

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Гендрина И. Ю.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ
ЧАСТЬ 3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
Методические указания к самостоятельным и лабораторным работам.

2018

Содержание

Введение.....	3
1. Статистические распределения.....	3
1.1. Статистические величины и их виды.....	3
1.2. Вариационные ряды.....	9
2. Математические основы выборочного метода.....	20
2.1. Выборочное наблюдение.....	20
2.2. Корреляционно-регрессионный анализ.....	32
3. Ряды динамики.....	44
4. Индексный метод.....	54
Приложения.....	64
Литература.....	71

Введение

Данная работа является продолжением комплекта учебно-методических пособий по дисциплине «Количественные методы в экономических исследованиях» и содержит некоторые **статистические методы**, имеющие широкое применение в различных областях науки и практики, в том числе в экономике. Первые две части данного комплекта представлены в работах:

Количественные методы в экономических исследованиях. Часть 1. Классические методы оптимизации: Методические указания к самостоятельным и лабораторным работам. [Электронный ресурс] / И. Ю. Гендрина — Томск: ТУСУР, 2018. — 24 с. — Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/7882>. Дата обращения 13.06.2018.

Количественные методы в экономических исследованиях. Часть 2. Методы исследования операций: Методические указания к самостоятельным и лабораторным работам. [Электронный ресурс] / И. Ю. Гендрина — Томск: ТУСУР, 2018. — 73 с. — Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/7897>. Дата обращения 13.06.2018.

Достоинством представленных методов является их относительная простота, в том числе для программной реализации. А также то обстоятельство, что они включены в качестве стандартных процедур в различные пакеты прикладных программ: EXCEL, MATHCAD, MATHLAB и др.

Это учебно-методическое пособие предназначено для выполнения самостоятельных и лабораторных работ по указанной дисциплине студентами экономических специальностей.

1. Статистические распределения

1.1 Статистические величины и их виды

Вопросы для самоконтроля и собеседования:

1. Что такое абсолютная величина и каковы ее единицы измерения?
2. Назовите виды относительных величин, охарактеризуйте их значение и области применения.
3. В чем отличие абсолютных и относительных величин?
4. Назовите виды средних величин.
5. Приведите формулы расчета простой средней и взвешенной средней в общем виде.
6. Правило мажорантности средних.
7. В чем отличие структурных и степенных средних?
8. Опишите методику расчета моды и медианы по несгруппированным данным.

Примеры решения типовых задач:

Задача 1.1

Расход топлива на производственные нужды предприятия характеризуется следующими данными:

Вид топлива	Единица измерения	Расход	
		По плану	Фактически
Мазут	т	600	610
Уголь	т	250	210
Газ природный	тыс. м ³	700	730

Средние калорийные эквиваленты перевода в условное топливо: мазут – 1,37 т; уголь – 0,9 т; газ – 1,2 тыс. м³. Определить: 1) общее потребление условного топлива по плану и фактически; 2) процент выполнения плана по общему расходу топлива; 3) удельный вес фактически израсходованного топлива по видам (расчет с точностью до целых).

Решение.

1. Определим расходы по плану и фактически в единицах условного топлива:

$$\text{Расход (пл)} = 600 \cdot 1,37 + 250 \cdot 0,9 + 700 \cdot 1,2 = 1887 \text{ у.е.}$$

$$\text{Расход (факт)} = 610 \cdot 1,37 + 210 \cdot 0,9 + 730 \cdot 1,2 = 1900,7 \text{ у.е.}$$

2. Процент выполнения плана по общему расходу топлива:

$$\frac{\text{Расход(факт)}}{\text{Расход(пл)}} = \frac{1900,7}{1887} \cdot 100 = 100,7\%$$

Следовательно, фактически по сравнению с планом был произведен перерасход 0,7% топлива.

3. Удельный вес рассчитывается при помощи относительных величин структуры.

Результат расчета представлен в таблице:

Вид топлива	Расход (в усл. ед.)	Удельный вес (в общем объеме расхода),
		%
Мазут	835,7	44
Уголь	189,0	10
Газ природный	876,0	46
Итого:	1900,7	100

Задача 1.2

Пусть в результате инфляции цены возросли в первый год в три раза, во второй год в два раза по отношению к предыдущему, т.е. за два года цены выросли в шесть раз. Определите средний рост цен в год.

Решение:

Формула средней арифметической приводит к неверному ответу: средний рост цен 2,5 раза в год, что составляет за два года $2,5 \cdot 2,5 = 6,25$ раза. Применение формулы средней геометрической приводит к ответу $\bar{x} = \sqrt[2]{3 \cdot 2} = 2,45$ раза, что действительно за два года составляет $2,45 \cdot 2,45 = 6$ раз.

Задачи для самостоятельного решения:**Задача 1.3**

Количество организаций и субъектов малого предпринимательства, занимающихся торговлей автотранспортными средствами, мотоциклами, техническим обслуживанием и ремонтом, представлено в таблице (по состоянию на 1 января, Россия, в тыс. шт.):

Вид деятельности	Год	
	2005	2006
Торговля автотранспортными средствами	13,7	17,6
Техническое обслуживание и ремонт автотранспортных средств	19,4	19,5
Торговля автомобильными деталями, узлами и принадлежностями	14,1	17,6
Розничная торговля моторным топливом	6,9	6,7

Определить: 1) относительную величину динамики по каждому из видов предприятий и в целом по всем предприятиям; 2) относительную величину структуры в 2005 и 2006 гг. (расчет с точностью до 0,1%). Сформулировать выводы.

Задача 1.4

По промышленному предприятию имеются следующие данные о выпуске продукции:

Вид продукции	План на 2006 год, тыс. т.	Фактический выпуск, тыс. т				Цена за 1 т, тыс. руб.
		1 кв.	2 кв.	3 кв.	4 кв.	
Мука ржаная	690	180	200	220	120	8
Мука пшеничная	900	210	300	270	100	10

Определить процент выполнения плана по выпуску продукции для каждого вида продукции и в целом по предприятию. Сформулировать выводы.

Задача 1.5

Планом предусмотрено увеличение годовой производительности труда работников на 3%. Фактически относительно прошлого года произошло увеличение производительности труда на 5,2%. Определить процент выполнения плана по уровню производительности труда.

Задача 1.6

По плану объему продукции в отчетном году должен был вырасти по сравнению с прошлым годом на 12%. План выпуска продукции перевыполнен на 2%. Определить фактический выпуск продукции в отчетном году, если объем продукции в прошлом году составил 14890 тыс.руб.

Задача 1.7

Объем потребления населением медицинских услуг в России составил (в млн. руб.): в 2004г. – 87076,4; в 2005 – 109732,9. Численность населения России по состоянию на 1 января составила (млн. чел.): 2004г. – 144,17; 2005г. – 143,47; 2006г. – 142,75. Определить, на сколько процентов изменилось потребление медицинских услуг на душу населения.

Задача 1.8

По предприятию имеются следующие сведения о среднесписочной численности рабочих за два года:

Показатель	2005 год	2006 год
Среднесписочная численность работников	582	600
в том числе:		
рабочие	203	178
служащие	123	152
ИТР	256	270

Охарактеризовать изменения в соотношении численности работников с помощью относительных величин координации.

Задача 1.9

За два месяца имеется следующая информация о предприятии:

№ цеха	Октябрь		Ноябрь	
	Среднемесячная заработная плата, руб.	Фонд заработной платы, тыс. руб.	Численность работников, чел.	Среднемесячная заработная плата, руб.
1	7800	1092,0	158	7950
2	6550	2096,0	315	6340
3	9350	841,5	90	9410

Определить среднемесячную заработную плату на предприятии в каждом месяце.

Сформулировать вывод.

Задача 1.10

Распределение промышленных предприятий региона по показателю на 1 тыс. руб. продукции в 3 квартале следующее:

Затраты на 1 тыс. руб. продукции, руб.	Число предприятий	Общая стоимость продукции, тыс. руб.
650-700	2	20200
700-750	9	64000
750-800	5	34000
800-850	4	23400

Определите: 1) средний размер затрат на 1 тыс. руб. продукции по всем предприятиям региона; 2) средний объем продукции на одно предприятие.

Задача 1.11

Подача жидкого топлива для технологического процесса осуществляется в цехе с тремя трубопроводами с диаметрами 2, 5 и 6 см. при капитальном ремонте здания цеха эти трубопроводы планируется заменить на три новых одинакового диаметра при сохранении их общем пропускной способности. Определите средний диаметр трубы (диаметр новой трубы).

Задача 1.12

Безработица выросла в первый год в два раза, во второй на 25%, в третий в полтора раза. Определите средний рост безработицы.

Задача 1.13

Распределение рабочих предприятия по стажу работы следующее:

Стаж работы, лет	до 5 лет	5-10	10-15	более 15
Количество рабочих	5	12	14	2

Определите средний стаж работы рабочих на предприятии.

Задача 1.14

Определите среднюю долю брака за год по следующим данным:

Наименование продукции	Доля брака, %	Стоимость всей продукции, тыс. руб.
А	1,6	790
Б	2,1	325
В	0,9	254
Г	2,9	270

1.2 Вариационные рядыВопросы для самоконтроля и собеседования:

1. Охарактеризуйте цель построения рядов распределения.
2. В чем отличие дискретных и интервальных рядов распределения?
3. Чем частота отличается от частоты?
4. Каким образом графически изображаются ряды распределения?
5. Какие показатели центра распределения вам известны?
6. Опишите графический способ нахождения медианы и моды.
7. Охарактеризуйте известные вам показатели вариации и формы распределения.

Примеры решения типовых задач:**Задача 1.15**

По приведенным ниже данным о стаже работы 50 рабочих предприятия требуется: 1) построить дискретный ряд распределения; 2) дать графическое изображение ряда; 3) вычислить показатели центра распределения, показатели вариации формы распределения

Стаж рабочих: 4, 5, 6, 4, 5, 4, 2, 3, 5, 6, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 6, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 2, 5, 4, 5, 4, 4, 2, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 4, 4, 5, 3, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 3, 2, 3.

Решение:

1). Дискретный ряд распределения имеет следующий вид:

Ряд распределения рабочих предприятия по стажу работы

Стаж работы на предприятии, x_i	Число рабочих, имеющих данный стаж работы, f_i	Частость, w_i	Накопленная частота, S_i
2	6	0,12	6
3	10	0,20	16
4	16	0,32	32
5	14	0,28	46
6	4	0,08	50
Итого	50	1,00	

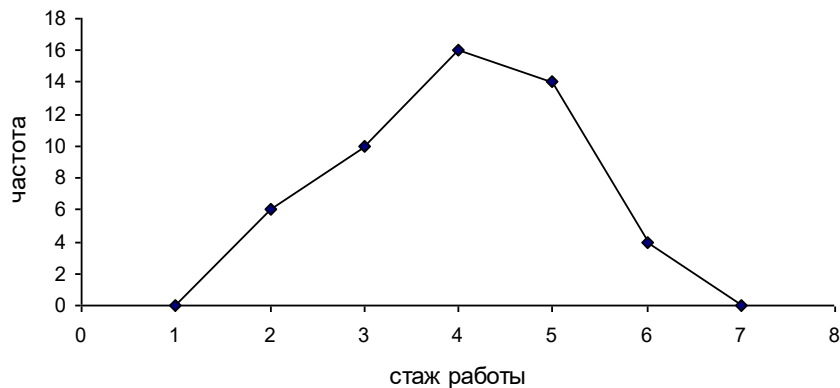
Частостью называют частоту в относительном выражении, которая определяется в

долях или процентах по формуле: $w_i = f_i / \sum_1^k f_i$. Сумма частостей равна 1.

Накопленной частотой S_i называется сумма частот признаков, накопленная к данному значению (для дискретного ряда) или интервалу значений (для интервального ряда).

2). Графически дискретный ряд изображается в виде полигона:

Распределение рабочих предприятия по стажу работы



Полигон частот замыкается, для чего крайние вершины соединяют с точками на оси абсцисс, отстоящими на одно деление в принятом масштабе (в данном случае одно деление соответствует одному году стажа).

3). К показателям центра распределения относятся: средняя арифметическая, мода и медиана.

$$\text{Средняя арифметическая } \bar{x} = \sum x_i f_i / \sum f_i = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 10 + \dots + 6 \cdot 4}{50} = 4 \text{ года}$$

Медиана $Me=4$ года, т.к. $N_{Me} = (n+1)/2 = 25,5$ (т.е. медиана равна средней арифметической между 25-ым и 26-ым значениями ряда, оба из которых равны 4).

Мода $Mo=4$ года (это наиболее часто встречающееся значение, частота которого равна 16).

Рассчитаем следующие показатели вариации: среднее линейное отклонение, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Для расчета показателей построим вспомогательную таблицу:

Стаж работы, x_i	Число рабочих, f_i	Расчетные показатели		
		$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
2	6	-2	12	24
3	10	-1	10	10
4	16	0	0	0
5	14	1	14	14
6	4	2	8	16
Итого	50		44	64

$$\text{Среднее линейное отклонение } d = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{44}{50} = 0,88 \text{ лет.}$$

$$\text{Дисперсия } \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{64}{50} = 1,28$$

$$\text{Среднее квадратическое отклонение } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,28} = 1,13 \text{ лет.}$$

$$\text{Показатель вариации } v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{1,13}{4} \cdot 100 = 28,25\% .$$

Следовательно, индивидуальные значения отличаются в среднем от средней арифметической на 1,13 года, или 28,25%. Значение коэффициента вариации не превышает 33%, следовательно, можно считать совокупность однородной.

Форму распределения характеризуют показатели асимметрии и эксцесса.

Для расчета асимметрии и эксцесса построим вспомогательную таблицу:

Стаж работы, x_i	Число рабочих, f_i	Расчетные показатели		
		$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^3 \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^4 \cdot f_i$
2	6	-2	-48	96
3	10	-1	-10	10
4	16	0	0	0
5	14	1	14	14
6	4	2	32	64
Итого	50		-12	184

Рассчитаем асимметрию на основе вычисления момента третьего порядка: $As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$,

где $\mu_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 \cdot f_i}{\sum f_i}$ - центральный момент третьего порядка.

$$\text{Тогда: } \mu_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{-12}{50} = -0,24, \quad As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0,24}{1,13^3} = -0,17.$$

Асимметрия является левосторонней, так как имеет отрицательное значение.

Рассчитаем показатель эксцесса на основе вычисления центрального момента

четвертого порядка: $Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, где $\mu_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 \cdot f_i}{\sum f_i}$ - центральный момент

четвертого порядка.

$$\text{Тогда: } \mu_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{184}{50} = 3,68, \quad Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3,68}{1,13^4} - 3 = -0,74.$$

Следовательно, распределение рабочих по стажу является плосковершинным.

Задача 1.16

Постройте интервальный вариационный ряд для следующих данных о заработной плате (руб./месяц) работников предприятия:

9897	8792	7589	6598	6523	4965	12045	7854	3549	6897
6543	8921	11269	7836	8546	3964	9996	7962	8941	11456
10258	8925	9876	5986	11256	5689	6927	7293	9861	9456

Представьте ряд распределения графически и определите по графикам моду и медиану.

Решение:

Для построения интервального ряда предварительно определим размах вариации

$$x_{\max} - x_{\min} = 12045 - 3549 = 8496 \text{ руб.}$$

По формуле Стэрджесса найдем число групп $k = 1 + 3,32 \cdot \lg 30 = 5,9 \approx 6$.

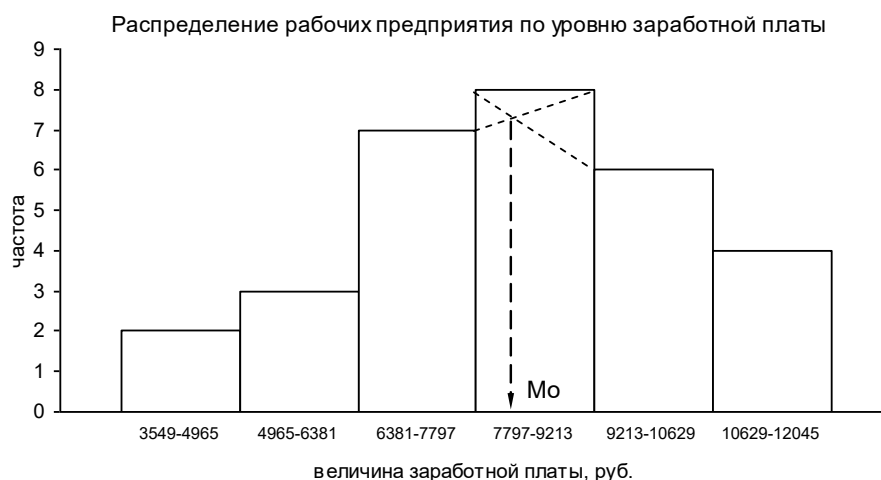
$$\text{Тогда ширина интервала } h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{8496}{6} = 1416 \text{ руб.}$$

Для определения границ первого интервала к минимальному значению прибавим ширину интервала, тогда первый интервал от 3549 до 4965 руб., с верхней границей первого интервала просуммируем ширину интервала и получим второй интервал от 4965 до 6381 руб. и т.д. Для каждого из интервалов определим число данных о заработной плате,

попадающих в интервал. Среди первичных данных присутствует число, совпадающее с границей интервала - 4965 руб. (на границе первого и второго интервала). Если значения признаков, совпадающие с верхней границей интервала, будут включаться в последующие интервалы, то такой принцип называется «исключительно». Принцип «включительно» означает, что значения признака, совпадающие с верхней границей интервала, включаются в эту группу. В первом случае в первой строке таблицы ставится знак «-», во втором случае – знак «+». Результаты построения интервального ряда распределения представим в виде таблицы.

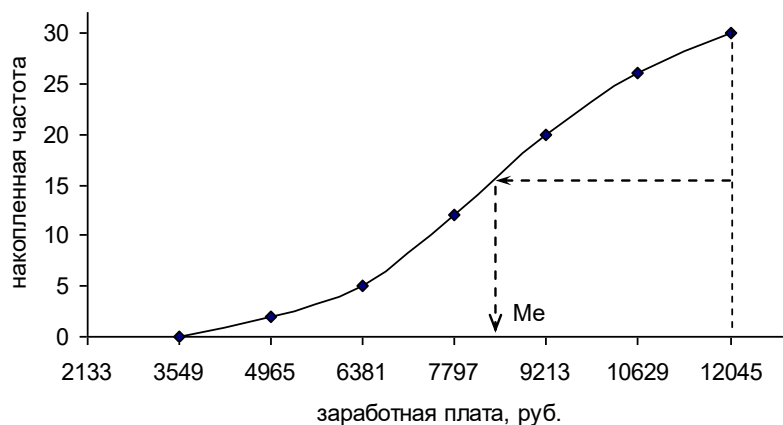
Величина заработной платы, руб.	Число рабочих (частота), f_i	Частость, w_i	Накопленная частота, S_i
3549-4965 (-)	2	0,07	2
4965-6381	3	0,10	5
6381-7797	7	0,23	12
7797-9213	8	0,27	20
9213-10629	6	0,20	26
10629-12045	4	0,13	30
Итого	30	1,00	

Для определения моды представим ряд в виде гистограммы:



Для этого необходимо выбрать интервал с самым высоким значением частоты. Затем соединить верхний правый угол столбца модального интервала с верхним правым углом столбца предмодального интервала, а верхний левый угол столбца модального интервала - с верхним левым углом столбца послемодального интервала. Координата по оси абсцисс точки пересечения этих отрезков будет являться модой.

Для графического определения медианы построим кумулятивную кривую:



Для ее определения из верхней точки кумуляты опускают на ось X перпендикуляр, который затем разбивают на две равные части. Из точки разбиения проводят перпендикулярно отрезок до пересечения с кумулятой. Координата по оси абсцисс этой точки пересечения является медианой.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 1.17

Имеются следующие данные о возрастном составе рабочих цеха (лет): 18, 38, 28, 29, 26, 38, 34, 22, 28, 30, 22, 23, 35, 33, 27, 24, 30, 32, 28, 25, 29, 26, 31, 24, 29, 27, 32, 25, 29, 29.

Для анализа распределения рабочих цеха по возрасту требуется: 1) построить интервальный ряд распределения; 2) дать графическое изображение ряда; 3) исчислить показатели центра распределения, показатели вариации и формы распределения. Сформулировать выводы.

Задача 1.18

Имеются следующие данные о простое автомобиля под разгрузкой:

№ пункта разгрузки	Число грузчиков	Время простоя, мин.
1	3	12
2	4	10
3	4	8
4	3	15
5	3	19
6	4	12
7	4	8
8	3	10
9	3	18
10	4	8

Проверить закон сложения дисперсий.

Задача 1.19

Имеются следующие данные о результатах обследования рабочих предприятия по размеру месячной заработной платы:

Группы рабочих по возрасту, лет	Число рабочих	Дисперсия заработной платы
До 20	140	400
20-30	180	300
30 и старше	130	500

Общая дисперсия заработной платы в обследованной совокупности рабочих составила 450. Определить, в какой степени вариация заработной платы рабочих предприятия зависит от возраста.

Задача 1.20

Удельный вес основных рабочих в трех цехах предприятия составил: 70, 90, 75% общей численности рабочих. Определите дисперсию и среднеквадратическое отклонение доли основных рабочих по предприятию в целом, если численность всех рабочих трех цехов составила соответственно 250, 200, 150 человек.

Задача 1.21

Дисперсия признака равна 600. Объем совокупности равен 10. Сумма квадратов индивидуальных значений признака равна 6250. Найти среднюю величину

Задача 1.22

По цеху имеются следующие данные о распределении рабочих по стажу работы:

Группы рабочих по стажу работы (лет), x_i :	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	Итого
Число рабочих, f_i	6	8	12	24	17	8	5	80

На основе приведенных данных проверить соответствие эмпирического распределения закону нормального распределения, используя критерий согласия К. Пирсона.

Задача 1.23

Имеются следующие данные о размере семьи работников цеха (число человек в семье): 3, 4, 5, 2, 3, 6, 4, 2, 5, 3, 4, 2, 7, 3, 3, 6, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 4. Составить дискретный вариационный ряд. Определить показатели центра распределения, показатели вариации. Дать графическое изображение ряда в виде полигона распределения. Определить графически моду и медиану, сравнить полученное значение с расчетным. Сформулировать краткие выводы.

Задача 1.24

По автотранспортному предприятию, осуществляющему перевозку грузов автомобилями грузоподъемностью 16 т, имеются следующие данные о весе партий груза (т):

8	11	14	6	10	13	12	16	15	16
16	10	16	13	14	16	16	4	16	14
5	13	11	2	16	8	16	7	14	16

Построить интервальный ряд распределения партий груза по весу. Для построенного ряда вычислить показатели центра распределения и вариации. Сформулировать вывод об использовании автомобилей.

Задача 1.25

Распределение рабочих двух участков по стажу работы следующее:

Стаж работы, лет	Число рабочих	
	Участок № 1	Участок № 2
0-4	5	7
4-8	13	20
8-12	20	14
12-16	4	8

Определить, на каком участке состав рабочих по стажу работы более однороден.

Задача 1.26

Имеются следующие данные о количестве заявок на автомобили технической помощи по дням:

11	2	5	14	7	2	8	10	2	6
10	8	3	13	11	8	8	2	9	8
5	14	4	10	12	6	8	2	8	7
9	2	8	4	6	13	5	3	12	2
2	7	9	8	5	8	6	10	11	5

Построить: а) интервальный ряд распределения, определив величину интервала группировки по формуле Стерджесса; б) теоретическую кривую нормального распределения. Проверить соответствие эмпирического и теоретического распределений по критериям Пирсона, Колмогорова и Романовского. Сформулировать вывод.

Задача 1.27

Средняя величина в совокупности равна 15, среднее квадратическое отклонение равно 10. Чему равен средний квадрат индивидуальных значений этого признака?

Задача 1.28

Средняя величина признака в совокупности равна 13, а средний квадрат индивидуальных значений этого признака равен 174. Определить коэффициент вариации.

Задача 1.29

Дисперсия признака равна 360 000, коэффициент вариации равен 50%. Чему равна средняя величина признака?

Задача 1.30

Определить дисперсию признака, если средняя величина признака равна 2600 единицам, а коэффициент вариации равен 30%.

Задача 1.31

Общая дисперсия равна 8,4. Средняя величина признака для всей совокупности равна 13. Средние по группам равны соответственно 10, 15 и 12. Численность единиц в каждой группе составляет 32, 53 и 45. Определить среднюю внутригрупповую дисперсию.

Задача 1.32

На двух предприятиях фирмы выпускается одинаковый вид изделий. На первом предприятии изготовили 15 тыс. изделий; на втором - 12 тыс. Средняя себестоимость изделий на первом предприятии - 110 тыс. руб., на втором - 120 тыс. руб. Дисперсия себестоимости на первом предприятии - 20 тыс. руб., на втором - 10 тыс. руб. Вычислите дисперсию себестоимости изделий в целом по фирме.

Задача 1.33

Имеются следующие данные о размере заработной платы рабочих цеха за апрель:

Профессия	Число рабочих	Средняя заработная плата, руб.	Внутригрупповая дисперсия заработной платы
Токари	20	7650	5500
Фрезеровщики	25	5800	3025
Слесари	30	6500	4200

Требуется: 1) определить общую дисперсию заработной платы рабочих цеха; 2) оценить однородность совокупности рабочих цеха по уровню месячной заработной платы; 3) определить, на сколько процентов дисперсия в размере заработной платы обусловлена различием в профессии рабочих и влиянием прочих причин. Сформулировать вывод.

Задача 1.34

Имеются следующие данные 10%-ного случайного бесповторного выборочного обследования рабочих механического цеха:

Табельный номер рабочего	Возраст, лет	Зарботная плата за сентябрь, руб.	Стаж работы, лет	Тарифный разряд
2	25	3480	7	3
17	24	4360	7	2
28	43	4510	25	4
35	41	4670	23	5
44	37	5880	18	5
47	42	3965	24	5
102	29	4744	11	5
112	36	5030	16	5
123	56	6150	34	6
135	29	4740	11	5
138	18	5215	1	2
140	37	4582	20	4
147	25	3500	8	3
149	30	4630	12	4
150	26	5520	9	3

Требуется: 1) определить дисперсию заработной платы рабочих; 2) произвести группировку рабочих по стажу работы, выделив три группы; для каждой выделенной группы исчислить внутригрупповую дисперсию по уровню месячной заработной платы; 3) определить среднюю внутригрупповую дисперсию по уровню месячной заработной платы и ее долю в общей дисперсии. Сформулировать вывод.

Задача 1.35

По данным задачи 1.34 требуется: 1) определить общую дисперсию заработной платы рабочих; 2) произвести группировку рабочих по уровню квалификации; для каждой выделенной группы исчислить внутригрупповую дисперсию по уровню месячной заработной платы; 3) определить среднюю внутригрупповую дисперсию по уровню месячной заработной платы; 4) проверить правило сложения дисперсий.

Задача 1.36

По данным задачи 1.34 требуется определить, по какому признаку более однородна группа рабочих цеха - по стажу работы или по уровню квалификации.

Задача 1.37

Имеется следующее распределение 200 проб нити по крепости:

Крепость нити, г	120- 130	130- 140	140- 150	150- 160	160- 170	170- 180	180- 190	190- 200	итого
Число проб	1	8	27	58	56	34	14	2	200

Исходя из гипотезы о нормальном распределении результатов испытаний необходимо выровнять ряд по кривой нормального распределения (т.е. рассчитать теоретические частоты) и оценить близость эмпирических и теоретических частот с помощью критериев согласия: Пирсона, Романовского и Колмогорова.

Задача 1.38

В таблице приведены данные о распределении по возрасту занятого и безработного населения РФ в 2004г

Возраст, лет	Число лиц, % к итогу	
	Занятые	безработные
до 20	1,9	10,4
20-29	22,4	30,0
30-39	24,4	21,5
40-49	30,0	23,7
50-59	17,4	11,9
60 и старше	3,9	2,5

Источник: Российский статистический ежегодник. 2005: Стат. сб. – М.: Росстат, 2006. – С. 153, 154.

Рассчитать для каждой категории экономически активного населения систему показателей для анализа вариации.

2. Математические основы выборочного метода**2.1 Выборочное наблюдение**

Вопросы для самоконтроля и собеседования:

1. В чем преимущества выборочного метода по сравнению с другими видами статистических наблюдений?
2. Какие способы формирования выборочной совокупности вам известны?
3. В чем заключается отличие повторного и бесповторного отборов?
4. Что такое ошибка выборки?
5. Что означает ошибка репрезентативности? Какие факторы определяют ее величину?
6. В чем отличие средней ошибки выборки и предельной ошибки выборки?

7. Как определяется предельная ошибка выборки при проведении большой и малой выборок?
8. С какой целью проводится расчет численности выборки?
9. Назовите два способа распространения выборочных результатов.

Примеры решения типовых задач:

Задача 2.1

На городской телефонной сети в течение суток проведено наблюдение методом механического отбора. Проанализировано 100 звонков, что составляет 25% от общего числа звонков. Средняя продолжительность одного телефонного разговора 6 мин. при среднем квадратическом отклонении 4 мин. Доля разговоров длительностью 10 минут и более составляет 7%. Определить доверительные интервалы для средней и доли с вероятностью 0,95 и 0,97.

Решение:

По условию $n=100$, $N=400$, $\bar{x}=6$ мин., $\sigma^2=4$ мин., $p=0,07$. По таблице приложения 5 при $P_1=0,95$ и $P_2=0,97$ коэффициенты кратности равны соответственно $t_1=1,96$ и $t_2=2,17$.

Тогда средняя ошибка средней: $\mu_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{4^2}{100} \left(1 - \frac{100}{400}\right)} = 0,35$ мин.

Предельная ошибка средней для $P_1=0,95$: $\Delta_{\bar{x}1} = 1,96 \cdot 0,35 = 0,67$ мин.

Предельная ошибка средней для $P_2=0,97$: $\Delta_{\bar{x}2} = 2,17 \cdot 0,35 = 0,76$ мин.

Доверительные интервалы средней в генеральной совокупности для $P_1=0,95$: ($6,00 \pm 0,67$) мин или $5,33 \text{ мин.} \leq \bar{x} \leq 6,67 \text{ мин.}$

Доверительные интервалы средней в генеральной совокупности для $P_2=0,97$: ($6,00 \pm 0,76$) мин или $5,24 \text{ мин.} \leq \bar{x} \leq 6,76 \text{ мин.}$

Т.е. генеральная средняя будет находиться в этих интервалах с заданными вероятностями.

Средняя ошибка доли: $\mu_p = \sqrt{\frac{0,07(1-0,07)}{100} \left(1 - \frac{100}{400}\right)} = 0,022$.

Предельная ошибка доли для $P_1=0,95$: $\Delta_{p1} = 1,96 \cdot 0,022 = 0,043$.

Предельная ошибка доли для $P_2=0,97$: $\Delta_{p2} = 2,17 \cdot 0,022 = 0,048$.

Доверительные интервалы доли в генеральной совокупности для $P_1 = 0,95$:
 $(7,0 \pm 4,3)\%$ или $2,7\% \leq p \leq 11,3\%$.

Доверительные интервалы доли в генеральной совокупности для $P_2 = 0,97$:
 $(7,0 \pm 4,8)\%$ или $2,2\% \leq p \leq 11,8\%$.

Т.е. процент звонков с длительностью телефонного разговора десять и более минут будет находиться в этих интервалах с заданным уровнем вероятности.

Из результатов расчетов очевидно, что чем больше вероятность, тем шире область доверительного интервала, в котором должна оказаться генеральная средняя или доля. Действительно, повышая точность ответа путем увеличения вероятности необходимо расширять интервал, чтобы генеральная средняя наверняка в него попала.

Задача 2.2

На предприятии работает 5000 человек. Для определения доли рабочих, не выполняющих нормы выработки, проведен 10%-ный бесповторный стратифицированный пропорциональный отбор. Персонал разбит на две группы, в одной из которых работники не имеют высшего образования, а в другой – имеют. В результате отбора получены следующие результаты: из группы работников с высшим образованием отобрано 260 человек, 13 из них не выполняют нормы выработки; из группы работников без высшего образования отобрано 240 человек, 24 из них не выполняют нормы выработки. Определить процент работников, не выполняющих нормы выработки, для генеральной совокупности.

Решение:

Доля рабочих, не выполняющих нормы выработки в первой, второй группах рабочих:

$$p_1 = 13/260 = 0,05 \text{ (или 5\%)}, \quad p_2 = 24/240 = 0,1 \text{ (или 10\%)}$$

Доля всех рабочих, не выполняющих нормы выработки: $p = 37/500 = 0,074$ (или 7,4%).

Тогда:

$$\frac{p(1-p)}{n} = \frac{0,05 \cdot 0,95 \cdot 260 + 0,1 \cdot 0,9 \cdot 240}{260 + 240} = 0,0679,$$

$$\mu_p = \sqrt{\frac{0,0679}{500} \left(1 - \frac{500}{5000}\right)} = 0,011 \text{ (или 1,1\%)}$$

Предельную ошибку доли рассчитаем для вероятности $P = 0,95$:

$$\Delta_p = 1,96 \cdot 0,011 = 0,022 \text{ (или 2,2\%)}$$

Тогда процент работников, не выполняющих нормы выработки, в генеральной совокупности: $(7,4 \pm 2,2)\%$

Задача 2.3

Для изучения производительности труда работников предприятия произведено 10%-ное выборочное наблюдение. В результате пропорционального бесповторного типического отбора из группы работников, прошедших или не прошедших производственное обучение, получены следующие данные о распределении выборочной совокупности по уровню выполнения норм выработки:

Выполнение норм выработки (%)	Группы работников		
	Прошедшие производственное обучение (чел.)	Не прошедшие производственное обучение (чел.)	Итого (чел.)
менее 90	нет данных	3	3
90-100	2	5	7
100-110	14	16	30
110-120	22	10	32
120-130	11	4	15
130-140	6	2	8
140-150	4	нет данных	4
более 150	1	нет данных	1
Итого	60	40	100

Необходимо с вероятностью 0,95 определить для генеральной совокупности средний процент выполнения работниками норм выработки.

Решение:

Определим среднюю для всей выборочной совокупности:

$$\bar{x} = \frac{85 \cdot 3 + 95 \cdot 7 + \dots + 155 \cdot 1}{100} = 114,4 \%$$

Средняя и дисперсия для группы работников, прошедших производственное обучение:

$$\tilde{x}_1 = \frac{95 \cdot 2 + 105 \cdot 14 + \dots + 155 \cdot 1}{60} = 118,5 \%$$

$$\sigma_1^2 = \frac{(95 - 118,5)^2 \cdot 2 + (105 - 118,5)^2 \cdot 14 + \dots + (155 - 118,5)^2 \cdot 1}{60} = 162,42$$

Аналогично рассчитывается средняя и дисперсия для второй группы: $\tilde{x}_2 = 108,25\%$

$$\sigma_2^2 = 141,94$$

Средняя групповая выборочная дисперсия средней:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum \sigma_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{162,42 \cdot 60 + 141,94 \cdot 40}{60 + 40} = 158,43.$$

По исходным данным всего в выборку было отобрано $n = 100$ единиц генеральной совокупности, что составляет 10% от всей генеральной совокупности. Следовательно, $N = 1000$.

Средняя ошибка стратифицированного бесповторного пропорционального отбора:

$$\mu_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{158,43}{100} \left(1 - \frac{100}{1000}\right)} = 1,19\%.$$

Предельная ошибка определяется как $\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \mu_{\bar{x}}$, где t - коэффициент кратности по удвоенной нормированной функции Лапласа (приложение 5). Для вероятности $P = 0,95$ величина $t = 1,96$.

Следовательно, $\Delta_{\bar{x}} = 1,96 \cdot 1,19 = 2,3\%$.

Тогда средний процент выполнения норм выработки в генеральной совокупности с вероятностью 95% находится в интервале: $(114,4 \pm 2,3)\%$.

Задача 2.4

Проведена серийная бесповторная 5%-ная выборка для проверки жирности молока. Из партии, содержащей 100 ящиков (в каждом ящике содержится 50 упаковок молока), методом случайного отбора взято 5 ящиков. В результате сплошного обследования получены следующие сведения об удельном весе нестандартной продукции, с жирностью молока менее 3,5%:

Номер ящика	1	2	3	4	5
Удельный вес нестандартной продукции, в %	2%	0%	4%	2%	6%

Необходимо определить доверительные интервалы удельного веса нестандартной продукции для всей партии молока с вероятностью 0,97.

Решение:

Удельный вес нестандартной продукции в выборке: $p_0 = \frac{2 + 0 + 4 + 2 + 6}{5} = 2,8\%$.

Используется формула средней арифметической, так как ящики по числу упаковок одинаковы.

отправляемой корреспонденции не имеется. Требуется определить численность выборки, если результаты выборки дать с точностью до 1% и гарантировать это с вероятностью 0,95.

Задача 2.9

На предприятии в порядке случайной бесповторной выборки было опрошено 100 рабочих из 1000 и получены следующие данные об их доходе за октябрь:

Месячный доход, тыс. руб.	6-10	10-14	14-18	18-20
Число рабочих	12	60	20	8

Определить: 1) среднемесячный размер дохода у работников данного предприятия, гарантируя результат с вероятностью 0,997; 2) долю рабочих предприятия, имеющих месячный доход 14 тыс. руб. и выше, гарантируя результат с вероятностью 0,954; 3) необходимую численность выборки при определении среднего месячного дохода работников предприятия, чтобы с вероятностью 0,954 предельная ошибка выборки не превышала 500 руб.; 4) необходимую численность выборки при определении доли рабочих с размером месячного дохода 14 тыс. руб. и выше, чтобы с вероятностью 0,954 предельная ошибка не превышала 4%.

Задача 2.10

При контрольной проверке качества апельсинов проведена 10%-ная серийная выборка. Из партии, содержащей 50 ящиков апельсинов (вес ящиков одинаков), методом механического отбора взято 5 ящиков. В результате сплошного обследования находящихся в ящике апельсинов получили данные об удельном весе бракованных апельсинов. Результаты следующие:

№ ящика, попавшего в выборку	1	2	3	4	5
Удельный вес бракованной продукции, %	1,2	1,8	2,0	1,0	1,5

Требуется с вероятностью 0,95 установить доверительные интервалы удельного веса бракованной продукции для всей партии апельсинов.

Задача 2.11

Из партии электроламп произведена малая выборка (отбор случайный, бесповторный) для определения продолжительности службы ламп. Результаты выборки следующие:

№ лампы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Срок горения, час	1450	1370	1250	1400	1360	1420	1400	1320	1300	1430

На основе приведенных данных требуется: 1) определить доверительные интервалы, в которых заключена средняя продолжительность службы ламп для всей партии, гарантируя результат с вероятностью 0,99; 2) определить вероятность того, что средний срок службы ламп для всей партии отличается от полученного по выборке не более чем на 40 часов.

Задача 2.12

Из общего количества рабочих предприятия была проведена 30%-ная случайная бесповторная выборка с целью определения затрат времени на проезд к месту работы. Результаты выборки следующие:

Затраты времени к месту работы, мин	Число рабочих
менее 30	70
30-40	80
40-50	200
50-60	55
60-70	45

Определить: 1) средние затраты времени на проезд к месту работы у рабочих данного предприятия, гарантируя результат с вероятностью 0,997; 2) долю рабочих предприятия, у которых затраты времени на проезд к месту работы составляют 60 мин. и более, гарантируя результат с вероятностью 0,954.

Задача 2.13

Выходной контроль качества поступающих на предприятие комплектующих изделий, осуществляемый в порядке механической выборки, дал следующие результаты:

Отклонение размера изделия от принятого по ГОСТу, %	Число изделий
[-2,0; -3,0]	5
[-1,0; -2,0)	15
[0,0; -1,0)	20
[1,0; 0,0)	80
[2,0; 1,0)	50
[3,0; 2,0)	20
[4,0; 3,0)	5
[5,0; 4,0]	5

Определить: 1) пределы значений среднего отклонения размера изделий от стандарта по ГОСТу с вероятностью 0,997; 2) пределы доли изделий с отрицательным отклонением в общей совокупности изделий с вероятностью 0,954.

Задача 2.14

Произведен 10%-ный пропорциональный типический отбор рабочих со сдельной и повременной системами оплаты труда для изучения показателей выполнения сменного задания. Отбор единиц в каждой группе бесповторный. Выборка дала следующее распределение численности рабочих по проценту выполнения норм выработки:

Группы рабочих по оплате труда	Группы рабочих по проценту выполнения сменного задания				Итого рабочих
	до 100	100-120	120-130	более 140	
Сдельная оплата труда	20	150	80	30	280
Повременная оплата труда	40	100	60	20	220

Определить: 1) доверительные интервалы, в которых с вероятностью 0,954 заключен средний процент выполнения сменного задания для всех рабочих предприятия; 2) возможные пределы доли рабочих, выполняющих сменное задание не менее чем на 120% (с вероятностью 0,954); 3) необходимую численность выборки при определении доли рабочих, выполняющих сменное задание не менее чем на 120%, чтобы с вероятностью 0,954 предельная ошибка выборки не превышала 3%.

Задача 2.15

В АО «Прогресс» работает 3000 человек. Методом случайной бесповторной выборки обследовано 1000 человек, из которых 820 выполняли и перевыполняли дневную норму выработки. Определить: 1) долю рабочих, не выполняющих норму выработки, по данным выборочного обследования; 2) долю всех рабочих акционерного общества, не выполняющих норму (с вероятностью 0,954).

Задача 2.16

Из партии изготовленных изделий общим объемом 2000 единиц проверено посредством механической выборки 30% изделий, из которых бракованными оказались 12

изделий. Определить: 1) долю бракованных изделий по данным выборки; 2) пределы, в которых находится процент бракованных изделий, для всей партии (с вероятностью 0,954).

Задача 2.17

По данным выборочного обследования 10000 пассажиров пригородного сообщения средняя дальность поездки пассажира составила 35,5 км, а среднее квадратическое отклонение -16,0 км. Определить: 1) пределы средней дальности поездки пассажиров с вероятностью 0,954; 2) как изменится предельная ошибка выборки, если вероятность будет принята равной 0,997?

Задача 2.18

Из 200 ящиков по 100 деталей в каждом, поступивших на склад готовой продукции, в порядке случайной бесповторной серийной выборки отобрано 5 ящиков, все детали которых проверены на вес. Результаты проверки следующие:

№ ящика	1	2	3	4	7
Средний вес одной детали в ящике, г	50	49	53	53	55

Определить: 1) возможные пределы среднего веса детали для всей партии, поступившей на склад (с вероятностью 0,954); 2) объем случайной бесповторной серийной выборки, чтобы с вероятностью 0,683 предельная ошибка выборки при определении среднего веса одной детали для всей партии не превышала 0,7 г.

Задача 2.19

На предприятии с числом установленных металлорежущих станков 120 единиц необходимо на основе выборочного обследования определить долю станков возрастом свыше 10 лет. Никаких предварительных данных об удельном весе этого оборудования в общей численности установленного оборудования нет. Определить, каков должен быть объем выборки с механическим отбором, чтобы при вероятности 0,954 предельная ошибка выборки не превышала 5%.

Задача 2.20

Объем выборки: 1)увеличился в 2 раза; 2)уменьшился в 2 раза. Определить, как изменится ошибка случайной повторной выборки.

Задача 2.21

На основе 5%-ной бесповторной выборки получены следующие данные о пробеге автомобильных шин, эксплуатируемых в городских условиях: Определить доверительные интервалы среднего пробега шин в городских условиях, гарантируя результат с вероятностью 0,954.

Пробег шин, тыс. км	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52
Число шин	4	8	22	26	40	20

Задача 2.22

Для определения средней из совокупности произведена типическая выборка. Совокупность разделена на три однородные группы численностью 3000, 5000 и 10 000 единиц соответственно. Отбор 5%-ный. Результаты, полученные по данным выборки, следующие:

Группы	Выборочная средняя	Выборочная дисперсия
1	12	9
2	15	16
3	18	25

Гарантийную вероятность принять равной 0,997. Определить доверительные интервалы средней.

Задача 2.23

Сколько фирм необходимо проверить налоговой инспекции района, чтобы ошибка доли фирм, несвоевременно уплачивающих налоги, не превысила 5%? По данным предыдущей проверки, доля таких фирм составила 32%. Доверительную вероятность принять равной 0,954 (0,997).

Задача 2.24

Какова должна быть численность механической выборки для определения доли служащих, прошедших повышение квалификации по использованию вычислительной техники, чтобы с вероятностью 0,954 ошибка репрезентативности не превышала 10%? Общая численность служащих предприятия составляет 324 человека.

Задача 2.25

Из 220 отобранных изделий 5% не соответствуют ГОСТу. Определить среднюю ошибку повторной выборки и границы, в которых находится доля продукции, соответствующая ГОСТу, для всей партии с вероятностью 0,997.

Задача 2.26

В сберегательных банках города методом случайной повторной выборки было отобрано 1600 счетов вкладчиков. Средний размер остатков вклада по этим счетам составил 32 тыс. руб. при коэффициенте вариации 30%. Какова вероятность того, что ошибка репрезентативности при определении среднего размера остатков вклада не превысит 1000 руб.?

Задача 2.27

Для определения средней продолжительности телефонного разговора и доли разговоров, продолжительность которых превышает 5 мин., предполагается провести выборочное наблюдение методом случайной выборки. По данным аналогичных обследований, среднее квадратическое отклонение продолжительности разговора составило 3,5 мин., а доля телефонных разговоров, продолжительность которых превышает 5 мин., составила 0,4. Сколько телефонных разговоров необходимо обследовать для того, чтобы с вероятностью 0,954 (0,997) найти среднюю продолжительность телефонного разговора, с ошибкой, не превышающей 30 с, а также долю телефонных разговоров, продолжительность которых превышает 5 мин., с ошибкой, не превышающей 5%?

Задача 2.28

Обработка детали № 318 производится в цехе на трех станках, имеющих различную производительность. Для определения доли бракованных деталей для всей партии продукции организована типическая выборка. Методом бесповторного отбора от каждого станка взято 10% деталей из числа отработанных за день и получены результаты. Определить: 1) предельную ошибку выборки и доверительные интервалы, в которых с вероятностью 0,997 будет находиться процент брака для все партии деталей, обработанных за день; 2) вероятность того, что процент брака для всей партии деталей будет отличаться от полученного по выборке не более, чем на 0,7%

№ станка	№ 1	№2	№3
Число проверенных деталей, шт.	200	120	250
В том числе брак	4	3	6

Задача 2.29

При проверке автомобильных шин на сопротивление разрыву была проведена малая выборка и получены следующие результаты:

№ шины	1	2	3	4	5	6	7	8
Сопротивление разрыву, кг/см	164	180	176	168	156	186	190	170

Определить доверительные интервалы, в которых заключен средний уровень сопротивления материала разрыву, гарантируя результат с вероятностью 0,99.

2.2. Корреляционно-регрессионный анализВопросы для самоконтроля и собеседования:

1. В чем отличие функциональных и корреляционных связей?
2. Опишите основные виды корреляционных связей.
3. Какие статистические методы используются для выявления корреляционной связи?
4. Какие показатели тесноты корреляционной связи вы знаете?
5. Какие значения может принимать линейный коэффициент корреляции?
6. Что такое эмпирическая линия регрессии?
7. Что характеризует теоретическая линия регрессии?
8. Каким образом определяются коэффициенты теоретической линии регрессии в случае парой линейной регрессии?
9. Что показывает коэффициент эластичности?

Примеры решения типовых задач:**Задача 2.30**

В таблице представлены данные о ценах на товар X и объемах его предложения Y .

X_i	10	12	11	12	13	13	12	10	11	12	12	11	10	13	11	10
Y_i	60	85	70	85	90	85	90	70	80	85	85	70	60	90	80	60

Проанализируйте данные на наличие корреляционной связи.

Решение.

Расположим значения цены по возрастанию с соответствующими им значениями объемов предложения:

X_i	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13
Y_i	60	60	60	70	70	70	80	80	85	85	85	85	90	85	90	90

Из таблицы очевидно, что наблюдается тенденция увеличения результативного признака Y при увеличении факторного признака X , т.е. можно предположить наличие прямой связи между признаками. .

Построим корреляционную таблицу для данных о ценах на товар X и объемах его предложения Y .

$X \backslash Y$	60	70	80	85	90	Итого	\bar{Y}_i
10	3	1				4	62,5
11		2	2			4	75
12				3	1	4	86,3
13				1	3	4	88,8
Итого	3	3	2	4	4	16	78,1
\bar{X}_j	10	10,7	11	12,3	12,8	11,5	-

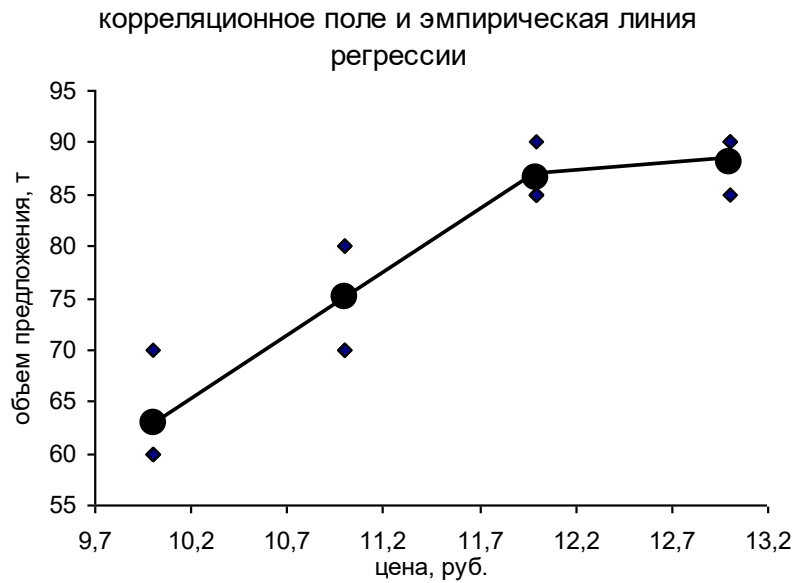
Все средние значения рассчитаны по формулам взвешенной средней арифметической (для сгруппированного ряда). Внешний вид таблицы свидетельствует о наличии прямой линейной связи, так как частоты сгруппированы вдоль главной диагонали таблицы. Это свидетельствует об одновременном увеличении (уменьшении) признаков и линейной зависимости между ними.

По исходным данным построим групповую таблицу.

X	f_x	\bar{Y}_i
10	4	62,5
11	4	75
12	4	86,3
13	4	88,8
Итого	16	-

По виду этой таблицы можно предположить наличие прямой связи между признаками (с увеличением цены расчет объем предложения).

Корреляционное поле и эмпирическая линия регрессии (построенная на основе групповой таблицы) для данных представлены ниже на рисунке:



По расположению точек очевидна прямая связь между факторным и результативным признаками. Эмпирическая линия также это подтверждает. По форме линии можно также сделать предположение о виде функции, отражающей взаимосвязь цены и объема предложения.

Задача 2.31

Определите тесноту связи между стажем работы рабочего и уровнем его месячной заработной платы при помощи коэффициента Спирмена, коэффициента Фехнера и линейного коэффициента корреляции. Определите теоретическую линию регрессии и коэффициент эластичности.

i	Стаж работы, X	Зарплата, тыс. руб., Y
1	2	5,2
2	3	6,9
3	5	8,0
4	7	7,0
5	2	4,0
6	6	6,0
7	8	7,0

Решение.

Для расчета коэффициента Спирмена составим вспомогательную таблицу:

i	Стаж работы, X	Зарботная плата, тыс. руб., Y	Ранг x_i	Ранг y_i	d_i	d_i^2
1	2	5,2	1,5	2	-0,5	0,25
2	3	6,9	3	4	-1	1
3	5	8,0	4	7	-3	9
4	7	7,0	6	5,5	0,5	0,25
5	2	4,0	1,5	1	0,5	0,25
6	6	6,0	5	3	2	4
7	8	7,0	7	5,5	1,5	2,25
Сумма	33	44,1	28	28	0	17

Порядковый номер (ранг) присваивался каждому из значений признаков (отдельно факторному и результативному), расположенных по возрастанию (т.е. самому маленькому значению – ранг 1, следующему – ранг 2 и т.д.). Так как при расчете рангов признака X два значения оказались одинаковыми (стаж работы 2), поэтому им присвоен ранг 1,5 (как средняя между порядковым номером 1 и 2). Аналогично рассчитывались ранги для Y .

Тогда коэффициент Спирмена определяется:
$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 17}{7(7^2 - 1)} = +0,696.$$

Можно предположить достаточно тесную прямую связь между стажем работы и уровнем заработной платы. Так как число данных $n = 7$, необходимо проверить существенность данного коэффициента. Критическое значение критерия Спирмена (приложение 7) для уровня значимости 10% ($\alpha = 0,10$ или вероятность $P = 90\%$) равно 0,6786, следовательно, связь между признаками действительно является существенной.

Однако при уровне значимости 5% ($\alpha = 0,05$, или вероятность $P = 95\%$) критическое значение критерия равно 0,7450, что свидетельствует о несущественной связи между признаками, которая могла возникнуть из-за случайного совпадения рангов. В этом случае рекомендуется увеличить число данных n для новой оценки тесноты связи.

Определим тесноту связи между стажем работы рабочего и уровнем его месячной заработной платы при помощи коэффициента Фехнера и линейным коэффициентом корреляции. Исходные данные и промежуточные расчеты сведем в таблицу.

i	Стаж, X	Зар. плата, тыс.руб., Y	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	Знак отклонения признака от средней		Совпадение (a) или несовпадение (b)
						для X	для Y	
1	2	5,2	7,29	1,21	2,97	меньше \bar{x}	меньше \bar{y}	a
2	3	6,9	2,89	0,36	-1,02	меньше \bar{x}	больше \bar{y}	b
3	5	8,0	0,09	2,89	0,51	больше \bar{x}	больше \bar{y}	a
4	7	7,0	5,29	0,49	1,61	больше \bar{x}	больше \bar{y}	a
5	2	4,0	7,29	5,29	6,21	меньше \bar{x}	меньше \bar{y}	a
6	6	6,0	1,69	0,09	-0,39	больше \bar{x}	меньше \bar{y}	b
7	8	7,0	10,89	0,49	2,31	больше \bar{x}	больше \bar{y}	a
Сумма	33	44,1	35,43	10,82	12,2			
Среднее	4,7	6,3	5,06	1,55				

Тогда линейный коэффициент корреляции определяется:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{12,2}{7\sqrt{5,06} \cdot \sqrt{1,55}} = 0,62.$$

Коэффициент Фехнера:

$$K_\Phi = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} = \frac{5 - 2}{5 + 2} = 0,43.$$

Линейный коэффициент корреляции показал наличие прямой, средней по величине связи, коэффициент Фехнера – слабую связь. Значительное различие коэффициентов возникло из-за неучета при расчете коэффициента Фехнера величин отклонений значений признаков от их средних значений.

Коэффициент детерминации равен: $r^2 = 0,38$, т.е. уровень заработной платы на 38% объясняется факторным признаком – стажем работы.

Для расчета теоретической линии регрессии составим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} b = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2} = \frac{31,4 - 4,7 \cdot 6,3}{5,06} = 0,35 \\ a = \bar{y} - b\bar{x} = 6,3 - 0,35 \cdot 4,7 = 4,66 \end{cases}$$

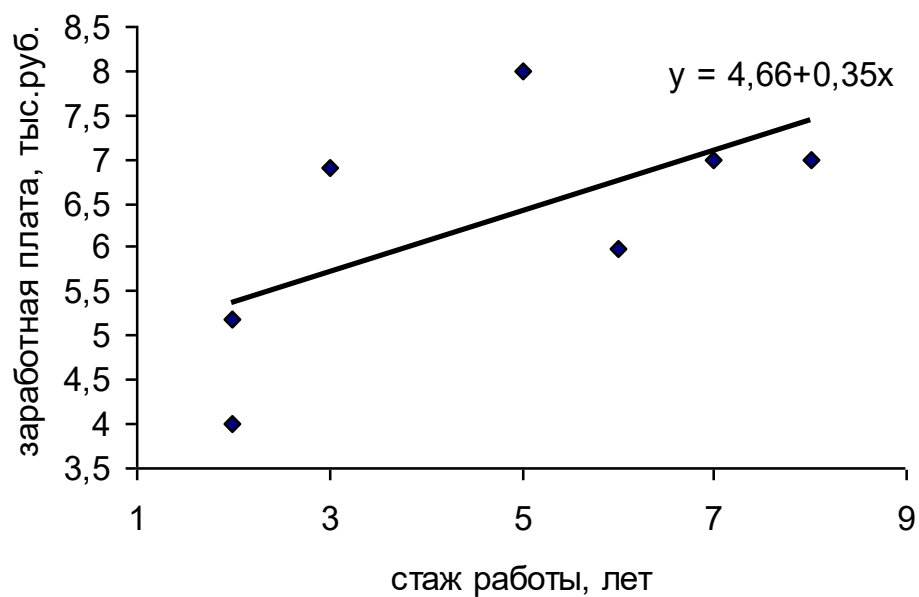
Промежуточные расчеты для составления системы уравнений представлены в таблице:

i	Стаж работы, X	Зарботная плата, тыс. руб., Y	$x_i \cdot y_i$	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	2	5,2	10,4	5,4	0,04
2	3	6,9	20,7	5,7	1,44
3	5	8,0	40,0	6,4	2,56
4	7	7,0	49,0	7,1	0,01
5	2	4,0	8,0	5,4	1,96
6	6	6,0	36,0	6,8	0,64
7	8	7,0	56,0	7,5	0,25
Сумма	33	44,1	220,1	44,2	6,9
Среднее	4,7	6,3	31,4	6,3	-

Следовательно, уравнение регрессии имеет вид: $\hat{y}_i = 4,66 + 0,35x_i$. Значение коэффициента регрессии показывает, что при увеличении стажа работы на один год заработная плата в среднем изменяется на 0,35 тыс. руб.

Величину теоретического значения результативного признака \hat{y}_i определяем путем подстановки соответствующих значений факторного признака в уравнение регрессии.

Представим графически корреляционное поле и линию регрессии:



Коэффициент эластичности равен: $\Theta = 0,35 \frac{4,7}{6,3} = 0,26$, т.е. при изменении стажа на 1%

заработная плата в среднем возрастает на 0,26%.

Определим точечный прогноз заработной платы для стажа работы 9 лет:

$$\hat{y}_i = 4,66 + 0,35 \cdot 9 = 7,81 \text{ тыс. руб.}$$

Проверим достоверность уравнения регрессии: $S_e = \sqrt{\frac{6,9}{7-1-1}} = 1,17$,

$K = \frac{1,17}{6,3} \cdot 100 = 18,6\%$. Следовательно, уравнение регрессии плохо отражает исследуемую

совокупность.

Задача 2.32

Имеются следующие данные о производительности труда рабочих предприятия по обработке деталей, сгруппированные по стажу работы:

Группы рабочих по стажу, лет (X)	Число рабочих в группе, чел.	Средняя производительность труда рабочего в группе, шт/смену, (Y)	Дисперсия производительности труда в группе, σ_j^2
0-5	14	54	20
5-10	21	84	25

Определить эмпирическое корреляционное отношение и охарактеризуйте связь.

Решение.

Определим среднюю производительность труда по предприятию как среднюю

взвешенную $\bar{y}_0 = \frac{54 \cdot 14 + 84 \cdot 21}{14 + 21} = 72$ шт/смену.

Межгрупповая дисперсия определяется

$$\delta_y^2 = \frac{\sum (\bar{x}_j - \bar{x}_0)^2 n_j}{\sum n_j} = \frac{(54 - 72)^2 \cdot 14 + (84 - 72)^2 \cdot 21}{14 + 21} = 216.$$

Средняя внутригрупповая дисперсия равна: $\sigma^2 = \frac{\sum \sigma_j^2 \cdot n_j}{\sum n_j} = \frac{20 \cdot 14 + 25 \cdot 21}{14 + 21} = 23.$

Общая дисперсия по правилу сложения дисперсий: $\sigma_y^2 = 216 + 23 = 239.$

Эмпирическое корреляционное отношение: $\eta = \sqrt{\frac{\delta_y^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{\frac{216}{239}} = 0,95$. Коэффициент

близок к единице, следовательно, связь между признаками тесная.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 2.33

Имеются экспериментальные данные исследования влияния времени вулканизации на сопротивление резины разрыву:

№ анализа	Время вулканизации, мин	сопротивление разрыву, кг/см ²
1	35	162
2	40	174
3	30	155
4	42	172
5	37	173
6	38	166
7	34	162

№ анализа	Время вулканизации, мин	сопротивление разрыву, кг/см ²
8	33	160
9	36	167
10	31	153
11	36	163
12	43	173
13	39	168
14	44	176

На основании данных провести исследование зависимости сопротивления разрыву от времени ее вулканизации: проверить тесноту корреляционной связи (при помощи линейного коэффициента корреляции, коэффициента Фехнера, коэффициента корреляции рангов Спирмена) и определить уравнение парной линейной регрессии.

Задача 2.34

По группе предприятий за отчетный год имеются следующие данные:

№ предприятия	Годовая производительность труда работника, тыс. руб.	Вооруженность труда основным капиталом, тыс. руб./чел	Удельный вес оборудования в стоимости основного капитала	Текущая численность кадров, %	Интегральный показатель использования рабочего времени
1	360	15,2	0,39	9,1	0,96
2	298	12,8	0,29	10,1	0,80
3	328	13,8	0,34	5,0	0,84
4	330	14,0	0,36	7,0	0,86
5	366	16,3	0,47	9,0	0,98
6	316	12,6	0,28	4,0	0,83
7	334	13,2	0,32	12,0	0,87
8	300	12,9	0,29	6,5	0,84
9	314	13,1	0,33	8,0	0,81
10	320	12,5	0,28	7,0	0,85
11	362	15,7	0,40	8,5	0,97
12	332	13,5	0,34	5,0	0,83

На основании приведенных данных требуется: 1) составить уравнение множественной зависимости производительности труда, обосновав систему факторов, включенных в модель; 2) определить совокупный коэффициент корреляции; и частные коэффициенты корреляции; 3) сопоставить роль различных факторов в формировании моделируемого показателя.

Задача 2.35

По группе однородных предприятий имеются данные об объеме выпущенной продукции и уровне механизации трудоемких и тяжелых работ:

№ предприятия	Уровень механизации трудоемких и тяжелых работ, %	Объем продукции, млн. руб.
1	22	117
2	85	186
3	67	86
4	36	112
5	21	52
6	40	132
7	39	141
8	39	158
9	31	120
10	62	197
11	36	106
12	50	189

Оцените степень тесноты связи между показателями при помощи коэффициента Спирмена и Фехнера.

Задача 2.36

В результате обследования работников предприятия получены следующие данные (чел.):

Образование	Удовлетворены своей работой	Не удовлетворены своей работой	Итого
Высшее и среднее	300	50	350
Незаконченное среднее	200	250	450
Итого	500	300	800

Требуется оценить тесноту связи между уровнем образования и удовлетворенностью своей работой с помощью коэффициентов ассоциации и контингенции.

Задача 2.37

Для изучения влияния условий производства на взаимоотношения в коллективе было проведено выборочное обследование 250 рабочих, ответы которых распределились следующим образом:

Условия производства	Взаимоотношения в коллективе			Итого
	хорошие	удовлетворительные	неудовлетворительные	
Соответствуют требованиям	30	20	10	60
Не полностью соответствуют	25	50	15	90
Не соответствуют	10	40	50	100
Итого	65	110	75	250

Требуется охарактеризовать связь между исследуемыми показателями с помощью коэффициента взаимной сопряженности.

Задача 2.38

В мартеновском цехе завода произведены испытания для определения зависимости производительности печи от содержания углерода в металле. На основе приведенных данных требуется: 1) проверить первичную информацию по признаку-фактору на однородность; 2) установить факт наличия связи с помощью аналитической группировки;

3) с помощью линейного коэффициента корреляции измерить степень тесноты связи; 4) определить модель линейной зависимости.

№ анализа	Процент углерода в металле	Производительность печи, т/ч
1	0,95	16,3
2	0,98	16
3	0,65	17,3
4	0,94	16,5
5	0,99	16
6	0,78	17
7	0,82	16,7
8	1,12	15,8
9	0,92	16,4
10	1,12	15,7
11	1	16
12	1,13	15,9

Задача 2.39

Имеются следующие данные о производительности труда рабочих, выполняющих одинаковую операцию по обработке детали:

Группы рабочих по стажу работы	Число рабочих	Дневная производительность труда, шт.	Дисперсия производительности труда в группе
До 5 лет	6	40	5
5- 10 лет	8	45	2
10 лет и более	2	60	1

Определите степень тесноты связи между уровнем производительности труда рабочих и стажем их работы при помощи эмпирического корреляционного отношения и сделайте выводы.

Задача 2.40

Для выявления зависимости производительности труда рабочих, выполняющих одинаковую операцию по обработке детали, от стажа работы был найден линейный коэффициент корреляции, равный 0,8.

Кроме того, известны следующие данные: средний стаж работы рабочих 5 лет; среднее квадратическое отклонение по стажу 2 года; среднее квадратическое отклонение по производительности труда 4,4 шт.; коэффициент вариации по производительности труда 40%.

Определите уравнение парной линейной регрессии, характеризующее зависимость производительности труда рабочих от стажа их работы.

Задача 2.41

Для оценки степени тесноты связи между уровнем выработки рабочих и стажем их непрерывной работы было рассчитано эмпирическое корреляционное отношение, равное 0,9. Объем выборки равен 100 единиц. . Общая дисперсия равна 6,6. Определите среднюю внутригрупповую дисперсию.

Задача 2.42

Составить линейное уравнение регрессии $\hat{y}_i = a + bx_i$, если известно что $a = 2,8$, линейный коэффициент корреляции равен 0,9, дисперсии факторного и результативного признака равны соответственно 25 и 36.

Задача 2.43

По группе однородных предприятий для построений многофакторной модели получена следующая матрица парных коэффициентов корреляции (Y - годовая производительность труда работников; X_1 - вооруженность труда основными средствами; X_3 - удельный вес производственного оборудования в общей стоимости основных средств; X_4 - коэффициент загрузки оборудования):

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
Y	1	0,91	0,89	0,85	0,87
X_1		1	0,73	0,67	0,70
X_2			1	0,52	0,64
X_3				1	0,99
X_4					1

Проанализируйте матрицу парных коэффициентов корреляции и укажите факторы, которые следует включить в построенную модель. Ответ обоснуйте.

3. Ряды динамики

Вопросы для самоконтроля и собеседования:

1. Опишите основные виды рядов динамики.
2. Назовите основные цели построения рядов динамики
3. Какие требования предъявляются при составлении рядов динамики?
4. В чем заключается отличие базисных и цепных показателей?
5. Какие показатели, характеризующие ряды динамики, вам известны?
6. В чем заключается отличие при расчете среднего уровня ряда для моментных и интервальных рядов динамики?
7. Какие средние показатели рядов динамики вам известны?
8. Какие составляющие содержит динамический ряд?
9. Каким образом можно провести проверку ряда на наличие тренда?
10. В чем заключается аналитическое выравнивание?
11. С какой целью определяется индекс сезонности?
12. Опишите методику анализа сезонных колебаний.

Примеры решения типовых задач :

Задача 3.1

В таблице представлены данные о стоимости одной единицы изделия предприятия (тыс. руб./штуку).

	1.07.05	3.07.05	12.07.05	25.07.05	26.07.05
Цена единицы изделия, тыс. руб.	9,56	9,58	9,9	10,2	12,3

Определите средние показатели ряда.

Решение:

Данный ряд является моментным с неравными интервалами, в связи с чем определим продолжительность периодов, когда цена была неизменна:

	1.07.05	3.07.05	12.07.05	25.07.05	26.07.05
Цена единицы изделия, тыс. руб.	9,56	9,58	9,9	10,2	12,3
Число дней, p	2	9	13	1	6

Определим средние показатели динамического ряда за месяц.

$$\text{Средний уровень ряда: } \bar{y} = \frac{9,56 \cdot 2 + 9,58 \cdot 9 + \dots + 12,3 \cdot 6}{31} = 10,23 \text{ тыс. руб.}$$

Средний абсолютный прирост: $\bar{\Delta} = (12,3 - 9,56) / 31 = 0,09$ тыс. руб., т.е. ежедневно цена изделия увеличивалась в среднем на 90 руб.

Средний коэффициент роста: $\bar{K}_p = \sqrt[30]{\frac{12,3}{9,56}} = 1,01$, т.е. в среднем ежедневно значения уровня ряда увеличивалось по сравнению с предыдущим в 1,01 раза.

Средний темп роста: $\bar{T}_p = 1,01 \cdot 100 = 101\%$, т.е. в среднем ежедневно значения уровня ряда составляли по отношению к предыдущему 101%.

Средний темп прироста: $\bar{T}_{np} = 101 - 100 = 1\%$, т.е. в среднем ежедневно значения уровня ряда увеличивались по отношению к предыдущему на 1%.

Средняя величина одного процента прироста: $\bar{A} = \frac{0,09}{1} = 0,09$ тыс. руб., т.е. один процент прироста в среднем равен 90 руб.

Задача 3.2

Проанализируйте динамический ряд, характеризующий стоимость минимального набора продуктов питания в Томской области (руб.), на наличие сезонности.

Год	2002	2003	2004	Итого
Январь	861,55	988,48	1116,04	2966,07
Февраль	871,17	1011,03	1137,34	3019,54
Март	887,75	1027,12	1146,19	3061,06
Апрель	903,92	1059,38	1150,72	3114,02
Май	935,97	1066,89	1156,16	3159,02
Июнь	927,89	1060,11	1149,88	3137,88
Июль	940,18	1064,02	1166,76	3170,96
Август	912,72	1048,86	1152,89	3114,47
Сентябрь	882,99	1018,94	1134,61	3036,54
Октябрь	887,03	1029,29	1141,55	3057,87
Ноябрь	905,39	1063,96	1165,74	3135,09
Декабрь	938,2	1090,26	1203,64	3232,1
Итого	10854,76	12528,34	13821,52	37204,62

Решение.

Для упрощения расчетов будем считать, что тренда нет. Для изучения сезонности рассчитаем абсолютные приросты ($\Delta_{сез} = \bar{y}_t - \bar{y}_o$), относительные приросты ($\Delta_{отн} = \frac{\bar{y}_t - \bar{y}_o}{\bar{y}_o} \cdot 100$) и индексы сезонности ($i_{сез} = \frac{\bar{y}_t}{\bar{y}_o} \cdot 100$).

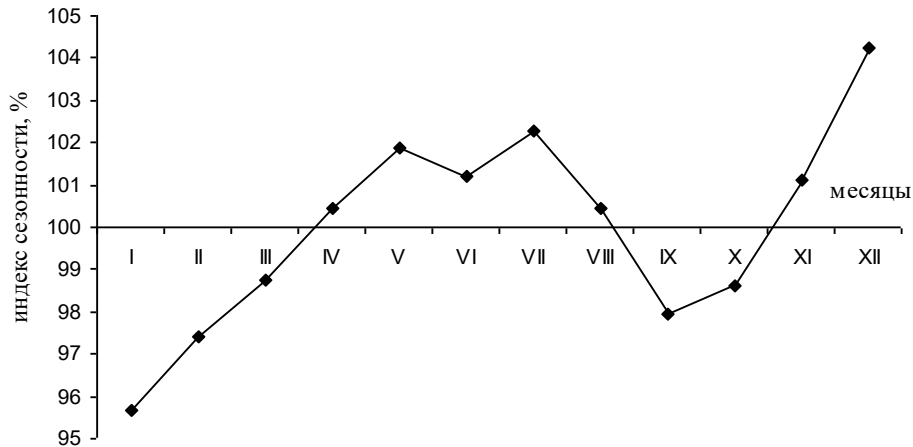
Общая средняя рассчитывается: $\bar{y}_o = \frac{37204,62}{36} = 1033,46$ руб.

Результаты расчетов представим в виде таблицы.

Год	2002	2003	2004	Итого	\bar{y}_t	$\Delta_{сез}$	$\Delta_{отн}$	$i_{сез}$
Январь	861,55	988,48	1116,04	2966,07	988,69	-44,77	-4,33	95,67
Февраль	871,17	1011,03	1137,34	3019,54	1006,51	-26,95	-2,61	97,39
Март	887,75	1027,12	1146,19	3061,06	1020,35	-13,11	-1,27	98,73
Апрель	903,92	1059,38	1150,72	3114,02	1038,01	4,55	0,44	100,44
Май	935,97	1066,89	1156,16	3159,02	1053,01	19,55	1,89	101,89
Июнь	927,89	1060,11	1149,88	3137,88	1045,96	12,50	1,21	101,21
Июль	940,18	1064,02	1166,76	3170,96	1056,99	23,53	2,28	102,28
Август	912,72	1048,86	1152,89	3114,47	1038,16	4,70	0,45	100,45
Сентябрь	882,99	1018,94	1134,61	3036,54	1012,18	-21,28	-2,06	97,94
Октябрь	887,03	1029,29	1141,55	3057,87	1019,29	-14,17	-1,37	98,63
Ноябрь	905,39	1063,96	1165,74	3135,09	1045,03	11,57	1,12	101,12
Декабрь	938,2	1090,26	1203,64	3232,1	1077,37	43,91	4,25	104,25
Итого	10854,76	12528,34	13821,52	37204,62				

Все три показателя свидетельствуют о наличии сезонности: в апреле-августе и ноябре-декабре наблюдается волна подъема, в сентябре-октябре – волна спада показателя стоимости минимального набора продуктов питания. Это можно объяснить снижением цен на сельскохозяйственную продукцию, входящую в минимальный набор продуктов питания, в результате созревания нового урожая.

Представим графически значения индекса сезонности:



Построим математическую модель сезонных колебаний на основе гармонике Фурье при $k=1$ для данных о стоимости минимального набора продуктов питания в Томской области (в руб.) за 2004 год. Общий вид гармонике при $k=1$: $\hat{y}_t = a_0 + \sum (a_1 \cdot \cos t + b_1 \cdot \sin t)$. Промежуточные расчеты сведем в таблицу. Периоды обозначим в виде величины π .

Месяцы	t	y_t	$\cos t$	$\sin t$	$y_t \cdot \cos t$	$y_t \cdot \sin t$	\hat{y}_t
Январь	0	1116,04	1	0	1116,04	0,00	1150,62
Февраль	$\frac{\pi}{6}$	1137,34	0,866	0,5	984,94	568,67	1148,8
Март	$\frac{\pi}{3}$	1146,19	0,5	0,866	573,10	992,60	1147,78
Апрель	$\frac{\pi}{2}$	1150,72	0	1	0,00	1150,72	1147,83
Май	$\frac{2\pi}{3}$	1156,16	-0,5	0,866	-578,08	1001,23	1148,95
Июнь	$\frac{5\pi}{6}$	1149,88	-0,866	0,5	-995,80	574,94	1150,83
Июль	π	1166,76	-1	0	-1166,76	0,00	1152,97
Август	$\frac{7\pi}{6}$	1152,89	-0,866	-0,5	-998,40	-576,45	1154,79
Сентябрь	$\frac{4\pi}{3}$	1134,61	-0,5	-0,866	-567,31	-982,57	1155,81
Октябрь	$\frac{3\pi}{2}$	1141,55	0	-1	0,00	-1141,55	1155,75
Ноябрь	$\frac{5\pi}{3}$	1165,74	0,5	-0,866	582,87	-1009,53	1154,63
Декабрь	$\frac{11\pi}{6}$	1203,64	0,866	-0,5	1042,35	-601,82	1152,76
Итого		13821,52			-7,05	-23,75	13821,52

$$\text{Тогда: } a_0 = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{13821,52}{12} = 1151,79;$$

$$a_1 = \frac{2}{n} \sum y_t \cdot \cos t = \frac{2}{12} \cdot (-7,05) = -1,18;$$

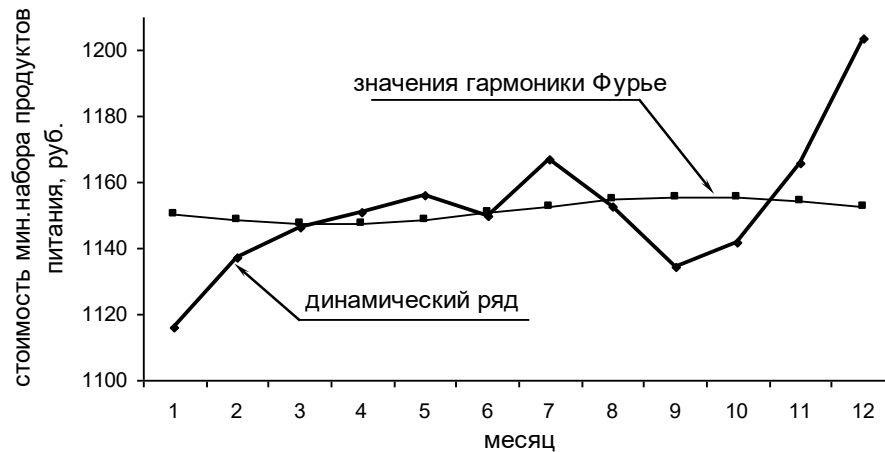
$$b_1 = \frac{2}{n} \sum y_t \cdot \sin t = \frac{2}{12} \cdot (-23,75) = -3,96.$$

Гармоника примет вид:

$$\hat{y}_t = 1151,79 - 1,18 \cdot \cos t - 3,96 \cdot \sin t.$$

Значения этой гармоника в соответствии с периодом представлены в последнем столбце таблицы.

Представим для наглядности исходный динамический ряд и рассчитанные значения первой гармоника:



Задачи для самостоятельного решения:

Задача 3.3

Имеются следующие данные о продаже легковых автомобилей в России:

Год	1991г.	1992г.	1993г.	1994г.
Продано легковых автомобилей, тыс. шт.	788	810	867	1051

Определить средние показатели динамики за весь анализируемый период.

Задача 3.4

Численность постоянного населения России характеризуется следующими данными

Год	2002	2003	2004	2005	2006
Численность населения, млн. чел.	145,65	144,96	144,17	143,47	142,75

Рассчитайте базисные, цепные и средние показатели ряда динамики.

Задача 3.5

Стоимость минимального набора продуктов питания в России в 2005-2006 гг. (тыс. руб.) представлена в таблице:

	2005	2006
январь	1254,28	1406,7
февраль	1281,5	1484,4
март	1317,26	1501,4
апрель	1353,89	1498,5
май	1378,8	1506
июнь	1398,3	1511,9
июль	1401,3	1538,3
август	1343,9	1485,9
сентябрь	1297,1	1428,5
октябрь	1296,4	1422,5
ноябрь	1320,1	
декабрь	1349,1	

Рассчитайте скользящую среднюю ряда с интервалом сглаживания 3, 4 и 3. Постройте график и сделайте вывод о том, какая средняя является лучшей.

Задача 3.6

В таблице приведены сведения о численности родившихся в Новосибирской области (чел.) в 1990-2005 гг.

год	Число родившихся (человек)	год	Число родившихся (человек)
1990	36116	1998	22564
1991	33124	1999	21688
1992	28516	2000	23138
1993	24268	2001	24791
1994	24042	2002	26990
1995	23486	2003	28389
1996	22824	2004	28993
1997	22785	2005	28269

По данным таблицы определить уравнение тренда в виде параболической функции и сделать точечный прогноз рождаемости на ближайшие три года.

Задача 3.7

Имеются следующие данные о стоимости имущества предприятия (млн. руб.).
 Определить абсолютное и относительное изменение среднегодовой стоимости имущества предприятия в 2006 г. по сравнению с 2005 и 2004 гг.

Год	Отчетные данные.			
	1.01	1.04	1.07	1.10
2004	62	65	70	68
2005	68	70	75	78
2006	80	84	88	90
2007	95	-	-	-

Задача 3.8

Определить, на сколько рублей и на сколько процентов различаются средние остатки по вкладам за I квартал, если на 1 января 2006 г. остаток по первому вкладу составлял 5500 руб., по второму вкладу - 7000 руб. В течение I квартала имели место следующие изменения величины остатков вкладов (руб.):

Вклады	Дата изменения размера вклада, руб.						
	05.01	17.01	02.02	21.02	13.03	20.03	28.03
1	+1500	-2000	нет операции	+500	нет операции	нет операции	+1000
2	нет операции	нет операции	+3000	+1500	-5500	-2000	+1400

Задача 3.9

Количество дорожно-транспортных происшествий (ДТП), совершенных водителями в регионе, увеличилось в 2000 г. по сравнению с 1995 г. на 2 тыс., или на 4%; в 2005 г. по сравнению с 2000 г. их число возросло на 30%, а в 2006 г. по сравнению с 2005 г. -на 2%.
 Определите количество ДТП в 1995, в 2000, в 2005 и в 2006 гг.

Задача 3.10

Имеются следующие данные об объеме пассажирооборота по автобусным предприятиям города:

Год	Пассажирооборот, млрд. пасс-км	Цепные показатели динамики			
		Абсолютный прирост, млрд. пасс-км	Коэффициент роста	Темпы прироста, %	Абсолютное значение одного процента прироста, млрд. пасс-км
1992	127,0	-	-	-	-
1993			1,102		
1994				7,1	
1995	164,6				
1996					
1997				9,9	1,75

Вычислите и проставьте в таблицу уровни ряда динамики и недостающие показатели динамики.

Задача 3.11

Имеются следующие данные о численности студентов ВУЗов России (на конец учебного года, тыс. чел.):

Год	Численность студентов на конец года, тыс. чел.	Цепные показатели динамики			
		Абсолютный прирост, тыс. чел.	Темп роста, %	Темпы прироста, %	Абсолютное значение одного процента прироста, тыс. чел.
1991	2824,5	-71,5			
1992			0,978		
1993				-4,51	
1994					
1995		-8,0			25,42

Вычислите и проставьте в таблицу уровни ряда динамики и недостающие показатели динамики. Проанализируйте динамику изучаемого явления, опираясь на рассчитанные показатели.

Задача 3.12

Численность населения региона возросла за период с 01.01.2003 по 01.01.2005 г. на 4,2%, при этом удельный вес мужского населения за этот период увеличился с 42,1 до 44,3%. Определить показатели динамики численности мужского и женского населения региона.

Задача 3.13

Среднегодовые темпы роста продукции фермерского хозяйства за период 2003 - 2007 гг. в земледелии составили 102,6%, а в животноводстве - 105,3%. Величина продукции в 2007 г, (в условных единицах) составила: в земледелии - 7820, в животноводстве - 8590. Определите среднегодовой темп роста продукции в целом за период 2003 - 2007 гг.

Задача 3.14

Численность специалистов с высшим и специальным средним образованием двух регионов составляла (человек):

Дата	Регион №1	Регион №2
1 января 2003г.	1850	1720
1 апреля 2003г.	1866	1810
1 декабря 2003г .	1910	1860
1 января 2004 г.	1960	1900

Сопоставить среднегодовую численность специалистов по двум регионам. Определить, в каком регионе и на сколько средняя численность специалистов больше (в абсолютном и относительном выражении).

Задача 3.15

На основе следующих отчетных данных по грузовому автотранспортному предприятию рассчитать точечный прогноз объема перевозок на 1998 г.

Год	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Перевезено груза, тыс. тонн	360	381	401	422	443	463	485	505

4. Индексный метод

Вопросы для самоконтроля и собеседования:

1. Опишите основные виды индексов.
2. Индивидуальные индексы, их виды и способы вычисления.
3. Общие индексы и их значимость.
4. Использование индексов в экономическом анализе.
5. Статистические показатели производительности труда.
6. Статистические показатели оплаты труда.
7. Статистические показатели научно-технического прогресса.
8. Статистические показатели себестоимости.

Примеры решения типовых задач

Задача 4.1

Проанализируйте влияние изменения цены и физического объема продаж на общее изменение товарооборота для данных таблицы:

	Цена, руб.	Количество товара, тыс. шт.	Товарооборот, млн. руб.
Базисный год	20	300	6,00
Отчетный год	24	270	6,48

Решение:

Рассчитаем индивидуальные индексы:

- индекс цен $i_p = 24/20 = 1,2$ (или 120%, т.е. цены выросли на 20%),

- индекс физического объема продукции $i_q = 270/300 = 0,9$ (или 90%, т.е. объем продаж упал на 10%),

- индекс товарооборота $i_Q = 6,48/6,00 = 1,08$ или $i_Q = 1,2 \cdot 0,9 = 1,08$ (или 108%, т.е. товарооборот увеличился на 8 процентов).

Определим общее изменение товарооборота: $\Delta Q = 6,48 - 6,00 = 0,48$ млн. руб.

Проанализируем влияние изменения цен и объема продаж при помощи первого подхода (сначала оценивается влияние количественного фактора, потом – качественного):

- $\Delta Q(q) = 6,0 \cdot (0,9 - 1) = -0,6$ млн. руб. (т.е. в результате изменения объема продаж выручка уменьшилась);

- $\Delta Q(p) = 6,0 \cdot 0,9 \cdot (1,2 - 1) = +1,08$ млн. руб. (т.е. в результате изменения цены выручка увеличилась).

Проанализируем влияние изменения цен и объема продаж при помощи второго подхода (сначала оценивается влияние изменения цены, потом объема продаж):

- $\Delta Q(p) = 6,0 \cdot (1,2 - 1) = +1,2$ млн. руб. (т.е. в результате изменения цены выручка увеличилась),

- $\Delta Q(q) = 6,0 \cdot 1,2 \cdot (0,9 - 1) = -0,72$ млн. руб. (т.е. в результате изменения объема продаж выручка уменьшилась).

Разные подходы дают различные результаты, но всегда, независимо от выбора подхода, должно выполняться $\Delta Q = \Delta Q(p) + \Delta Q(q)$

Задача 4.2

Рассчитайте общие индексы для двух фирм, реализующих разную продукцию.

Номер предприятия	Базисный год		Отчетный год	
	Цена (руб.), p_0	Кол-во продаж (тонны), q_0	Цена (руб.), p_1	Кол-во продаж (тонны), q_1
1	17	450	19	510
2	87	170	82	150

Решение:

Общий индекс товарооборота:
$$I_Q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{19 \cdot 510 + 82 \cdot 150}{17 \cdot 450 + 87 \cdot 170} = 0,979$$

(товарооборот снизился на 2%);

Общий индекс цен $I_p^{нааше} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{19 \cdot 510 + 82 \cdot 150}{17 \cdot 510 + 87 \cdot 150} = 1,012$ (цены в целом по двум

предприятиям выросли на 1,2%);

Общий индекс физического объема продукции
$$I_q^{ласпейр} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{17 \cdot 510 + 87 \cdot 150}{17 \cdot 450 + 87 \cdot 170} = 0,968$$
 (объем продаж снизился на 3,2%).

Проверим выполнение соотношения $I_Q = I_p^{нааше} \cdot I_q^{ласпейр}$. Действительно, $0,979 = 1,012 \cdot 0,968$.

Рассчитаем индекс физического объема продукции, как арифметическую среднюю из индивидуальных индексов. Для этого рассчитаем индивидуальные индексы объема продаж для каждой из фирм в отдельности: $i_{q(1)} = 510/450 = 1,13$, $i_{q(2)} = 150/170 = 0,88$.

$$\text{Тогда } I_q = \frac{\sum i_q p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{1,13 \cdot 17 \cdot 450 + 0,88 \cdot 87 \cdot 170}{17 \cdot 450 + 87 \cdot 170} = 0,968. \text{ Очевидно, что значение}$$

индекса, рассчитанного при помощи индивидуальных индексов, должно совпадать со значением соответствующего агрегатного индекса.

Задача 4.3

Имеются следующие данные о производстве некоторых видов продукции швейной фабрики:

Пальто	Произведено q , шт.		Отработано $T = t \cdot q$, чел-час	
	январь	февраль	январь	февраль
Женские	900	1000	7500	8200
Для девочек	4000	4500	18000	19000

Решение.

Рассчитаем индекс переменного состава: $I_{w.n.c.} = \bar{W}_1 : \bar{W}_0$,

$$\bar{W}_1 = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum q_1} = 4,95; \quad \bar{W}_0 = \frac{\sum t_0 q_0}{\sum q_0} = 5,20.$$

Следовательно, $I_{w.n.c.} = \bar{W}_1 : \bar{W}_0 = 4,95 / 5,20 = 0,95$.

Средняя производительность труда работников швейного предприятия снизилась в 0,95 раз.

Определим, какое влияние оказало на среднюю производительность работников швейного предприятия изменение средней выработки в каждой из двух групп рабочих, производящих пальто для женщин и девочек:

$$I_{w\phi.c.} = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1} = 1,05.$$

Следовательно, под влиянием изменения средней выработки в каждой из двух групп рабочих, производящих пальто для женщин и девочек, производительность увеличилась в 0,5 раз.

Влияние структурного фактора, характеризующего изменение структуры отработанного времени, определяется индексом структурного сдвига:

$$I_{\text{стр.сдв.}} = \frac{I_{Wn.c.}}{I_{W\phi.c.}} = 0,95/1,05 = 0,90.$$

Средняя производительность снизилась в 0,9 раз за счет изменения структуры отработанного времени.

Задача 4.4

В таблице приведены данные о численности работников и среднемесечной заработной плате для условного предприятия за 1990 и 1994 гг.

Категории персонала	Численность занятых T , тыс.чел.		Среднемесячная заработная плата X , руб.	
	1990 г.	1994 г.	1990 г.	1994 г.
ИТР	3130	1833	341	285426
Служащие	402	745	410	669393
Рабочие	1806	1659	364	41125

Решение.

Средняя заработная плата работников всех категорий в 1990 г. составила:

$$f_0 = \frac{\sum X_0 T_0}{\sum T_0} = \frac{341 \cdot 3130 + 410 \cdot 402 + 364 \cdot 1806}{3130 + 402 + 1806} = 353,98 \text{ руб}$$

В 1994 г. эта величина составила:

$$f_1 = \frac{\sum X_1 T_1}{\sum T_1} = \frac{285426 \cdot 1833 + 669393 \cdot 745 + 41125 \cdot 1659}{1833 + 745 + 1659} = 257283,46 \text{ руб}$$

Следовательно, индекс переменного состава заработной платы составит:.

$$I_{\text{з.п.с.}} = \frac{f_1}{f_0} = \frac{257283,46}{353,98} = 726,83$$

Средняя месячная номинальная заработная плата работников предприятия возросла почти в 727 раз в результате повышения заработной платы работников каждой из

рассматриваемых категорий и изменения удельного веса численности работников этих категорий в общей численности.

Определим влияние изменения уровня заработной платы в каждой категории персонала на изменение среднего уровня заработной платы всех работников, занятых на данном предприятии. Для этого рассчитаем индекс фиксированного состава:

$$I_{з.ф.с.} = \frac{\sum X_1 T_1}{\sum X_0 T_1} = \frac{285426 \cdot 1833 + 669393 \cdot 745 + 41125 \cdot 1659}{341 \cdot 1833 + 410 \cdot 745 + 364 \cdot 1659} = \frac{1\,090\,110\,018}{1\,534\,379} = 710,46$$

Этот индекс показывает, что под влиянием изменения уровня заработной платы в каждой категории средний уровень заработной платы всех работников предприятия увеличился в 1994 г. по сравнению с 1990 г. в 710 раз.

Следовательно, влияние структурного фактора на средний уровень заработной платы работников, занятых, составит:

$$I_{з.стр.сдв.} = \frac{I_{з.п.с.}}{I_{з.ф.с.}} = \frac{726,83}{710,46} = 1,023$$

Уменьшение удельного веса численности ИТР и увеличение удельного веса численности работников других категорий, в которых заработная плата была выше, почти уравновесили друг друга, что привело к увеличению средней зарплаты на 2,3%.

Задача 4.5

В таблице приведены данные о производстве двух видов продукции до внедрения и после внедрения новой техники в результате капитальных вложений $\sum \Delta K_i = 500$ тыс. руб.:

Виды продукции	До внедрения новой техники			После внедрения новой техники		
	Себестоимость, руб.	Цена, руб.	Кол-во, шт.	Себестоимость, руб.	Цена, руб.	Кол-во, шт.
1	100	120	15000	95	120	15000
2	210	230	30000	200	220	31000

Нормативный коэффициент эффективности новой техники $E_n = 0,15$.

Решение.

Определим прирост прибыли от внедрения новой техники.

для продукции 1:

$$\Delta\Pi_{t_1} = (120 - 95) \times 15000 - (120 - 100) \times 15000 = 75 \text{ тыс.руб.}$$

для продукции 2:

$$\Delta\Pi_{t_2} = (220 - 200) \times 31000 - (230 - 210) \times 30000 = 20 \text{ тыс.руб.}$$

Этот прирост произошел из-за снижения себестоимости и увеличения выпуска продукции. Снижение цены на продукцию 2, однако, привело к некоторому уменьшению прибыли.

Снижение себестоимости от использования новой техники:

$$\text{для продукции 1: } \Delta C = (100 - 95) \times 15000 = 75 \text{ тыс.руб.}$$

$$\text{для продукции 2: } \Delta C = (210 - 200) \times 31000 = 310 \text{ тыс.руб.}$$

Сводный эффект от использования новой техники:

$$\Xi = (75 + 20) - 0,15 \times 500 = 20 \text{ тыс.руб.}$$

Задача 4.6

В таблице приведены данные по шахтоуправлению.

Шахта	Предыдущий год			Отчетный год			Индекс себестоимости
	Добыча угля, тыс.т.	Общие затраты, тыс.руб.	Себестоимость угля, тыс.руб.	Добыча угля, тыс.т.	Общие затраты, тыс.руб.	Себестоимость угля, тыс.руб.	
	q_0	$q_0 Z_0$	Z_0	q_1	$q_1 Z_1$	Z_1	i_z
1	2500	26250	10,5	2560	27648	10,8	1,029
2	3000	30000	10,0	3700	36260	9,8	0,980
итого	5500	56250	10,227	6260	63908	10,209	0,998

Решение.

Индекс переменного состава:

$$i_{\text{пер.сост.}} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_0} = \frac{\sum Z_1 q_1}{\sum q_1} \cdot \frac{\sum Z_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{63908}{6260} \cdot \frac{56250}{5500} = 0,9982.$$

Индекс фиксированного состава:

$$i_{\text{фикс.сост.}} = \frac{\sum Z_1 q_1}{\sum Z_0 q_1} = \frac{63908}{10,5 \cdot 2560 + 10,0 \cdot 3700} = 1,0004.$$

Индекс структурных сдвигов:

$$i_{\text{стр.сдв.}} = i_{\text{пер.сост.}} : i_{\text{фикс.сост.}} = \frac{0,9982}{1,0004} = 0,9978.$$

Следовательно, снижение средней себестоимости 1 т угля в целом по двум шахтам обусловлено главным образом увеличением объема добычи на шахте 2, на которой в предыдущем году себестоимость была более низкой.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 4.7

Выпуск продукции по заводу почвообрабатывающих машин за два квартала:

Вид продукции	Выпуск, шт.		Отпускная цена за шт., тыс. руб.	
	1 кв.	2 кв.	1 кв.	2 кв.
Плуги навесные	2500	2610	4,8	5,4
Плуги прицепные	3000	2950	7,1	7,6
Культиваторы навесные	3600	3700	5,0	5,7

Определить: 1) изменение (в %) выпуска каждого вида продукции, а также изменение выпуска продукции в целом по предприятию; 2) изменение цен (в %) по каждому виду продукции и среднее изменение цен по всему ассортименту продукции; 3) абсолютное изменение общей стоимости продукции, выделив из общей суммы изменение за счет изменения количества продукции и за счет изменения цен.

Задача 4.8

По предприятию имеются следующие данные о реализации продукции:

Вид продукции	Ед. измерения	Реализовано		Общая стоимость реализованной продукции, тыс. руб.	
		сентябрь	октябрь	сентябрь	октябрь
Цемент М400	т	18200	19500	17290	18330
Кирпич красный М100	тыс. шт.	3500	4200	14000	17640

Определить: 1) среднее изменение цен на реализованную продукцию и абсолютное изменение стоимости реализованной продукции за счет изменения цен; 2) общее изменение физического объема реализованной продукции предприятия и абсолютное изменение стоимости реализованной продукции за счет изменения ее физического объема.

Задание 4.9

Объем товарной продукции авторемонтного завода (в действующих ценах) составил: апрель - 12000 тыс. руб., май - 14 400 тыс. руб., июнь - 24 000 тыс. руб. Отпускные цены на продукцию завода снижены в среднем в мае по сравнению с апрелем на 0,6%, а в июне повышены на 5,0% по сравнению с маем. Определить изменение физического объема продукции.

Задание 4.10

По металлургическому комбинату имеются следующие данные о выпуске:

Вид продукции	1 квартал		2 квартал		3 квартал	
	Выпуск, т	Отпускная цена за 1 т, руб.	Выпуск, т	Отпускная цена за 1 т, руб.	Выпуск т,	Отпускная цена за 1 т, руб.
Прокат листовой	4200	3900	4300	4100	4700	3850
Сталь арматурная	7300	3400	7000	3450	8300	3900
Швеллер	900	4100	1200	4200	780	4500

Определить агрегатные цепные и базисные индексы физического объема продукции, цен и общей стоимости продукции. Показать взаимосвязь вычисленных индексов. Сформулировать вывод.

Задача 4.11

Определить, как изменились в среднем отпускные цены на продукцию, если количество произведенной продукции в отчетном периоде по сравнению с базисным увеличилось на 8,0%, а общая стоимость продукции уменьшилась на 5,0%.

Задача 4.12

В отчетном году было реализовано товара *A* на 300 млн руб., товара *B* - на 5 млрд руб., товара *B* - на 412 млн руб., товара *Г*- на 143 млн руб. Исчислите общий индекс цен на все товары, если известно, что цены на товар *A* были снижены на 4%, на товар *B* остались без изменения, а на товары *B* и *Г* повысились на 3 и 10% соответственно.

Задача 4.13

На основе данных по двум видам продукции, приведенных в таблице, рассчитать для производительности труда индекс переменного состава, индекс фиксированного состава, индекс влияния структурных сдвигов. Как характеризуют изменение производительности эти индексы?

Продукция	Произведено q , шт.		Отработано чел-час $T = t \cdot q$	
	январь	февраль	январь	февраль
1	9000	10000	7300	8000
2	5000	3000	2000	1600

Задача 4.14

На основе данных о заработной плате, приведенных в таблице, рассчитать индекс переменного состава, индекс фиксированного состава, индекс структурных сдвигов. Как характеризуют изменение средней заработной платы эти индексы?

Категории персонала	Численность занятых, тыс.чел.		Среднемесячная заработная плата, руб.	
	февраль	март	февраль	март
Управляющий	26	29	2362	2962
Обслуживающий	86	96	1231	1132
Технический	95	99	1036	1069

Задача 4.15

Рассчитать эффект от внедрения новой техники по данным, приведенным в таблице:

Капитальные вложения, тыс.руб.	Виды продукции	До внедрения новой техники			После внедрения новой техники		
		Себесто- имость, Цена, руб.	Кол-во, шт.	Себесто- имость, Цена, руб.	Кол-во, шт.		
470	1	110	120	10000	108	120	15000
	2	152	165	33000	152	165	34000

Нормативный коэффициент эффективности новой техники $E_n = 0,15$.

Задача 4.16

Рассчитать индивидуальные индексы себестоимости, общую сумму перерасхода (экономии), сверхплановую экономию для каждого из предприятий, индекс переменного состава, индекс фиксированного состава, индекс влияния структурных сдвигов.

Предприятие	Предыдущий год		Отчетный год	
	Произведе- но продукции , тыс.шт.	Себесто- имость, руб.	Произведе- но продукции , тыс.шт.	Себесто- имость, руб.
	q_0	Z_0	q_1	Z_1
1	2000	15,5	2300	14,9
2	3300	16,0	3300	15,3

Приложения

Приложение 1

Таблица значений функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0203	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Значения ординат увеличены в 10 000 раз

Приложение 2

Значения функции Пуассона $P(\lambda)$

λ	P	λ	P	λ	P
0,30	1,0000	0,80	0,5441	1,60	0,0120
0,35	0,9997	0,85	0,4653	1,70	0,0062
0,40	0,9972	0,90	0,3927	1,80	0,0032
0,45	0,9874	0,95	0,3275	1,90	0,0015
0,50	0,9639	1,00	0,2700	2,00	0,0007
0,55	0,9228	0,10	0,1777	2,10	0,0003
0,60	0,8643	1,20	0,1122	2,20	0,0001
0,65	0,7920	1,30	0,0681	2,30	0,0001
0,70	0,7112	1,40	0,0397	2,40	0,0000
0,75	0,6272	1,50	0,0222	2,50	0,0000

Таблица случайных чисел

5489	5583	3156	0835	1988	3912	0938	7460	0869	4420
3522	0935	7877	5665	7020	9555	7375	7124	7878	5544
7555	7579	2550	2487	9477	0864	2349	1012	8250	2633
5759	3554	5080	9074	7001	6249	3224	6368	9102	2672
6303	6895	3371	3196	7231	2918	7380	0438	7547	2644
7351	5634	5323	2623	7803	8374	2191	0464	0696	9529
7068	7803	8832	5119	6350	0120	5026	3684	5657	0304
3613	1428	1796	8447	0503	5654	3254	7336	9536	1944
5143	4534	2105	0368	7890	2473	4240	8652	9435	1422
9815	5144	7649	8638	6137	8070	5345	4865	2456	5708
5780	1277	6816	1013	2867	9938	3930	3203	5696	1769
1187	0951	5991	5245	5700	5564	7352	0891	6249	6568
4184	2179	4554	9083	2254	2435	2965	5154	1209	7069
2916	2972	9885	0275	0144	8034	8122	3213	7666	0230
5524	1341	9860	6565	6981	9842	0171	2284	2707	3008
0146	5291	2354	5694	0377	5336	6460	9585	3415	2358
4920	2826	5238	5402	7937	1993	4332	2327	6875	5230
7978	1947	6380	3425	7267	7285	1130	7722	0164	8573
7453	0653	3645	7497	5969	8682	4191	2976	0361	9334
1473	6938	4899	5348	1641	3652	0852	5296	4538	4456
8162	8797	8000	4707	1880	9660	8446	1883	9768	0881
5645	4219	0807	3301	4279	4168	4305	9937	3120	5547
2042	1192	1175	8851	6432	4635	5757	6656	1660	5389
5470	7702	6958	9080	5925	8519	0127	9233	2452	7341
4045	1730	6005	1704	0345	3275	4738	4862	2556	8333
5880	1257	6163	4439	7276	6353	6912	0731	9033	5294
9083	4260	5277	4998	4298	5204	3965	4028	8936	5148
1762	8713	1189	1090	8989	7273	3213	1935	9321	4820
2023	2589	1740	0424	8924	0005	1969	1636	7237	1227
7965	3855	4765	0703	1678	0841	7543	0308	9732	1289
7690	0480	8098	9629	4819	7219	7241	5128	3853	1921
9292	0426	9573	4903	5916	6576	8368	3270	6641	0033
0867	1656	7016	4220	2533	6345	8227	1904	5138	2537
0505	2127	8255	5276	2233	3956	4118	8199	6380	6340
6295	9795	1112	5761	2575	6837	3336	9322	7403	8345
6323	2615	3410	3365	1117	2417	3176	2434	5240	5455
8672	8536	2966	5773	5412	8114	0930	4697	6919	4569
1422	5507	7596	0670	3013	1351	3886	3268	9469	2584
2653	1472	5113	5735	1469	9545	9331	5303	9914	6394
0438	4376	3328	8649	8327	0110	4549	7955	5275	2890
2851	2157	0047	7085	1129	0460	6821	8323	2572	8962
7962	2753	3077	8718	7418	8004	1425	3706	8822	1494
3837	4098	0220	1217	4732	0150	1637	1097	1040	7372
8542	4126	9274	2251	0607	4301	8730	7690	6235	3477
0139	0765	8039	9484	2577	7859	1976	0623	1418	6685
6687	1943	4307	0579	8171	8224	8641	7034	3595	3875
6242	5582	5872	3197	4919	2792	5991	4058	9769	1918
6859	9606	0522	4993	0345	8958	1289	8825	6941	7685
6590	1932	6043	3623	1973	4112	1795	8465	2110	8045
3482	0478	0221	6738	7323	5643	4767	0106	2272	9862

$$\text{Функция Лапласа } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0080	0160	0239	0319	0399	0478	0558	0638	0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2961	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3683	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5385	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6176	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1,0	6827	6875	6923	6970	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1,1	7287	7339	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7995	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534
2,0	9545	9556	9566	9576	9586	9596	9606	9616	9625	9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9674	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9929
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

Значения ординат увеличены в 10 000 раз.

Значение t -критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01

Число степеней свободы k	P			Число степеней свободы k	P		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Значения $\chi^2_{\alpha;k}$ χ^2 -критерия Пирсона

Число степеней свободы k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k}) > \alpha$							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64	7,88	9,55	10,8
2	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	11,6	12,3	13,8
3	4,64	6,25	7,82	9,84	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	13,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,9	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,9	52,5	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

Приложение 7

Критические значения коэффициентов ранговой корреляции Спирмена для двусторонних пределов уровня значимости α

$n \backslash \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002
4	0,8000	0,8000				
5	0,7000	0,8000	0,9000	0,9000		
6	0,6000	0,7714	0,8286	0,8857	0,9429	
7	0,5357	0,6786	0,7450	0,8571	0,8929	0,9643
8	0,5000	0,6190	0,7143	0,8095	0,8571	0,9286
9	0,4667	0,5833	0,6833	0,7667	0,8167	0,9000
10	0,4424	0,5515	0,6364	0,7333	0,7818	0,8667
11	0,4182	0,5273	0,6091	0,7000	0,7455	0,8364
12	0,3986	0,4965	0,5804	0,6713	0,7273	0,8182
13	0,3791	0,4780	0,5549	0,6429	0,6978	0,7912
14	0,3626	0,4593	0,5341	0,6220	0,6747	0,7670
15	0,3500	0,4429	0,5179	0,6000	0,6536	0,7464
16	0,3382	0,4265	0,5000	0,5824	0,6324	0,7265
17	0,3260	0,4118	0,4853	0,5637	0,6152	0,7083
18	0,3148	0,3994	0,4716	0,5480	0,5975	0,6904
19	0,3070	0,3895	0,4579	0,5333	0,5825	0,6737
20	0,2977	0,3789	0,4451	0,5203	0,5684	0,6586
21	0,2909	0,3688	0,4351	0,5078	0,5545	0,6455
22	0,2829	0,3597	0,4241	0,4963	0,5426	0,6318
23	0,2767	0,3518	0,4150	0,4852	0,5306	0,6186
24	0,2704	0,3435	0,4061	0,4748	0,5200	0,6070
25	0,2646	0,3362	0,3977	0,4654	0,5100	0,5962
26	0,2588	0,3299	0,3894	0,4564	0,5002	0,5856
27	0,2540	0,3236	0,3822	0,4481	0,4915	0,5757
28	0,2490	0,3175	0,3749	0,4401	0,4828	0,5660
29	0,2443	0,3113	0,3685	0,4320	0,4744	0,5567
30	0,2400	0,3059	0,3620	0,4251	0,4665	0,5479

Литература

1. Ефимова, Марина Романовна. Общая теория статистики: Учебник для вузов/ М. Р. Ефимова, Е. В. Петрова, В. Н. Румянцев. - 2-е изд., испр. и доп.. - М.: ИНФРА-М, 2004.
2. Общая теория статистики: Учебник для вузов/ И. И. Елисеева, М. М. Юзбашев ; ред. И. И. Елисеева. - 5-е изд., перераб. и доп.. - М.: Финансы и статистика, 2004.
3. Ефимова, Марина Романовна. Практикум по общей теории статистики: Учебное пособие для вузов/ М. Р. Ефимова, О. И. Ганченко, Е. В. Петрова. - 2-е изд., перераб. и доп.. - М.: Финансы и статистика, 2005.
4. Общая теория статистики: Статистическая методология в изучении коммерческой деятельности: Учебник для вузов/ О. Э. Башина [и др.] ; ред. О. Э. Башина, ред. А. А. Спирин. - 5-е изд., доп. и перераб.. - М.: Финансы и статистика, 2005.
5. www.gks.ru
6. Статистика: Курс лекций/ Гендрина И. Ю., Сидоренко М. Г. - 2017. 124 с.: Научно-образовательный портал ТУСУР, <https://edu.tusur.ru/publications/6843>. Дата обращения 13.06.2018.
7. Кремер, Наум Шевелевич. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов/Н. Ш. Кремер.- 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 573 с.
8. [Гмурман, Владимир Ефимович](#). Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата/ В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2015. – 480 с.