок, раскраиваемых каждым способом, должно быть целым и не превышать 4-х. Отходы от раскроя одной заготовки для каждого из способов составляют 4, 5 и 5 (усл. единиц). Предложить вариант раскроя с минимальными суммарными отходами. Определить величину этих отходов.

Фирма предполагает продавать выкроенные детали по ценам \$4, \$6 и \$2,5 соответственно для 1-го, 2-го и 3-го типоразмера. При этом потери от процедуры раскроя оцениваются величиной \$0,3 на условную единицу отходов. Оптимизируйте процесс раскроя, исходя из соображений получения максимальной прибыли.

Задача 10.

Рассматриваются пять проектов, которые могут быть осуществлены в течение последующих трёх лет

Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль
	Год 1	Год 2	Год 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	10	15
5	8	6	1	30
Максимальный объем капиталовложений	25	25	25	

В таблице приведены ожидаемые величины прибыли от реализации каждого из проектов и распределение необходимых капиталовложений по годам (в тыс. долларов).

Предполагается, что каждый утверждённый проект будет реализован за трёхлетний период.

Требуется выбрать совокупность проектов, которой соответствует максимум суммарной прибыли. Как изменится максимум суммарной прибыли, если максимальный объем капиталовложений уменьшать от 25 до 0, или увеличивать от 25 до бесконечности? Построить график.

Задача 11.

Руководство завода предполагает провести комплекс организационно-технических мероприятий по модернизации производства. Перечень возможных мероприятий приведён в таблице. На реализацию всех мероприятий завод может выделить:

- трудовых ресурсов – 1300 чел-дней,
- финансовых ресурсов – 800 млн. руб.
- производственных площадей – 700 кв. м

Какие мероприятия следует провести, располагая этими ресурсами, чтобы общий экономический эффект был максимальным? Какова величина этого эффекта? Какой объём выделяемых ресурсов останется неиспользованным при реализации найденного варианта? Изменится ли решение задачи, если завод выделит на модернизацию 1 млрд. руб.?

Изменится ли решение задачи, если завод полностью удовлетворит потребности модернизации в производственных площадях и трудовых ресурсах при прежнем финансировании?

Мероприятие	Трудовые ресурсы (чел. дни)	Финансовые ресурсы (млн. руб.)	Производственные площади (кв. м)	Экономический эффект (млн. руб.)
Закупка станков с ЧПУ	350	400	130	13000
Текущий ремонт	250	90	-	3000
Монтаж транспортного конвейера	100	60	300	8000
Установка рельсового крана	200	300	150	12000
Ввод системы контроля качества	130	-	150	2500
Разработка АСУ	800	500	100	15000

## Задача 12.

В регионе работают 4 химических завода. Им предложено принять участие в конкурсе по размещению госзаказа на производство изделий 5-ти наименований в объёмах, приведённых в таблице.

	Наименование изделия				
	A1	A2	A3	A4	A5
Объём заказа (шт.)	350	250	400	150	150

Каждый из заводов представил несколько вариантов годовой производственной программы по выполнению госзаказа и соответствующие финансовые условия. Программа включает выпуск всех изделий.

Каковы минимальные затраты на выполнение госзаказа?

Какой вариант размещения заказа обеспечивает его выполнение при минимальных объёмах финансирования?

Как изменится решение, если учесть, что заводы 1 и 4 не могут одновременно выполнять однотипные варианты размещения заказов?

	Варианты завода 1			Варианты завода 2		Варианты завода 3			Варианты завода 4	
	1	2	3	1	2	1	2	3	1	2
Наименование изделия										
A1	100	200	200	50	80	-	-	100	100	50
A2	200	100	150	-	-	200	250	100	40	60
A3	300	250	200	120	100	100	50	500	60	100
A4	100	50	100	100	50	-	-	-	50	-
A5	50	100	80	-	-	100	100	80	150	100
Объём финансирования (млрд. руб.)	12	16	14	7	9	16	15	17	5	8

## Задача 13.

Нефтеперерабатывающее предприятие использует в производстве нефть трёх сортов (1, 2 и 3). Резервные запасы нефти каждого сорта должны быть не меньше соответственно 20, 40 и 60 тыс. тонн. Для хранения нефти могут быть использованы 4 резервуара ёмкостью 25, 30, 35 и 40 тыс. тонн. Затраты на хранение 1-ой тонны нефти сорта 2 на 10% выше, чем сорта 1, а сорта 3 – на 20% выше, чем сорта 1. Смешение нефти разных сортов при хранении не допускается. Резервуары заполняются полностью.

Сколько резервуаров следует использовать?

Как распределяются сорта нефти по резервуарам?

Каковы минимальные затраты на хранение нефти?

Целесообразно ли устанавливать дополнительный резервуар объемом 20 тыс. тонн?

Задача 14.

Для реконструкции машиностроительного предприятия было представлено на выбор 10 проектов, каждый из которых характеризуется четырьмя агрегированными показателями и ежегодной ожидаемой прибылью, представленными в таблице.

При выборе проектов необходимо учесть ряд ограничений технологического характера:

- одновременно может быть реализовано не более семи проектов
- 5-ый и 8-ой проекты взаимно исключают друг друга
- 1-ый проект может быть реализован лишь при условии реализации второго
- 4-ый проект может быть реализован лишь при условии реализации хотя бы одного из двух проектов: либо 3-его, либо 10-ого.

Выбрать проекты для реконструкции предприятия, обеспечивающие максимальную ожидаемую прибыль. Каков размер этой прибыли?

Агрегированный показатель проекта	Варианты проектов									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Затраты труда (нормо-час)	50	60	30	40	80	70	50	20	40	50
Затраты энергии (тыс. квт)	4	4	2	5	5	2	3	6	6	3
Расходы на материалы (млн. руб.)	3	2	4	5	3	2	4	2	2	3
Финансовые средства (млн. руб.)	7	5	9	6	4	3	7	2	4	5
Ожидаемая прибыль (млн. руб.)	9	8	8.5	8.8	9	8	9	8.7	8.9	8

### Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию задач целочисленного программирования. Приведите примеры.

2. Назовите методы решения задач целочисленного программирования.

3. Какое ограничение называется отсечением Гомори?
4. В чем сущность метода ветвей и границ?

## **2.6 Лабораторная работа «Задачи линейного программирования транспортного типа»**

### **Цель работы**

Закрепить навыки решения задач транспортного типа: классические транспортные задачи, с промежуточными пунктами, о назначениях, о коммивояжере.

### **Форма проведения**

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### **Форма отчетности**

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### **Теоретические основы**

В качестве теоретической базы необходимо использовать теоретический материал, рассмотренный в лабораторных работах «Построение моделей задач объектов управления», «Анализ линейных моделей задач линейного программирования». Особо следует обратить внимание на двойственную постановку транспортной задачи линейного программирования и теорему двойственности. Теоретический материал можно найти в учебном пособии [Есипов В.А. Методы исследования операций: Учебное пособие для вузов - Издательство "Лань", ISBN, Гриф УМО МО, 2013 - 304с.](#)

### **Порядок выполнения работы**

1. Решить транспортную задачу.

Заводы автомобильной промышленности расположены в Москве, Нижнем Новгороде, Тольятти, Минске. Основные центры распределения продукции сосредоточены в пяти городах. Данные ежеквартальных объемов производства автомобилей указанных заводов, величины квартального спроса в центрах распределения автомобилей, стоимость перевозки одного автомобиля по железной дороге между заводами и центрами распределения приведены в вариантах заданий.

Найдите план перевозок с помощью программных средств:

- а) исходной задачи двумя способами: симплекс-методом и методом потенциалов;

б) задачу с измененными условиями исходной в сторону увеличения объемов производства;

в) задачу с измененными условиями исходной в сторону увеличения центров спроса;

г) задачу с условиями (в) и с учетом штрафа за недопоставленный автомобиль в первый центр — 3 тыс. руб., в третий — 3,5 тыс. руб.;

д) задачу с условиями (б) и обязательными отправлениями автомобилей с завода г. Нижнего Новгорода.

2. Придумать задачу о назначениях размерностью  $4 \times 4$ . Решить ее с помощью программных средств как транспортную и как о назначениях, сравнить результаты;

3. Придумать задачу о коммивояжере размерностью  $5 \times 5$ .

Решить ее с помощью программных средств как задачу о назначениях и как задачу о коммивояжере, сравнить результаты;

4. Найти гамильтоновский путь с исходного города 2 и путь без указания исходного города.

5. подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

### Варианты заданий

1.	26	30	17	10	16	4	2.	25	1	22	19	1	20
	30	37	26	9	23	6		21	28	11	4	3	20
	13	4	32	3	1	10		26	29	33	26	24	20
	3	1	5	14	24	10		21	10	3	29	27	20
	7	7	7	7	2			19	19	19	19	4	
3.	27	20	29	26	25	15	4.	30	26	24	26	29	13
	3	14	5	15	24	15		15	30	29	26	23	17
	19	2	32	4	13	15		4	10	37	30	7	17
	20	27	1	27	19	15		9	16	29	30	3	13
	11	11	11	11	16			12	12	12	12	12	
5.	31	22	2	13	7	8	6.	20	17	9	20	30	15
	27	20	4	24	9	12		13	14	24	26	26	15
	3	16	35	5	4	7		22	24	40	27	29	19
	28	11	17	20	29	13		25	12	11	34	23	11
	8	8	8	8	8			9	24	9	9	9	
7.	40	24	11	12	25	21	8.	15	15	3	6	10	9
	26	14	29	20	24	19		23	18	13	27	12	11
	27	14	24	10	18	15		30	1	15	24	25	14
	6	14	28	18	2	25		8	26	7	38	9	16
	15	15	15	15	20			8	9	13	8	12	

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">9.</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">19</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">17</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">29</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">28</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">8</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">12</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">13</td> <td style="border-right: 1px solid black;">31</td> <td style="border-right: 1px solid black;">27</td> <td style="border-right: 1px solid black;">16</td> <td style="border-right: 1px solid black;">29</td> <td style="text-align: right;">8</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">20</td> <td style="border-right: 1px solid black;">30</td> <td style="border-right: 1px solid black;">34</td> <td style="border-right: 1px solid black;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black;">26</td> <td style="text-align: right;">7</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">11</td> <td style="border-right: 1px solid black;">19</td> <td style="border-right: 1px solid black;">30</td> <td style="border-right: 1px solid black;">16</td> <td style="border-right: 1px solid black;">2</td> <td style="text-align: right;">18</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">7</td> <td></td> </tr> </table>	9.	19	17	29	28	8	12		13	31	27	16	29	8		20	30	34	7	26	7		11	19	30	16	2	18		7	7	7	7	7		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">10.</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">40</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">2</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">5</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">6</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">15</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">16</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">5</td> <td style="border-right: 1px solid black;">39</td> <td style="border-right: 1px solid black;">9</td> <td style="border-right: 1px solid black;">5</td> <td style="border-right: 1px solid black;">7</td> <td style="text-align: right;">15</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">16</td> <td style="border-right: 1px solid black;">24</td> <td style="border-right: 1px solid black;">24</td> <td style="border-right: 1px solid black;">6</td> <td style="border-right: 1px solid black;">26</td> <td style="text-align: right;">14</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">13</td> <td style="border-right: 1px solid black;">28</td> <td style="border-right: 1px solid black;">4</td> <td style="border-right: 1px solid black;">35</td> <td style="border-right: 1px solid black;">8</td> <td style="text-align: right;">15</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">6</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">6</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">13</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">20</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">15</td> <td></td> </tr> </table>	10.	40	2	5	6	15	16		5	39	9	5	7	15		16	24	24	6	26	14		13	28	4	35	8	15		6	6	13	20	15	
9.	19	17	29	28	8	12																																																																	
	13	31	27	16	29	8																																																																	
	20	30	34	7	26	7																																																																	
	11	19	30	16	2	18																																																																	
	7	7	7	7	7																																																																		
10.	40	2	5	6	15	16																																																																	
	5	39	9	5	7	15																																																																	
	16	24	24	6	26	14																																																																	
	13	28	4	35	8	15																																																																	
	6	6	13	20	15																																																																		
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">11.</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">22</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">11</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">25</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">17</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">21</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">17</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">22</td> <td style="border-right: 1px solid black;">28</td> <td style="border-right: 1px solid black;">14</td> <td style="border-right: 1px solid black;">8</td> <td style="border-right: 1px solid black;">1</td> <td style="text-align: right;">14</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">9</td> <td style="border-right: 1px solid black;">13</td> <td style="border-right: 1px solid black;">12</td> <td style="border-right: 1px solid black;">28</td> <td style="border-right: 1px solid black;">15</td> <td style="text-align: right;">21</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">26</td> <td style="border-right: 1px solid black;">21</td> <td style="border-right: 1px solid black;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black;">14</td> <td style="border-right: 1px solid black;">27</td> <td style="text-align: right;">43</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">19</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">22</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">23</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">14</td> <td></td> </tr> </table>	11.	22	11	25	17	21	17		22	28	14	8	1	14		9	13	12	28	15	21		26	21	3	14	27	43		19	22	23	1	14		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">12.</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">12</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">24</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">4</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">2</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">3</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">28</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">20</td> <td style="border-right: 1px solid black;">20</td> <td style="border-right: 1px solid black;">15</td> <td style="border-right: 1px solid black;">27</td> <td style="border-right: 1px solid black;">7</td> <td style="text-align: right;">13</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">15</td> <td style="border-right: 1px solid black;">15</td> <td style="border-right: 1px solid black;">22</td> <td style="border-right: 1px solid black;">25</td> <td style="border-right: 1px solid black;">19</td> <td style="text-align: right;">15</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black;">6</td> <td style="border-right: 1px solid black;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black;">15</td> <td style="border-right: 1px solid black;">5</td> <td style="text-align: right;">30</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">27</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">16</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">25</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">11</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">7</td> <td></td> </tr> </table>	12.	12	24	4	2	3	28		20	20	15	27	7	13		15	15	22	25	19	15		2	6	3	15	5	30		27	16	25	11	7	
11.	22	11	25	17	21	17																																																																	
	22	28	14	8	1	14																																																																	
	9	13	12	28	15	21																																																																	
	26	21	3	14	27	43																																																																	
	19	22	23	1	14																																																																		
12.	12	24	4	2	3	28																																																																	
	20	20	15	27	7	13																																																																	
	15	15	22	25	19	15																																																																	
	2	6	3	15	5	30																																																																	
	27	16	25	11	7																																																																		
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">13.</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">25</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">6</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">25</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">11</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">12</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">9</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">13</td> <td style="border-right: 1px solid black;">24</td> <td style="border-right: 1px solid black;">20</td> <td style="border-right: 1px solid black;">27</td> <td style="border-right: 1px solid black;">30</td> <td style="text-align: right;">18</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">16</td> <td style="border-right: 1px solid black;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black;">29</td> <td style="border-right: 1px solid black;">10</td> <td style="border-right: 1px solid black;">21</td> <td style="text-align: right;">23</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black;">29</td> <td style="border-right: 1px solid black;">23</td> <td style="border-right: 1px solid black;">35</td> <td style="border-right: 1px solid black;">18</td> <td style="text-align: right;">26</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">11</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">22</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">31</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">6</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">6</td> <td></td> </tr> </table>	13.	25	6	25	11	12	9		13	24	20	27	30	18		16	7	29	10	21	23		1	29	23	35	18	26		11	22	31	6	6		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">14.</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">32</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">24</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">25</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">23</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black;">29</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">24</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black;">31</td> <td style="border-right: 1px solid black;">10</td> <td style="border-right: 1px solid black;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black;">19</td> <td style="text-align: right;">14</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black;">26</td> <td style="border-right: 1px solid black;">28</td> <td style="border-right: 1px solid black;">30</td> <td style="border-right: 1px solid black;">27</td> <td style="text-align: right;">19</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black;">22</td> <td style="border-right: 1px solid black;">10</td> <td style="border-right: 1px solid black;">29</td> <td style="border-right: 1px solid black;">36</td> <td style="border-right: 1px solid black;">23</td> <td style="text-align: right;">17</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">22</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">9</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">12</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">13</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black;">18</td> <td></td> </tr> </table>	14.	32	24	25	23	29	24		1	31	10	7	19	14		2	26	28	30	27	19		22	10	29	36	23	17		22	9	12	13	18	
13.	25	6	25	11	12	9																																																																	
	13	24	20	27	30	18																																																																	
	16	7	29	10	21	23																																																																	
	1	29	23	35	18	26																																																																	
	11	22	31	6	6																																																																		
14.	32	24	25	23	29	24																																																																	
	1	31	10	7	19	14																																																																	
	2	26	28	30	27	19																																																																	
	22	10	29	36	23	17																																																																	
	22	9	12	13	18																																																																		

### Контрольные вопросы.

1. Дайте содержательную и математическую постановку транспортной задачи линейного программирования.
2. Можно ли решить транспортную задачу линейного программирования симплекс-методом?
3. Сколько базисных переменных должно быть в допустимом плане решения транспортной задачи?
4. Сформулируйте математическую постановку двойственной ТЗЛП.
5. В чем идея распределительного метода решения транспортной задачи?
6. В чем отличие метода потенциалов от распределительного метода?
7. Укажите способы решения ТЗЛП с промежуточными пунктами.
8. Можно ли решить задачу о назначениях методом, используемым для решения ТЗЛП?

## 2.7 Лабораторная работа «Сетевое планирование и управление»

### Цель работы

Освоить и закрепить навыки решения задач сетевого планирования и управления.

### Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### Теоретические основы

*Сетевой график* — это ориентированный граф без контуров, дуги которого имеют одну или несколько числовых характеристик. Дугами изображают *работы*, а вершинами — *события*. Работа — любой трудовой процесс или действие, сопровождающееся затратами времени и ресурсов. Событие — итог того или иного процесса, результат выполнения предшествующих ему работ. События изображаются точками, кружками и т.п. В сетевом графике всегда есть исходное и завершающее события.

Сетевой график обладает следующими основными свойствами:

- ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;
- ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие.

В каждом сетевом графике имеется несколько полных путей (последовательностей работ) от исходного события до конечного, продолжительность каждого из них определяется суммой продолжительностей составляющих их работ. Среди полных путей сетевого графика особое значение имеет наиболее продолжительный из них — *критический путь*. Работы, находящиеся на критическом пути, называют критическими. Критический путь лимитирует выполнение задачи в целом, поэтому любая задержка на критических работах увеличивает время всего процесса. Работы (как и события), не лежащие на критическом пути, имеют резервы времени их выполнения. Поэтому выделяют следующие основные параметры сетевого графика

Таблица 7.2 Параметры сетевого графика

Событие $i$	Раннее время $t_p(i)$		Позднее время $t_{п}(i)$		Резерв $R(i)$
	Раннее	Позднее	Раннее	Позднее	Резерв $R(ij)$
Работа $(ij)$	$t_{рн}(ij)$	$t_{пн}(ij)$	$t_{ро}(ij)$	$t_{по}(ij)$	
	Начало		Окончание		

$t_p(i)$  — раннее время свершения события  $i$ ;

$t_{п}(i)$  — позднее время свершения события  $i$ ;

$R(i)$  — резерв времени события  $i$ ;

$t_{рн}(ij)$  — раннее время начала работы  $(ij)$ ;

$t_{пн}(ij)$  — позднее время начала работы  $(ij)$ ;

$t_{ро}(ij)$  — раннее время окончания работы  $(ij)$ ;

$t_{по}(ij)$  — позднее время окончания работы  $(ij)$ ;

$R(ij)$  — резерв времени работы  $(ij)$ .

Графическим способом временные параметры показываются на дугах - время выполнения работы, в вершинах - ранние, поздние сроки свершения события и резерв времени для события.

При табличном способе расчета параметров упорядочение и нумерация вершин графика производится обязательно послойно с выполнением правила: любая последующая вершина имеет больший номер, чем предшествующая, т.е. для любой дуги  $(i, j)$  должно выполняться условие  $i < j$ . Расчеты производятся в таблице  $n \times n$ , где  $n$  — число вершин. Строки и столбцы таблицы соответствуют событиям графика. Клетки главной диагонали таблицы  $(i, i)$  назовем главными, а остальные побочными. Для клеток, находящихся выше главной

диагонали ( $i < j$ ), номер строки  $i$  соответствует номеру начального события, а номер столбца  $j$  — номеру конечного. Наоборот, для клеток, расположенных ниже главной диагонали ( $i > j$ ), начальному событию работы соответствует номер столбца  $j$ , а конечному — номер строки  $i$ .

определение параметров в таблице сетевого графика производится в два этапа.

На первом этапе (прямое движение к конечному событию) определяются параметры  $t_{po}(i, j)$  и  $t_p(j)$ . Для конечного события  $n$  —  $t_p(n) = t_n(n)$ .

На втором этапе (обратное движение к начальному событию) определяются параметры  $t_{пн}(i, j)$  и  $t_n(j)$ . Эти параметры будут проставляться соответственно выше главной диагонали для  $t_{po}(i, j)$ , ниже главной диагонали —  $t_{пн}(i, j)$  и по главной диагонали —  $t_p(i)$ ,  $t_n(i)$ ,  $t_p(j)$ ,  $t_n(j)$ .

Обратный ход	Вершины	$i$	$j$	Прямой ход
$t_n(1) = t_p(1) = 0$ $t_n(i) = \min_j \{t_{пн}(i, j)\}$	$i$	$t_p(i) / t_n(i)$	$t_{ij} / t_{po}(i, j)$	$t_{po}(i, j) = t_p(i) + t_{ij}$
$t_{пн}(i, j) = t_n(i) - t_{ij}$	$j$	$t_{ij} / t_{пн}(i, j)$	$t_p(j) / t_n(j)$	$t_p(j) = \max_i \{t_{po}(i, j)\}$ $t_p(n) = t_n(n)$

### Порядок выполнения работы

1. получить задачу у преподавателя;
2. составить сетевую модель задачи;
3. рассчитать параметры сетевого графика графическим и табличным способом, предварительно пронумеровав события послыно;
3. решить ее с помощью программного средства;
4. провести анализ и оптимизацию использования ресурсов (количество запланированных людей указаны в скобках);
5. составить и защитить отчёт по лабораторной работе.

### Варианты заданий

1.

	1	2	3	4	5	6
1		10(3)		3(4)		
2			7(3)	8(2)	5(2)	
3						11(3)
4			2(4)		12(4)	
5						6(4)
6						

2.

	1	2	3	4	5	6
1		13(3)		7(4)		
2			7(2)	9(3)	8(2)	
3						18(1)
4			2(6)		10(1)	
5						4(4)
6						

3.

	1	2	3	4	5	6
1		5(2)		12(3)		
2			6(3)	7(2)	8(2)	
3						7(3)
4			7(4)		4(4)	
5						5(4)
6						

4.

	1	2	3	4	5	6
1				3(3)		
2	8(2)		7(2)	8(3)	5(5)	
3				9(3)		11(3)
4					12(4)	
5						6(4)
6						

5.

	1	2	3	4	5	6
1				3(5)		
2	5(4)		7(4)	8(3)	5(4)	
3				5(4)		11(3)
4					12(3)	
5						5(4)
6						

6.

	1	2	3	4	5	6
1				3(5)		
2			12(3)		5(4)	
3	11(2)			10(2)		11(2)
4					12(2)	
5						6(4)
6						

7.

	1	2	3	4	5	6
1		10(2)	8(3)	3(5)		
2			7(4)	8(3)	5(4)	
3						11(2)
4					12(2)	
5			7(3)			6(4)
6						

8.

	1	2	3	4	5	6
1		14(2)	6(3)	7(4)		
2			6(4)	8(3)	4(4)	
3						10(3)
4					12(3)	
5			7(4)			9(2)
6						

9.

	1	2	3	4	5	6
1				3(6)		
2			7(5)	8(4)	5(5)	
3	8(4)					11(3)
4					12(3)	
5						6(4)
6						

10.

	1	2	3	4	5	6
1			8(3)	3(5)		
2			7(2)	8(4)	5(4)	
3						11(3)
4					12(3)	
5			7(3)			6(4)
6						

11.

	1	2	3	4	5	6
1		15(3)	8(4)	7(4)		
2			6(5)	9(4)	4(4)	
3						11(2)
4					15(3)	
5			7(4)			6(4)
6						

12.

	1	2	3	4	5	6
1		10(3)	8(4)	3(5)		
2			7(6)	8(3)	5(4)	
3						11(5)
4						8(6)
5				4(7)		6(7)
6						

13.

	1	2	3	4	5	6
1		10(6)	8(6)	3(7)	8(7)	
2			7(6)	8(7)	5(4)	
3						11(3)
4					12(8)	
5			7(5)			6(6)
6						

14.

	1	2	3	4	5	6
1		5(5)	6(5)	3(6)		
2			7(6)	7(7)	3(8)	
3						3(9)
4					11(5)	
5			6(4)			7(8)
6						

### Контрольные вопросы

1. Назовите способы разбиения графа на слои.
2. Назовите основные параметры сетевого графика, укажите их связь и способы определения.
3. Опишите графический способ определения параметров сетевого графика.

4. Опишите табличный способ определения параметров сетевого графика.
5. Что такое график Ганта?
6. Опишите алгоритм оптимизации распределения трудовых ресурсов на графиках Ганта.

## **2.8 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач управления векторной оптимизации»**

### **Цель работы**

Получить навыки решения многокритериальных задач принятия решений

### **Форма проведения**

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### **Форма отчетности**

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### **Теоретические основы**

В жизни целенаправленная деятельность человека устроена так, что приходится учитывать не одну, а сразу несколько целей. Оптимизация решения задачи отдельно по каждому из критериев приводит к различным вариантам. Решение задачи с учетом всех предлагаемых критериев находится в компромиссной области решений (множестве Парето). Множество компромиссных решений обладает свойством противоречивости: улучшение качества решений по одним критериям вызывает ухудшение качества других. Это обстоятельство и является причиной того, что методы решения многокритериальных задач предусматривают в том или ином виде учет мнения лица, принимающего решение. Чтобы выбрать из области Парето лучшие решения, ЛПР обязан ввести соответствующие принципы выбора компромиссного решения, приводящие к тому или иному методу решения задачи. Рассмотрим наиболее часто употребляемые методы решения многокритериальных задач.

### 1. Сведение многокритериальной задачи к однокритериальной.

Наибольшее распространение получил подход определения глобального критерия (суперкритерия) в виде взвешенной суммы критериев

$$y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^H,$$

где  $y_i^H$  — отнормированное значение  $i$ -го критерия ;

$\alpha_i$  — коэффициент относительной важности  $i$ -го критерия (весовой коэффициент);

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

### 2. Выделение главного критерия

Критерии располагаются в порядке убывания важности. Решается задача по первому (важному) критерию, а в ограничениях прописываются дополнительно ещё условия на предельные изменения остальных критериев.

### 3. Метод последовательных уступок

Критерии располагаются в порядке убывания важности.

Решается задача по первому (важному) критерию. Определяется оптимальное решение и значение целевой функции по первому критерию. Далее решается задача по второму критерию, при этом в ограничении дополнительно прописывается ещё условие на изменение первого критерия (делается уступка ухудшения решения по первому критерию). И так далее для других критериев. На последнем шаге решается задача поиска решения по  $n$ -му критерию с учетом уступок по  $(n-1)$  наиболее важным критериям, и решение этой задачи принимается в качестве решения исходной многокритериальной задачи.

## Порядок выполнения работы

- 1) получить задачу у преподавателя;
- 2) составить математическую постановку задачи;
- 3) решить ее с помощью программного средства по отдельным критериям;
- 4) выбрать схему поиска компромиссного решения и найти множество Парето;
- 5) найти решение и провести его анализ;

б) составить подробный отчёт по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания,
- математическая модель и пояснение к её построению,
- выходные таблицы и содержательные пояснения к ним,
- выводы по лабораторной работе.

### Варианты заданий

#### Задания (вариант) 1 и 2

На заводе ежемесячно скапливается  $A$  тонн отходов металла, из которого можно штамповать мелкие детали 6 типов. Месячная потребность завода в деталях  $i$ -го типа равна  $b_i$  тыс.шт. Недостающее количество деталей  $i$ -го типа или закупается на других предприятиях по цене  $c_i$  рублей за тысячу штук или производится из дополнительного металлолома, который закупается на стороне по цене  $M$  рублей за тонну. Расход металла на тыс. деталей  $i$ -го типа составляет  $a_i$  кг.

Для изготовления деталей используются 3 прессы, на каждом из которых за смену можно изготовить  $d_i$  тыс. деталей  $i$ -го типа. В месяц каждый пресс работает не более 52 смен. Найти стратегию (закупать недостающие детали или закупать недостающий металл) и план производства деталей на заводе, обеспечивающий минимум суммарных расходов (исходные данные приведены в таблице).

Исходные данные к заданию 1 и 2

Варианты	A	a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6
1	12	30	45	22	11	74	51	62	99	17	29	34	99
2	12	17	15	99	19	27	81	99	15	37	23	70	23

продолжение таблицы

Вариант	c1	c2	c3	c4	c5	c6	M	d1	d2	d3	d4	d5	d6
1	13	15	9	7	18	22	5	1,4	1,3	2,9	2,1	0,8	1,5
2	17	12	36	11	32	24	7	2,3	3,2	1,0	2,1	1,5	1,2

#### Задания (вариант) 3 и 4

Для поражения целей некоторого класса разработано 5 типов оружия. Один комплекс оружия  $j$ -го типа может действовать по группам целей (низколетящим и высоколетящим) с различной эффективностью. Среднее количество поражаемых целей при этом равны  $P_{1j}$  и  $P_{2j}$ . Количество вылетов низколетящих целей превосходит их количество высоколетящих в два раза. Необходимо разработать систему вооружения (определить

количество комплексов каждого типа), обеспечивающую максимум математического ожидания числа уничтоженных целей, если стоимость одного комплекса  $j$ -го типа составляет  $r_j$  % суммы, выделенной на всю систему; трудоемкость изготовления одного комплекса  $j$ -го типа составляет  $a_j$  % от общего фонда рабочего времени. Для производства одного комплекса  $j$ -го типа необходимо  $b_j$  кг дефицитного материала, а в распоряжении производства имеется  $B$  т этого материала. В силу ограничений технологического характера может быть изготовлено не более  $C_j$  комплексов  $j$ -го типа.

Исходные данные к заданию 3 и 4

Вариант	P11	P12	P13	P14	P15	P21	P22	P23	P24	P25
3	0,7	0,5	0,3	0,9	0,8	0,6	0,5	0,6	0,8	0,7
4	0,6	0,4	0,9	0,8	0,7	0,6	0,4	0,9	0,8	0,8

продолжение таблицы

Вариант	a1	a2	a3	a4	a5	b1	b2	b3	b4	b5
3	0,03	0,02	0,01	0,04	0,02	13	17	25	10	19
4	0,02	0,01	0,05	0,02	0,03	35	34	60	25	25

продолжение таблицы

Вариант	r1	r2	r3	r4	r5	B	c1	c2	c3	c4	c5
3	0,02	0,01	0,01	0,03	0,03	120	2000	6000	12000	2000	4500
4	0,01	0,01	0,04	0,02	0,01	220	6000	8000	3000	6000	2000

Задания (вариант) 5 и 6

Для приготовления комбикорма совхоз может закупить зерно 4-х сортов  $K_i$ , отличающихся друг от друга содержанием питательных компонентов  $C_j$  ( $j=1, \dots, 5$ ). Для обеспечения нормального питания скота в течение планируемого периода комбикорм должен содержать не менее  $V_j$  питательного компонента  $j$ -го типа. Одна тонна зерна  $i$ -го типа стоит  $g_i$  рублей и содержит  $a_{ij}$  единиц питательного компонента  $j$ -го типа. Складские помещения позволяют хранить не более  $A$  тонн зерна (для варианта 5:  $A=2800$ , для варианта 6:  $A=4400$ ). Определить план закупки зерна каждого сорта, обеспечивающий компромиссное решение по минимизации затрат на покупку зерна и максимизации питательности комбикорма с учетом требований на его питательность и емкости складских помещений. Критерии считать равнозначными.

## Исходные данные к заданию 5 и 6

Сорт зерна $K_i$	C1	C2	C3	C4	C5	Цена $g_i$
K1	2	1	5	0.6	0.01	40
K2	3	1	3	0.25	0.02	30
K3	7	0	0	1.00	0.1	28
K4	9	3	6	1.5	0.5	35
K5	4	2	1	0.5	0.1	44
Содержание $B_j$	2500	300	1000	712	100	

Матрица коэффициентов  $a_{ij}$  для 5-го варианта задачи получается из таблицы 3 вычеркиванием строки K1, для 6-го – строки K2.

## Задания (вариант) 7 и 8

Совхоз, имеющий посевную площадь 5000 га, выращивает 3 культуры  $K_i$ . Весь год можно разбить на 5 периодов  $P_j$ , отличающихся друг от друга потребностями в рабочей силе для выполнения сельскохозяйственных работ. В период  $P_j$  совхоз располагает рабочей силой в количестве  $b_j$  человек, из которых  $d_j$  человек могут быть в случае необходимости обеспечены работой, не связанной непосредственно с сельским хозяйством, а  $a_{ij}$  человек должны быть заняты на обработке 1 га посевной площади, занятой культурой  $K_i$ . Прибыль от  $i$ -й культуры, приходящаяся на 1 га посевной площади, равна  $c_i$  рублей, плановое задание по производству  $i$ -й культуры составляет  $q_i$  центнеров, а ее урожайность  $h_i$  центнеров с га.

Найти распределение площади под эти культуры, обеспечивающее максимум прибыли при выполнении всех плановых заданий и минимуме привлечения рабочей силы в течение года. Критерии считать равнозначными.

## Исходные данные к заданию 7 и 8

Культура	P1	P2	P3	P4	P5	$c_i$	$q_i$	$h_i$
K1	0.25	2	2	1.4	1.3	300	11600	16
K2	0.2	1.8	1	0.8	0.6	270	15000	24
K3	0.2	0.2	0.4	1.3	2	150	40000	40
K4	0.1	0.5	2	1.8	0.4	220	18000	30
$b_j$	3200	5500	5600	6500	9200			
$d_j$	2800	2100	200	1800	2400			

Матрица коэффициентов  $a_{ij}$  для 7-го варианта задачи получается вычеркиванием из таблицы 4. строки K1, для 8-го - строки K2.

### Задания (вариант) 9 и 10

Деревообрабатывающая фабрика получает  $m$  типов лесоматериалов  $H_i$  в количестве  $b_i$  куб.м в месяц. Из этих материалов изготавливается  $n$  видов фанеры  $S_j$ . На производство 1 кв.м фанеры вида  $S_j$  идет  $q_{ij}$  куб.м материала  $H_i$ . При благоприятном рынке спрос в месяц составит не менее  $P_j$  кв.м фанеры вида  $S_j$ . При неблагоприятном рынке – не более 50 % от  $P_j$ . Благоприятный рынок более вероятен, чем неблагоприятный. Составить план производства фанеры на месяц, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль, если лесоматериалы обходятся фабрике в  $c_i$  руб./куб.м, расходы на производство 1 кв.м фанеры  $S_j$  составляют  $v_j$  рублей, а реализуется эта фанера по цене  $r_j$  руб./кв.м.

Исходные данные к заданию 9 и 10

Тип	S1	S2	S3	S4	S5	$b_i$	$c_i$
H1	0.02	0	0.03	0.08	0.02	150	2.6
H2	0.04	0.1	0.12	0	0.01	200	2.5
H3	0	0.05	0.02	0.04	0.04	100	1.5
H4	0.1	0.04	0	0	0.08	130	1.4
H5	0.02	0	0.01	0	0	170	1.9
$P_j$	150	350	100	400	150		
$v_j$	0.5	0.7	0.4	0.8	0.9		
$r_j$	3	3.5	4.1	3.2	4.5		

Матрица коэффициентов  $q_{ij}$  для 9-го варианта задачи получается из таблицы 5 вычеркиванием строки H1, для 10-го – строки H2.

### Контрольные вопросы

1. Назовите основные проблемы выбора компромиссных решений.
2. Охарактеризуйте основные принципы выбора компромиссных решений?
3. В чем основное отличие выбора компромиссного решения по принципу выделения главного критерия от принципа последовательных уступок?
4. Опишите основные этапы процедуры «СТЕМ».

## 2.9 Лабораторная работа «Задачи принятия решений в условиях риска и неопределенности»

### Цель работы

Закрепить знания и навыки построения математических моделей одно и многокритериальных задач выбора в условиях риска и неопределенности

### Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

### Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

### Теоретические основы

В реальной практике выбор альтернативы субъектом управления под влиянием внешней среды, неподдающемуся точному прогнозу и имеющему случайный характер, приводит к одному из нескольких возможных исходов. Для осуществления выбора наилучшего решения необходимо оценивать возможные исходы альтернатив в зависимости от возможных ситуаций (состояний) внешней среды и целевых установок. Такая комплексная оценка решения не может быть произведена без участия лица, принимающего решение, без учета системы его взглядов (системы предпочтений) на ценность альтернатив.

Сделаем формальное описание задачи.

Пусть  $E\{e_1, \dots, e_n\}$  — множество возможных состояний;

$Z = \{z_1, \dots, z_l\}$  — множество целей системы управления;

$X = \{x_1, \dots, x_m\}$  — множество альтернатив;

$Y$  — множество исходов альтернатив.

Исход  $y \in Y$  может быть представлен в виде функции трех аргументов  $y_{ijq} = F(x_i, e_j, z_q)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $q = \overline{1, l}$ ,  $x_i \in X$ ,

$e_j \in E$ ,  $z_q \in Z$ . Матрицу  $Y = \|y_{ijq}\|$  называют матрицей исходов, оценочным функционалом, функцией предпочтения.

Необходимо построить модель оценки альтернативных решений в соответствии с предпочтением ЛПР.

Для обеспечения комплексной оценки решений необходимо сформулировать для полного множества целей систему показателей (критериев), характеризующих степень их достижения. Множеству целей

$Z$  сопоставим множество критериев  $K$ . В частном случае каждой цели  $z_q \in Z$  может быть сопоставлен один свой критерий  $k_q \in K$ .

Полученная в процессе подготовки решения информация о множестве целей, критериев их достижения, приоритетов целей и критериев, значений (качественных или количественных оценок) критериев по оцениваемым альтернативам в предполагаемых возможных ситуациях их реализации уменьшает неопределенность задачи и обеспечивает условия для выбора наилучшего решения.

Реализация альтернативы  $x_i$ , оцениваемой по критериям  $k_q, q = \overline{1, e}$  в ситуации  $e_j, j = \overline{1, n}$  может привести к исходу  $y(x_i, e_j, k_q)$ . Для определения наилучшей альтернативы в зависимости от конкретной постановки ЗПР реализуют один из подходов:

1) по каждой альтернативе  $x_i, i = \overline{1, m}$  и по каждой ситуации  $e_j, j = \overline{1, n}$  получают методом свертки критериев оценку  $y(x_i, e_j)$  и переходят к решению однокритериальной задачи ПР в условиях риска или неопределенности;

2) по каждой альтернативе  $x_i, i = \overline{1, m}$  и по каждому критерию  $k_q, q = \overline{1, e}$  получают среднестатистическую оценку исходов  $y(x_i, k_q)$ , затем переходят к решению многокритериальной задачи ПР в условиях определенности. В целом, для построения модели интегральной оценки решений следует придерживаться следующей схемы (рис.2.3).

1) получить оценки предпочтительности каждого из решений по каждому критерию для каждой ситуации  $y_{ijq}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, q = \overline{1, l}$  (данные критериальной оценки могут быть измерены в качественной и(или) количественной шкале);

2) в зависимости от конкретной постановки ЗПР следует получить комплексную оценку решений по совокупности критериев для каждой ситуации  $y_{ij}(K)$  либо комплексную оценку решений по совокупности ситуаций для каждого критерия  $y_{iq}(E)$ ;

3) получить интегральную оценку решений на множестве критериев с учетом возможных ситуаций  $y_i(K, E)$ .

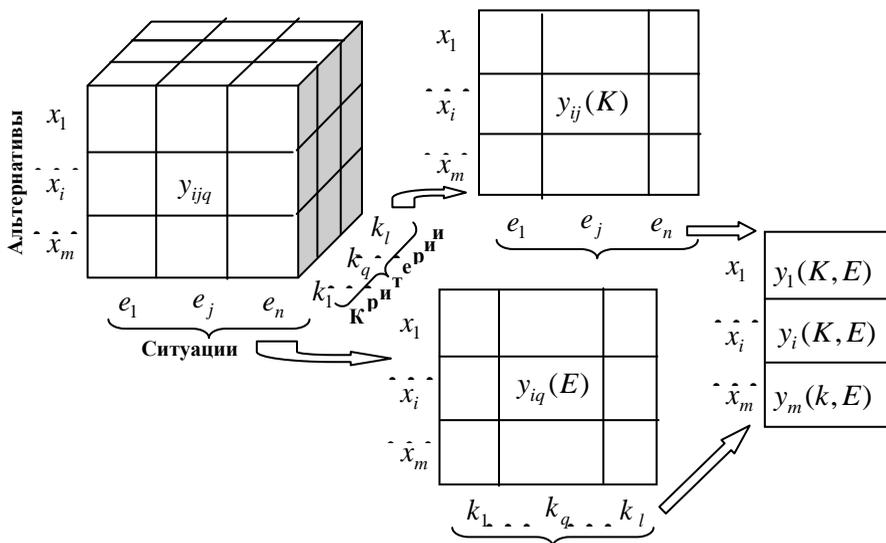


Рис.2.3 Схема получения интегральной оценки

### Порядок выполнения работы

1. Получить задание для задач 1) – однокритериальных и задач 2) - многокритериальных
2. Сформулировать математическую модель
3. Решить задачу с использованием программных средств
4. Дать анализ результатов
5. Подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

### Варианты заданий

#### 1) однокритериальные задачи

В каждой из приведенных ниже однокритериальных задач следует определить лучшую альтернативу с учетом вероятностной неопределенности, с учетом возможного порядка наступления событий и полной неопределенности.

1. Магазин «Молоко» продает в розницу молочные продукты. Директор магазина должен определить, сколько бидонов сметаны следует закупить у производителя для торговли в течение недели. Вероятности того, что спрос на сметану в течение недели будет 7; 8; 9; 10 бидонов, равны соответственно 0,2; 0,2; 0,5; 0,1. Покупка одного бидона сметаны обходится магазину в 70 у.е., а продается сметана по цене 110 у.е. за бидон. Если сметана не продана в течение недели, она портится, и магазин несет убытки.

Сколько бидонов сметаны необходимо приобретать для продажи.

2. Главный инженер предприятия решает, строить или не строить новую производственную линию, использующую высокую технологию. Если новое оборудование заработает, компания будет получать прибыль \$200000. Если не заработает, то компания получит убыток \$150000. Главный инженер считает, что шансы на неуспех нового процесса — 60%.

Оцените наилучший вариант для предприятия.

3. Президент компании решает, строить или нет промышленное предприятие. Его решения сведены в следующую таблицу:

Варианты	Благоприятный рынок, \$	Неблагоприятный рынок, \$
Строить большой завод	400000	-300000
Строить малый завод	80000	-10000
Ничего не делать	0	0
Вероятность	0,4	0,6

Оцените наилучший вариант.

4. Малый производитель ряда продуктов из сыра определяет, сколько ящиков сыра производить каждый месяц. Вероятность, что спрос будет 6 ящиков, равна 0,1, семь — 0,3 и восемь — 0,5, девять — 0,1. Затраты на каждый ящик — \$45, а цена — \$95. В случае непроджи ящика к концу месяца он списывается как испорченный. Сколько ящиков сыра должно производиться каждый месяц?

5. Владелец бензоколонки думает о том, каков должен быть размер его станции. После полного анализа маркетинговых факторов, относящихся к производству бензина и спросу на него, он разработал следующую таблицу:

Размер станции	Хороший рынок, \$	Средний рынок, \$	Плохой рынок, \$
Маленькая	50000	20000	-10000
Средняя	80000	30000	-20000
Большая	100000	30000	-40000
Очень большая	300000	25000	-160000
Вероятность	0,2	0,5	0,3

Оцените наилучший вариант решения.

6. Предприятие является малым поставщиком химикатов, используемых в фотографии. Один товар, поставляемый им,— это ВС-6. Менеджер обычно имеет запас 11, 12 или 13 ящиков ВС-6 на каждую неделю. За каждый проданный ящик полученная прибыль равна \$35. Так как ВС-6 является реактивом с коротким сроком годности, то в случае непроджи его к концу недели менеджер должен его уничтожить. Он теряет \$56 в каждом случае, когда что-то не продал в конце недели. Вероятность продажи 11 ящиков—0.45, 12 ящиков—0.35. и вероятность продажи 13 ящиков —0.2.

Вопрос: Сколько ящиков ВС-6 необходимо иметь в запасе каждую неделю?

7. Для финансирования проекта бизнесмену нужно занять сроком на один год 35000 ф. ст. Банк может одолжить ему эти деньги под 19% годовых или вложить в другое дело со 100%-ным возвратом суммы, но под 11% годовых. Из прошлого опыта банкиру известно, что 10% таких клиентов ссуду не возвращают, но сумма возмещения от заложенного имущества составит 25000 ф.ст.

Оцените наилучший вариант решения.

8. Промышленное предприятие может получать выключатели от двух поставщиков. Объем поставки 10000 выключателей. Качество выключателей от этих поставщиков показано ниже.

Процент дефектов	Вероятность для поставщика А	Вероятность для поставщика В
1	0,7	0,3
3	0,2	0,4
5	0,1	0,3

Неисправный выключатель может быть отремонтирован за \$0.50. Хотя качество у поставщика В ниже, но он просит за 10000 выключателей на \$37 меньше, чем поставщик А.

Оцените наилучший вариант решения.

9. Владелец бензоколонки думает о том, каков должен быть размер его станции: X1 – маленькая станция, X2 – небольшая, X3 – средняя, X4 – большая. В результате анализа возможных состояний рынка сбыта (e1 – хороший рынок, e2 – средний рынок, e3 – плохой рынок) он оценил возможные исходы решений в виде матриц парных сравнений, в которых цифра 1 означает, что альтернатива по строке не уступает альтернативе по столбцу

e1: p1=0,4				
	X1	X2	X3	X4
X1	1	1	1	1
X2	0	1	1	1
X3	0	0	1	1
X4	0	0	0	1

e2: p2=0,4				
	X1	X2	X3	X4
X1	1	0	0	0
X2	1	1	1	1
X3	1	1	1	1
X4	1	0	0	1

e3: p3=0,2				
	X1	X2	X3	X4
X1	1	1	0	0
X2	1	1	0	0
X3	1	1	1	0
X4	1	1	1	1

Укажите наилучший вариант решения.

10. Магазин «Молоко» продает в розницу молочные продукты. Директор магазина должен определить, сколько бидонов сметаны следует закупить у производителя для торговли в течение недели. Вероятности того, что спрос на сметану в течение недели будет 7; 8 и 9 бидонов, равны соответственно 0,2; 0,3; 0,5.

В результате анализа возможных состояний рынка сбыта (e1 – спрос на 7 бидонов, e2 – спрос на 8 бидонов, e3 – спрос на 9 бидонов) он оценил возможные исходы решений в виде матриц парных сравнений, в которых цифра 1 означает, что альтернатива по строке не уступает альтернативе по столбцу

e1: p1=0,2			
	X1	X2	X3
X1	1	1	1
X2	0	1	1
X3	0	0	1

e2: p2=0,3			
	X1	X2	X3
X1	1	0	1
X2	1	1	1
X3	0	0	1

e3: p3=0,5			
	X1	X2	X3
X1	1	0	0
X2	1	1	0
X3	1	1	1

Сколько бидонов сметаны следует закупить у производителя для торговли в течение недели?

11. Малый производитель ряда продуктов из сыра определяет, сколько ящиков сыра производить каждый месяц. Вероятность, что спрос будет 6 ящиков, равна 0,2, семь — 0,3 и восемь — 0,5. В результате анализа возможных состояний рынка сбыта (e1 – спрос на 6 ящиков, e2 – спрос на 7 ящиков, e3 – спрос на 8 ящиков) он оценил возможные исходы решений в виде матриц парных сравнений, в которых цифра 1 означает, что альтернатива по строке не уступает альтернативе по столбцу

e1: p1=0,2				e2: p2=0,3				e3: p3=0,5			
	X1	X2	X3		X1	X2	X3		X1	X2	X3
X1	1	1	1	X1	1	0	0	X1	1	0	0
X2	0	1	1	X2	1	1	1	X2	1	1	0
X3	0	0	1	X3	1	0	1	X3	1	1	1

Сколько ящиков сыра должно производиться каждый месяц?

12. Предприятие является малым поставщиком химикатов, используемых в фотографии. Один товар, поставляемый им, — это ВС-6. Менеджер обычно имеет запас 11, 12 или 13 ящиков ВС-6 на каждую неделю. Вероятность продажи 11 ящиков—0.45, 12 ящиков—0.35. и вероятность продажи 13 ящиков —0.2.

В результате анализа возможных состояний рынка сбыта (e1 – спрос на 6 ящиков, e2 - спрос на 7 ящиков, e3 - спрос на 8 ящиков) он оценил возможные исходы решений в виде матриц парных сравнений, в которых цифра 1 означает, что альтернатива по строке не уступает альтернативе по столбцу

e1: p1=0,45				e2: p2=0,35				e3: p3=0,2			
	X1	X2	X3		X1	X2	X3		X1	X2	X3
X1	1	1	1	X1	1	0	1	X1	1	0	0
X2	0	1	1	X2	1	1	1	X2	1	1	0
X3	0	0	1	X3	0	0	1	X3	1	1	1

Сколько ящиков ВС-6 необходимо иметь в запасе каждую неделю?

## 2) многокритериальные задачи

В каждой из приведенных ниже многокритериальных задач принятия решений следует определить лучшую альтернативу с учетом вероятностной неопределенности состояний внешней среды.

Перед ЛПР стоит задача транспортировки грузов от поставщиков к потребителям автомобильным транспортом либо по асфальтированной дороге (X1), либо по грунтовой (X2), либо по гравийной (X3). На пути следования транспорта встречаются переправы через речки, таможенные посты, границы и т.п. В день отправки автомобилей возможно изменение погодных условий (e1 – сухая ясная погода; e2 – кратковременные дожди; e3 – сильные продолжительные дожди), а вместе с ними и транспортных расходов (ремонт, бензин и т.п.). При условии, что известны матрицы исходов по критерию «Время» (временные затраты в днях) перевозки грузов от поставщиков к потребителям в различных

погодных условиях и распределение вероятностей появления состояний внешней среды ( $p_1=0,2$ ;  $p_2=0,4$ ;  $p_3=0,4$ ), следует определить наилучшую альтернативу транспортировки грузов с учетом двух (равнозначных) критериев. Таблицы исходов альтернатив приведены для каждого варианта задания ниже.

## Вариант 1

## Возможные исходы транспортировки грузов

Дорога	Критерий «Деньги» (в т.руб.)			Критерий «Время» (в днях)		
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
X1	30	40	50	4	4	5
X2	20	30	70	3	4	5
X3	10	20	40	3	5	7

## Вариант 2

## Возможные исходы транспортировки грузов

Дорога	Критерий «Деньги» (в т.руб.)			Критерий «Время» (в днях)		
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
X1	10	40	50	4	4	5
X2	20	30	70	3	4	5
X3	10	30	60	3	5	7

## Вариант 3

## Возможные исходы транспортировки грузов

Дорога	Критерий «Деньги» (в т.руб.)			Критерий «Время» (в днях)		
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
X1	30	40	60	4	4	5
X2	20	30	70	3	4	5
X3	10	30	60	2	5	7

## Вариант 4

## Возможные исходы транспортировки грузов

Дорога	Критерий «Деньги» (в т.руб.)			Критерий «Время» (в днях)		
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
X1	40	40	50	3	4	6
X2	30	40	50	2	3	7
X3	20	50	70	1	3	6

## Вариант 5

## Возможные исходы транспортировки грузов

Дорога	Критерий «Деньги» (в т.руб.)			Критерий «Время» (в днях)		
	<i>e1</i>	<i>e2</i>	<i>e3</i>	<i>e1</i>	<i>e2</i>	<i>e3</i>
X1	40	40	50	1	4	5
X2	30	40	50	2	3	7
X3	30	50	70	1	3	6

**Контрольные вопросы**

1. В чем основное отличие задач принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности?
2. Назовите основные правила многокритериальной оценки альтернатив.
3. Укажите основные критерии выбора решений при вероятностной неопределенности состояний внешней среды.
4. Назовите способы принятия решений при отсутствии информации о состоянии внешней среды.
5. Укажите основные критерии принятия решений в условиях противодействия внешней среды.
6. Чем отличаются критерии Гурвица, Вальда и Сэвиджа?
7. Каков алгоритм принятия решений при линейной упорядоченности наступления состояний внешней среды?
8. Какова последовательность оценки альтернативных решений, принимаемых с учетом возможных ситуаций и целевых установок?

## **3 Методические указания для организации самостоятельной работы**

### **3.1 Общие положения**

Целями самостоятельной работы являются систематизация, расширение и закрепление теоретических знаний, приобретение навыков исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студента по дисциплине «Исследование операций и теория принятия решений» включает следующие виды его активности:

1. проработка лекционного материала;

2. изучение тем теоретической части дисциплины, вынесенных для самостоятельной проработки;
3. подготовка к лабораторным работам;
4. подготовка к экзамену.

### **3.2 Проработка лекционного материала**

Лекция – традиционно ведущая форма обучения в вузе. Она является методологической и организационной основой для всех форм учебных занятий, в том числе самостоятельных. Ее основная цель – формирование у студентов ориентировочной основы для последующего усвоения студентами учебного материала. В ходе лекции преподаватель, опираясь на имеющиеся у студентов знания и практический опыт, подводит их к пониманию и усвоению новых знаний, формулированию правил и выводов.

Для усваивания лекционного материала студенту рекомендуется проработать материал по конспекту лекций и учебной литературе, при этом дополнительно законспектировать в рабочей тетради кратко, схематично, последовательно основные положения, выводы, формулировки, обобщения, пометить важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Если материал связан с решением задач исследования операций и теории принятия решений, то обязательно нужно закрепить математическую постановку этих задач, методы и алгоритмы их решения на самостоятельном решении подобных задач, которые приводятся в методических указаниях к лабораторным работам или в учебной литературе. Следует обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удастся разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации, на учебном занятии.

При первом ознакомлении с новым материалом полезно применить «партитурное чтение», беглый просмотр главы, раздела. Старайтесь получить общее представление об излагаемых вопросах, не задерживаясь на математических выводах, уравнениях реакций. Вникайте в сущность того или иного вопроса, а не пытайтесь запомнить отдельные факты или явления.

Повторное чтение (более медленное и вдумчивое) должно сопровождаться пометками, записями в рабочей тетради, выписками из прочитанного. Чтобы лучше запомнить и усвоить изучаемый материал, вносите в рабочую тетрадь формулировки законов и основных понятий, незнакомые термины и названия. Если материал поддается

систематизации, составляйте графики, рисунки, диаграммы, таблицы – они очень облегчают запоминание, уменьшают объем конспектируемого материала. Приобретайте навыки конспектирования – краткий конспект помогает при повторении материала в период подготовки к экзамену.

Готовьтесь обязательно к последующей работе над лекцией, для этого:

- повторите изученный материал по конспекту или по вашим записям;
- неоконченные фразы, пропущенные слова и другие недочеты в записях устранили, пользуясь материалами из учебника и других источников;
- если пропущено занятие, оставьте несколько свободных страниц, содержание пропущенного материала нужно восполнить во время самостоятельной работы;
- подготовьте вопросы преподавателю по предыдущей теме.

### **3.3 Подготовка к лабораторным работам**

Лабораторные занятия являются связующим звеном теории и практики. Они позволяют углубить и закрепить теоретические знания, получаемые на лекциях, проверить научно-теоретические положения экспериментальным путем, выработать у студентов практические умения и навыки. Одновременно они являются базой для научно-исследовательской работы студентов.

Студенты должны заранее самостоятельно подготовиться к лабораторной работе с использованием указанной преподавателем литературы: учебники, лекции, методические указания. Подготовить ответы на контрольные вопросы, предложенные преподавателем к данной лабораторной работе. Каждая лабораторная работа выполняется по определенной теме с указанием цели её выполнения. Следует помнить, что к методическим указаниям на выполнение определенных лабораторных работ прилагаются презентационные файлы, помогающие в усвоении тем дисциплины. Они выложены в вычислительной сети кафедры.

### **3.4 Самостоятельное изучение тем теоретической части курса**

#### **3.4.1 Задачи дробно-линейного программирования. Алгоритм решения**

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Отличие задачи линейного программирования от задачи дробно-линейного программирования?
2. Способ сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования?
3. Алгоритм решения задачи дробно-линейного программирования.
4. Графический способ решения задачи дробно-линейного программирования.

Методические рекомендации по изучению

Для изучения данной темы, следует повторить рассмотрение вопросов по алгоритмам решения задач линейного программирования общего вида (симплекс-алгоритмы). На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, например: Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с. 81-87.

### 3.5.2 Квадратичное программирование

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Чем отличается задача линейного программирования от задачи квадратического программирования?
2. Почему для решения задачи квадратического программирования можно применить симплекс-метод?
3. Опишите алгоритм решения задачи квадратического программирования на базе теоремы Куна—Таккера.

Методические рекомендации по изучению

При изучении данной темы обратите внимание на связь двойственности задач линейного программирования и функции Лагранжа для задачи линейного программирования, а также понятие седловой точки. Следует повторить рассмотрение вопросов по поиску экстремумов задач безусловной оптимизации. На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, например: Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с.153-163.

### 3.5.3 Оптимизация сетевых графиков по времени выполнения работ и использованию рабочей силы

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Укажите способы определения резервов времени выполнения работ.
2. Что такое график Ганта?
3. Опишите алгоритм оптимизации распределения трудовых ресурсов на графиках Ганта.

Для изучения данной темы, следует повторить рассмотрение вопросов по определению основных параметров сетевого графика. На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, например: Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с. 182-192.

### 3.5.4 Метод когнитивных карт

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Какова основная идея метода когнитивных карт?
2. Как проводится анализ знакового графа на его устойчивость?
3. Какая переменная знакового графа называется стабильной?
4. Назовите основные недостатки метода когнитивных карт.

Для изучения данной темы, следует повторить рассмотрение вопросов по основным понятиям теории графов: транзитивность, цикличность, ацикличность. На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, на портале ТУСУРа: <https://edu.tusur.ru/lecturer/publications/1579>, Турунтаев Л.П. Теория принятия решений: Учебно-методические указания для выполнения практических и самостоятельных работ / Турунтаев Л. П. — 2012. 42с.

### 3.5.5 Человеко-машинная процедура выбора решений «STEM»

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Назовите основные шаги процедуры STEM.
2. Какие принципы выбора компромиссных решений заложены в процедуре STEM?

Для изучения данной темы, следует повторить рассмотрение вопросов решения задач векторной оптимизации: шкалы измерения, нормализация критериев, схемы поиска компромиссных решений. На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, например: Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с.132-140

### 3.5.6 Многоэтапное принятие решений. Метод деревьев решений

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Что представляют ветви в дереве решений?
2. Что представляют события в дереве решений?
3. Как производится выбор альтернатив в методе деревьев решений?

На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, на портале ТУСУРа: <https://edu.tusur.ru/lecturer/publications/1579>, Турунтаев Л.П. Теория принятия решений: Учебно-методические указания для выполнения практических и самостоятельных работ / Турунтаев Л. П. — 2012. 42с.

### 3.5.7 Групповые решения. Парадоксы голосования

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Какие парадоксы могут иметь место при голосовании?
2. В чем парадокс многоступенчатого голосования при наличии коалиции?
3. В чем заключается парадокс Эрроу?

На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, на портале ТУСУРа: <https://edu.tusur.ru/lecturer/publications/1579>, Турунтаев Л.П. Теория принятия решений: Учебно-методические указания для выполнения практических и самостоятельных работ / Турунтаев Л. П. — 2012. 42с.

## 4 Рекомендуемая литература

1. Ржевский, С.В. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.В. Ржевский — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/32821>
2. Горлач, Б.А. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б.А. Горлач — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4865>
3. Есипов, Б.А. Методы исследования операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б.А. Есипов — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/68467>
4. Юкаева, В.С. Принятие управленческих решений [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Юкаева, Е.В. Зубарева, В.В. Чувикова — Москва: Дашков и К, 2016. — 324 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/93383>
5. Колбин, В.В. Методы принятия решений [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.В. Колбин — Санкт-Петербург: Лань, 2016. — 640 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/71785>.