МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИО ЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Кафедра экономической математики, информатики и статистики

Составитель: Сидоренко М.Г.

ЭКОНОМЕТРИКА

Методические указания по проведению лабораторных и самостоятельных работ

Томск 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время широкое распространение получило использование моделирования и количественного анализа в экономике. В результате выделилось и сформировалось одно из направлений экономических исследований – «эконометрика».

Формально «эконометрика» означает «измерения в экономике». Однако область исследований этой дисциплины гораздо шире. Эконометрика- это наука, в которой на базе реальных статистических данных строятся, анализируются и совершенствуются математические модели реальных экономических процессов. Эконометрика позволяет найти количественное подтверждение либо опровержение того или иного экономического закона или гипотезы. При этом одним из важнейших направлений эконометрики является построение прогнозов по различным экономическим показателям.

Эконометрика как научная дисциплина зародилась на основе слияния экономической теории, математики и статистики. Предполагается, что студенты, изучающие эконометрику, уже прослушали курсы математики, теории вероятностей, математическую статистику, микро- и макроэкономику.

Задачи, решаемые эконометрикой, содержат большой массив числовых данных и решаются при помощи информационных технологий.

Для выполнения лабораторных работ по эконометрике, рассмотренных в пособии, следует использовать электронные таблицы: Microsoft Excel и OpenOffice Calc.

Лабораторная работа №1: Парная линейная регрессия

Цель работы: По представленным эмпирическим данным научиться строить модель парной линейной регрессии, проверять качество уравнения регрессии оцениванием значения коэффициента детерминации, проверять гипотезы относительно коэффициентов уравнения регрессии, строить интервальные оценки коэффициентов и доверительные интервалы для зависимой переменной.

Методические указания:

Если функция регрессии линейна, то говорят о *линейной регрессии.* По выборке ограниченного объема мы сможем построить так называемое *эмпирическое уравнение регрессии*

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \tag{1.1}$$

где $\hat{y}_i$ — оценка условного математического ожидания $M(Y|X = x_i)$; b_0 и b_1 - оценки неизвестных параметров β_0 и β_1, называемые *эмпирическими коэффициентами регрессии.* Следовательно, в конкретном случае:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i \tag{1.2}$$

где *отклонение* e_i — оценка теоретического случайного отклонения ε_i .

Найдем оценки b_0 и b_1, используя метод наименьших квадратов. При этом минимизируется следующая функция:

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \tag{1.3}$$

Эта функция является квадратичной функцией двух параметров b_0 и b_1. Условием существования минимума функции двух переменных является равенство нулю ее частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_1} = -2\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i) x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n b_0 + b_1 \sum x_i = \sum y_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Разделив оба уравнения системы на n, получим:

$$\begin{cases} b_0 + b_1\bar{x} = \bar{y} \\ b_0\bar{x} + b_1\overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \end{cases}, \text{ где } \begin{matrix} \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum x_i, \overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum x_i^2 \\ \bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum y_i \end{matrix} \quad (1.4)$$

При проведении статистического анализа перед исследователем зачастую возникает необходимость сравнения эмпирических коэффициентов регрессии b_0 и b_1 с некоторыми теоретически ожидаемыми значениями β_0 и β_1 этих коэффициентов. Данный анализ осуществляется при помощи статистической проверкой гипотез.

Наиболее важной на начальном этапе статистического анализа построенной модели является задача установления значимости коэффициентов. Эта задача решается при помощи отношений, называемых t -статистикой:

$$t = \frac{b_1}{S_{b1}} \quad \text{и} \quad t = \frac{b_0}{S_{b0}} \quad (1.5)$$

В случае, если $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$, то статистическая значимость соответствующего коэффициента регрессии подтверждается. Значения $t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$ в зависимости от уровня значимости и числа степеней свободы v ($v = n - 2$).

При оценке значимости коэффициента линейной регрессии на начальном этапе можно использовать следующее «грубое» правило (почти всегда работает при $n > 10$), позволяющее не прибегать к таблицам:

- Если $|t| \le 1$, то коэффициент не может быть признан значимым, так как доверительная вероятность составит менее чем 0,7.
- Если $1 < |t| \le 2$, то найденная оценка может рассматриваться как относительно (слабо) значимая. Доверительная вероятность в этом случае лежит между 0,7 и 0,95.
- Если $2 < |t| \le 3$, то доверительная вероятность составляет от 0,95 до 0,99.
- Если $|t| > 3$, то это почти гарантия значимости коэффициента.

Доверительные интервалы коэффициентов b_0 и b_1, которые с надежностью $(1-\alpha)$ накрывают определяемые параметры β_0 и β_1, определяются по формулам:

$$\left(b_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S(b_0);\ b_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S(b_0)\right) \quad \text{и} \quad \left(b_1 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S(b_1);\ b_1 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S(b_1)\right) \tag{1.6}$$

Интервал, определяющий границы, за пределами которых могут оказаться не более $100\alpha\%$ точек наблюдений при $X = x_p$, рассчитывается следующим образом:

$$\left(b_0 + b_1 x_p \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}\right) \tag{1.7}$$

Суммарно мерой общего качества уравнения регрессии является *коэффициент детерминации* R^2. В случае парной регрессии коэффициент детерминации будет совпадать с квадратом коэффициента корреляции. В общем случае коэффициент детерминации рассчитывается по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \tag{1.8}$$

Справедливо соотношение $0 \le R^2 \le 1$. Чем теснее линейная связь между X и Y, тем ближе коэффициент детерминации R^2 к единице.

Пример. Для анализа зависимости объема потребления Y (у.е.) домохозяйства от располагаемого дохода X (у.е.) отобрана выборка n=12 (помесячно в течение года) необходимо провести регрессионный анализ.

Данные и расчеты представлены в таблице:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2
1	107	102	11449	10914	10104	103,63	-1,63	2,66
2	109	105	11881	11445	11025	105,49	-0,49	0,24
3	110	108	12100	11880	11664	106,43	1,57	2,46
4	113	110	12769	12430	12100	109,23	0,77	0,59
5	120	115	14400	13800	13225	115,77	-0,77	0,59
6	122	117	14884	14274	13689	117,63	-0,63	0,40
7	123	119	15129	14637	14161	118,57	0,43	0,18
8	128	125	16384	16000	15625	123,24	1,76	3,10

9	136	132	18496	17952	17424	130,71	1,29	1,66
10	140	130	19600	18200	16900	134,45	-4,45	19,8
11	145	141	21025	20445	19881	139,11	1,89	3,57
12	150	144	22500	21600	20736	143,78	0,22	0,05
Сумма	1503	1448	190617	183577	176834	-	0	35,3
Среднее	125,25	120,67	15884,75	15298,08	14736,17	-	-	-

Согласно $\begin{cases} b_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \dfrac{15298{,}08 - 125{,}25\cdot 120{,}67}{15884{,}75 - (125{,}25)^2} = 0{,}9339 \\ b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 120{,}67 - 0{,}9339\cdot 125{,}25 = 3{,}699 \end{cases}$ --.

Таким образом, уравнение парной регрессии имеет вид: $\hat{Y} = 3{,}699 + 0{,}9339X$. По этому уравнению рассчитаем $\hat{y}_i$, а также $e_i = y_i - \hat{y}_i$.

В нашем примере коэффициент b_1 может трактоваться как предельная склонность к потреблению. Фактически он показывает, на какую величину изменится объем потребления, если располагаемый доход возрастает на одну единицу. Свободный член b_0 определяет прогнозируемое значение Y при величине располагаемого дохода X, равной нулю (т.е. автономное потребление).

Рассчитаем другие показатели.

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{35{,}3}{12-2} = 3{,}53; \quad S = \sqrt{S^2} = 1{,}88$$

$$S_{b1}^2 = \frac{S^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{3{,}53}{2366.25} = 0{,}0015; \;\; S_{b1} = \sqrt{S_{b1}^2} = 0{,}039$$

$$S_{b0}^2 = \overline{x^2} S_{b1}^2 = 15884{,}75 \cdot 0{,}0015 = 23{,}83; \quad S_{b0} = \sqrt{S_{b0}^2} = 4{,}88$$

Проверим статистическую значимость коэффициентов b_0 и b_1:

$$t_1 = \frac{b_1}{S_{b1}} = \frac{0{,}9339}{0{,}039} = 23{,}946 \quad \text{и} \quad t_0 = \frac{b_0}{S_{b0}} = \frac{3{,}699}{4{,}88} = 0{,}76.$$

Критическое значение при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ равно $t_{крит} = t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{0,025;10} = 2{,}228$. Так как $|t_1| = 23{,}946 > 2{,}228$, то это подтверждает статистическую значимость коэффициента регрессии b_1. Аналогично для другого коэффициента: так как $|t_0| = 0{,}76 < 2{,}228$, то гипотеза о статистической значимости коэффициента b_0 отклоняется. Это означает, что в данном случае свободным членом уравнения регрессии можно пренебречь, рассматривая регрессию как $Y = b_1 X$.

Определим доверительные интервалы коэффициентов регрессии (по формуле 2.20), которые с надежность 95% $(\alpha = 0.05)$ будут следующими:

для b_0 $(3{,}699 - 2{,}228 \cdot 4{,}88;\ 3{,}699 + 2{,}228 \cdot 4{,}88) = (-7{,}173;\ 14{,}572)$

для b_1 $(0{,}9339 - 2{,}228 \cdot 0{,}039;\ 0{,}9339 + 2{,}228 \cdot 0{,}039) = (0{,}8470;\ 1{,}021)$

Рассчитаем границы интервала, в котором будет сосредоточено 95% возможных объемов потребления при неограниченно большом числе наблюдений и уровне дохода $X = 160$ (формула 2.21):

$$3{,}699 + 0{,}9339 \cdot 160 \pm 2{,}228 \cdot 1{,}88 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(125{,}25 - 160)^2}{2102{,}1875}} .$$

Таким образом, этот интервал имеет вид: (147,4898; 158,7082).

Рассчитаем коэффициент детерминации: (2.22):

$$R^2 = 1 - \frac{35{,}3}{2108{,}6668} = 0{,}983 .$$

Столь высокое значение коэффициента детерминации свидетельствует о высоком общем качестве построенного уравнения регрессии.

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 1:

1. Постройте уравнение регрессии между данными о темпах прироста численности занятых и производительности труда сначала по всей совокупности данных, а затем исключив наблюдение для Японии. Дайте экономическую интерпретацию.

Страна	Занятость (прирост, %)	Производительность (прирост, %)
Австрия	2	4,2
Бельгия	1,5	3,9
Канада	2,3	1,3
Дания	2,5	3,2
Франция	1,9	3,8
Италия	4,4	4,2
Япония	5,8	7,8
Нидерланды	1,9	4,1
Норвегия	0,5	4,4
ФРГ	2,7	4,5
Великобритания	0,6	2,8
США	0,8	2,6

1. для 13 клиентов спортивного магазина зафиксирована сумма покупки x_t (в у.е.) и время разговора с продавцом y_t (в мин.):

x_t	40	50	60	80	100	110	120	130	150	160	180	200	310
y_t	14	14	17	19	17	20	24	22	25	24	18	20	26

Требуется: оценить с помощью МНК параметры линейного регрессионного уравнения, предположив, что переменная «длительность разговора с продавцом» объясняется переменной «величина покупки»; оценить с помощью методов МНК параметры линейного регрессионного уравнения, предположив, что переменная «величина покупки» объясняется переменной «длительность разговора с продавцом»; нарисовать диаграмму рассеяния величин (x_t, y_t), обе линии регрессии и объяснить, почему получаются различные уравнения регрессии.

Для модели, в которой переменная «величина покупки» объясняется переменной «длительность разговора с продавцом»:

- проверить статистическую значимость коэффициентов регрессии с уровнем значимости 5%;
- определить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с уровнем значимости 1%;
- определить доверительные интервалы для зависимой переменной при $y^* = 22$ для уровня значимости 10%;
- проверить качество уравнения регрессии и статистическую значимость коэффициента детерминации (уровень значимости 10%).

2. исследователь изучает зависимость между совокупным спросом на услуги (y) и совокупным располагаемым личным доходом (x) по данным для американской экономики (обе величины измеряются в млрд.дол.), используя ежегодные данные временных рядов и модель: $y = \alpha + \beta x + u$. Исследователь получает уравнение, проводя регрессионный анализ при помощи МНК. Предполагая, что обе величины x и y могут быть существенно занижены в системе национальных счетов из-за стремления людей уклониться от уплаты налогов, исследователь принимает два альтернативных метода уточнения заниженных оценок: 1) он добавляет к каждому году 90 млрд.дол. к показателю y и 200 млрд.дол. к показателю x; 2) он увеличивает значения как для x, так и для y на 10% за каждый год. Оцените влияние этих корректировок на результаты оценивания регрессии.
3. исследователь считает, что $y = \beta x + u$. Выведите формулу МНК для расчета определения оценки b регрессионного параметра β.
4. исследователь имеет ежегодные данные о временных рядах для совокупной заработной платы (W), совокупной прибыли (Π) и совокупного дохода (Y) для страны за период в n лет. По определению $Y = W + \Pi$. Используя МНК, получены уравнения регрессии: $\hat{W} = a_0 + a_1 Y$ и

$\hat{\Pi} = b_0 + b_1 Y$. Покажите, что коэффициенты регрессии будут автоматически удовлетворять следующим уравнениям: $a_1 + b_1 = 1$ и $a_0 + b_0 = 0$.

5. исследуется зависимость затрат на рекламу y от годового оборота x в некоторой отрасли. Для этого собрана информация по 20 случайно выбранным предприятиям этой отрасли о годовом обороте x_i и соответствующих расходах на рекламу y_i. Из выборки получены следующие данные: $\bar{x} = 17{,}3; \bar{y} = 1{,}2; \sum x_i y_i = 944{,}3; \sum x_i^2 = 9250; \sum y_i^2 = 127{,}2$. Предполагается, что зависимость y_i от x_i описывается уравнением: $y_i = a + bx_i + u_i (i = 1, \ldots 20)$. Требуется оценить параметры a и b с помощью МНК, необъясненную дисперсию и дисперсию коэффициентов регрессии.
6. регрессионная зависимость расходов на питание y от времени t задана уравнением: $\hat{y} = 95{,}3 + 2{,}53t$. Стандартная ошибка коэффициента при t составила 0,08. Проверьте нулевую гипотезу о том, что истинное значение коэффициента равно нулю при 5%-ном и 1%-ном уровнях значимости. Сделайте выводы.

Лабораторная работа №2: Множественная линейная регрессия

Цель работы: По представленным эмпирическим данным научиться строить модель множественной линейной регрессии, проверять качество уравнения регрессии оцениванием значения коэффициента детерминации, проверять гипотезы относительно коэффициентов уравнения регрессии, строить интервальные оценки коэффициентов и доверительные интервалы для зависимой переменной.

Методические указания:

На любой экономический показатель чаще всего оказывает влияние не один, а несколько факторов. В этом случае вместо парной регрессии $M(Y|X) = f(x)$ рассматривается *множественная регрессия*

$$M(Y|x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (2.1)$$

Задача оценки статистической взаимосвязи переменных Y и $X_1, X_2, \ldots, X_m$ формулируется аналогично случаю парной регрессии. Уравнение множественной регрессии может быть представлено в виде:

$$Y = f(\beta, X) + \varepsilon\,, \tag{2.2}$$

где $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ - вектор независимых (объясняющих) переменных; β - вектор параметров (подлежащих определению); ε - случайная ошибка (отклонение); Y - зависимая (объясняемая) переменная.

Рассмотрим самую употребляемую и наиболее простую из моделей множественной регрессии – модель множественной линейной регрессии.

Теоретическое линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m + \varepsilon \tag{2.3}$$

Как и в случае парной регрессии, истинные значения параметров β_j по выборке получить невозможно. В этом случае вместо теоретического уравнения регрессии оценивается эмпирическое уравнение регрессии:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_m x_{im} + e_i \tag{2.4}$$

По методу наименьших квадратов для нахождения оценок $b_0, b_1, \ldots, b_m$ минимизируется следующая функция:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_{ij}))^2\ . \tag{2.5}$$

Данные наблюдений и соответствующие коэффициенты в матричной форме выглядят следующим образом:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица коэффициентов уравнения множественной линейной регрессии определяется:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{2.7}$$

Здесь $(X^T X)^{-1}$ - матрица, обратная к $X^T X$.

Для множественной линейной регрессии с двумя объясняющими переменными можно получить следующую систему уравнений для определения коэффициентов:

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2$$

$$b_1 = \frac{\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)^2 - \sum(x_{i2}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2)}{\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)^2 - (\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2))^2}$$

$$b_2 = \frac{\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)^2 - \sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2)}{\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)^2 - (\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2))^2}$$

(2.8)

По аналогии с парной регрессией после определения точечных оценок b_j коэффициентов β_j ($j = 1,2,\ldots,m$) теоретического уравнения регрессии могут быть рассчитаны интервальные оценки указанных коэффициентов. Доверительный интервал, накрывающий с надежностью $(1-\alpha)$ неизвестное значение параметра β_j, определяется:

$$\left(b_j - t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}S(b_j);\ b_j + t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}S(b_j)\right) \qquad (2.9)$$

Как и в случае парной регрессии, статистическая значимость коэффициентов множественной линейной регрессии с m объясняющими переменными проверяется на основе t-статистики:

$$t = \frac{b_j}{S_{bj}}, \qquad (2.10)$$

имеющей в данном случае распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - m - 1$. При требуемом уровне значимости наблюдаемое значение t-

статистики сравнивается с критической точной $t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}$ распределения Стьюдента.

В случае, если $|t| > t_{\frac{\alpha}{2},n-m-1}$, то статистическая значимость соответствующего коэффициента регрессии подтверждается. Это означает, что фактор X_j линейно связан с зависимой переменной Y. Если же установлен факт незначимости коэффициента b_j, то рекомендуется исключить из уравнения переменную X_j. Это не приведет к существенной потере качества модели, но сделает ее более конкретной.

Для проверки общего качества уравнения регрессии, как и в случае парной регрессии, используется *коэффициент детерминации* R^2:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \tag{2.11}$$

Справедливо соотношение $0 \le R^2 \le 1$. Чем ближе этот коэффициент к единице, тем больше уравнение регрессии объясняет поведение Y.

Иногда при расчете коэффициента детерминации для получения несмещенных оценок в числителе и знаменателе вычитаемой из единицы дроби делается поправка на число степеней свободы, т.е. вводится так называемый *скорректированный (исправленный) коэффициент детерминации*:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2 /(n-m-1)}{\sum (y_i - \bar{y})^2 /(n-1)} \tag{2.12}$$

Рекомендуется после проверки общего качества уравнения регрессии провести анализ его статистической значимости. Для этого используется F-статистика:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} \tag{2.13}$$

Пример. Анализируется объем S сбережений домохозяйства за 10 лет. Предполагается, что его размер s_t в текущем году t зависит от величины y_t располагаемого дохода Y и от величины z_t реальной процентной ставки Z. Статистические данные представлены в таблице:

Год	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Y, тыс.у.е.	100	110	140	150	160	160	180	200	230	250	260
Z, %	2	2	3	2	3	4	4	3	4	5	5
S, тыс.у.е.	20	25	30	30	35	38	40	38	44	50	55

Средние значения исходных данных равны: $\bar{y} = 176{,}3636$, $\bar{z} = 3{,}3636$, $\bar{s} = 36{,}8182$.

Представим требующиеся для построения модели множественной регрессии и проведения дальнейшего анализа промежуточные вычисления в таблице:

Год	$(y_i - \bar{y})^2$	$(z_i - \bar{z})^2$	$(s_i - \bar{s})^2$	$(y_i - \bar{y}) \cdot (z_i - \bar{z})$	$(y_i - \bar{y}) \cdot (s_i - \bar{s})$	$(z_i - \bar{z}) \cdot (s_i - \bar{s})$
80	5831,4050	1,8595	282,8512	104,1322	1284,2975	22,9339
81	4404,1322	1,8595	139,6694	90,4959	784,2975	16,1157
82	1322,3140	0,1322	46,4876	13,2231	247,9339	2,4793
83	695,0413	1,8595	46,4876	35,9504	179,7521	9,2975
84	267,7686	0,1322	3,3058	5,9504	29,7521	0,6612
85	267,7686	0,4050	1,3967	-10,4132	-19,3388	0,7521
86	13,2231	0,4050	10,1240	2,3140	11,5702	2,0248
87	558,6777	0,1322	1,3967	-8,5950	27,9339	-0,4298
88	2876,8595	0,4050	51,5785	34,1322	385,2066	4,5702
89	5422,3140	2,6777	173,7603	120,4959	970,6612	21,5702
90	6995,0413	2,6777	330,5785	136,8595	1520,6612	29,7521
$\sum$	28654,5455	12,5455	1087,6364	524,5455	5422,7273	109,7273

Расчет коэффициентов уравнения регрессии производится по формулам (2.17):

$$b_0 = 36{,}8182 - 0{,}124189 \cdot 176{,}3636 - 3{,}553796 \cdot 3{,}3636 = 2{,}962233$$

$$b_1 = \frac{5422{,}7273 \cdot 12{,}5455 - 109{,}7273 \cdot 524{,}5455}{28654{,}5455 \cdot 12{,}5455 - (524{,}5455)^2} = \frac{10473{,}8639}{84337{,}619} = 0{,}124189$$

$$b_2 = \frac{109{,}7273 \cdot 28654{,}5455 - 5422{,}7273 \cdot 524{,}5455}{28654{,}5455 \cdot 12{,}5455 - (524{,}5455)^2} = \frac{299718{,}7075}{84337{,}619} = 3{,}553796$$

Таким образом, эмпирическое уравнение регрессии имеет вид:

$$s_t = 2{,}962233 + 0{,}124189\, y_t + 3{,}553796\, z_t$$

Подставляя соответствующие значения y_t и z_t в эмпирическое уравнение регрессии, получаем $\hat{s}_t$. Расчет отклонений e_i реальных значений от модельных представлен в таблице:

Год	S	$\hat{S}$	e_i	e_i^2	$e_i - e_{i-1}$	$(e_i - e_{i-1})^2$
80	20	22,489	-2,48873	6,19375	-	-
81	25	23,731	1,26939	1,61134	3,75811	14,1234
82	30	31,01	-1,01008	1,02026	-2,27947	5,19597
83	30	28,698	1,30183	1,69475	2,31191	5,34491
84	35	33,494	1,50614	2,26845	0,20431	0,04174
85	38	37,048	0,95234	0,90696	-0,55380	0,30669
86	40	39,531	0,46856	0,21955	-0,48378	0,23404
87	38	38,461	-0,46142	0,21291	-0,92998	0,86487
88	44	45,741	-1,74089	3,03069	-1,27947	1,63703
89	50	51,778	-1,77846	3,16293	-0,03758	0,00141
90	55	53,02	1,97965	3,91900	3,75811	14,1234
сумма	405	405	≈ 0	24,24060	4,46837	41,8734
	36,8182	36,8182				

Рассчитаем дисперсию регрессии по формуле (2.19):

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1} = \frac{24{,}2406}{11 - 2 - 1} = 3{,}03\,.$$

Определим дисперсии и стандартные ошибки коэффициентов по (2.20):

$$S_{b0}^2 = \left[\frac{1}{11} + \frac{(176{,}3636)^2 \cdot 12{,}5455 + (3{,}3636)^2 \cdot 28654{,}5455 - 2 \cdot 176{,}3636 \cdot 3{,}3636 \cdot 524{,}5455}{28654{,}5455 \cdot 12{,}5455 - (524{,}5455)^2}\right] \cdot 3{,}03$$

$$S_{b0} = \sqrt{S_{b0}^2} = \sqrt{3{,}5832} = 1{,}8929$$

$$S_{b1}^{2}=\frac{12,5455}{28654,5455\cdot 12,5455-(524,5455)^{2}}\cdot 3,03=0,00054$$

$$S_{b1}=\sqrt{S_{b1}^{2}}=\sqrt{0,00054}=0,0212$$

$$S_{b2}^{2}=\frac{28654,5455}{28654,5455\cdot 12,5455-(524,5455)^{2}}\cdot 3,03=1,0294$$

$$S_{b2}=\sqrt{S_{b2}^{2}}=\sqrt{1,0294}=1,0146$$

Рассчитаем по формуле (2.22) соответствующие t -статистики:

$t_{b0}=1,565$, $t_{b1}=5,858$, $t_{b2}=3,503$.

Проверим статистическую значимость коэффициентов на основе распределения Стьюдента. По таблицеопределим критические значения с уровнем значимости $\alpha=0,05$: $t_{кр}=t_{\frac{\alpha}{2};n-m-1}=t_{0,025;\,8}=2,306$. Таким образом, $|t_{b0}|<t_{кр}$, $|t_{b1}|>t_{кр}$, $|t_{b2}|>t_{кр}$.

По формуле (2.21) определим 95%-е интервальные оценки коэффициентов:

для β_0: (2,962233-2,306*1,8929; 2,962233+2,306*1,8929), т.е. (-1,4028; 7,3273)

для β_1: (0,124189-2,306*0,0212; 0,124189+2,306*0,0212), т.е. (0,0753; 0,1731)

для β_2: (3,553796-2,306*1,0146; 3,553796+2,306*1,0146), т.е. (1,2141; 5,8935)

Рассчитаем коэффициент детерминации по формуле (2.23):

$$R^{2}=1-\frac{24,2406}{1087,6364}=0,9777\ .$$

Анализ статистической значимости коэффициента детерминации осуществляется на основе F -статистики (2.26):

$$F=\frac{0,9777}{1-0,9777}\cdot\frac{11-2-1}{2}=175,3722$$

Определим критическую точку распределения Фишера: $F_{кр}=F_{0,05;2;8}=4,46$ с 95%-ой вероятностью. Очевидно, что 175,3722>4,46, следовательно, коэффициент детерминации статистически значим, т.е. совокупное влияние переменных Y и Z на переменную S существенно.

На основе проведенных рассуждений и вычислений можно заключить, что построенное уравнение регрессии объясняет 97,77% разброса зависимой переменной S. Однако для уверенности и обоснованности (чтобы исключить автокорреляцию) проведем исследование с помощью статистики Дарбина-Уотсона.

Рассчитаем статистику по формуле (2.27):

$$DW = \frac{41{,}8734}{24{,}2406} = 1{,}7274 .$$

Определим критические точки для уровня значимости 0,05 и числа наблюдений 11: $d_1 = 0{,}658; d_2 = 1{,}604$.

Таким образом, $1{,}604 < DW < 2{,}396$, т.е. ($d_2 < DW < 4 - d_2$), следовательно, имеются основания считать, что автокорреляция отсутствует. Это является одним из подтверждений высокого качества модели.

По всем статистическим показателям модель может быть признана удовлетворительной.

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 2:

1 .По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника (тыс.руб.) от ввода в действие новых основных фондов (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих.

Требуется:

- Построить линейную модель множественной регрессии. Записать уравнение множественной регрессии.
- Проверить статистическую значимость коэффициентов, сформулировать выводы.
- Найти скорректированный коэффициент множественной детерминации. Сравнить его с нескорректированным (общим) коэффициентов детерминации.
- С помощью критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента детерминации

№	*Y*	*X1*	*X2*	№	*Y*	*X1*	*X2*
1	7	3.5	9	11	11	7.1	22
2	7	3.6	10	12	11	7.5	23
3	7	3.9	12	13	12	7.8	25
4	7	4.1	17	14	12	7.6	27
5	8	4.2	18	15	12	7.9	29
6	8	4.5	19	16	13	8.1	30
7	9	5.3	19	17	13	8.5	32
8	9	5.5	20	18	14	8.7	32
9	10	5.6	21	19	14	9.6	33
10	10	6.1	21	20	15	9.8	36

2. Построить и проверить на качество следующую модель множественной регрессии с несколькими объясняющими переменными вида:

$$Y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3$$

где Y- число родившихся, чел.

X1- общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя (на конец года) - всего, м^2

X2- Численность населения с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума, млн.чел.

X3- Число образовательных организаций, штук

Числовые данные использовать с официального сайта федеральной службы государственной статистики: http://www.gks.ru/

Лабораторная работа №3: Нелинейная регрессия

Цель работы: По представленным эмпирическим данным научиться строить модель нелинейной регрессии, проверять качество уравнения регрессии оцениванием значения коэффициента детерминации, проверять гипотезы относительно коэффициентов уравнения регрессии, строить интервальные оценки коэффициентов и доверительные интервалы для зависимой переменной.

Методические указания:

Построение и анализ нелинейных моделей имеют свою специфику. Рассмотрим нелинейные модели, допускающими сведение их к линейным. Такие модели называют *линейные относительно параметров модели*. Будем рассматривать модели парной регрессии с целью простоты изложения и графической иллюстрации.

Существует большое разнообразие нелинейных моделей.

Логарифмическая модель моделируется формулой:

$$Y = AX^{\beta} \tag{3.1}$$

где A, β - параметры модели (константы, подлежащие определению).

Полулогарифмическими моделями являются модели вида (в случае парной регрессии):

$$\ln Y = \beta_0 + \beta X + \varepsilon \tag{3.2}$$

$$Y = \beta_0 + \beta \ln X + \varepsilon \tag{3.3}$$

Обратной моделью называется модель вида:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon \tag{3.4}$$

Показательная функция имеет вид:

$$Y = \beta_0 e^{\beta X} \tag{3.5}$$

Многообразие и сложность экономических процессов предопределяет многообразие моделей, используемых для экономического анализа. Это существенно усложняет процесс нахождения максимально адекватной формулы зависимости. Для случая парной регрессии подбор модели обычно осуществляется на основе расположения наблюдаемых точек на корреляционном поле. Однако нередки ситуации, когда расположение точек приблизительно соответствует нескольким функциям и необходимо из них выявить наилучшую.

Аналогично определяются модели множественной нелинейной регрессии – путем сведения их к линейному виду и последующей проверке на качество.

Пример. Анализируется индекс потребительских цен Y по объему денежной массы X на основании приведенных в таблице данных. Необходимо построить логарифмическую модель.

Год	Y	X	Год	Y	X
81	65	110	89	95	235
82	68	125	90	100	240
83	72,5	132	91	106,5	245
84	77,5	137	92	112	250
85	82	160	93	115,5	275
86	85,5	177	94	118,5	285
87	88,5	192	95	120	295
88	91	215	96	120,5	320
			97	121	344

Решение:

Логарифмическая модель имеет вид: $Y = AX^{\beta}$. Данная модель сводится к линейной следующим образом: $\ln Y = b_0 + b \ln X$ (глава 3.1). Для определения коэффициентов в этой модели определим логарифмы переменных Y и X, $(\ln X)^2$, $(\ln X) \cdot (\ln Y)$ и представим их в таблице.

Год	Y	X	$\ln Y$	$\ln X$	$(\ln X)^2$	$(\ln X) \cdot (\ln Y)$
81	65	110	4,1744	4,7005	22,0947	19,6218
82	68	125	4,2195	4,8283	23,3125	20,3730
83	72,5	132	4,2836	4,8828	23,8417	20,9160
84	77,5	137	4,3503	4,9200	24,2064	21,4035
85	82	160	4,4067	5,0752	25,7577	22,3649
86	85,5	177	4,4485	5,1761	26,7920	23,0259
87	88,5	192	4,4830	5,2575	27,6413	23,5694
88	91	215	4,5109	5,3706	28,8433	24,2262
89	95	235	4,5539	5,4596	29,8072	24,8625
90	100	240	4,6052	5,4806	30,0370	25,2393
91	106,5	245	4,6681	5,5013	30,2643	25,6806
92	112	250	4,7185	5,5215	30,4870	26,0532

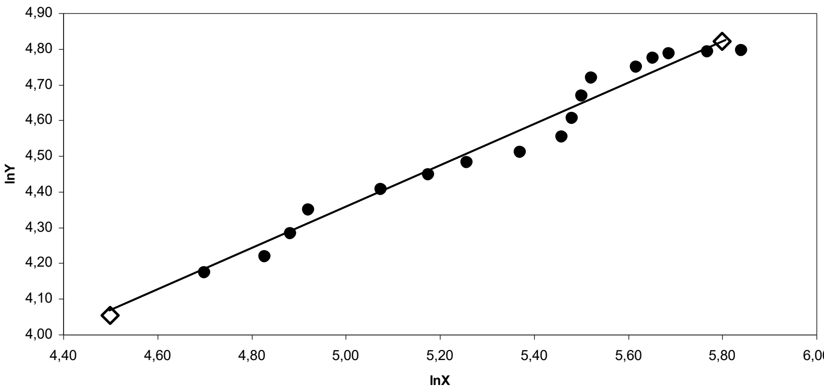
93	115,5	275	4,7493	5,6168	31,5484	26,6759
94	118,5	285	4,7749	5,6525	31,9508	26,9901
95	120	295	4,7875	5,6870	32,3420	27,2265
96	120,5	320	4,7916	5,7683	33,2733	27,6394
97	121	344	4,7958	5,8406	34,1126	28,0103
Сумма	1639	3737	77,3217	90,7392	486,3122	413,8784
Среднее	96,4118	219,8235	4,5483	5,3376	28,6066	24,3458

Затем, по аналогии с примером, приведенным в главе 1, рассчитываются коэффициенты для этой модели следующим образом:

$$\begin{cases} b = \dfrac{\overline{(\ln X)\cdot\ln(Y)} - \overline{\ln X}\cdot\overline{\ln Y}}{\overline{(\ln X)^2} - (\overline{\ln X})^2} = \dfrac{24{,}3458 - 5{,}3376\cdot 4{,}5483}{28{,}6066 - (5{,}3376)^2} = \dfrac{0{,}0688}{0{,}1166} = 0{,}5901 \\ b_0 = \overline{\ln Y} - b\cdot\overline{\ln X} = 4{,}5483 - 0{,}5901\cdot 5{,}3376 = 1{,}3986 \end{cases}$$

Следовательно, модель имеет вид: $\ln Y = 1{,}3986 + 0{,}5901\cdot\ln X$. Если свести данную модель к виду $Y = AX^{\beta}$, то получим: $Y = 4{,}0495\cdot X^{0{,}5901}$ (т.к. $\ln A = b_0 = 1{,}3986$, следовательно, $A = e^{b_0} = 4{,}0495$).

Представим графически корреляционное поле для переменных $\ln Y$ и $\ln X$, а также график рассчитанной модели $\ln Y = 1{,}3986 + 0{,}5901\cdot\ln X$.



После определения коэффициентов модели необходимо проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии, определить их интервальные оценки и рассчитать коэффициент детерминации. Расчет проводится аналогично примеру в главе 1 для модели вида $\ln Y = 1{,}3986 + 0{,}5901 \cdot \ln X$.

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 3:

Определить обратную, линейно-логарифмическую и экспоненциальную функцию вида $y = \alpha \cdot e^{\beta x}$, где y – совокупные личные расходы, x – располагаемый личный доход (по данным из приложения 1). Проверить статистическую значимость коэффициентов регрессии и доверительные интервалы коэффициентов с уровнем значимости 5%, проверить качество уравнения регрессии.

Лабораторная работа №4: Проверка модели на наличие гетероскедастичности

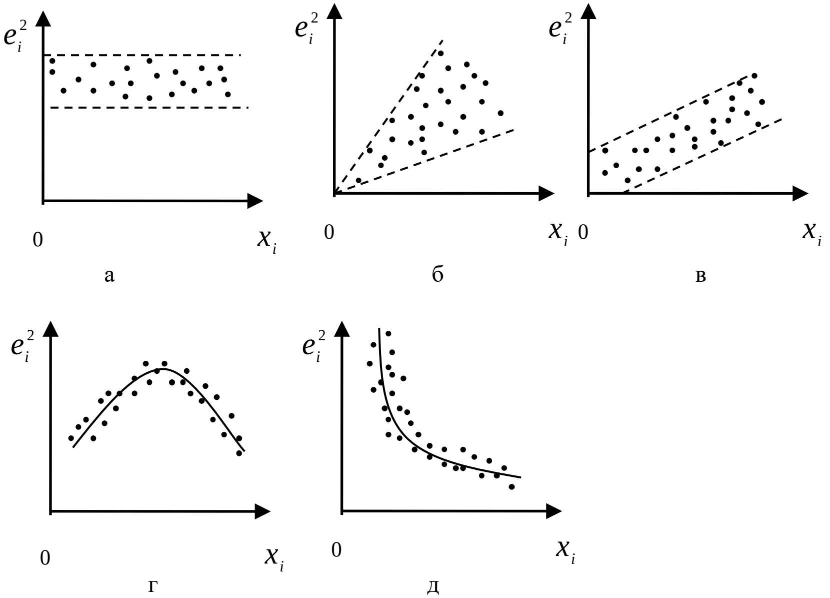
Цель работы: научиться применять методы обнаружения гетероскедастичности и методы ее смягчения.

Методические указания:

Обнаружение гетероскедастичности является довольно сложной задачей. В настоящее время существует ряд методов, позволяющих определить наличие гетероскедастичности.

1. Графический анализ остатков.

В этом случае по оси абсцисс откладываются значения объясняющей переменной X , а по оси ординат либо отклонения e_i , либо их квадраты e_i^2 . Примеры таких графиков представлены на рисунке:



2. Тест ранговой корреляции Спирмена

Значения x_i и e_i (абсолютные величины) ранжируются (упорядочиваются по величинам). Затем определяется коэффициент ранговой корреляции:

$$r_{x,e} = 1 - 6 \cdot \frac{\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} \qquad (4.1)$$

где d_i - разность между рангами x_i и e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; n - число наблюдений.

Затем рассчитывается статистика:

$$t = \frac{r_{x,e}\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{1 - r_{x,e}^2}} \qquad (4.2)$$

Если значение, рассчитанное по формуле (4.2), превышает критическое $t_{kp} = t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$, то необходимо отклонить гипотезу об отсутствии гетероскедастичности. В противном случае гипотеза об отсутствии гетероскедастичности принимается.

3. Тест Голдфелда-Квандта

В данном случае предполагается, что стандартное отклонение $\sigma_i = \sigma(\varepsilon_i)$ пропорционально значению x_i переменной X в этом наблюдении, т.е. $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^2$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Тест Голдфелда-Квандта состоит в следующем:

1. Все n наблюдений упорядочиваются по величине X.
2. Вся упорядоченная выборка после этого разбивается на три подвыборки размерностей $k,(n-2k),k$ соответственно.
3. Оцениваются отдельные регрессии для первой подвыборки (k первых наблюдений) и для третьей подвыборки (k последних наблюдений). Для парной регрессии Голдфелд и Квандт предлагает следующие пропорции: $n = 30, k = 11$; $n = 60, k = 22$. Если предположение о пропорциональности дисперсий отклонений значениям X верно, то дисперсия регрессии по первой подвыборке (рассчитываемая как $S_1 = \sum_{i=1}^{k} e_i^2$) будет существенно меньше дисперсии регрессии по третьей подвыборке (рассчитываемой как $S_3 = \sum_{i=n-k+1}^{n} e_i^2$).
4. Для сравнения соответствующих дисперсий строится соответствующая F-статистика:
$$F = \frac{S_3/(k-m-1)}{S_1/(k-m-1)} = \frac{S_3}{S_1} \qquad (4.3)$$
Здесь $(k-m-1)$ - число степеней свободы соответствующих выборочных дисперсий (m - количество объясняющих переменных в уравнении регрессии).
Построенная F-статистика имеет распределение Фишера с числом степеней свободы $v_1 = v_2 = n-m-1$.
5. Если $F_{набл} = \frac{S_3}{S_1} > F_{кр}$ (где $F_{кр} = F_{\alpha,v_1,v_2}$, α - выбранный уровень значимости), то гипотеза об отсутствии гетероскедастичности отклоняется.

Этот же тест может использоваться при предположении об обратной пропорциональности между σ_i и значениями объясняющей переменной. При этом статистика Фишера имеет вид:

$$F = \frac{S_1}{S_3} \qquad (4.4)$$

Как отмечалось ранее, гетероскедастичность приводит к неэффективности оценок, что может привести к необоснованным выводам по качеству модели. Поэтому при установлении гетероскедастичности необходимо преобразовать модель с целью устранения данного недостатка. Вид преобразования зависит от того, известны или нет дисперсии σ_i^2 отклонений $\varepsilon_i, i = 1,2,\ldots,n$.

1. Дисперсии отклонений известны (метод взвешенных наименьших квадратов)

Для простоты рассмотрим взвешенный метод наименьших квадратов на примере парной регрессии. ВМНК включает в себя следующие этапы:

1. Значения каждой пары наблюдений (x_i, y_i) делят на известную величину σ_i. Тем самым наблюдениям с наименьшими дисперсиями придаются наибольшие «веса», а с максимальными дисперсиями – наименьшие «веса». Это увеличивает вероятность получения более точных оценок.
2. По методу наименьших квадратов для преобразованных значений $\left(\frac{1}{\sigma_i}, \frac{x_i}{\sigma_i}, \frac{y_i}{\sigma_i}\right)$ строится уравнение регрессии без свободного члена с гарантированными качествами оценок.

2. Дисперсии отклонений неизвестны

Для применения ВМНК необходимо знать фактические значения дисперсий σ_i^2. На практике такие значения известны очень редко. Следовательно, чтобы применить ВМНК, необходимо сделать реалистические предположения о значениях σ_i^2.

Пример. Исследуем зависимость между доходом (X) домохозяйства и его расходом (Y) на продукты питания. Выборочные данные по 40 домохозяйствам представлены в таблице:

X	Y
25,5	14,5
26,5	11,3
27,2	14,7

X	Y
42,5	14,9
44,2	11,6
44,8	21,5

X	Y
61,0	10,9
61,7	16,1
62,5	10,5

X	Y
79,2	19,8
81,5	21,2
82,4	29,0

29,6	10,2	45,5	10,8	64,7	10,6	82,8	17,3
35,7	13,5	45,5	13,8	69,7	29,0	83,0	23,5
38,6	9,9	48,3	16,0	71,2	8,2	85,9	22,0
39,0	12,4	49,5	18,2	73,8	14,3	86,4	18,3
39,3	8,6	52,3	19,1	74,7	21,8	86,9	13,7
40,0	10,3	55,7	16,3	75,8	26,1	88,3	14,5
41,9	13,9	59,0	17,5	76,9	20,0	89,0	27,3

Построим эмпирическое уравнение регрессии и проведем анализ модели на наличие гетероскедастичности.

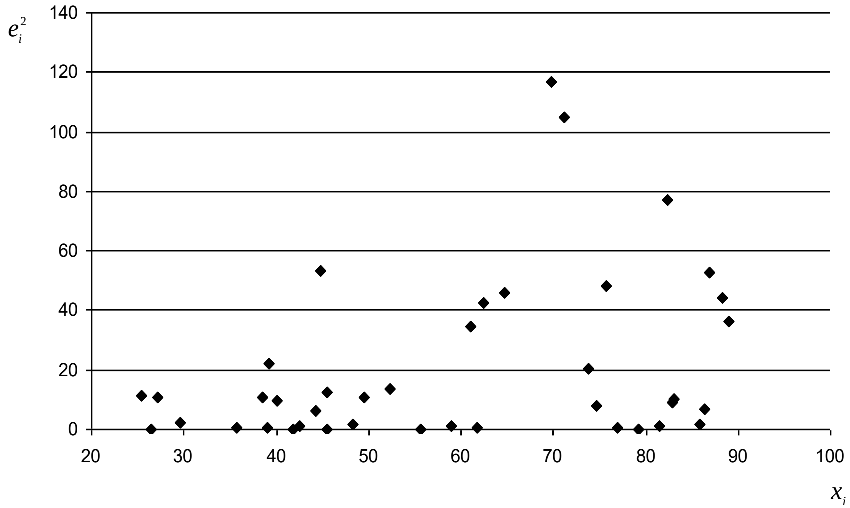
По (1.11) определим коэффициенты эмпирического уравнения регрессии: $b_0 = 7{,}04$, $b_1 = 0{,}16$. Следовательно, уравнение имеет вид: $\hat{y}_i = 7{,}04 + 0{,}16 \cdot x_i$.

Определим отклонения e_i (где $e_i = y_i - \hat{y}_i$), e_i^2, ранги X и e_i. Рассчитанные величины представим в таблице:

X	Y	$\hat{Y}$	e_i	e_i^2	Ранг X	Ранг e_i (абсол.вел.)	d_i	d_i^2
25,5	14,5	11,120	3,380	11,4244	1	25	-33	1089
26,5	11,3	11,280	0,020	0,0004	2	1	-17	289
27,2	14,7	11,392	3,308	10,9429	3	23	-30	900
29,6	10,2	11,776	-1,576	2,4838	4	15	-11	121
35,7	13,5	12,752	0,748	0,5595	5	7	-19	361
38,6	9,9	13,216	-3,316	10,9959	6	24	-4	16
39,0	12,4	13,280	-0,880	0,7744	7	9	-9	81
39,3	8,6	13,328	-4,728	22,3540	8	29	1	1
40,0	10,3	13,440	-3,140	9,8596	9	20	-2	4
41,9	13,9	13,744	0,156	0,0243	10	3	-11	121
42,5	14,9	13,840	1,060	1,1236	11	11	-15	225
44,2	11,6	14,112	-2,512	6,3101	12	16	-2	4
44,8	21,5	14,208	7,292	53,1733	13	37	-25	625
45,5	10,8	14,320	-3,520	12,3904	14	26	5	25
45,5	13,8	14,320	-0,520	0,2704	15	5	-4	16
48,3	16,0	14,768	1,232	1,5178	16	14	-13	169
49,5	18,2	14,960	3,240	10,4976	17	22	-15	225
52,3	19,1	15,408	3,692	13,6309	18	27	-17	289
55,7	16,3	15,952	0,348	0,1211	19	4	-3	9
59,0	17,5	16,480	1,020	1,0404	20	10	-5	25
61,0	10,9	16,800	-5,900	34,8100	21	30	15	225
61,7	16,1	16,912	-0,812	0,6593	22	8	5	25
62,5	10,5	17,040	-6,540	42,7716	23	32	18	324
64,7	10,6	17,392	-6,792	46,1313	24	34	21	441

69,7	29,0	18,192	10,808	116,8129	25	40	-15	225
71,2	8,2	18,432	-10,232	104,6938	26	39	25	625
73,8	14,3	18,848	-4,548	20,6843	27	28	19	361
74,7	21,8	18,992	2,808	7,8849	28	18	-2	4
75,8	26,1	19,168	6,932	48,0526	29	35	-8	64
76,9	20,0	19,344	0,656	0,4303	30	6	7	49
79,2	19,8	19,712	0,088	0,0077	31	2	11	121
81,5	21,2	20,080	1,120	1,2544	32	12	5	25
82,4	29,0	20,224	8,776	77,0182	33	38	-6	36
82,8	17,3	20,288	-2,988	8,9281	34	19	22	484
83,0	23,5	20,320	3,180	10,1124	35	21	4	16
85,9	22,0	20,784	1,216	1,4787	36	13	8	64
86,4	18,3	20,864	-2,564	6,5741	37	17	24	576
86,9	13,7	20,944	-7,244	52,4755	38	36	36	1296
88,3	14,5	21,168	-6,668	44,4622	39	33	35	1225
89,0	27,3	21,280	6,020	36,2404	40	31	4	16

Проанализируем графически остатки, представив зависимость e_i^2 от x_i:



Изучая график, можно обнаружить, что с увеличением x_i возрастает разброс значений e_i^2, что свидетельствует о наличии гетероскедастичности.

Применим для обнаружения гетероскедастичности тест ранговой корреляции Спирмена. Для этого рассчитаем по (4.1) коэффициент ранговой корреляции:

$$r_{x,e} = 1 - 6 \cdot \frac{\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - 6 \cdot \frac{7595}{40(1600 - 1)} = 0.2875$$

Рассчитаем t -статистику:

$$t = \frac{r_{x,e}\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{1 - r_{x,e}^2}} = \frac{0,2875\sqrt{(40-2)}}{\sqrt{1-(0,2875)^2}} = 1,8504 .$$

Определим критическое значение t -статистики для числа степеней свободы $v = n - 2 = 38$ и уровня значимости $\alpha = 0,10$: $t_{кр} = 1,303$. Так как рассчитанное значение t -статистики превышает критическое, то гипотеза об отсутствии гетероскедастичности отклоняется с уровнем значимости $\alpha = 0,10$.

Проверим гипотезу об отсутствии гетероскедастичности с помощью теста Голдфелда-Квандта. Для этого разобьем ряд на три подвыборки размерности 14, 12, 14.

Определим дисперсии отклонений для первой и третьей подвыборок:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{14} e_i^2 = 142,4165 \text{ и } S_3 = \sum_{i=27}^{40} e_i^2 = 315,6039 .$$

Определим значение F -статистики. $F = \dfrac{S_3}{S_1} = \dfrac{315,6039}{142,4165} = 2,2161$.

Определим критическое значение F -статистики для числа степеней свободы $v_1 = v_2 = n - m - 1 = 40 - 1 - 1 = 38$ и уровня значимости $\alpha = 0,10$: $F_{кр} = 1,51$. Так как рассчитанное значение F -статистики превышает критическое, то гипотеза об отсутствии гетероскедастичности отклоняется с уровнем значимости $\alpha = 0,10$.

Следовательно, по всем трем тестам гетероскедастичность в данной модели присутствует.

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 4:

По приведенным в таблице данным оценить при помощи МНК регрессионную зависимость расходов на образование от валового внутреннего продукта. Проанализировать полученную модель на наличие гетероскедастичности графически, при помощи теста ранговой корреляции Спирмена или теста Голдфелда-Квандта, сделать выводы. Сделать попытку смягчить проблему гетероскедастичности, исходя из предположения, что дисперсии отклонений неизвестны, но пропорциональны x_i . Проверить при помощи любого из тестов, решена ли проблема гетероскедастичности.

Страна	гос.расходы на образование	ВВП
Люксембург	0,34	5,67
Уругвай	0,22	10,13
Сингапур	0,32	11,34
Ирландия	1,23	18,88
Израиль	1,81	20,94
Венгрия	1,02	22,16
Новая Зеландия	1,27	23,83
Португалия	1,07	24,67
Гонконг	0,67	27,56
Чили	1,25	27,57
Греция	0,75	40,15
Финляндия	2,80	51,62
Норвегия	4,90	57,71
Югославия	3,50	63,03
Дания	4,45	66,32
Турция	1,60	66,97
Австрия	4,26	76,88
Швейцария	5,31	101,65
Саудовская Аравия	6,40	115,97
Бельгия	7,15	119,49
Швеция	11,22	124,15
Австралия	8,66	140,98
Аргентина	5,56	153,85
Нидерланды	13,41	169,38
Мексика	5,46	186,33
Испания	4,79	211,78
Бразилия	8,92	249,72
Канада	18,90	261,41
Италия	15,95	395,52
Великобритания	29,90	534,97
Франция	33,59	655,29
ФРГ	38,62	815,00
Япония	61,61	1040,45
США	181,30	2586,40

Лабораторная работа №5: Проверка модели на наличие автокорреляции

Цель работы: научиться применять методы обнаружения автокореляции и методы ее смягчения.

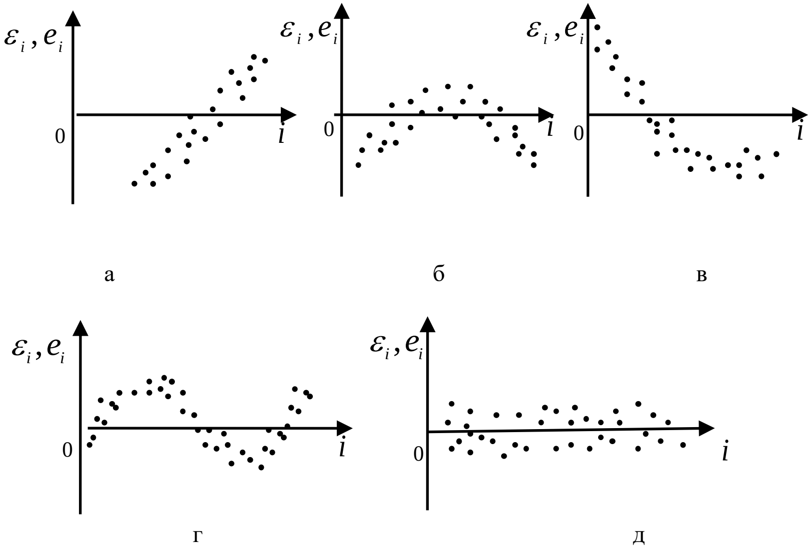
Методические указания:

Автокорреляция (последовательная корреляция) определяется как корреляция между наблюдаемыми показателями, упорядоченными во времени (временные ряды) или в пространстве (перекрестные ряды). Автокорреляция остатков (отклонений) обычно встречается в регрессионном анализе при использовании данных временных рядов и очень редко при использовании перекрестных данных.

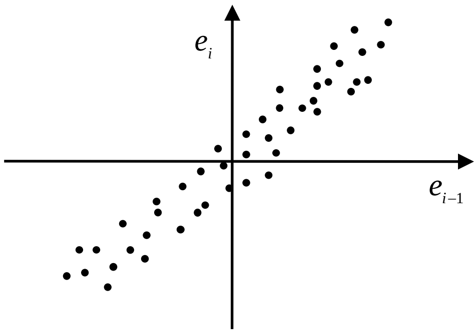
Существует несколько методов, позволяющих обнаружить автокорреляцию.

1. Графический метод

Существует несколько вариантов графического определения автокорреляции. Один из них увязывает отклонения e_i с моментами их получения $i = 1,2\ldots,n$. При этом по оси абсцисс откладывают либо время получения статистических данных, либо порядковый номер наблюдения, а по оси ординат – отклонения ε_i, либо оценки отклонений e_i.



Она становится более наглядной, если построить график зависимости e_i от e_{i-1}:



2. Критерий Дарбина-Уотсона

Этот критерий является наиболее известным для обнаружения автокорреляции.

Для анализа коррелированности отклонений используют статистику Дарбина-Уотсона:

$$DW = \frac{\sum (e_i - e_{i-1})^2}{\sum e_i^2} \tag{5.1}$$

Критические значения d_1 и d_2 определяются на основе специальных таблиц для требуемого уровня значимости α, числа наблюдений n и количества объясняющих переменных m.

Выводы об отсутствии автокорреляции остатков осуществляются по следующей схеме:

Не обращаясь к таблицам, можно пользоваться «грубым» правилом и считать, что автокорреляция остатков отсутствует, если $1{,}5 < DW < 2{,}5$. Для более надежного вывода целесообразно обращаться к табличным значениям.

В линейной регрессионной модели либо в моделях, сводящихся к линейной, наиболее целесообразным и простым преобразованием является *авторегрессионная схема первого порядка* AR(1).

Примем $y_i^* = y_i - \rho y_{i-1}$, $x_i^* = x_i - \rho x_{i-1}$, $\beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$, и с учетом (5.4) получим:

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1 x_i^* + v_i \tag{5.2}$$

Так как по предположению коэффициент ρ известен , то очевидно, y_i^* , x_i^*, v_i вычисляются достаточно просто.

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 5:

По таблице приложения 1 определить зависимость личного дохода от времени (линейная зависимость, МНК). Проверить модель на наличие авторегрессии графически (одним из способов) и аналитически (критерий Дарбина-Уотсона). Сделать выводы. Устранить автокорреляцию при помощи авторегрессионной схемы первого порядка. Коэффициент ρ определить на основе статистики Дарбина-Уотсона.

Лабораторная работа №6: Построение моделей с фиктивными переменными

Цель работы: научиться строить модели с фиктивными переменными и проверять их качество.

Методические указания:

Обычно в моделях влияние качественного фактора выражается в виде фиктивной (искусственной) переменной, которая отражает два противоположных состояния качественного фактора. В этом случае фиктивная переменная может выражаться в двоичной форме:

$$D = \begin{cases} 0, & \text{фактор не действует} \\ 1, & \text{фактор действует} \end{cases}$$

1. Модели ковариационного анализа при наличии у фиктивной переменной двух альтернатив

Сначала рассмотри простейшую модель с одной количественной и одной качественной переменной, имеющей два альтернативных состояния:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma D + \varepsilon \qquad (6.1)$$

Пусть, например, Y заработная плата сотрудника фирмы, X - стаж сотрудника, D - пол сотрудника, т.е.

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если сотрудник - женщина} \\ 1, & \text{если сотрудник - мужчина} \end{cases}$$

2. Модели ковариационного анализа при наличии у качественных переменных более двух альтернатив

Рассмотрим модель с двумя объясняющими переменными, одна из которых – количественная, а другая - качественная. Причем качественная имеет три альтернативы. Например, в расходы на содержание ребенка могут быть связаны с доходами домохозяйства и возрастом ребенка: дошкольный, младший школьный и старший школьный. Так как качественная переменная имеет три альтернативы, то по общему правилу моделирования необходимо использовать две фиктивные переменные. Таким образом, модель может быть представлена в виде:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \varepsilon \qquad (6.2)$$

где Y - расходы, X - доходы домохозяйств.

$$D_1 = \begin{cases} 0, & \text{если дошкольник} \\ 1, & \text{в противопол ожном случае} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 0, & \text{если дошкольник или младший школьник} \\ 1, & \text{в противопол ожном случае} \end{cases}$$

Образуются следующие зависимости:

3. Регрессия с одной количественной и двумя качественными переменными

Техника фиктивных переменных может быть распространена на произвольное число качественных факторов. Для простоты рассмотрим ситуацию с двумя качественными переменными.

Пусть Y - заработная плата сотрудников фирмы, X - стаж работы, D_1 - наличие высшего образования, D_2 - пол сотрудника:

$$D_1 = \begin{cases} 0, & \text{если сотрудник - женщина} \\ 1, & \text{если сотрудник - мужчина} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 0, & \text{если нет высшего образования} \\ 1, & \text{в противопол ожном случае} \end{cases}$$

Таким образом, получим следующую модель:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \varepsilon \qquad (6.3)$$

Пример. Рассмотрим зависимость между весом новорожденного Y (в граммах), X - количеством сигарет, выкуриваемых в день будущей матерью во время беременности и фиктивной переменной D, которая отражает факт того, является ребенок первенцем или нет. Пусть $D = 0$, если ребенок – первенец и $D = 1$, если ребенок не первенец. Рассмотри выборку из 20 значений:

наблюдение	Y	X	D
1	3520	10	1
2	3460	19	1
3	3000	16	1
4	3320	26	1
5	3540	4	1
6	3310	14	1
7	3360	21	1
8	3650	10	1
9	3150	22	1
10	3440	8	1

наблюдение	Y	X	D
11	3210	29	1
12	3290	15	1
13	3190	3	0
14	3060	12	0
15	3270	17	0
16	3170	14	0
17	3230	18	0
18	3700	11	0
19	3300	14	0
20	3460	9	0

Данная модель содержит одну количественную и одну качественную переменные. В общем виде запишем ее следующим образом: $Y = b_0 + b_1 X + b_2 D$. Коэффициенты b_0, b_1, b_2 определяются из формулы (2.17). Вспомогательная таблица для расчета коэффициентов имеет вид:

№	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})$	$(d_i-\bar{d})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(d_i-\bar{d})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$	$(d_i-\bar{d})\cdot(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})\cdot(d_i-\bar{d})$
1	188,5	-4,6	188,5	21,16	0,16	-867,1	75,4	-1,84
2	128,5	4,4	128,5	19,36	0,16	565,4	51,4	1,76
3	-331,5	1,4	-331,5	1,96	0,16	-464,1	-132,6	0,56
4	-11,5	11,4	-11,5	129,96	0,16	-131,1	-4,6	4,56
5	208,5	-10,6	208,5	112,36	0,16	-2210,1	83,4	-4,24
6	-21,5	-0,6	-21,5	0,36	0,16	12,9	-8,6	-0,24
7	28,5	6,4	28,5	40,96	0,16	182,4	11,4	2,56
8	318,5	-4,6	318,5	21,16	0,16	-1465,1	127,4	-1,84
9	-181,5	7,4	-181,5	54,76	0,16	-1343,1	-72,6	2,96
10	108,5	-6,6	108,5	43,56	0,16	-716,1	43,4	-2,64
11	-121,5	14,4	-121,5	207,36	0,16	-1749,6	-48,6	5,76
12	-41,5	0,4	-41,5	0,16	0,16	-16,6	-16,6	0,16
13	-141,5	-11,6	-141,5	134,56	0,36	1641,4	84,9	6,96
14	-271,5	-2,6	-271,5	6,76	0,36	705,9	162,9	1,56
15	-61,5	2,4	-61,5	5,76	0,36	-147,6	36,9	-1,44
16	-161,5	-0,6	-161,5	0,36	0,36	96,9	96,9	0,36
17	-101,5	3,4	-101,5	11,56	0,36	-345,1	60,9	-2,04
18	368,5	-3,6	368,5	12,96	0,36	-1326,6	-221,1	2,16
19	-31,5	-0,6	-31,5	0,36	0,36	18,9	18,9	0,36
20	128,5	-5,6	128,5	31,36	0,36	-719,6	-77,1	3,36
$\sum$				856,8	4,8	-8278	272	18,8

При этом: $\bar{y} = 3331{,}5$, $\bar{x} = 14{,}6$, $\bar{d} = 0{,}6$.

$$b_0 = 3331{,}5 + 11{,}93 \cdot 14{,}6 - 103{,}39 \cdot 0{,}6 = 3443{,}64$$

$$b_1 = \frac{(-8278)\cdot 4{,}8 - 272\cdot 18{,}8}{856{,}8\cdot 4{,}8 - (18{,}8)^2} = -11{,}93$$

$$b_2 = \frac{272\cdot 856{,}8 - (-8278)\cdot 18{,}8}{856{,}8\cdot 4{,}8 - (18{,}8)^2} = 103{,}39$$

Таким образом, уравнение регрессии с учетом рассчитанных коэффициентов примет вид: $\hat{Y} = 3443{,}64 - 11{,}93X + 103{,}39D$

Затем аналогично примеру, приведенному в главе 2, рассчитывается статистическая значимость коэффициентов. Рассчитанное значение t -

статистики для коэффициента b_2 при фиктивной переменной D составляет $t = 1{,}23$.

Определим для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $v = n - m - 1 = 20 - 2 - 1 = 17$ критическое значение t - статистики: $t_{кр} = t_{\frac{\alpha}{2}, n-m-1} = t_{0,025,17} = 2{,}110$. Так как $t < t_{кр}$, то коэффициент b_2 при фиктивной переменной D является статистически незначимым с уровнем значимости 0,05.

Однако можно предположить, что это объясняется малым размером выборки (20 значений). Если рассмотреть большую выборку, то обнаружится статистическая значимость данного коэффициента.

Суть теста Чоу заключается в следующем. Рассчитывается F - статистика, которая для теста Чоу имеет вид:

$$F = \frac{S_0 - S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \cdot \frac{n - 2m - 2}{m + 1} \quad (6.4)$$

где m - число количественных объясняющих переменных в уравнении регрессии (одинаково для всех трех уравнений регрессии).

Определяется $F_{кр}$ для числа степеней свободы $v_1 = m + 1$, $v_2 = n - 2m - 2$ и требуемого уровня значимости α. Если $F_{набл} < F_{кр}$ при выбранном уровне значимости, то нет смысла разбивать уравнение регрессии на части. В противном случае разбиение на подынтервалы целесообразно с точки зрения улучшения качества модели, что означает необходимость введения в уравнение регрессии соответствующе фиктивной переменной.

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 6:

1) На основе представленных в таблице данных о доходах Y, поле (мужчина-женщина) D_1 и наличии детей (D_2) необходимо построить модель с фиктивными переменными вида: $\hat{Y} = \alpha + \gamma_1 \cdot D_1 + \gamma_2 \cdot D_2$. Дайте полную интерпретацию полученной регрессии. Проверить статистическую значимость коэффициентов. Сделать выводы.

Y	91,8	38,7	34,1	30,8	50	34,3	42,6	63,5	19,9	58,9	72,5
дети	есть	есть	нет	есть	нет	есть	нет	есть	нет	нет	нет
пол	м	ж	м	ж	ж	ж	м	м	ж	м	ж

Y	30	93,7	17,8	78,8	39,7	93,9	86,2	26	37	45,8
дети	нет	нет	нет	нет	нет	есть	есть	нет	есть	есть
пол	ж	ж	ж	м	м	ж	м	ж	м	м

Дайте полную интерпретацию регрессии и проверьте статистическую значимость коэффициентов.

2). Имеются данные об объеме продаж Y (в млн.руб., год) и количестве продавцов X по выборке магазинов города до и после изменения налогового законодательства. Определите, является ли существенным данное изменение (тест Чоу).

До изменения налог.закон.			После изменения налог.закон.	
Объем продаж	Количество продавцов		Объем продаж	Количество продавцов
5	76,44		3	74,92
3	57,42		7	35,10
2	22,24		8	92,88
5	54,98		4	67,06
2	41,87		6	75,95
6	61,37		5	88,74
6	74,48		2	22,00
8	53,74		3	56,61
3	12,13		2	29,96
6	36,02		4	82,43
2	2,71		2	2,14
3	35,52		6	55,40
7	89,72		7	79,50
4	43,35		2	5,45
8	92,39		3	12,39
7	69,62		6	57,81
4	26,81		8	94,16
9	75,64		7	74,52
2	6,95		4	16,99
7	46,02		2	3,01
3	27,58		3	9,78
2	24,51		3	2,30
6	58,67		4	85,73
4	74,06		3	27,10
6	84,72			
3	3,89			
4	51,83			
6	72,86			

3). Оцените зависимость прожиточного минимума в РФ от изменения уровня цен на продовольственные товары и сезонного фактора (4 квартала). Данные найти на сайте www.gks.ru. Проверить качество модели и сформулировать выводы.

Лабораторная работа №7: Построение динамических моделей

Цель работы: научиться строить динамические модели и проверять их качество

Методические указания:

Обычно динамические модели подразделяются на два класса:

1. *модели с лагами* (модели с распределенными лагами) – содержат в качестве лаговых переменных лишь независимые (объясняющие) переменные. Примером является модель:
$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_k x_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (7.1)$$
2. *авторегрессионные модели* – модели, уравнения которых в качестве лаговых объясняющих переменных включают значения зависимых переменных.
$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (7.2)$$

Оценка модели с распределенными лагами во многом зависит от того, конечное или бесконечное число лагов она содержит.

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_k x_{t-k} + \varepsilon_t \text{ (конечное число лагов)}$$
$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t \text{ (бесконечное число лагов)} \qquad (7.3)$$

Рассмотрим два вида авторегрессионных моделей.

1. Модель адаптивных ожиданий

В данной модели в уравнение регрессии в качестве объясняющей переменной вместо текущего значения x_t вводится ожидаемое значение x_t^*:
$$y_t = \alpha + \beta x_t^* + \varepsilon_t \qquad (7.4)$$

Так как ожидаемые значения не являются фактически существующими, выдвигается предположение, что эти значения связаны следующим соотношением:
$$x_t^* - x_{t-1}^* = \gamma (x_t - x_{t-1}^*) \qquad (7.5)$$

2. Модель частичной корректировки

В этой модели в уравнение регрессии в качестве зависимой переменной входит не фактическое значение y_t, а желаемое значение y_t^*:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \tag{7.6}$$

Так как гипотетическое значение y_t^* не является фактически существующим, то относительно него выдвигается предположение *частичной корректировки*:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}) \tag{7.7}$$

по которому фактическое приращение зависимой переменной пропорционально разнице между ее желаемым значением и значением в предыдущий период.

Пример. В таблице приведены данные по располагаемому доходу домохозяйств (X)и затратами домохозяйств на розничные покупки (Y) за 22 года:

t	Y_t	X_t	t	Y_t	X_t
1	5,49	9,098	12	5,905	11,305
2	5,54	9,137	13	6,125	11,43
3	5,305	9,095	14	6,185	11,45
4	5,505	9,28	15	6,225	11,697
5	5,42	9,23	16	6,495	11,87
6	5,32	9,348	17	6,72	12,018
7	5,54	9,525	18	6,92	12,525
8	5,69	9,755	19	6,47	12,055
9	5,87	10,28	20	6,395	12,088
10	6,157	10,665	21	6,555	12,215
11	6,342	11,02	22	6,755	12,495

Необходимо оценить уравнение регрессии вида $\hat{y}_t = b + b_1 x_t + \gamma y_{t-1}$ (принять $y_0 = 5{,}4$), проверить значимость коэффициентов b_0, b_1, γ, оценить качество построенной модели при помощи коэффициента детерминации.

Для расчета коэффициентов составим вспомогательную таблицу (при этом рассчитанные средние значения равны $\bar{y}_t = 6{,}04223$, $\bar{y}_{t-1} = 5{,}98067$, $\bar{x} = 10{,}79914$):

t	Y_t	X_t	Y_{t-1}	$(y_t-\bar{y}_t)$	$(x_t-\bar{x})$	$(y_{t-1}-\bar{y}_{t-1})$	$(y_t-\bar{y}_t)^2$	$(x_t-\bar{x})^2$	$(y_{t-1}-\bar{y}_{t-1})^2$	$(x_t-\bar{x})\cdot$ $(y_t-\bar{y}_t)$	$(y_{t-1}-\bar{y}_{t-1})\cdot$ $(y_i-\bar{y}_t)$	$(x_t-\bar{x})\cdot$ $(y_{t-1}-\bar{y}_{t-1})$
1	5,49	9,098	5,4	-0,5522	-1,7011	-0,581	0,3050	2,8939	0,3371	0,9394	0,3206	0,9877
2	5,54	9,137	5,49	-0,5022	-1,6621	-0,491	0,2522	2,7627	0,2407	0,8348	0,2464	0,8155
3	5,305	9,095	5,54	-0,7372	-1,7041	-0,441	0,5435	2,9041	0,1942	1,2563	0,3248	0,7509
4	5,505	9,28	5,305	-0,5372	-1,5191	-0,676	0,2886	2,3078	0,4565	0,8161	0,3630	1,0264
5	5,42	9,23	5,505	-0,6222	-1,5691	-0,476	0,3872	2,4622	0,2262	0,9764	0,2960	0,7463
6	5,32	9,348	5,42	-0,7222	-1,4511	-0,561	0,5216	2,1058	0,3143	1,0481	0,4049	0,8136
7	5,54	9,525	5,32	-0,5022	-1,2741	-0,661	0,2522	1,6234	0,4364	0,6399	0,3318	0,8417
8	5,69	9,755	5,54	-0,3522	-1,0441	-0,441	0,1241	1,0902	0,1942	0,3678	0,1552	0,4601
9	5,87	10,28	5,69	-0,1722	-0,5191	-0,291	0,0297	0,2695	0,0845	0,0894	0,0501	0,1509
10	6,157	10,665	5,87	0,1148	-0,1341	-0,111	0,0132	0,0180	0,0122	-0,0154	-0,0127	0,0148
11	6,342	11,02	6,157	0,2998	0,2209	0,176	0,0899	0,0488	0,0311	0,0662	0,0529	0,0390
12	5,905	11,305	6,342	-0,1372	0,5059	0,361	0,0188	0,2559	0,1306	-0,0694	-0,0496	0,1828
13	6,125	11,43	5,905	0,0828	0,6309	-0,076	0,0069	0,3980	0,0057	0,0522	-0,0063	-0,0477
14	6,185	11,45	6,125	0,1428	0,6509	0,144	0,0204	0,4236	0,0208	0,0929	0,0206	0,0940
15	6,225	11,697	6,185	0,1828	0,8979	0,204	0,0334	0,8062	0,0418	0,1641	0,0374	0,1835
16	6,495	11,87	6,225	0,4528	1,0709	0,244	0,2050	1,1467	0,0597	0,4849	0,1106	0,2617
17	6,72	12,018	6,495	0,6778	1,2189	0,514	0,4594	1,4856	0,2646	0,8261	0,3486	0,6269
18	6,92	12,525	6,72	0,8778	1,7259	0,739	0,7705	2,9786	0,5467	1,5149	0,6490	1,2760
19	6,47	12,055	6,92	0,4278	1,2559	0,939	0,1830	1,5772	0,8824	0,5372	0,4018	1,1797
20	6,395	12,088	6,47	0,3528	1,2889	0,489	0,1244	1,6612	0,2395	0,4547	0,1726	0,6307
21	6,555	12,215	6,395	0,5128	1,4159	0,414	0,2629	2,0047	0,1717	0,7260	0,2125	0,5867
22	6,755	12,495	6,555	0,7128	1,6959	0,574	0,5080	2,8760	0,3299	1,2088	0,4094	0,9740
Σ							5,3998	34,1000	5,2208	13,0114	4,8397	12,5953

По формулам (2.17):

$$b_1 = \frac{(13{,}0114)\cdot 5{,}2208 - 4{,}8397\cdot 12{,}5953}{34{,}100\cdot 5{,}2208 - (12{,}5953)^2} = \frac{6{,}9724}{19{,}3877} = 0{,}36$$

$$\gamma = \frac{4{,}8397\cdot 34{,}10 - 13{,}0114\cdot 12{,}5953}{34{,}100\cdot 5{,}2208 - (12{,}5953)^2} = \frac{1{,}1513}{19{,}3877} = 0{,}06$$

$$b_0 = 6{,}04223 - 0{,}36\cdot 10{,}79914 - 0{,}06\cdot 5{,}98067 = 1{,}80$$

Таким образом, уравнение регрессии с учетом рассчитанных коэффициентов примет вид: $\hat{y}_t = 1{,}8 + 0{,}36x_t + 0{,}06y_{t-1}$.

Для определения статистической значимости коэффициентов и оценки качества уравнения регрессии составим следующую вспомогательную таблицу:

t	Y_t	$\hat{Y}_t$	e_i	e_i^2
1	5,49	5,3960	-0,0940	0,008843
2	5,54	5,4153	-0,1247	0,015542
3	5,305	5,4032	0,0982	0,009642
4	5,505	5,4558	-0,0492	0,002422
5	5,42	5,4497	0,0297	0,00088
6	5,32	5,4871	0,1671	0,02791
7	5,54	5,5448	0,0048	2,29E-05
8	5,69	5,6406	-0,0494	0,002444
9	5,87	5,8383	-0,0317	0,001006
10	6,157	5,9874	-0,1696	0,028757
11	6,342	6,1321	-0,2099	0,044047
12	5,905	6,2456	0,3406	0,11601
13	6,125	6,2646	0,1396	0,019496
14	6,185	6,2849	0,0999	0,009975
15	6,225	6,3773	0,1523	0,023186
16	6,495	6,4419	-0,0531	0,002824
17	6,72	6,5111	-0,2089	0,043635
18	6,92	6,7068	-0,2132	0,045453
19	6,47	6,5496	0,0796	0,006342
20	6,395	6,5348	0,1398	0,019545
21	6,555	6,5760	0,0210	0,000442
22	6,755	6,6862	-0,0688	0,00473
сумма			≈ 0	0,433155

По формулам (2.19) и (2.20) рассчитаем необъясненную дисперсию и стандартные отклонения случайных величин:

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-m-1} = \frac{0,43155}{22-2-1} = 0,0227 \ .$$

$$S_{b0}^2 = \left[\frac{1}{22} + \frac{(10,79914)^2 \cdot 5,2208 + (5,98067)^2 \cdot 34,1 - 2 \cdot 10,79914 \cdot 5,98067 \cdot 12,5953}{34,1 \cdot 5,2208 - (12,5953)^2} \right] \cdot 0,0227$$

$$S_{b0} = \sqrt{S_{b0}^2} = \sqrt{0,238} = 0,4879$$

$$S_{b1}^2 = \frac{5,2208}{34,1 \cdot 5,2208 - (12,5953)^2} \cdot 0,0227 = 0,0061$$

$$S_{b1} = \sqrt{S_{b1}^2} = \sqrt{0,0061} = 0,0781$$

$$S_{\gamma}^2 = \frac{34,10}{34,1 \cdot 5,2208 - (12,5953)^2} \cdot 0,0227 = 0,0399$$

$$S_{\gamma} = \sqrt{S_{\gamma}^2} = \sqrt{0,0399} = 0,1997$$

Определим значение t-статистики для каждого из коэффициентов:

$$t_{b0} = \frac{1,8}{0,4879} = 3,689 \ , \ t_{b1} = \frac{0,36}{0,0781} = 4,609 \ , \ t_{\gamma} = \frac{0,06}{0,1997} = 0,300 \ .$$

Критическое значение определим для уровня значимости 0,1 и числа степеней свободы $\nu = 22\text{-}2\text{-}1 = 19$: $t_{кр} = t_{\frac{0,1}{2},19} = 1,729$.

Очевидно, что коэффициенты b_0, b_1 являются статистически значимыми, а коэффициент γ является статистически незначимым с уровнем значимости 0,1.

Определим для рассчитанного уравнения коэффициент детерминации (2.23): $R^2 = 1 - \dfrac{0,433155}{5,3998} = 0,92$. Столь высокое значение коэффициента детерминации свидетельствует о высоком качестве модели. Поэтому не будем удалять переменную y_{t-1} из уравнения.

Представим графически зависимость фактической переменной y_t и переменной $\hat{y}_t$ от t:

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 7:

1. по данным из приложения 1 построить модель с лагами в независимых переменных с бесконечным числом лагов вида $y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + u_t$, где y_t - совокупные личные расходы, x_t - личный доход. При построении использовать преобразование Койка. Проанализировать долгосрочные и краткосрочные свойства модели.
2. предполагается, что желаемый уровень совокупных личных расходов y_t^* зависит от личных доходов x_t следующим образом: $y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t$. Частичная корректировка проходит следующим образом: $y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-i}) + \nu_t$. Используя данные из таблицы заданий в приложении 1, определите коэффициенты α, β, λ.

Лабораторная работа №8: Построение систем одновременных уравнений

Цель работы: научиться строить системы одновременных уравнений

Методические указания:

Многие экономические взаимосвязи допускают моделирование одним уравнением. Однако ряд экономических процессов моделируется не одним, а несколькими уравнениями, содержащими как повторяющиеся, так и собственные переменные. В силу этого возникает необходимость использования систем уравнений. Кроме того, в одних уравнениях определенная переменная рассматривается как объясняющая, но в то же время она входит в другое уравнение как зависимая переменная. Приведем примеры таких систем.

1. Модель «спрос-предложение»

Данная модель является одной из простейших систем одновременных уравнений. В этом случае, предполагая, что спрос Q^D и предложение Q^S в момент времени t являются линейными функциями от цены P, получаем систему:

$$\begin{cases} q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \varepsilon_{t1},\ \alpha_1 < 0 & \text{- функция спроса} \\ q_t^S = \beta_0 + \beta_1 p_t + \varepsilon_{t2},\ \beta_1 > 0 & \text{- функция предложения} \\ q_t^D = q_t^S & \text{- условие равновесия} \end{cases} \qquad (8.1)$$

2. Кейнсианская модель формирования доходов

Рассмотрим простейшую модель данного типа в предположении, что рассматривается закрытая экономика без государственных расходов:

$$\begin{cases} c_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \varepsilon_t & \text{- функция потребления} \\ y_t = c_t + i_t & \text{- макроэкономическое\_тождество} \end{cases} \qquad (8.2)$$

Здесь Y, C, I - совокупный выпуск, объемы потребления и инвестиций соответственно (y_t, c_t, i_t - значения этих переменных в момент времени t).

Качественно оценить параметры системы одновременных уравнений на основе МНК невозможно в силу получения смещенных и несостоятельных оценок. Поэтому для получения «хороших» оценок требуется использования других методов. Одним из них является косвенный метод наименьших квадратов (КМНК).

Пример. Рассмотрим следующую модель (первая функция – предложение, вторая – спрос):

$$\begin{cases} q_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \varepsilon_{1t} \\ q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

где q_t , p_t - эндогенные переменные – количество товара и цена в году t ; y_t - экзогенная переменная – доход потребителей; $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ - случайные отклонения.

На основании следующих статистических данных необходимо оценить коэффициенты функции предложения, используя для этого МНК и КМНК.

	p_t	q_t	y_t	p_t^2	y_t^2	$p_t q_t$	$p_t y_t$	$q_t y_t$
	1	8	2	1	4	8	2	16
	2	10	4	4	16	20	8	40
	3	7	3	9	9	21	9	21
	4	5	5	16	25	20	20	25
	5	1	2	25	4	5	10	2
Сумма	15	31	16	55	58	74	49	104
Среднее	3	6,2	3,2	11	11,6	14,8	9,8	20,8

Построим приведенные уравнения данной системы. Для этого вычтем из функции предложения функцию спроса:

$$(\beta_0 - \alpha_0) + (\beta_1 - \alpha_1) p_t - \alpha_2 y_t + (\varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}) = 0$$

Выразим отсюда p_t : $p_t = \dfrac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} y_t + \dfrac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{\beta_1 - \alpha_1}$.

Подставим полученное значение p_t в функцию предложения:

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} y_t + \frac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{\beta_1 - \alpha_1} \right) + \varepsilon_{1t} .$$

Таким образом, приведенные уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} p_t = \pi_{10} + \pi_{11} y_t + v_{1t} \\ q_t = \pi_{20} + \pi_{21} y_t + v_{2t} \end{cases}$$

где $\pi_{10} = \dfrac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}$, $\pi_{11} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1}$, $v_{1t} = \dfrac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{\beta_1 - \alpha_1}$

$$\pi_{20} = \beta_0 + \beta_1 \pi_{10}, \pi_{21} = \beta_1 \pi_{11}, v_{2t} = \beta_1 v_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

По имеющимся статистическим данным, приведенным в таблице, оценим коэффициенты приведенных уравнений (по обычному МНК, формула (1.11)):

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{\overline{yp} - \bar{y} \cdot \bar{p}}{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \frac{9,8 - 3,2 \cdot 3}{11,6 - (3,2)^2} = 0,1471, \hat{\pi}_{10} = \bar{p} - \hat{\pi}_{11}\bar{y} = 2,5293,$$

$$\hat{\pi}_{21} = \frac{\overline{yq} - \bar{y} \cdot \bar{q}}{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \frac{20,8 - 3,2 \cdot 6,2}{11,6 - (3,2)^2} = 0,7059\ , \quad \hat{\pi}_{20} = \bar{q} - \hat{\pi}_{21}\bar{y} = 3,9411\ .$$

Теперь можно оценить оценки b_0 и b_1 параметров β_0, β_1:

$$\beta_1 = \frac{\pi_{21}}{\pi_{11}}, \beta_0 = \pi_{20} - \beta_1 \pi_{10} \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{11}} = \frac{0,7059}{0,1471} = 4,7988, b_0 = \hat{\pi}_{20} - b_1 \hat{\pi}_{10} = 3,9411 - 4,7988 \cdot 2,5293 = -8,1965$$

Следовательно, функция предложения, рассчитанная по косвенному методу наименьших квадратов, имеет вид:

$$\hat{q}_t = -8,1965 + 4,7988\, p_t\ .$$

Далее необходимо проверить статистическую значимость коэффициентов и качество регрессии. Эти вычисления производятся аналогично примеру в главе 1.

В то же время, если рассчитать оценки b_0 и b_1 параметров β_0, β_1 непосредственно по МНК, то получим функцию предложения:

$$\hat{q}_t = 11,9 - 1,9 p_t$$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что применение МНК в несоответствующих ситуациях может существенно исказить картину действительности.

ЗАДАНИЯ к лабораторной работе 8:

На основании следующих статистических данных необходимо оценить коэффициенты функций спроса и предложения вида $\begin{cases} q_t^S = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \varepsilon_{t1} \\ q_t^D = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \varepsilon_{t2} \end{cases}$, используя для этого КМНК по следующим данным:

p_t	q_t	y_t
10	8	12
20	10	14
30	7	13
40	5	15
50	1	12
60	2	17

Методические указания по самостоятельной работе

Этапы самостоятельной работы, формирование и контроль компетенций.

Этап работы	Показатели достижения результата	Контроль
Выполнение ндивидуаль-ных заданий	Студент определяет формулы для решения полученной задачи, выбирает метод решения и описывает его ход, формулирует ответ и дает его экономическую интерптацию.	Проверка свое-временности и правиль-ности.
Проработка лекцион-ного матери-ала	Студент изучает теоретический материал и запоминает основные понятия тем, согласно содержанию дисципли ны.	Зачет или экзамен.

Перед выполнением самостоятельной работы необходимо изучить теоретическую часть и приведенные примеры.

Проработка лекционного материала основана на изучении лекций и учебных пособий с последующим ответом на вопросы.

Вопросы для проработки лекционного материала

1. Эмпирическое и теоретическое уравнение регрессии. Метод наименьших квадратов.
2. Определение эмпирических коэффициентов регрессии при помощи МНК.
3. Свойства оценок МНК. Проверка качества уравнения регрессии
4. Анализ точности определения оценок коэффициентов регрессии. Проверка гипотез относительно коэффициентов линейного уравнения регрессии.
5. Определение интервальных оценок коэффициентов линейного уравнения регрессии. Определение доверительных интервалов для зависимой переменной

6. Понятие нелинейной регрессии. Линейные относительно параметров модели.
7. Логарифмическая модель и определение ее коэффициентов. Эластичность зависимой переменной.
8. Полулогарифмические модели: лог-линейная модель и линейно-логарифмическая модель.
9. Обратная модель. Примеры экономических ситуаций, описываемых с ее помощью.
10. Показательная модель. Примеры экономических ситуаций, описываемых с ее помощью.
11. Выбор формы модели. Примеры экономических ситуаций, описываемых с помощью нелинейных регрессионных моделей.
12. Расчет коэффициентов множественной линейной регрессии.
13. Расчет коэффициентов множественной линейной регрессии для уравнения с двумя переменными.
14. Анализ качества эмпирического уравнения множественной линейной регрессии.
15. Определение выборочных дисперсий эмпирических коэффициентов регрессии.
16. Проверка статистической значимости коэффициентов уравнения множественной регрессии. Проверка общего качества уравнения регрессии.
17. Способы обнаружения гетероскедастичности. Графический анализ остатков для обнаружения гетероскедастичности.
18. Тест ранговой корреляции Спирмена. Тест Голдфелда-Квандта.
19. Методы смягчения проблемы гетероскедастичности. Метод взвешенных наименьших квадратов.
20. Понятие автокорреляции. Причины возникновения автокорреляции. Виды автокорреляции.
21. Способы обнаружения автокорреляции. Графический метод для обнаружения автокорреляции. Критерий Дарбина-Уотсона.
22. Методы устранения автокорреляции. Авторегрессионная схема первого порядка. Поправка Прайса-Винстена.
23. Авторегрессионная схема первого порядка. Метод Хилдрета-Лу. Метод первых разностей.
24. Понятие фиктивных переменных. Необходимость их использования. Модели дисперсионного анализа.
25. Модели ковариационного анализа. Модели ковариационного анализа при наличии у фиктивной переменной двух альтернатив. Ловушка фиктивной переменной.

26. Модели ковариационного анализа при наличии у качественных переменных более двух альтернатив.
27. Регрессия с одной количественной и двумя качественными переменными. Сравнение двух регрессий.
28. Тест Чоу. Использование фиктивных переменных в сезонном анализе.
29. Временной ряд. Лаговые переменные. Виды динамических моделей. Причины наличия лагов.
30. Оценка моделей с лагами в независимых переменных. Модели с конечным и бесконечным числом лагов. Понятие краткосрочного, долгосрочного и промежуточного мультипликаторов.
31. Метод последовательного увеличения количества лагов для оценки моделей с бесконечным числом лагов. Метод Койка для оценки моделей с бесконечным числом лагов.
32. Авторегрессионные модели. Модель адаптивных ожиданий. Модель частичной корректировки.
33. Прогнозирование с помощью временных рядов. Проверка качества прогноза.
34. Понятие систем одновременных уравнений и необходимость их использования. Модель «спрос-предложение».
35. Эндогенные и экзогенные переменные. Структурные уравнения модели. Приведенные уравнения.
36. Косвенный метод наименьших квадратов.
37. Проблема идентификации: неидентифицируемость и сверхидентифицируемость. Условия идентифицируемости. Рекурсивные модели.
38. Метод наименьших квадратов для рекурсивных моделей. Двухшаговый метод наименьших квадратов.

Задания на индивидуальную работу.

Задание 1.

Для модели, в которой переменная «расходы на товар или услугу» (по вариантам, приложение 1) объясняется переменной «личный доход», построить линейную и логарифмическую модели, для которых:

- проверить статистическую значимость коэффициентов регрессии с уровнем значимости 10%;
- определить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с уровнем значимости 5%;
- определить доверительные интервалы для зависимой переменной при $x^* = 1000$ для уровня значимости 10%;
- проверить качество уравнения регрессии и статистическую значимость коэффициента детерминации (уровень значимости 10%).

Вид товара (по вариантам)	Вариант
Питание	1
Одежда	2
Бензин	3
Моторное масло	4
Табак	5
Косметика	6
Лекарство	7
Плата за жилье	8
Газ	9
Вода	10
Телефон	11
Местный транспорт	12
Воздушный транспорт	13
Медицинские услуги	14
Услуги стоматологов	15
Отдых	16
Частное образование	17
Кухонное оборудование	18
Посуда	19
Ювелирные изделия	20

Задание 2.

Постройте модель множественной линейной регрессии, где y - расходы на товар или услугу (по вариантам), x - личный располагаемый доход, p - индекс относительных цен (по вариантам).

Индекс относительных цен рассчитывается как отношение дефлятора цен на товар к дефлятору общих расходов, полученное значение умножить на 100.

Оценить качество уравнения регрессии при помощи коэффициента детерминации.

Задание 3.

Модель, в которой переменная «расходы на товар или услугу» (по вариантам) объясняется переменной «личный доход» (использовать уже рассчитанную модель из индивидуальной №1), проверить на наличие при помощи теста ранговой корреляции Спирмена или теста Голдфелда-Квандта, сделать выводы. Сделать попытку смягчить проблему гетероскедастичности, исходя из предположения, что дисперсии отклонений неизвестны, но пропорциональны x_i. Проверить при помощи графического теста, решена ли проблема гетероскедастичности.

Задание 4.

Построить модель, в которой переменная «расходы на товар или услугу» (по вариантам) объясняется переменной «время». Предположив наличие автокорреляции, попытаться устранить ее при помощи авторегрессионной схемы первого порядка. Коэффициент ρ определить а) на основе статистики Дарбина-Уотсона б) метода первых разностей. Сделать выводы.

Задание 5.

По таблице индивидуальных заданий оценить зависимость личного дохода от текущих расходов (по вариантам) как модель с бесконечным числом лагов в независимых переменных. Использовать преобразование Койка. Сделать прогноз (x выбрать самостоятельно).

Приложения

Приложение 1

Личные потребительские расходы населения США (млрд.дол., цены 1972г)

статья	года 1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966
личный доход	544,9	559,7	575,4	602	622,9	658	700,4	740,6
личный рас. доход	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8
сов. лич. расходы	440,4	452	461,4	482	500,5	528	557,5	585,7
Питание	99,7	100,9	102,5	103,5	104,6	108,8	113,7	116,6
Одежда	36,3	36,6	37,3	38,9	39,6	42,6	44,2	46,9
Бензин	13,7	14,2	14,3	14,9	15,3	16	16,8	17,8
Моторное масло	5,2	5,2	4,7	4,7	4,9	5,2	5,5	5,6
Табак	10,7	10,9	11,2	11,2	11,4	11,3	11,6	11,7
Косметика	3,1	3,5	3,9	4,2	4,5	4,8	5,3	5,9
Лекарство	3,5	3,9	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,5
Плата за жилье	60,9	64	67	70,7	74	77,4	81,6	85,3
Газ	3,9	4,1	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,4
Вода	2	2,2	2,3	2,5	2,7	2,8	2,9	3
Телефон	4,7	5	5,4	5,7	6,1	6,6	7,3	8,1
Мес. транспорт	3,9	3,9	3,6	3,6	3,5	3,4	3,3	3,3
Возд. транспорт	0,9	0,9	1	1,1	1,2	1,4	1,6	1,7
Медицинские услуги	8,8	9	9,1	9,8	10,2	11,9	12,1	12,1
Услуги стоматологов	3,2	3,2	3,3	3,5	3,4	3,9	4	4,1
Отдых	9,6	10	10,4	10,9	11,3	11,6	11,9	12,4
Частное образование	5,6	6	6,3	6,6	7	7,4	8,1	8,8
Кух. Обор.	4,2	4,2	4,2	4,4	4,6	5,1	5,2	5,8
Посуда	2,6	2,5	2,5	2,6	2,5	2,8	3,1	3,5
Юв. Изд.	2,2	2,2	2,2	2,3	2,5	2,6	2,9	3,6

статья	года								
	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
личный доход	774	816,2	853,5	876,8	900	951,4	1007,9	1004,8	1010,8
личный рас. доход	674	701,3	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8
сов. лич. расходы	603	634,4	657,9	672,1	696,8	737,1	768,5	763,6	780,2
Питание	119	123,4	125,9	129,4	130	132,4	129,4	128,1	132,3
Одежда	46,9	49	50	49,4	51,8	55,4	59,3	58,7	60,9
Бензин	18,4	19,9	21,4	22,9	24,2	25,4	26,2	24,8	25,6
Моторное масло	5,6	5,3	5	4,7	4,6	5	5,4	4,2	4,2
Табак	11,8	11,7	11,4	11,7	11,8	12,2	12,8	13	12,9
Косметика	6,3	6,6	6,8	7	7,1	7,4	7,9	7,8	7,4
Лекарство	5,8	6,4	7	7,7	8	8,7	9,3	9,8	9,7
Плата за жилье	89,1	93,5	98,4	102	106,4	112,5	118,2	124,2	128,3
Газ	5,7	5,9	6,2	6,3	6,4	6,6	6,4	6,5	6,6
Вода	3	3,1	3,3	3,5	3,6	3,9	4,1	4,3	4,4
Телефон	8,7	9,5	10,4	11,2	11,7	12,4	13,7	14,4	15,9
Мес. транспорт	3,2	3,3	3,5	3,4	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5
Возд. транспорт	2,1	2,4	2,8	2,7	2,8	3,1	3,4	3,7	3,6
Медицинские услуги	12,5	12,8	13,6	14,4	14,8	15,7	16,9	17,2	17,8
Услуги стоматологов	4,3	4,4	4,8	5,1	5,1	5,3	6,1	6,2	6,4
Отдых	12,7	13,4	14,1	14,6	15,1	15,8	16,9	17,6	17,9
Частное образование	9,3	10	10,6	10,9	11,2	11,7	11,9	11,7	12,1
Кух. Обор.	6	6,6	7	7,3	7,9	8,9	9,9	9,9	9,3
Посуда	3,7	3,8	3,8	3,7	3,8	4	4,2	4,1	3,7
Юв. Изд.	3,9	4,1	4,1	4,1	4,3	4,6	5,2	5,4	5,5

статья	года							
	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
личный доход	1056	1105,4	1162,3	1200,7	1209,5	1248,6	1254,4	1284,6
личный рас. доход	907	942,9	988,8	1015,5	1021,6	1049,3	1058,3	1095,4
сов. лич. расходы	823	864,3	903,2	927,6	931,8	950,9	963,3	1009,2
Питание	140	145,2	146,1	149,3	153,2	153	154,6	161,2
Одежда	63,8	67,5	73,6	76,7	77,9	82,6	84,2	88,5
Бензин	26,8	27,7	28,3	27,4	25,1	25,1	25,3	26,1
Моторное масло	4,6	4,4	4,7	4,7	3,9	3,6	3,6	4
Табак	13,7	13,1	13,5	13,7	13,6	14	13,7	13
Косметика	7,5	7,8	8,1	8,4	8,3	8,3	8,1	8,1
Лекарство	10	10,2	10,4	10,8	10,7	10,6	10,3	10,2
Плата за жилье	135	141,3	148,5	154,8	159,8	164,8	167,5	171,3
Газ	6,7	6,5	6,7	6,6	6,6	6,3	6,4	6
Вода	4,3	4,4	4,5	4,8	5,1	5,1	5,1	5,1
Телефон	17,1	18,3	20	21,6	22,7	23,3	24,1	24,2
Мес. транспорт	3,6	3,6	3,7	3,8	3,5	3,2	3,2	3,1
Возд. транспорт	4	4,3	4,7	5,1	4,6	4,1	3,7	3,8
Медицинские услуги	18	19,2	18,6	20,1	21,5	22	22,4	23,3
Услуги стоматологов	6,9	7,2	8,1	7,9	8,1	8,5	8,6	8,5
Отдых	19,1	20,4	21,8	22,2	23,4	26,1	27,7	29,8
Частное образование	12,2	12,2	12,7	13,1	13,3	13,7	13,6	13,7
Кух. Обор.	9,7	10,5	11,1	11,9	12,1	12,4	11,9	12,7
Посуда	3,9	4,1	4,3	4,5	4,4	4,4	4,3	4,7
Юв. Изд.	6,1	6,3	6,8	6,7	6,3	6,6	6,7	7

Дефляторы цен для личных потребительских расходов (1972г.=100%)

статья	года 1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966
сов. лич. расходы	70,6	71,9	72,6	73,7	74,8	75,9	77,2	79,4
Питание	69	69,8	70,6	71,4	72,4	73,7	75,5	79,4
Одежда	72	72,9	73,4	73,7	74,5	75	75,8	78
Бензин	82,2	84,5	83,9	84,5	84,5	84,4	87,5	89,5
Моторное масло	77,7	76,2	79,3	79,3	81	79,1	80,8	83
Табак	61	63,2	63,8	64,4	65,8	67,1	69,8	72,9
Косметика	84,6	84,5	84,3	85,1	85,4	85,5	85,1	84,1
Лекарство	98,8	98,9	97,8	96,2	95,4	95,2	94,8	95,1
Плата за жилье	73,8	75,1	76,3	77,4	78,4	79,3	80,3	81,5
Газ	74,9	79,8	80,9	80,8	80,8	81,1	81,4	81,9
Вода	58,4	60,2	61,8	63,4	65,4	66,5	68	70,5
Телефон	88,3	89,6	89,9	89,9	90	90,1	88,9	87
Мес. транспорт	51,10	52,60	54,70	57,10	58,50	60,30	61,70	64,50
Возд. транспорт	68,90	73,60	78,40	82,40	76,40	76,10	76,50	76,60
Медицинские услуги	56,1	57,6	59,1	60,8	62,2	63,7	65,8	69,9
Услуги стоматологов	60,90	62,10	62,40	64,00	65,90	67,50	69,60	72,00
Отдых	61,10	63,70	65,80	67,50	69,40	71,80	73,90	76,60
Частное образование	61,50	62,80	63,80	65,30	66,90	68,50	70,50	73,60
Кух. Обор.	103,60	102,20	100,10	97,80	95,90	94,90	92,60	91,10
Посуда	68,20	70,30	71,10	72,90	75,30	76,60	76,50	78,10
Юв. Изд.	86,50	86,40	86,50	86,50	86,90	92,20	89,60	85,40

статья	года								
	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
сов. лич. расходы	81,4	84,6	88,4	92,5	96,5	100	105,7	116,3	125,2
Питание	80	83,1	87,5	92,5	94,9	100	114,3	130,8	140,1
Одежда	81,4	86	91	94,8	97,8	100	103,6	110,5	114,2
Бензин	92,4	93,8	97	97,9	98,7	100	109,4	147,7	157,7
Моторное масло	85,6	88,3	90,2	93,6	99,5	100	114,8	182,4	197,4
Табак	75,5	80,3	85,6	92	95,7	100	102,8	107,8	115,5
Косметика	85,5	88,1	92,1	94,4	97,4	100	102,7	113,9	128,3
Лекарство	94,7	94,9	95,9	98	99,7	100	100,3	103,8	112,5
Плата за жилье	83,2	85,4	88,4	92,1	96,5	100	104,8	110,6	116,8
Газ	81,7	82,5	84	88,6	95	100	104,5	117,7	140,9
Вода	72,2	75,6	80,7	87	96,3	100	105,2	111,5	122,3
Телефон	88	88,1	89,2	90,3	94,7	100	102,6	107	110,4
Мес. транспорт	69,00	73,30	78,30	88,60	95,20	100,00	101,20	104,60	112,70
Возд. транспорт	76,80	78,40	84,30	90,90	97,50	100,00	103,90	112,70	122,70
Медицинские услуги	74,8	78,9	84,4	90,7	97	100	103,1	112,5	126,4
Услуги стоматологов	75,60	79,70	85,40	90,20	96,00	100,00	103,00	110,90	122,30
Отдых	79,60	84,40	88,60	93,10	97,50	100,00	103,30	109,80	117,20
Частное образование	76,80	80,30	85,10	90,60	95,30	100,00	107,30	120,40	131,20
Кух. Обор.	91,20	93,10	95,10	97,50	99,50	100,00	100,10	105,20	116,90
Посуда	80,30	86,80	90,40	93,20	95,80	100,00	105,70	118,60	139,50
Юв. Изд.	86,50	89,20	94,20	95,80	97,70	100,00	103,60	109,50	117,40

статья	года							
	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
сов. лич. расходы	131,7	139,3	149,1	162,5	179	194,5	206	213,6
Питание	143,4	149,6	164,9	182,4	196,6	213,3	222,1	226,5
Одежда	117,9	122,5	125,5	129,2	134,3	138,4	141	143,6
Бензин	164,3	173,7	181,3	243,2	337,9	376,4	356,6	344,9
Моторное масло	212	239,9	252,7	340,2	470,8	571,7	565,3	531,2
Табак	120,4	126,2	133	141	152	164,2	182,7	218,4
Косметика	135,6	143,3	151,1	161,5	176,2	194,4	210,5	222,9
Лекарство	119,3	127	135,9	145,7	159,1	176,6	194,7	211,4
Плата за жилье	123,4	131,6	141,2	152,5	166,5	183,2	199,3	212,1
Газ	164,8	195,6	214,9	249,2	297	336,8	404,2	473,4
Вода	135,9	150,5	167,4	175,1	186,1	208,4	233,2	252,6
Телефон	114,3	115,6	117	116,6	118,7	130,1	143,5	152,6
Мес. транспорт	122,70	129,30	134,90	143,60	166,30	196,10	215,00	220,30
Возд. транспорт	132,90	141,00	147,50	159,20	217,00	273,60	302,00	319,90
Медицинские услуги	140,6	153,6	166,2	181,6	200,5	222,5	243,5	262,4
Услуги стоматологов	130,20	139,90	149,70	162,30	181,60	198,90	214,30	228,70
Отдых	122,40	127,60	134,20	142,60	153,10	163,40	171,80	178,80
Частное образование	140,20	149,10	161,00	177,40	198,20	218,40	231,70	242,40
Кух. Обор.	123,40	127,80	134,40	141,70	148,80	157,40	167,00	171,90
Посуда	148,30	154,50	163,80	177,30	195,70	215,30	224,40	228,60
Юв. Изд.	121,20	123,00	129,50	141,50	176,70	183,70	179,50	182,40

Приложение 2

Справочные таблицы

Распределение Стьюдента (t-распределение)

		уровень значимости						
		0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
число степеней свободы	1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
	2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	50	0,255	0,680	1,296	1,676	2,009	2,403	2,678
	60	0,255	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	80	0,254	0,679	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
	100	0,254	0,678	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626
	120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,467
	200	0,254	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601

Распределение Фишера (F-распределение)

$\alpha = 0{,}10$

число степеней свободы v2 \ число степеней свободы v1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,50	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,12	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,08	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,96	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,94	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,92	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,73	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,68	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,62	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26

Распределение Фишера (F-распределение)

$\alpha = 0,05$

	число степеней свободы v1																		
число степеней свободы $v2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161	200	216	225	230	234	237	239	271	242	243	244	246	248	249	250	251	252	253
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35

Распределение Дарбина-Уотсона

$\alpha = 0{,}01$ (n – объем выборки, m – число объясняющих переменных в уравнении регрессии)

n	m=1		m=2		m=3		m=4	
	d1	d2	d1	d2	d1	d2	d1	d2
6	0,390	1,142						
7	0,433	1,036	0,294	1,676				
8	0,497	1,003	0,343	1,489	0,229	2,102		
9	0,554	0,998	0,408	1,389	0,279	1,873	0,183	2,433
10	0,604	1,001	0,466	1,333	0,340	1,733	0,230	2,193
11	0,633	1,010	0,319	1,297	0,396	1,640	0,286	2,030
12	0,697	1,023	0,369	1,274	0,449	1,373	0,339	1,913
13	0,738	1,038	0,616	1,261	0,499	1,326	0,391	1,826
14	0,776	1,034	0,660	1,234	0,347	1,490	0,441	1,737
15	0,811	1,070	0,700	1,232	0,391	1,464	0,488	1,704
16	0,844	1,086	0,737	1,232	0,633	1,446	0,332	1,663
17	0,874	1,102	0,772	1,233	0,672	1,432	0,374	1,630
18	0,902	1,118	0,803	1,239	0,708	1,422	0,613	1,604
19	0,928	1,132	0,833	1,263	0,742	1,413	0,630	1,384
20	0,932	1,147	0,863	1,271	0,773	1,411	0,683	1,367
21	0,973	1,161	0,890	1,277	0,803	1,408	0,718	1,334
22	0,997	1,174	0,914	1,284	0,831	1,407	0,748	1,343
23	1,018	1,187	0,938	1,291	0,838	1,407	0,777	1,334
24	1,037	1,199	0,960	1,298	0,882	1,407	0,803	1,328
25	1,033	1,211	0,981	1,303	0,906	1,409	0,831	1,323
26	1,072	1,222	1,001	1,312	0,928	1,411	0,833	1,318
27	1,089	1,233	1,019	1,319	0,949	1,413	0,878	1,313
28	1,104	1,244	1,037	1,323	0,969	1,413	0,900	1,313
29	1,119	1,234	1,034	1,332	0,988	1,418	0,921	1,312
30	1,133	1,263	1,070	1,339	1,006	1,421	0,941	1,311
35	1,193	1,307	1,140	1,370	1,083	1,439	1,028	1,312
40	1,246	1,344	1,198	1,398	1,148	1,437	1,098	1,318
50	1,324	1,403	1,283	1,446	1,243	1,491	1,203	1,338
100	1,322	1,362	1,303	1,383	1,482	1,604	1,462	1,623