

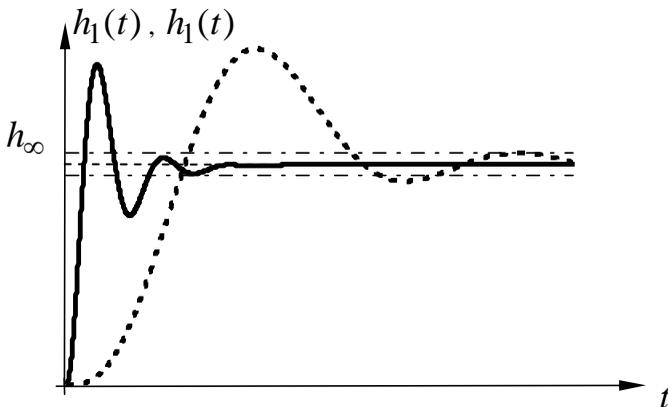


Факультет дистанционного обучения  
ТУСУР

Б.И. Коновалов, Ю.М. Лебедев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие



ТОМСК — 2010

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра промышленной электроники (ПРЭ)**

**Б.И. Коновалов, Ю.М. Лебедев**

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Учебное пособие**

**2010**

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой  
«Электропривод и автоматизация промышленных  
установок» политехнического института ФГПУ ВПО  
«Сибирский федеральный университет»

**Иванчура В.И.;**

доктор технических наук, профессор кафедры  
«Электропривод и электрооборудование»

Томского политехнического университета

**Аристов А.В.**

Корректор: Осипова Е.А.

**Коновалов Б.И., Лебедев Ю.М.**

Теория автоматического управления: Учебное методическое пособие. — Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2010. — 162 с.

Учебное пособие соответствует программе семестрового курса лекций по теории линейных систем автоматического управления. Содержит основные понятия, передаточные функции, частотные и временные характеристики различных звеньев и систем автоматического управления.

Исследуется устойчивость непрерывных и импульсных систем, производится оценка качества переходных и установившихся режимов работы этих систем. Рассмотрены методы синтеза последовательных корректирующих устройств.

Предназначено для студентов всех форм обучения.

© Коновалов Б.И.,

Лебедев Ю.М., 2010

© Факультет дистанционного  
обучения, ТУСУР, 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>1 Классификация САУ .....</b>	<b>9</b>
<b>2 Математическое описание линейных непрерывных САУ .....</b>	<b>17</b>
2.1 Линеаризация статических характеристик и дифференциальных уравнений .....	17
2.2 Понятие передаточной функции .....	20
2.3 Частотные функции и характеристики .....	30
2.4 Временные функции и характеристики .....	34
2.5 Структурные схемы и их преобразование .....	38
<b>3 Типовые звенья САУ .....</b>	<b>44</b>
3.1 Понятие типового звена. Классификация типовых динамических звеньев САУ .....	44
3.2 Минимально-фазовые звенья .....	45
3.2.1 Звенья первого порядка .....	45
3.2.1.1 Пропорциональное (безынерционное) звено .....	45
3.2.1.2 Интегрирующее (идеальное) звено .....	46
3.2.1.3 Дифференцирующее (идеальное) звено .....	48
3.2.1.4 Инерционное звено (апериодическое звено первого порядка) .....	50
3.2.1.5 Форсирующее звено .....	55
3.2.1.6 Инерционное форсирующее звено .....	57
3.2.1.7 Изодромное звено .....	60
3.2.1.8 Реальное дифференцирующее звено .....	62
3.2.2 Звенья второго порядка .....	63
3.2.2.1 Апериодическое звено второго порядка .....	64
3.2.2.2 Колебательное звено .....	66
3.2.2.3 Консервативное звено .....	72
3.3 Особые звенья линейных САУ .....	74
3.3.1 Неминимально-фазовые звенья .....	74
3.3.2 Звено чистого запаздывания .....	78
<b>4 Устойчивость САУ .....</b>	<b>80</b>
4.1 Передаточные функции линейных непрерывных САУ .....	80
4.2 Понятие устойчивости линейных непрерывных САУ .....	82

4.3 Критерий устойчивости Гурвица.....	84
4.4 Критерий устойчивости Михайлова.....	92
4.5 Критерий устойчивости Найквиста.....	102
4.6 Оценка устойчивости САУ по логарифмическим частотным характеристикам. Запасы устойчивости.....	108
4.7 Частотные характеристики разомкнутых систем.....	112
<b>5 Оценка качества управления .....</b>	<b>117</b>
5.1 Показатели качества управления в статическом режиме работы САУ. Статические и астатические системы.....	117
5.2 Показатели качества в динамических режимах работы САУ .....	127
5.3 Косвенные методы оценки качества переходного процесса .....	128
5.3.1 Частотные критерии оценки качества.....	129
5.3.2 Корневые критерии оценки качества .....	135
5.3.3 Интегральные критерии качества.....	137
<b>6 Коррекция САУ .....</b>	<b>138</b>
6.1 Понятие коррекции. Способы коррекции САУ.....	138
6.2 Синтез последовательных корректирующих устройств .....	146
6.3 Оптимальные характеристики САУ. Настройка систем на технический и симметричный оптимумы .....	152
<b>Литература .....</b>	<b>161</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Если речь идет об управлении, то подразумевается, что имеется объект управления, т.е. некий механизм, агрегат или устройство, некий технологический, энергетический или транспортный процесс, желаемое поведение или протекание которого должно быть обеспечено.

Поведение объекта управления, результат его действия определяется некоторыми показателями. Чаще всего ими являются значения каких-то физических величин, которые называют выходными величинами или выходными координатами объекта управления.

В реальных условиях на каждое устройство или процесс многочисленные воздействия оказывает внешняя среда. Все воздействия, с точки зрения их влияния на действие объекта на его выходные величины, разделяются на две принципиально отличительные группы. Некоторые из воздействий обеспечивают желаемое изменение поведения объекта, достижение поставленных целей. Такие воздействия называют *управляющими*, при их отсутствии задача управления вообще не имеет решения. Другие воздействия, напротив, мешают достижению цели, и изменить их, как правило, невозможно. Такие воздействия называют *возмущающими* (или, просто, возмущениями).

Задача управления, по существу, заключается в формировании такого закона изменения управляющих воздействий, при котором достигается желаемое поведение объекта независимо от наличия возмущений.

Сложная и разносторонняя задача управления включает более узкую задачу регулирования, которую главным образом и будем рассматривать в дальнейшем. Задача регулирования заключается в поддержании выходных величин объекта равными (или пропорциональными) некоторым эталонным функциям времени — задающим воздействиям. Последние могут быть постоянными или изменяющимися как по заданному, так и по заранее неизвестному закону.

Объект управления может принадлежать как к неживой природе, в частности быть техническим устройством, так и к

живой природе (коллектив людей). В свою очередь, само управление также может осуществляться как человеком (пилот управляет самолетом), так и техническим устройством (самолетом управляет автопилот).

Управление, осуществляемое без участия человека, называется автоматическим управлением. Предметом настоящей дисциплины является теория автоматического управления техническими объектами. Общая теория управления, охватывающая как неживую, так и живую природу, является предметом науки кибернетики. Теория автоматического управления — часть кибернетики.

Для осуществления автоматического управления создается система, состоящая из объекта управления и управляющего устройства, или регулятора. Такая система соответственно называется системой автоматического управления.

Впервые, по-видимому, с необходимостью построения регуляторов столкнулись создатели высокоточных механизмов, в первую очередь — часов. Даже небольшие, но все время действующие в них помехи приводили в конечном итоге к отклонениям от нормального хода, недопустимым по условиям точности. Противодействовать этим помехам (возмущениям) чисто конструктивными средствами, например улучшая обработку деталей, повышая их массу или увеличивая развиваемые устройствами полезные усилия, не удавалось, и для решения проблемы точности в состав системы стали вводить регуляторы. На рубеже нашей эры арабы снабдили поплавковым регулятором уровня водяные часы. Гюйгенс в 1657 г. построил в часы маятниковый регулятор хода.

Хотя отдельные автоматические регуляторы и появились в те далекие времена, они оставались любопытными для истории техники эпизодами и сколько-нибудь серьезного влияния на формирование техники и теории автоматического регулирования не оказали. Развитие промышленных регуляторов началось на рубеже XVIII и XIX столетий, в эпоху промышленного переворота в Европе. Первыми промышленными регуляторами являются автоматический поплавковый регулятор питания котла паровой машины, построенный в 1765 г. И.И. Ползуновым, и центробежный регулятор скорости паровой машины, на кото-

рый в 1784 г. получил патент Дж. Уатт. Эти регуляторы как бы открыли путь потоку предложений по принципам регулирования и изобретений регуляторов, относящимся к механике.

Первые публикации исследований в этой области начинаются с 30-х годов позапрошлого века (первая известная публикация Д.С. Чижова была в 1823 г.). Наиболее важными, признанными фундаментальными явились три теоретические работы, содержащие основы новой науки. Это работы Д.К. Максвелла «О регуляторах» (1866) и работы И.А. Вышнеградского «Об общей теории регуляторов» (1876) и «О регуляторах прямого действия» (1877). Д.К. Максвелл и И.А. Вышнеградский рассмотрели машину (т.е. объект) и регулятор как единую динамическую систему, обосновали общий методологический подход к исследованию самых разнородных по физике и конструкции систем, заложили основы теории устойчивости, установили ряд важных общих закономерностей регулирования по принципу обратной связи.

Крупный вклад в теорию регулирования внесен Н.Е. Жуковским, автором труда «О прочности движения» и первого учебника «Теория регулирования хода машин» (1909).

В первые десятилетия XX в. теория автоматического управления, вышедшая из рамок прикладной механики, формируется как общетехническая дисциплина. В этот период появляется целый ряд работ, рассматривающих приложение теории и распространяющих ее выводы на самые разнообразные технические процессы: на регулирование электрических машин и систем; двигателей внутреннего сгорания; тепловых и паросиловых устройств; турбин; различных производственных процессов. В 1932 г. появляется работа Х. Найквиста, в которой предлагается критерий устойчивости радиотехнических усилителей с обратной связью.

Исключительно интенсивным и многогранным было развитие теории автоматического управления в послевоенный период. Это обусловлено в первую очередь развитием военной и космической техники, бурным прогрессом вычислительной техники и электроники. В настоящее время буквально все окружающие нас технические устройства содержат в своем составе то или иное число автоматических регуляторов. Ограничиваясь для примера бытовой электроникой, перечислим лишь некото-

рые характерные термины: автоматическая регулировка усиления; автоподстройка частоты; стабилизация напряжения и т.д.

Системы автоматического управления (САУ) различной физической природы и совершенно различного функционального назначения могут иметь одинаковое математическое описание, то есть описываться одинаковыми уравнениями (отличаться будут лишь размерности величин). Но в САУ с одинаковым математическим описанием и процессы при управлении будут протекать одинаково, хотя действовать в них будут различные физические величины. Какие процессы могут происходить при управлении?

Во-первых, в результате приложения конечного по величине воздействия САУ должна перейти из одного равновесного состояния в другое (в противном случае она будет неустойчивой).

Во-вторых, переход из одного состояния в новое осуществляется за некоторое определенное время, на протяжении которого величина (или величины), характеризующая состояние САУ, изменяется по какому-либо закону.

В-третьих, переход САУ в новое равновесное состояние осуществляется с какой-либо точностью.

Эти вопросы, а также влияние на процесс управления отдельных параметров САУ и изучаются в настоящей дисциплине. Необходимо отметить, что составление математического описания отдельных элементов или систем в целом может быть произведено лишь на основе четкого понимания физических процессов, протекающих в этих объектах и алгоритмах их функционирования. Поэтому задача получения исходного математического описания относится к предмету специальных дисциплин, в которых эти элементы изучаются. Возможность успешного изучения настоящей дисциплины основывается, в первую очередь, на знании высшей математики, теоретических основ электротехники и других дисциплин.

## 1 КЛАССИФИКАЦИЯ САУ

Для ознакомления с основными видами САУ и соответствующей терминологией рассмотрим классификацию систем по ряду существенных с позиции теории автоматического управления признаков.

В общем виде САУ с одной выходной координатой, одним задающим и одним возмущающим воздействиями представлена на рис. 1.1, на котором обозначено: ОУ — объект управления; УУ — управляющее устройство (регулятор);  $Y$  — выходная величина, характеризующая состояние объекта;  $X$  — регулирующее воздействие;  $G$  — задающее воздействие;  $F$  — возмущающее воздействие.

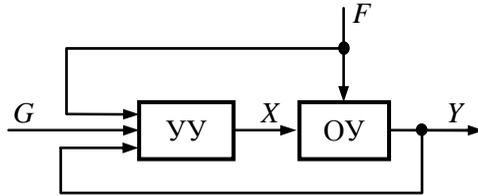


Рис. 1.1 — Схема САУ

На вход УУ, помимо задающего воздействия, поступает информация о возмущающем воздействии и о текущем реальном значении выходной величины. В соответствии с этим УУ полученную информацию преобразует и формирует регулирующее воздействие.

В частных случаях САУ могут иметь не все представленные связи.

В зависимости от наличия связей, внутреннего содержания УУ и ОУ, характера воздействий и назначения САУ последние можно классифицировать по следующим признакам.

**По принципу управления** различают разомкнутые, замкнутые и комбинированные САУ.

В *разомкнутых* САУ выходная величина объекта не измеряется, то есть нет контроля за состоянием объекта. Разомкнутыми они называются потому, что в них отсутствует связь между выходом объекта и входом управляющего устройства.

Возможны варианты, в которых УУ измеряет только задающее воздействие  $G$  либо задающее и возмущающее воздействие  $F$ . В первом варианте принято говорить, что управление

осуществляется *по задающему* воздействию, во втором — *по возмущающему*.

При реализации управления по задающему воздействию команды  $G$  путем изменения  $X$  приводят к соответствующим изменениям выходной величины  $Y$ . Точность соответствия  $Y$  и  $G$  определяется стабильностью параметров УУ и ОУ, а также величиной возмущения.

В САУ с управлением по возмущающему воздействию (такие САУ называют еще системами, реализующими *принцип управления по возмущению*) регулирующее воздействие  $X$  формируется таким, чтобы скомпенсировать отклонение выходной величины  $Y$ , вызванное измеряемым возмущением  $F$ . Для повышения точности необходимо учитывать все возможные возмущения. Практически большинство возмущений трудно измерить и преобразовать в нужный тип сигнала. Кроме того, измерение нескольких возмущений усложняет схему САУ.

В *замкнутых* САУ на вход УУ подаются задающее воздействие  $G$  и выходная величина объекта  $Y$ . Исходя из величины  $G$ , управляющее устройство определяет соответствующее требуемое значение  $Y_1$  и, имея информацию о текущем значении  $Y$ , обеспечивает необходимое соответствие между  $Y$  и  $G$  путем воздействия на объект. В такой САУ управляющее устройство стремится ликвидировать все отклонения  $Y$  от предписанного  $Y_1$  независимо от причин, вызывающих эти отклонения, включая любые возмущения и внутренние помехи.

Системы такого типа представляют собой замкнутый контур, образованный ОУ и УУ. Управляющее устройство создает обратную связь вокруг объекта, связывая его выход со входом. Замкнутые САУ называют поэтому еще системами *с обратной связью* или системами, реализующими *принцип управления по отклонению*. Именно системы с обратной связью представляют основной тип САУ.

При использовании в одной системе принципов управления по отклонению и по возмущению получают *комбинированную* САУ. В этом случае повышается качество управления, так как увеличивается информация о состоянии объекта и внешней среды.

Проиллюстрируем (на качественном уровне, без количественной оценки) преимущества замкнутой САУ над разомкнутой по задающему воздействию на примере генератора постоянного тока, управляемого по цепи возбуждения. Схема разомкнутой системы приведена на рис.1.2.

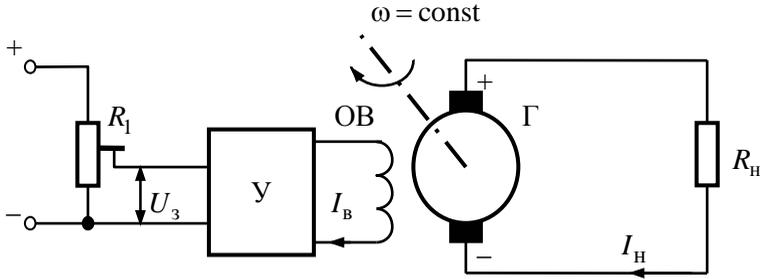


Рис. 1.2 — Электрическая схема разомкнутой САУ

Предположим, что обеспечено вращение вала генератора  $\Gamma$  с неизменной угловой скоростью  $\omega$ , генератор работает на линейном участке кривой намагничивания, функциональный усилитель  $У$  обеспечивает линейную зависимость тока возбуждения  $I_B$  от задающего напряжения  $U_3$ .

Управлять выходной величиной — напряжением  $U_H$ , прикладываемым к сопротивлению нагрузки  $R_H$ , можно, изменяя величину  $U_3$  путем передвижения движка потенциометра  $R_1$ .

В качестве возмущающего воздействия рассмотрим изменение величины нагрузки, т.е. тока  $I_H$ .

По второму закону Кирхгофа

$$U_H = E - I_H r_{вн},$$

где  $E$  — ЭДС генератора,  $r_{вн}$  — внутреннее сопротивление генератора.

Если ток нагрузки изменяется от 0 до какого-то максимального значения  $I_{H\text{max}}$ , то изменение выходного напряжения  $\Delta U_H$  при этом составит величину (при условии, что  $U_3 = \text{const}$ )

$$\Delta U_{\text{H}} = I_{\text{Hmax}} \cdot r_{\text{вн}}.$$

Если мощность генератора соответствует мощности нагрузки, то  $r_{\text{вн}}$  относительно  $R_{\text{H}}$  составляет величину, которой нельзя пренебречь, в результате  $\Delta U_{\text{H}}$  относительно  $E$  является величиной существенной, т.е. изменение нагрузки при неизменном задающем воздействии значительно влияет на выходное напряжение.

Замкнем обратную связь, т.е. подадим часть выходного напряжения, снимаемого с резистора  $R_3$  делителя напряжения на резисторах  $R_2$  и  $R_3$  и обозначенного  $U_{\text{oc}}$ , на вход усилителя  $Y$ , как показано на рис. 1.3. Причем полярность напряжений должна быть такой, как показано на рис. 1.3 без скобок.

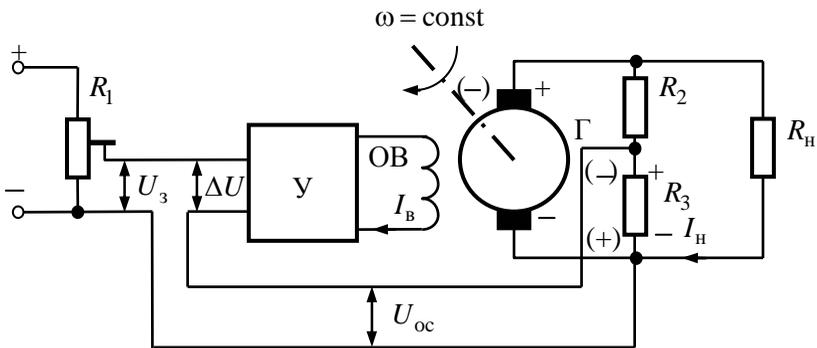


Рис. 1.3 — Электрическая схема замкнутой САУ

Пусть эта схема находилась в каком-то исходном установившемся состоянии, при котором  $U_3 = \text{const} \neq 0$ ,  $\Delta U = U_3 - U_{\text{oc}} \neq 0$ ,  $R_{\text{H}} = \text{const}$ ,  $I_{\text{H}} = \text{const}$ ,  $U_{\text{H}} = \text{const}$ .

Предположим, что в схеме произошло возмущение — скачком увеличилось сопротивление нагрузки и, следовательно, уменьшился ток  $I_{\text{H}}$ . Как схема отреагирует на это возмущение?

Вначале напряжение  $U_{\text{H}}$  увеличится, так как уменьшится падение напряжения на внутреннем сопротивлении генератора. Следовательно, увеличится  $U_{\text{oc}}$ , уменьшится  $\Delta U$  ( $U_3$  осталось

неизменным), пропорционально уменьшится  $I_B$ , уменьшится  $E$ , уменьшится и выходное напряжение  $U_H$ . Указанные процессы будут происходить не мгновенно, а за какое-то конечное время, по истечении которого выходное напряжение с какой-то точностью вернется к исходному значению. Если бы произошло не уменьшение, а увеличение тока нагрузки, то все величины изменялись бы в противоположную сторону.

В рассмотренной схеме изменение тока нагрузки (возмущающего воздействия) уже не приводит к значительному изменению выходного напряжения.

Но рассмотрим еще один аспект: как бы работала схема, если бы генератор подключили с противоположной полярностью (указана на рис. 1.3 в скобках).

При увеличении  $R_H$  и уменьшении  $I_H$  вначале  $U_H$  увеличится, как и в предыдущем случае. Увеличится и  $U_{oc}$ , но теперь  $\Delta U = U_3 + U_{oc}$ , таким образом, увеличится  $\Delta U$ , увеличатся  $I_B$  и  $E$ , следовательно, еще больше увеличится  $U_H$ . Таким образом, вызванное на начальном этапе после возмущения увеличение  $U_H$  приводит к увеличению  $\Delta U$ , которое в свою очередь увеличивает  $U_H$ , и т.д. Схема стала неработоспособной (в первом случае обратная связь была *отрицательной*, во втором — *положительной*).

Одна из задач теории автоматического управления — дать точную количественную оценку всем рассмотренным в настоящем примере явлениям.

**По идеализации математического описания УУ и ОУ** различают линейные и нелинейные САУ.

*Линейной* называется система, которая описывается только линейными уравнениями. Чтобы система была *нелинейной*, достаточно иметь в ее составе хотя бы одно нелинейное звено, описываемое нелинейными уравнениями.

Для линейных САУ применим принцип суперпозиции: реакция системы на любую комбинацию внешних воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь.

Необходимо отметить, что реальные линейные системы являются таковыми лишь в определенном диапазоне изменения воздействий. Если не ограничивать диапазон изменения воздействий, то любая САУ становится нелинейной.

**По характеру сигналов в УУ** различают системы непрерывного, дискретного действия и САУ с гармоническим модулированным сигналом.

*Непрерывная* система состоит из звеньев, выходная величина которых изменяется плавно (без скачков) при плавном изменении входного воздействия. *Дискретная* САУ должна содержать хотя бы одно звено дискретного действия, т.е. звено, в котором сигнал имеет прерывистый характер при плавном изменении входной величины. САУ с гармоническим модулированным сигналом содержит элементы, в которых входной и выходной величиной является переменное напряжение (или ток) частоты  $\omega_n$ , называемой *несущей* частотой. При подаче на вход этого элемента напряжение (или ток) модулируется, т.е. его амплитуда и фаза изменяются соответственно величине и знаку подаваемого воздействия.

**По характеру параметров** различают стационарные, нестационарные системы и САУ с распределенными параметрами.

*Стационарной* называется система, все параметры которой не изменяются во времени. *Нестационарная* система — это система с переменными во времени параметрами. При математическом описании такой системы некоторые коэффициенты являются функциями времени. *В САУ с распределенными параметрами* процессы описываются уравнениями в частных производных.

**По количеству регулируемых величин различают** одномерные и многомерные САУ.

В *одномерных* системах регулируется только одна величина. Если регулируемых величин две и более, то САУ — *многомерная*.

Пример одномерной системы — источник питания постоянного тока (выходная координата одна — среднее значение напряжения), двухмерной — источник питания переменного тока (выходных координат две — частота и эффективное значение напряжения), трехмерной — радиолокационная станция сле-

жения за летательными аппаратами (выходных координат три — дальность, угол места, азимут).

**По цели управления** различают системы стабилизации, программного управления и следящие.

*Системы стабилизации* характеризуются неизменностью задающего воздействия. Задача таких систем — поддержание с допустимой ошибкой выходной величины при наличии возмущающих воздействий.

*Системы программного управления* отличаются тем, что задающее воздействие изменяется по заранее установленному закону.

В *следящих системах* задающее воздействие также является величиной переменной, но заранее закон его изменения известен. Источником сигнала является внешнее явление.

Таким образом, для систем стабилизации  $G = \text{const}$ , для следящих систем и систем программного управления  $G = \text{var}$ , причем в САУ с программным управлением задающее воздействие — детерминированная величина, а в следящих системах — случайная.

Помимо рассмотренных, системы могут быть оптимальными и неоптимальными (обыкновенными).

В *оптимальных* системах должно обеспечиваться оптимальное значение какого-либо из параметров функционирования. Но так как связь между отдельными параметрами обычно противоречивая, то на остальные параметры накладывается ограничение (значение их должно быть не хуже заданного уровня). В *обыкновенных* системах указанная задача оптимизации не ставится.

В завершение вводного раздела введем понятие *функциональной схемы* (не путать со схемой электрической функциональной!), принятое в теории автоматического управления. При составлении функциональной схемы система разбивается на такие устройства, каждое из которых несет законченное функциональное назначение (при этом сложность каждого из таких устройств значения не имеет). Выделенные таким образом устройства на функциональной схеме соединяются линиями связи с указанием направления распространения сигналов.

Какими бы ни были системы автоматического управления (хотя бы в соответствии с представленной здесь классификацией, физическим принципом действия, областью применения и т.д.), они в целом имеют одну и ту же функциональную схему, но только некоторые элементы могут отсутствовать или, наоборот, повторяться. Такая обобщенная функциональная схема представлена на рис. 1.4. Здесь обозначено:

1 — задающее устройство, формирующее задающее воздействие  $G$ ;

2 — сумматор (сектор круга зачерняется, если подходящий к нему сигнал имеет знак «минус», например реализуется отрицательная обратная связь);

3 — последовательное корректирующее устройство;

4 — усилитель;

5 — исполнительный элемент;

6 — объект управления;

7 — местная обратная связь (параллельное корректирующее устройство);

8 — главная обратная связь.

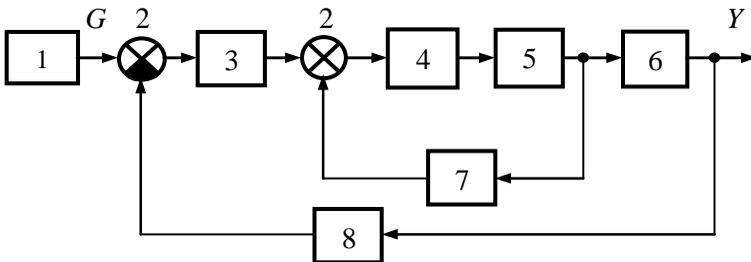


Рис. 1.4 — Пример функциональной схемы САУ

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

### 2.1 Линеаризация статических характеристик и дифференциальных уравнений

Часто встречаются элементы, у которых является нелинейной только статическая характеристика, т.е. зависимость выходной величины  $y$  от входной величины  $x$  в статическом (установившемся) режиме работы.

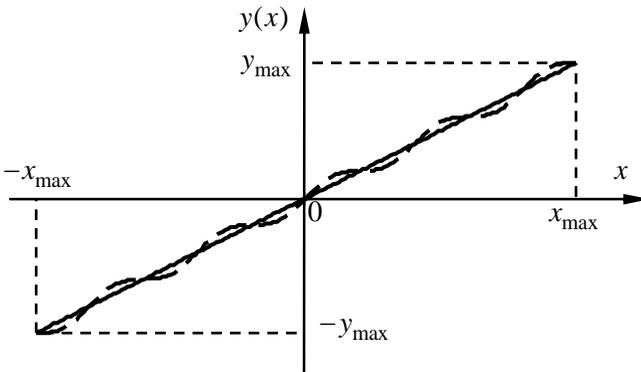


Рис. 2.1 — Статическая характеристика

Предположим, что входная величина изменяется только в пределах  $-x_{\max} \leq x \leq x_{\max}$  и на этом участке статическая характеристика может быть аппроксимирована прямой линией (рис. 2.1). Тогда эта прямая может быть принята за статическую характеристику, т.е. приближенно

$$y(x) = kx, \quad k = \operatorname{tg} \frac{y_{\max}}{x_{\max}}.$$

Для линеаризации наиболее часто применяют метод малых отклонений [4, 5, 6], который позволяет линеаризовать как нелинейные статические характеристики, так и нелинейные дифференциальные уравнения.

Выясним суть метода, линеаризовав уравнение

$$\Phi(y', y'', y, x_1', x_1, x_2) = 0, \quad (2.1)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — входные величины (известные функции времени);  
 $y$  — выходная величина (искомая функция времени).

Если функция  $\varphi$  дифференцируема по всем своим аргументам, то она может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности произвольно выбранной точки, и при линеаризации уравнений эта точка должна соответствовать установившемуся режиму. В этом режиме  $x_1 = x_1^0$ ,  $x_2 = x_2^0$ ,  $y = y^0$  есть постоянные величины и  $x_1' = y' = y'' = 0$ , тогда, разлагая функцию  $\varphi$  в ряд, получим:

$$\begin{aligned} \varphi(0, 0, y^0, 0, x_1^0, x_2^0) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right)^0 \Delta y'' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)^0 \Delta y' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1'}\right)^0 \Delta x_1' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \Phi = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$ ,  $\Delta x_1' = x_1'$ ,  $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$ ,  $\Delta y = y - y^0$ ,  $\Delta y' = y'$ ,  $\Delta y'' = y''$  — отклонения переменных от их установившихся значений;

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1'}\right)^0$ ,  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^0$ , ... — частные производные от функции

$\varphi$  при  $x_1 = x_1^0$ ,  $x_2 = x_2^0$ ,  $y = y^0$ ,  $x_1' = y' = y'' = 0$ , а  $\Phi$  — сумма членов, которые содержат произведения и отклонения во второй и более высоких степенях с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции  $\varphi$  по соответствующим аргументам.

В устойчивых системах отклонения переменных достаточно малы, поэтому сумма  $\Phi$  в уравнении (2.2) содержит лишь члены высшего порядка малости и ей можно пренебречь. Кроме того, учитывая, что в установившемся режиме  $\varphi(0, 0, y^0, 0, x_1^0, x_2^0) = 0$ , иско-

мое линеаризованное уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right)^0 \Delta y'' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)^0 \Delta y' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1'}\right)^0 \Delta x_1' + \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) — линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Необходимо иметь в виду следующее. Отклонения  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_1'$ ,  $\Delta x_2$  действительно малы, когда переменные  $x_1$  и  $x_2$  являются выходными величинами других элементов САУ. Если какая-то из входных величин рассматриваемого элемента представляет собой внешнее воздействие на систему, то должна быть выяснена возможность предположения о малости отклонений этой переменной и ее производных.

### Пример 2.1

Линеаризовать уравнение момента на валу электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, имеющее вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения,  $M = M(\omega, i)$  — вращающий момент,  $i$  — ток в обмотке якоря,  $M_c = M_c(t)$  — момент сопротивления вращению,  $J$  — момент инерции вращающихся масс.

Пусть в установившемся режиме  $\omega = \omega^0$ ,  $M = M^0$ ,  $M_c = M_c^0$  и уравнение моментов имеет вид  $M - M_c = 0$ . Разлагая функцию  $M(\omega, i)$  в ряд Тейлора, получим

$$M = M^0 + \left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \right)^0 \Delta\omega + \left( \frac{\partial M}{\partial i} \right)^0 \Delta i.$$

Подставляя в уравнение моментов полученное значение  $M$ , а также полагая  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\Delta\omega)}{dt}$  и  $M_c = M_c^0 + \Delta M_c$ , будем иметь

$$J \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = M^0 + \left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \right)^0 \Delta\omega + \left( \frac{\partial M}{\partial i} \right)^0 \Delta i - M_c^0 - \Delta M_c.$$

Принимая во внимание уравнение установившегося режима, получаем линеаризованное уравнение моментов на валу электродвигателя

$$J \frac{d(\Delta\omega)}{dt} - \left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \right)^0 \Delta\omega = \left( \frac{\partial M}{\partial i} \right)^0 \Delta i - \Delta M_c.$$

Здесь  $\Delta i$  — управляющее воздействие,  $\Delta M_c$  — возмущение. Частные производные  $\left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \right)^0$ ,  $\left( \frac{\partial M}{\partial i} \right)^0$  определяются по характеристикам электродвигателя, которые задаются в виде графиков.

## 2.2 Понятие передаточной функции

Целью рассмотрения САУ может быть решение одной из двух задач: задачи анализа или задачи синтеза. Но в любом случае порядок исследования систем включает в себя следующие этапы: математическое описание, исследование установившихся режимов, исследование переходных режимов.

Рассмотрим случай, когда в замкнутой системе можно выделить объект управления ОУ и управляющее устройство УУ, как это показано на рис. 2.2.

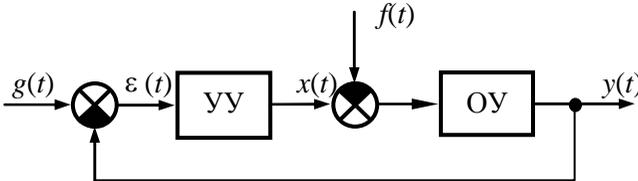


Рис. 2.2 — Замкнутая САУ с единичной обратной связью

Общее уравнение САУ получается из системы уравнений объекта и управляющего устройства.

Состояние объекта характеризуется выходной величиной  $y(t)$ , регулирующим воздействием  $x(t)$  и возмущением  $f(t)$ . Тогда выходная величина может быть представлена функцией:

$$y(t) = \varphi(x, x', x'', \dots; f, f', f'', \dots; y', y'', \dots).$$

Состояние управляющего устройства характеризуется регулирующим воздействием  $x(t)$  и входным воздействием  $\varepsilon(t)$ . Процессы в УУ будут описываться двумя уравнениями:

$$x(t) = F(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots; x', x'', \dots); \quad \varepsilon(t) = g(t) - y(t).$$

Приведенные уравнения полностью описывают процессы в САУ. Если в них исключить переменные  $x(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ , то получим дифференциальное уравнение САУ:

$$y(t) = \Psi(g, g', g'', \dots; f, f', f'', \dots; y', y'', \dots). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) описывает поведение системы во времени, определяет переходные процессы и обычно называется *уравнением динамики*.

Однако в форме дифференциальных уравнений математическое описание в теории автоматического управления обычно не применяется вследствие сложности решения таких уравнений.

Исследование САУ существенно упрощается при использовании прикладных математических методов операционного исчисления.

Возьмем некоторый элемент САУ, имеющий один вход и один выход. Если на его вход подать сигнал  $x(t)$ , то изменение выходного сигнала  $y(t)$  во времени будет описываться дифференциальным уравнением  $n$ -й степени:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пусть

$$X(p) = \mathbf{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad Y(p) = \mathbf{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-pt} dt \quad \text{—}$$

изображения по Лапласу величин  $x(t)$  и  $y(t)$ . Тогда при нулевых начальных условиях, т.е. при  $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(m-1)}(0) = 0$  и  $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ , в соответствии с теоремой о дифференцировании оригиналов [1, 2], получим

$$\mathbf{L} \left\{ \frac{d^m x(t)}{dt^m} \right\} = p^m X(p), \quad \mathbf{L} \left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = p^n Y(p). \quad (2.6)$$

С учетом (2.6) дифференциальное уравнение (2.5), содержащее функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , при нулевых начальных условиях равносильно линейному алгебраическому уравнению, содержащему изображения этих функций  $X(p)$  и  $Y(p)$ :

$$\begin{aligned} & \left( a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \right) Y(p) = \\ & = \left( b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 \right) X(p). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, формально переход от дифференциального уравнения к алгебраическому относительно изображения при нулевых начальных условиях получается путем замены символов дифференцирования оригиналов функций  $\frac{d^n}{dt^n}$ ,  $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$ , ...,  $\frac{d}{dt}$

соответственно на  $p^n$ ,  $p^{n-1}$ , ...,  $p$  и функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  — их изображениями  $X(p)$ ,  $Y(p)$ . С комплексной переменной  $p$ , как и с другими членами алгебраического уравнения, можно производить различные действия: умножение, деление, вынесение за скобки и т.д.

Каждый элемент САУ в общем случае описывается дифференциальным уравнением вида (2.5). Следовательно, при выводе дифференциального уравнения системы в целом необходимо совместно решить систему дифференциальных уравнений.

Преобразование Лапласа позволяет свести задачу решения системы дифференциальных уравнений высших порядков к решению системы алгебраических уравнений. Определив из алгебраических уравнений изображение  $Y(p)$  искомой функции  $y(t)$ , находят эту функцию, пользуясь таблицами оригиналов и изображений или по известным формулам обратного преобразования Лапласа.

Преобразование дифференциального уравнения по Лапласу дает возможность ввести одно из фундаментальных понятий — понятие *передаточной функции*.

Из уравнения (2.7) определим отношение изображения выходной величины к изображению входной:

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = W(p). \quad (2.8)$$

Отношение изображения выходной величины элемента (или системы) к изображению его входной величины при нулевых начальных условиях называется *передаточной функцией* элемента (или системы).

Согласно (2.8) передаточная функция  $W(p)$  является дробно-рациональной функцией комплексной переменной  $p$ :

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)},$$

где  $A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$  — полином степени  $n$ ,  
 $B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$  — полином степени  $m$ ,  
 причем  $m \leq n$ .

Из определения передаточной функции следует, что:

$$Y(p) = X(p) \cdot W(p).$$

Передаточная функция является основной формой математического описания объектов в теории автоматического управления и так как она полностью определяет динамические свойства объекта, то первоначальная задача расчета САУ сводится к определению передаточной функции.

Рассмотрим примеры по определению передаточных функций некоторых простейших схем, характерных для электроники.

### Пример 2.2

Вывести передаточную функцию для схемы на рис. 2.3, считая входным воздействием приложенное напряжение  $u$ , а выходным — ток в цепи  $i$ .

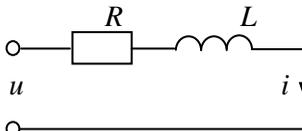


Рис. 2.3 — Схема к примеру 2.2

Процессы в схеме описываются уравнением

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t).$$

Перейдем к изображению по Лапласу:

$$U(p) = LpI(p) + RI(p) = I(p)(Lp + R).$$

Составим передаточную функцию как отношение изображения выходной величины к изображению входной величины:

$$W(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{Lp + R} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{L}{R}p + 1} = \frac{k}{Tp + 1},$$

где  $k = \frac{1}{R}$  — коэффициент передачи,  $T = \frac{L}{R}$  — постоянная времени.

Передаточные функции принято записывать в такой форме, чтобы свободные члены полиномов от  $p$  равнялись бы единице, что и сделано как в рассмотренном примере, так и в последующих.

### Пример 2.3

Вывести передаточную функцию схемы на рис. 2.4, считая входной величиной напряжение  $u_1$ , а выходной —  $u_2$ .

При выводе передаточной функции будем считать, что цепочка не нагружена (никаких элементов к выходным зажимам не подключено, либо эти элементы имеют сопротивление, стремящееся к бесконечности) и сопротивление источника входного напряжения настолько мало, что им можно пренебречь.

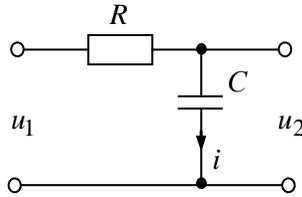


Рис. 2.4 — Схема к примеру 2.3

Система уравнений, описывающих процессы в устройстве, схема которого изображена на рис 2.4, имеет вид:

$$\begin{cases} u_1(t) = Ri(t) + u_C(t), \\ u_2(t) = u_C(t), \\ i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}. \end{cases}$$

Подставив третье уравнение в первое, получим:

$$\begin{cases} u_1(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t), \\ u_2(t) = u_C(t). \end{cases}$$

Перейдем к изображениям:

$$\begin{cases} U_1(p) = (RCp + 1) \cdot U_C(p), \\ U_2(p) = U_C(p). \end{cases}$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{U_C(p)}{(RCp + 1) \cdot U_C(p)} = \frac{1}{RCp + 1} = \frac{1}{Tp + 1},$$

где  $T = RC$  — постоянная времени.

#### Пример 2.4

Вывести передаточную функцию схемы на рис. 2.5, считая входной величиной  $u_1$ , выходной  $u_2$ , при допущениях, сформулированных в примере 2.3.

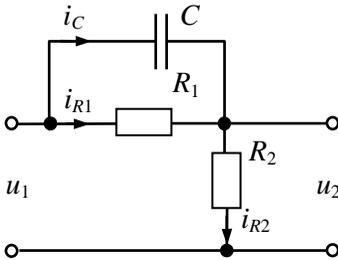


Рис. 2.5 — Схема к примеру 2.4

Составляем два уравнения по второму закону Кирхгофа, одно уравнение по первому закону Кирхгофа и расписываем выходную величину:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_C(t) + R_2 i_{R_2}(t), \\ u_C(t) = R_1 i_{R_1}(t), \\ i_{R_2}(t) = i_{R_1}(t) + C \frac{du_C(t)}{dt}, \\ u_2(t) = R_2 i_{R_2}(t). \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений соответственно получим:

$$i_{R_1}(t) = \frac{u_C(t)}{R_1}, \quad i_{R_2}(t) = \frac{u_C(t)}{R_1} + C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Подставим полученные выражения  $i_{R_1}(t)$  и  $i_{R_2}(t)$  в первое и четвертое уравнения и запишем получившуюся систему в операторной форме:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_C(t) + \frac{R_2}{R_1} u_C(t) + R_2 C \frac{du_C(t)}{dt}, \\ u_2(t) = \frac{R_2}{R_1} u_C(t) + R_2 C \frac{du_C(t)}{dt}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1(p) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + R_2 C p \right) \cdot U_C(p), \\ U_2(p) = \left( \frac{R_2}{R_1} + R_2 C p \right) \cdot U_C(p). \end{cases}$$

Передаточная функция:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{R_2}{R_1} + R_2 C p}{1 + \frac{R_2}{R_1} + R_2 C p} = \\ &= \frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot (R_1 C p + 1)}{\frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \left( \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} p + 1 \right)} = \frac{k(\tau p + 1)}{T p + 1}, \end{aligned}$$

где  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  — коэффициент передачи,  $T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$ ,  $\tau = R_1 C$  — постоянные времени.

### Пример 2.5

Вывести передаточную функцию схемы на рис. 2.6, считая входной величиной  $u_1$ , выходной  $u_2$ , при допущениях, сформулированных в примере 2.3.

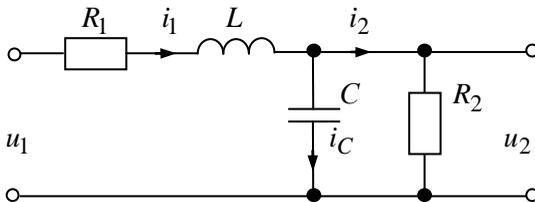


Рис. 2.6 — Схема к примеру 2.5

Система уравнений электрического равновесия схемы для мгновенных значений величин:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} + u_C(t), \\ u_C(t) = R_2 i_2(t), \\ i_1(t) = i_2(t) + C \frac{du_C(t)}{dt}, \\ u_2(t) = u_C(t). \end{cases}$$

Последнее соотношение здесь, конечно, не уравнение, а обозначение выходной величины.

Уравнения в операторной форме:

$$\begin{cases} U_1(p) = R_1 I_1(p) + LpI_1(p) + U_C(p), \\ U_C(p) = R_2 I_2(p), \\ I_1(p) = I_2(p) + CpU_C(p), \\ U_2(p) = U_C(p). \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$I_2(p) = \frac{U_C(p)}{R_2}.$$

Подставим полученное значение  $I_2(p)$  в третье уравнение:

$$I_1(p) = \frac{U_C(p)}{R_2} + CpU_C(p) = \frac{R_2 Cp + 1}{R_2} U_C(p).$$

Последнее соотношение подставим в первое уравнение и определим передаточную функцию:

$$U_1(p) = (R_1 + Lp) \frac{R_2 Cp + 1}{R_2} U_C(p) + U_C(p);$$

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{(R_1 + Lp) \frac{R_2 Cp + 1}{R_2} + 1} = \\ &= \frac{R_2}{R_2 L Cp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2} = \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \frac{1}{\frac{R_2 LC}{R_1 + R_2} p^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 + R_2} p + 1} = \frac{k}{T^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  — коэффициент передачи,  $T = \sqrt{\frac{R_2 LC}{R_1 + R_2}}$ ,

$T_1 = \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 + R_2}$  — постоянные времени.

### Пример 2.6

Вывести передаточную функцию схемы на рис. 2.7, а, содержащей операционный усилитель.

Операционными усилителями называются усилители постоянного тока малой мощности, имеющие два входа — инвертирующий (−) и неинвертирующий (+). В настоящее время они выполняются по интегральной технологии, т.е. в виде микросхем, и характеризуются большими значениями коэффициента усиления ( $k_y \approx \infty$ ) и входного сопротивления ( $r_{вх} \approx \infty$ ).

Выведем вначале передаточную функцию для типового включения операционного усилителя, показанного на рис. 2.7, б, в общем виде.

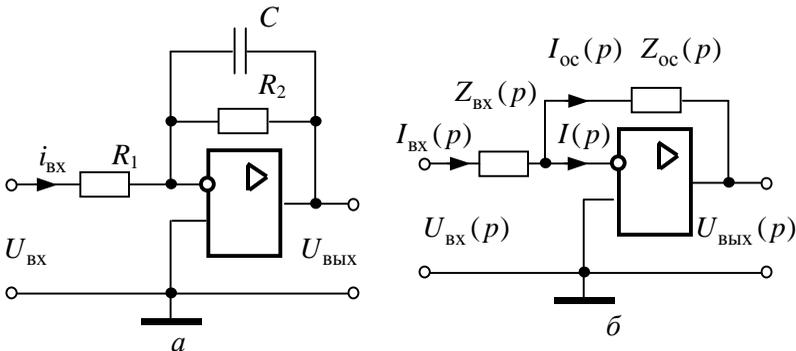


Рис. 2.7 — К выводу передаточной функции устройства на операционном усилителе

С учетом принятых допущений ( $k_y \approx \infty$ ,  $r_{\text{вх}} \approx \infty$ ) напряжение между неинвертирующим и инвертирующим входами операционного усилителя описывается выражением

$$e_+ - e_- = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{k_y} \approx \frac{U_{\text{вых}}(p)}{\infty} = 0.$$

Следовательно, напряжение на инвертирующем входе приближенно равно нулю, отсюда  $U_{\text{вх}}(p) \approx I_{\text{вх}}(p) \cdot Z_{\text{вх}}(p)$ . Кроме того, учитывая, что  $r_{\text{вх}} \approx \infty$ , можно считать  $I(p) \approx 0$ , следовательно,  $I_{\text{вх}}(p) \approx I_{\text{ос}}(p)$ . Тогда выходное напряжение схемы может быть рассчитано по формуле

$$U_{\text{вых}}(p) \approx I_{\text{ос}}(p) \cdot Z_{\text{ос}}(p) \approx I_{\text{вх}}(p) \cdot Z_{\text{вх}}(p).$$

С учетом последней формулы можно легко получить выражение для передаточной функции устройства, схема которого приведена на рис. 2.7, б:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} \approx -\frac{Z_{\text{ос}}(p)}{Z_{\text{вх}}(p)}. \quad (2.9)$$

Знак минус в выражении (2.9) указывает на то, что полярность выходного напряжения схемы противоположна полярности входного напряжения.

Из курса электротехники известно, что операторные сопротивления конденсатора  $Z_C(p)$  и индуктивности  $Z_L(p)$  рассчитываются по формулам

$$Z_C(p) = \frac{1}{Cp}, \quad Z_L(p) = Lp.$$

Используя выражение для  $Z_C(p)$ , для схемы, изображенной на рис. 2.7, а, получим:

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_1, \quad Z_{\text{ос}}(p) = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{R_2}{R_2 Cp + 1}.$$

Подставляя полученные соотношения в формулу (2.9), получим выражение передаточной функции схемы, взятое со знаком минус:

$$W(p) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2 C p + 1} = -\frac{k}{T p + 1},$$

где  $k = \frac{R_2}{R_1}$  — коэффициент передачи,  $T = R_2 C$  — постоянная времени.

### 2.3 Частотные функции и характеристики

Если на вход линейной непрерывной системы (или отдельного звена) подать синусоидальные (гармонические) колебания с постоянными амплитудой и частотой  $x(t) = A_{\text{вх}} \sin \omega t$ , то после затухания переходных процессов на выходе также возникают синусоидальные колебания  $y(t) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi)$  той же частоты, но другой амплитуды и сдвинутые по фазе относительно входных колебаний.

Таким образом, при подаче на вход системы гармонических колебаний с постоянной амплитудой, но с различными частотами на выходе системы получаются также гармонические колебания с теми же частотами, но различными амплитудами и фазами относительно входных колебаний.

Известно, что для оригинала  $f(t)$  (а именно таковыми являются в САУ входные и выходные сигналы) имеет место одностороннее преобразование Фурье [2, 3], в соответствии с которым спектральная функция  $F(j\omega)$  может быть рассчитана по формуле

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.10)$$

где  $\omega$  — угловая частота.

Сравнивая формулу (2.10) с формулой прямого преобразования Лапласа  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ , легко видеть их идентич-

ность, поэтому для перехода из области изображений в частотную область достаточно чисто формально в изображении-

ях  $X(p)$  и  $Y(p)$  заменить оператор Лапласа  $p$  на переменную (оператор Фурье)  $j\omega$ .

Поскольку  $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ , то в результате такой замены получим

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}. \quad (2.11)$$

Функция комплексного переменного  $W(j\omega)$  называется *частотной передаточной функцией* (в литературе ее также часто называют *комплексным коэффициентом передачи*). Она получается путем чисто формальной замены в выражении передаточной функции оператора Лапласа  $p$  на переменную  $j\omega$ .

Годограф функции  $W(j\omega)$ , т.е. кривая, описываемая концом вектора  $W(j\omega)$  на комплексной плоскости при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности (рис. 2.8), называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ).

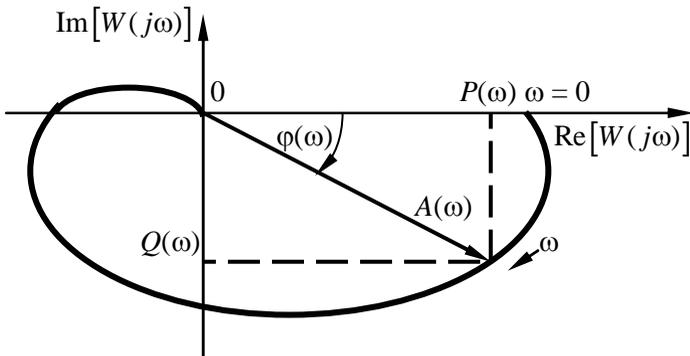


Рис. 2.8 — Годограф АФЧХ и другие частотные характеристики

Как и всякую функцию комплексного переменного, функцию  $W(j\omega)$  можно представить в алгебраической и показательной формах записи, т.е.

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.12)$$

где  $P(\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)]$  и  $Q(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)]$  — действительная и мнимая части частотной передаточной функции,  $A(\omega) = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} = |W(j\omega)|$  и  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$  — модуль и аргумент частотной передаточной функции.

Все величины, представленные в (2.12), являются соответствующими частотными функциями, а построенные по выражениям для функций графики — частотными характеристиками.

Зависимости  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  называются *вещественной* и *мнимой частотными характеристиками* соответственно.

Зависимость  $A(\omega)$  показывает отношение амплитуд выходного и входного гармонических сигналов при изменении частоты и называется *амплитудной частотной характеристикой*.

Зависимость  $\varphi(\omega)$  показывает сдвиг фазы выходного гармонического сигнала относительно входного при изменении частоты и называется *фазовой частотной характеристикой*.

Между всеми частотными характеристиками существует непосредственная связь, вытекающая из тригонометрических соотношений и поясняемая рис. 2.8.

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

В практических расчетах чаще всего амплитудную и фазовую частотные характеристики изображают в логарифмическом масштабе, что позволяет в значительной степени сократить объем вычислительных работ.

Логарифмической единицей усиления или ослабления мощности сигнала при прохождении его через какое-либо устройство при выражении десятичным логарифмом величины отношения мощности на выходе  $P_{\text{ВЫХ}}$  к мощности на входе  $P_{\text{ВХ}}$  в технике принят бел (Б). Так как мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, получим:

$$\lg \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}} = \lg \left( \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} \right)^2 = 2 \lg \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}}.$$

Но так как бел является достаточно крупной единицей усиления (ослабления) мощности (увеличению мощности в 10 раз соответствует 1 Б), то за единицу измерения ее принят децибел, 1дБ = 0,1 Б.

С учетом этого можно записать:

$$10 \cdot 2 \lg \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = G(\omega).$$

Величина логарифма амплитудной частотной характеристики, выраженная в децибелах

$$G(\omega) = 20 \lg A(\omega),$$

называется *логарифмической амплитудно-частотной характеристикой* (ЛАЧХ).

Таким образом, изменению отношения двух амплитуд в 10 раз соответствует изменение усиления на 20 дБ, в 100 раз — на 40 дБ, в 1000 раз — на 60 дБ и т.д.

Вычислим, какому отношению амплитуд соответствует один децибел, два и т.д.

$$1 \text{ дБ} = 20 \lg \left( \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} \right),$$

$$\lg \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} = \frac{1}{20},$$

$$\frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} = 10^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{10} = 1,122,$$

то есть 1 дБ  $\sim 1,122$ ,

$$2 \text{ дБ} \sim (1,122)^2 = 1,259,$$

$$3 \text{ дБ} \sim (1,122)^3 = 1,412.$$

Фазовая частотная характеристика  $\varphi(\omega)$ , построенная в полулогарифмическом масштабе (в координатах: угол  $\varphi$  в градусах или радианах и  $\lg \omega$ ), называется *логарифмической фазовой частотной характеристикой* (ЛФЧХ).

Единицей измерения частоты является логарифмическая единица — *декада*. Декадой называется интервал частот между какой-либо величиной частоты и ее десятикратным значением.

В логарифмическом масштабе частот отрезок в одну декаду не зависит от частоты и имеет длину, равную

$$\lg 10\omega - \lg \omega = \lg 10 = 1.$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ строят обычно совместно, используя общую ось абсцисс (ось частот). Начало координат невозможно взять в точке  $\omega = 0$ , так как  $\lg 0 = -\infty$ . Поэтому начало координат можно брать в любой удобной точке в зависимости от интересующего диапазона частот.

Точка пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс называется *частотой среза*  $\omega_{\text{ср}}$ . Ось абсцисс соответствует значению  $A(\omega) = 1$ , то есть прохождению амплитуды сигнала в натуральную величину (поэтому еще говорят, что на частоте среза система теряет усилительные свойства).

Из рассмотренных здесь частотных характеристик две можно получить экспериментально – амплитудную  $A(\omega)$  и фазовую  $\varphi(\omega)$ . Из этих двух экспериментальных остальные частотные характеристики могут быть рассчитаны по соответствующим формулам, например  $W(j\omega)$  — по формуле (2.12). Кроме того, рассчитав по экспериментальным данным  $W(j\omega)$ , по (2.11) путем обратной подстановки (заменяв  $j\omega$  на  $p$ ) можно получить передаточную функцию. Зная передаточную функцию, можно записать дифференциальное уравнение в операторной форме и далее, применив обратное преобразование Лапласа, — дифференциальное уравнение (уравнение динамики системы).

## 2.4 Временные функции и характеристики

Под временными характеристиками в общем случае понимается графическое изображение процесса изменения выходной величины в функции времени при переходе системы из одного равновесного состояния в другое в результате поступления на вход системы некоторого типового воздействия.

Так как дифференциальное уравнение системы тоже определяет изменение выходной величины в функции времени при некоторых начальных условиях, то временная характеристика изображает собой решение дифференциального уравнения для принятого типового воздействия и, следовательно, полностью характеризует динамические свойства системы.

Поскольку временные характеристики могут быть получены не только путем решения дифференциального уравнения, но и экспериментально, то возможность определения динамических свойств системы по временной характеристике имеет исключительно важное практическое значение, поскольку в этом случае не требуется выводить и решать дифференциальное уравнение.

В качестве типовых воздействий наиболее широкое применение находят *единичное ступенчатое* и *единичное импульсное* воздействия.

На рис. 2.9, *а* изображено единичное ступенчатое воздействие. Его аналитическая запись имеет вид:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

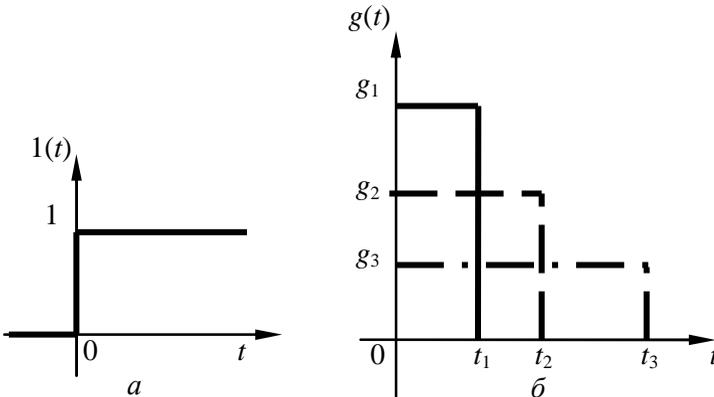


Рис. 2.9 — Единичное ступенчатое (*а*) и единичное импульсное (*б*) воздействия

При  $t=0$  значение единичного ступенчатого воздействия не определено.

Нормированным импульсным воздействием считается единичный импульс, т.е. импульс, у которого произведение длительности на величину равно единице. На рис. 2.9, б изображены графики единичных импульсов.

$$g_1 \cdot t_{и1} = g_2 \cdot t_{и2} = g_3 \cdot t_{и3} = 1,$$

где  $t_{и1}$  достаточно мала.

Пределом, к которому стремится единичный импульс, когда его продолжительность стремится к нулю, является единичная импульсная функция ( $\delta$ -функция, функция Дирака), для которой имеют место следующие соотношения:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Легко видеть, что

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t). \quad (2.13)$$

Графическое изображение реакции системы на единичное ступенчатое воздействие называется *переходной характеристикой*.

Аналитическое выражение переходной характеристики обозначается  $h(t)$  и называется *переходной функцией*.

Пусть на вход САУ с передаточной функцией  $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$  подано единичное ступенчатое воздействие  $x(t) = 1(t)$ , изображение которого  $X(p) = \frac{1}{p}$ . Тогда изображение выходной величины

$$Y(p) = X(p) \cdot W(p) = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)}.$$

Из курса высшей математики известно [1—3], что

$$y(t) = h(t) = \mathbf{L}^{-1}\{Y(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+j\infty} Y(p)e^{pt} dp = \sum_{k=0}^n \operatorname{Res} \left[ Y(p_k)e^{p_k t} \right],$$

где  $p_k$  —  $k$ -й полюс изображения  $Y(p)$  (корень уравнения  $pA(p) = 0$ ) и по этим полюсам вычисляется сумма вычетов.

Пусть передаточная функция  $W(p)$  имеет только  $n$  простых полюсов, отличных от нуля, тогда  $Y(p)$  будет иметь один нулевой полюс и  $n$  простых полюсов и формула для расчета переходной функции будет иметь вид:

$$y(t) = h(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)e^{p_k t}}{p_k A'(p_k)}, \quad (2.14)$$

где  $A'(p_k)$  — производная от характеристического полинома, вычисленная для  $k$ -го полюса передаточной функции  $W(p)$ .

Вариант простых полюсов является наиболее распространенным, однако в некоторых случаях  $W(p)$  может содержать один нулевой полюс. Тогда изображение  $Y(p)$  можно представить в виде  $Y(p) = \frac{B(p)}{p^2 A_1(p)}$ , где  $A_1(p)$  — часть характеристического полинома  $A(p)$ , содержащая только  $m = n - 1$  простых полюсов. Тогда переходную функцию можно рассчитать по формуле:

$$y(t) = h(t) = \sum_{k=1}^m \frac{B(p_k)e^{p_k t}}{[p_k A(p_k)]'} + \frac{d}{dp} \left[ \frac{B(p)e^{pt}}{A_1(p)} \right] \Big|_{p=0}. \quad (2.15)$$

Формулы (2.14) и (2.15) удобно применять при расчете переходных характеристик САУ в системе MathCAD.

Зная переходную функцию, можно восстановить передаточную функцию САУ. Если  $Y(p) = X(p) \cdot W(p) = \frac{1}{p} W(p)$ , то

$$W(p) = pY(p) = p \cdot \mathbf{L}\{y(t)\} = p \cdot \mathbf{L}\{h(t)\}. \quad (2.16)$$

Графическое изображение реакции системы на единичное импульсное воздействие называется *импульсной переходной характеристикой*.

Аналитическое выражение импульсной переходной характеристики обозначается  $w(t)$  и называется *импульсной переходной функцией* или *весовой функцией* (функцией веса).

При практических расчетах наиболее широкое применение находит временная характеристика в виде переходной характеристики, так как ее достаточно просто получить экспериментально и, кроме того, определяемый ею переходный процесс часто возникает при включениях и изменениях задающего воздействия.

При поступлении на вход САУ величины  $x(t) = \delta(t)$  на выходе получаем импульсную переходную характеристику  $w(t)$  или в преобразованном по Лапласу виде:

$$\begin{aligned} X(p) &= \mathbf{L}\{x(t)\} = \mathbf{L}\{\delta(t)\} = 1, \\ Y(p) &= \mathbf{L}\{w(t)\} = W(p), \end{aligned}$$

т.е.

$$W(p) = \mathbf{L}\{w(t)\}. \quad (2.17)$$

Установим связь между переходной и импульсной переходной функциями, приравняв правые части выражений (2.16) и (2.17):

$$p\mathbf{L}\{h(t)\} = \mathbf{L}\{w(t)\}.$$

Но так как умножение изображения на оператор  $p$  соответствует операции дифференцирования оригинала, то

$$w(t) = h'(t).$$

Таким образом, импульсная переходная функция является производной от переходной функции. Вообще говоря, эта связь для линейных непрерывных САУ очевидна, она вытекает из равенства (2.13).

## 2.5 Структурные схемы и их преобразование

В теории автоматического управления под структурной схемой понимается графическое изображение математического описания. То есть для составления структурной схемы система дробится на элементы, каждый из которых описывается простейшим математическим выражением (в виде передаточной

функции). Структурные схемы содержат следующие четыре типа элементов: звенья направленного действия; устройства сравнения, или сумматоры; линии связи; точки разветвления (узлы).

Звенья направленного действия изображаются прямоугольниками, внутри которых записываются их передаточные функции.

Между собой звенья соединяются с помощью линий связи. На этих линиях стрелками указывается направление распространения сигналов. Следует подчеркнуть, что в направлениях, противоположных указанным стрелками, сигналы не распространяются. Сами линии связи, так же как и сумматоры, считаются идеальными, то есть никакими параметрами не обладают.

Сумматоры предназначены для суммирования сигналов (с учетом знака сигнала), как и на функциональных схемах.

Для распределения сигналов по различным направлениям используются узлы, которые обозначаются точками в местах пересечения линий связи.

Для удобства расчетов бывает необходимо преобразовать исходную структурную схему системы к какому-либо желаемому виду, чаще всего — к цепи последовательно соединенных звеньев. В связи с этим рассмотрим основные правила преобразования структурных схем.

При последовательном соединении  $n$  звеньев с передаточными функциями  $W_i(p)$  (рис. 2.10, *a*) эквивалентная передаточная функция  $W_3(p)$  определяется их произведением:

$$W_3(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

При параллельном соединении  $m$  звеньев (рис 2.10, *б*) эквивалентная передаточная функция определяется суммой передаточных функций  $W_i(p)$  отдельных звеньев:

$$W_3(p) = \sum_{i=1}^m W_i(p).$$

Для случая обратной связи при выводе эквивалентной передаточной функции замкнутого участка  $W_3(p)$  используем обозначения, приведенные на рис. 2.10, *в*.

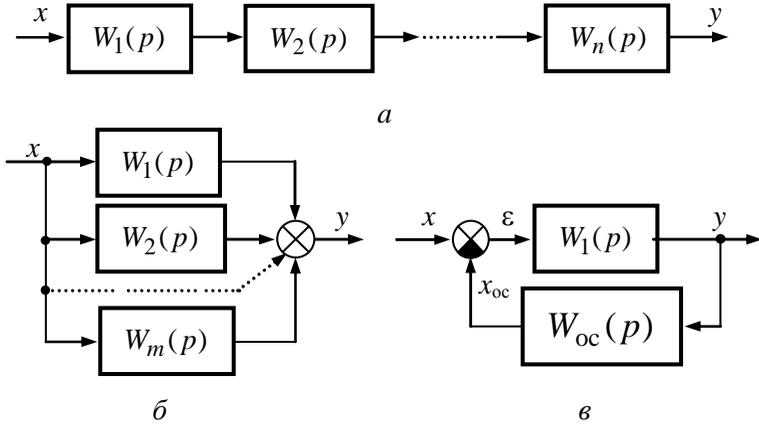


Рис. 2.10 — Основные правила преобразования структурных схем

Обратная связь называется отрицательной, если

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_{oc}(t),$$

как показано на схеме, и положительной, если

$$\varepsilon(t) = x(t) + x_{oc}(t).$$

Если  $X(p) = \mathbf{L}\{x(t)\}$ ,  $Y(p) = \mathbf{L}\{y(t)\}$ ,  $E(p) = \mathbf{L}\{\varepsilon(t)\}$ ,  $X_{oc}(p) = \mathbf{L}\{x_{oc}(t)\}$ , то в случае отрицательной обратной связи с учетом указанных направлений распространения сигналов получим:

$$\begin{aligned} Y(p) &= E(p) \cdot W_1(p) = [X(p) - X_{oc}(p)] \cdot W_1(p) = \\ &= [X(p) - Y(p) \cdot W_{oc}(p)] \cdot W_1(p), \end{aligned}$$

или

$$Y(p) + Y(p) \cdot W_{oc}(p) \cdot W_1(p) = X(p) \cdot W_1(p).$$

Отсюда получаем передаточную функцию

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_{oc}(p) \cdot W_1(p)}.$$

Для положительной обратной связи в знаменателе формулы знак «плюс» меняется на «минус».

Указанные три вида преобразования структурных схем являются наиболее часто встречающимися. Для остальных случаев

сформулируем основной принцип преобразования и поясним несколькими примерами. При преобразовании структурной схемы передача сигнала по выбранному направлению не должна меняться.

Например, в структурной схеме на рис. 2.11, *а* необходимо перенести узел через звено с передаточной функцией  $W_2(p)$ . Чтобы передача сигнала по цепи обратной связи не изменилась, необходимо ввести фиктивное звено с передаточной функцией

$\frac{1}{W_2(p)}$ , как показано на рис. 2.11, *б*.

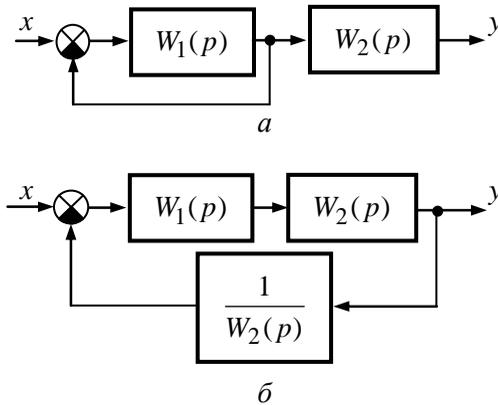


Рис. 2.11 — Преобразование структурной схемы (пример 1)

В более сложных случаях в процессе преобразования необходимо производить определенные расчеты. Например, в схеме на рис. 2.12, *а* узел 1 необходимо перенести на выход звена с передаточной функцией  $W_2(p)$ .

Установим связь между величинами  $Y(p)$  и  $X_2(p)$ . На входе звеньев с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  действует сигнал

$$X(p) = \frac{X_2(p)}{W_2(p)}.$$

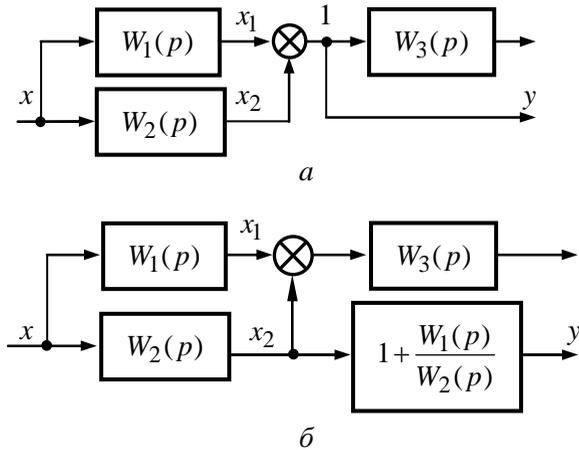


Рис. 2.12 — Преобразование структурной схемы (пример 2)

На выходе звена с передаточной функцией  $W_1(p)$

$$X_1(p) = X(p) \cdot W_1(p) = \frac{X_2(p)}{W_2(p)} \cdot W_1(p).$$

На выходе сумматора в узле 1

$$Y(p) = X_2(p) + \frac{X_2(p)}{W_2(p)} \cdot W_1(p) = X_2(p) \cdot \left[ 1 + \frac{W_1(p)}{W_2(p)} \right].$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом примере при переносе узла необходимо ввести фиктивное звено с передаточной функцией  $W(p) = 1 + \frac{W_1(p)}{W_2(p)}$ , как показано на рис. 2.12, б.

При переносе узла в схеме на рис. 2.13, а с выхода сумматора на его положительный вход (2.13, б) найдем передаточную функцию фиктивного звена без дополнительных пояснений.

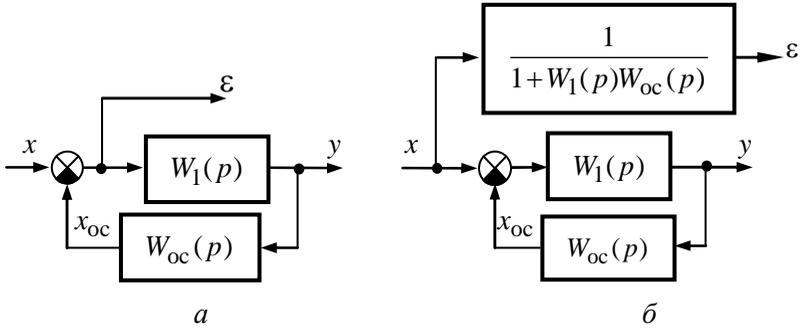


Рис. 2.13 — Преобразование структурной схемы (пример 3)

$$X(p) = \mathbf{L}\{x(t)\}, \quad E(p) = \mathbf{L}\{\epsilon(t)\}, \quad X_{oc}(p) = \mathbf{L}\{x_{oc}(t)\},$$

$$E(p) = X(p) - X_{oc}(p),$$

$$X_{oc}(p) = E(p) \cdot W_1(p) \cdot W_{oc}(p),$$

$$E(p) = X(p) - E(p) \cdot W_1(p) \cdot W_{oc}(p),$$

$$E(p) = \frac{X(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_{oc}(p)}.$$

## 3 ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ САУ

### 3.1 Понятие типового звена. Классификация типовых динамических звеньев САУ

В общем случае какой-либо объект в теории автоматического управления описывается передаточной функцией, содержащей полиномы от  $p$  произвольного порядка в числителе и знаменателе. Но если передаточная функция объекта содержит только простой множитель в числителе (знаменатель при этом представляет собой действительное число) либо только простой множитель в знаменателе (числитель представляет собой действительное число), то объект называется *типовым динамическим звеном* (или просто типовым звеном).

Из курса алгебры известно, что полином любого порядка можно разложить на простые множители. То есть любую САУ можно представить в виде последовательного соединения типовых звеньев. С другой стороны, реальные звенья САУ могут иметь самую разнообразную физическую основу (электронные, механические, гидравлические, электромеханические и т.п.) и конструктивное выполнение, но иметь одинаковые передаточные функции и являться одинаковыми типовыми звеньями. Поэтому знание характеристик звеньев столь же необходимо для расчетов в ТАУ, как знание таблицы умножения в арифметике.

Все линейные типовые звенья условно разделяют на три группы. В основу этого разделения положен характер нулей или полюсов передаточной функции.

**Минимально-фазовые звенья.** Передаточные функции этих звеньев могут содержать в своей структуре как нули, так и полюсы, причем полюсы могут иметь отрицательные вещественные части, быть нулевыми или чисто мнимыми. Поэтому фазовая характеристика таких звеньев изменяется в диапазоне

$-\pi \leq \varphi(\omega) < \frac{\pi}{2}$  или от  $-180^\circ$  до  $90^\circ$ . Среди минимально-фазовых

звеньев иногда выделяют позиционные звенья, которые характеризуются тем, что в каждом из них, кроме консервативного,

при подаче на вход постоянной величины с течением времени устанавливается постоянное значение выходной величины.

**Неминимально-фазовые звенья.** Их передаточные функции имеют нули (устойчивые звенья) или полюсы (неустойчивые звенья), расположенные в правой комплексной полуплоскости.

**Звенья с распределенными параметрами.** Среди этих звеньев выделяют трансцендентные и иррациональные звенья. В звеньях с распределенными параметрами количество нулей и полюсов в передаточных функциях может стремиться к бесконечности. Передаточные функции трансцендентных звеньев представляют собой трансцендентные выражения (пример — звено чистого запаздывания, являющееся предметом нашего дальнейшего рассмотрения), а передаточные функции иррациональных звеньев описываются иррациональными выражениями (примерами таких звеньев могут служить различные тепловые и диффузионные объекты, в частности радиационная печь, передаточная функция которой имеет вид  $W(p) = k/\sqrt{p}$ ).

Трансцендентные и иррациональные звенья часто относят к особым звеньям линейных САУ, анализ динамических свойств таких систем требует рассмотрения вспомогательных вопросов.

## 3.2 Минимально-фазовые звенья

### 3.2.1 Звенья первого порядка

Звенья первого порядка содержат только один нуль или полюс в своих передаточных функциях или вовсе не содержат таковых.

#### 3.2.1.1 Пропорциональное (безынерционное) звено

Описывается уравнением и имеет передаточную функцию

$$y(t) = k \cdot x(t), \quad W(p) = k.$$

Параметр  $k$  в общем случае называется *коэффициентом передачи* звена и может иметь любую размерность. В частных

случаях, когда  $k$  является величиной безразмерной, принято пользоваться термином «коэффициент усиления».

Частотные и временные функции звена:

$$W(j\omega) = A(\omega) = P(\omega) = k,$$

$$\varphi(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = 0,$$

$$G(\omega) = 20 \lg k,$$

$$h(t) = k \cdot 1(t), \quad w(t) = k \cdot \delta(t).$$

Примерами таких звеньев могут служить механические связи, электронные усилители сигналов на низких частотах и др.

Схема на рис. 2.7б, если  $Z_{\text{вх}}(p) = R_1$  и  $Z_{\text{oc}}(p) = R_2$ , также будет являться пропорциональным звеном, поскольку

$$W(p) = -\frac{R_2}{R_1}.$$

### 3.2.1.2 Интегрирующее (идеальное) звено

Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt, \quad W(p) = \frac{k}{p}.$$

В случае интегрирующего звена параметр  $k$  является коэффициентом передачи звена по скорости, численно равным скорости изменения выходной величины при единичном значении входной величины, т.е. имеет размерность  $\text{с}^{-1}$ .

Частотные и временные функции звена:

$$W(j\omega) = -j \frac{k}{\omega}, \quad P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega},$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}, \quad G(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega,$$

$$h(t) = k \cdot t, \quad w(t) = k.$$

Построенные по указанным функциям характеристики звена изображены на рис. 3.1.

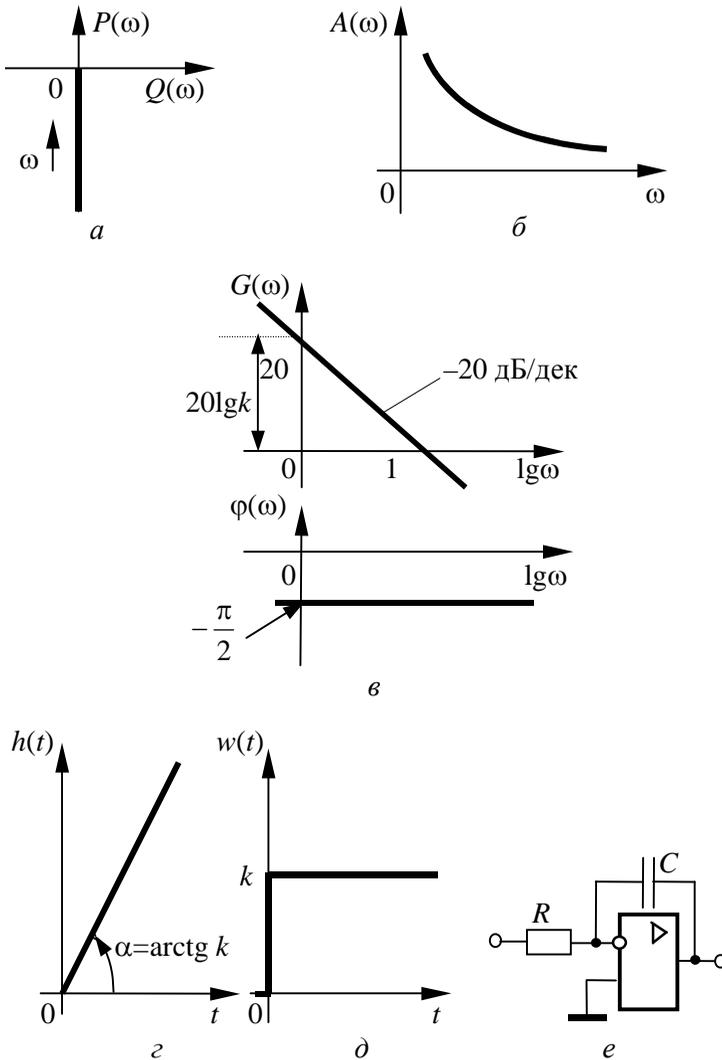


Рис. 3.1 — Частотные (а—в), временные (г, д) характеристики интегрирующего звена и его реализация на операционном усилителе (е)

Схема на рис. 2.7, б будет являться интегрирующим звеном, если  $Z_{\text{вх}}(p) = R$ , а цепь обратной связи организована конденсатором (рис. 3.1, е), т.е.

$$Z_{\text{ос}}(p) = \frac{1}{Cp}.$$

На самом деле, согласно формуле (2.8), передаточная функция схемы будет иметь вид

$$W(p) = -\frac{1}{RCp} = -\frac{1}{Tp} = -\frac{k}{p},$$

где  $k = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}$ .

При использовании в рассматриваемой схеме реального операционного усилителя переходная характеристика не может иметь значения, превышающие напряжение питания. Но если предположить операционный усилитель идеальным, то и реализованное здесь интегрирующее звено будет идеальным.

### 3.2.1.3 Дифференцирующее (идеальное) звено

Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}, \quad W(p) = k \cdot p.$$

Выходная величина пропорциональна скорости изменения входной величины.

Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то коэффициент  $k$  измеряется в секундах. В этом случае его принято обозначать через  $\tau$  и называть постоянной времени дифференцирующего звена.

Выражения для основных функций:

$$W(j\omega) = jk\omega, \quad P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = \omega k,$$

$$A(\omega) = \omega k, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}, \quad G(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega,$$

$$h(t) = \delta(t).$$

Как передаточная функция, так соответственно и частотные характеристики дифференцирующего звена являются обратны-

ми передаточной функции и соответствующим характеристикам интегрирующего звена.

Логарифмические частотные характеристики рассматриваемого звена приведены на рис. 3.2, *a*.

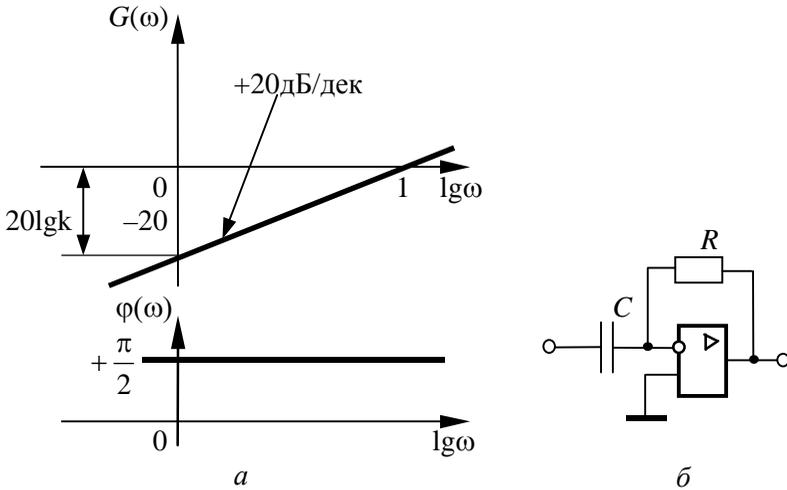


Рис. 3.2 — Частотные характеристики дифференцирующего звена (*a*) и его реализация на операционном усилителе (*б*)

При построении ЛАЧХ удобно отложить точку с координатами  $\lg \omega = 1$ , провести через нее прямую с наклоном плюс 20 дБ/дек, затем отложить на оси  $G(\omega)$  отрезок  $G_0 = 20 \lg k$  (поскольку, как правило,  $k < 1$ , точка  $G_0$  будет находиться ниже оси  $\lg \omega$ ) и провести параллельную прямую.

О том, что звено с представленным математическим описанием является идеальным, говорит, к примеру, переходная функция. Ни в каком реальном устройстве невозможно получить мгновенный скачек выходной величины бесконечной амплитуды.

Реальные дифференцирующие звенья обладают конечной инерционностью, вследствие чего осуществляемое ими дифференцирование не является точным. На рис. 3.2, *б* изображен ва-

риант реализации дифференцирующего звена на операционном усилителе с конденсатором  $C$  во входной цепи и резистором  $R$  в цепи обратной связи. Тогда

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{Cp}, \quad Z_{\text{ос}}(p) = R,$$

$$W(p) = -\frac{Z_{\text{ос}}(p)}{Z_{\text{вх}}(p)} = -RCp = -Tp = -kp.$$

Неидеальность реализации звена определена напряжением питания усилителя, его выходное напряжение будет конечной величиной.

### 3.2.1.4 Инерционное звено (аперiodическое звено первого порядка)

Описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t).$$

Перейдя к изображениям, получим:

$$(Tp + 1)Y(p) = kX(p).$$

Передаточные и частотные функции:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp + 1};$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1} = \frac{k(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{k(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2};$$

$$P(\omega) = \text{Re}[W(j\omega)] = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2};$$

$$Q(\omega) = \text{Im}[W(j\omega)] = -\frac{kT\omega}{1 + \omega^2 T^2};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\text{arctg} \omega T;$$

$$G(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

На рис. 3.3 приведены основные частотные характеристики инерционного звена. Годограф АФЧХ (рис. 3.3, а) имеет вид

полуокружности радиуса  $\frac{k}{2}$  с центром в точке  $\left(\frac{k}{2}, j0\right)$ , расположенной в четвертом квадранте комплексной плоскости. АЧХ (рис. 3.3, б) монотонно уменьшается с ростом частоты, начиная со значения  $k$ , по обратно квадратичной зависимости.

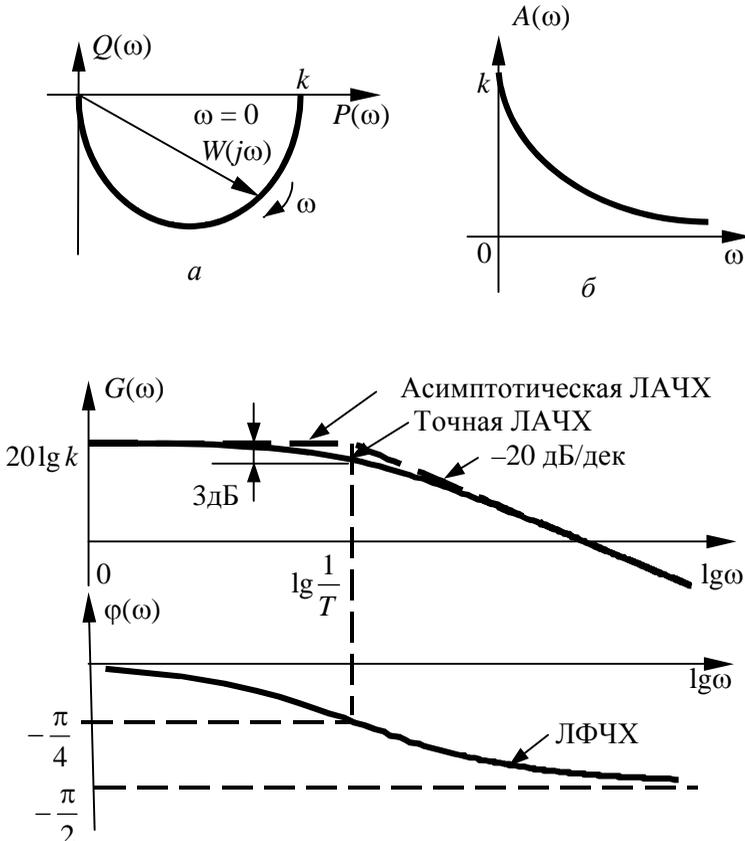


Рис. 3.3 — Частотные характеристики инерционного звена

ЛАЧХ звена показана на рис. 3.3, в. Но эта же характеристика может быть представлена приблизительно ломаной линией, которая показана на том же рисунке. Эта приближенная характеристика называется *асимптотической ЛАЧХ*. Такое название

связано с тем, что эта характеристика составлена из двух асимптот, к которым стремится ЛАЧХ при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ .

При малых значениях  $\omega$  можно считать  $T^2\omega^2 \ll 1$ , то есть  $\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \approx 1$ , следовательно,  $G(\omega) \approx 20\lg k$ . Соответственно характеристика представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс и проходящую на уровне  $20\lg k$ . Это первая асимптота, к которой стремится ЛАЧХ при  $\omega \rightarrow 0$ .

С другой стороны, на больших частотах

$$\omega^2 T^2 \gg 1; \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx \omega T; G(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega T.$$

В этом случае характеристика представляет собой прямую, имеющую наклон минус 20 дБ/дек. Действительно, при увеличении  $\omega$  на декаду, т.е. в 10 раз,

$$G(\omega) = 20\lg k - 20\lg(10\omega \cdot T) = 20\lg k - 20\lg \omega T - 20\lg 10.$$

Таким образом, величина  $G(\omega)$  уменьшилась на  $20 \lg 10$ , т.е. на 20 дБ. Эта линия является асимптотой, к которой стремится ЛАЧХ при  $\omega \rightarrow \infty$ . Обе асимптоты пересекаются в точке, соответствующей частоте  $\omega = \frac{1}{T}$ . Поэтому эта частота называется *частотой сопряжения* (сопрягающей частотой).

Максимальное расхождение между точной ( $G_T$ ) и асимптотической ( $G_a$ ) ЛАЧХ наблюдается при частоте сопряжения. Вычислим это расхождение, подставив в соотношения для  $G_T$  и

$$G_a \text{ значения частоты сопряжения } \omega_c = \frac{1}{T}:$$

$$G_a(\omega) - G_T(\omega) = 20\lg k - 20\lg k + 20\lg \sqrt{\left(\frac{T}{T}\right)^2 + 1} = 20\lg \sqrt{2} = 3 \text{ дБ.}$$

От параметров звена рассматриваемая величина не зависит.

На этом же рисунке показана ЛФЧХ: при  $\omega \rightarrow \infty$  значение  $\varphi$  изменяется от 0 до минус  $\frac{\pi}{2}$ . При этом в точке  $\omega_c = \frac{1}{T}$  имеем

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Переходная функция инерционного звена может быть выведена по формуле (2.14). Если  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$ , то  $B(p) = B = k$ ,  $A(p) = Tp+1$ ,  $A'(p) = T$ . Передаточная функция имеет один полюс  $p_1 = \frac{1}{T}$ . Тогда по формуле (2.14) получим

$$h(t) = \frac{B}{A(0)} + \frac{Be^{p_1 t}}{p_1 A'(p_1)} = \frac{k}{1} + \frac{ke^{-\frac{t}{T}}}{\left(-\frac{1}{T}\right) \cdot T} = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right),$$

а импульсная переходная функция

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Переходная и импульсная переходная характеристики представлены на рис. 3.4, а, б.

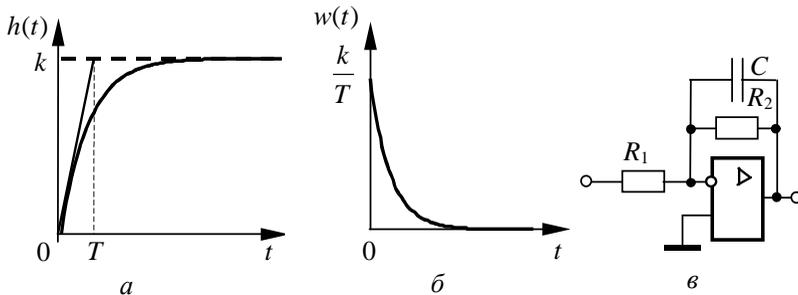


Рис. 3.4 — Временные характеристики инерционного звена (а, б) и его реализация на операционном усилителе (в)

Динамические свойства звена характеризуются постоянной времени  $T$ . Постоянная времени может быть определена как время, в течение которого выходная величина достигла бы своего нового установившегося значения, если бы она изменялась с постоянной скоростью, равной скорости изменения ее в начальный момент времени (см. рис. 3.4, а). Коэффициент передачи  $k$  определяет свойства звена в установившемся режиме.

В рассмотренных выше примерах по определению передаточных функций схемы на рис. 2.3, 2.4, 2.7, *а* являются инерционными (апериодическими) звеньями. Реализация этого звена на операционном усилителе приведена на рис. 3.4, *в*. Действительно, если

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_1, \quad Z_{\text{ос}}(p) = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{R_2}{R_2 Cp + 1},$$

то 
$$W(p) = -\frac{Z_{\text{ос}}(p)}{Z_{\text{вх}}(p)} = -\frac{R_2}{R_1(R_2 Cp + 1)} = -\frac{k}{Tp + 1},$$

где  $k = \frac{R_2}{R_1}$ ,  $T = R_2 C$ .

### Пример 3.1

Асимптотическая ЛАЧХ апериодического звена имеет частоту среза  $\omega_{\text{ср}} = 100 \text{ с}^{-1}$ . Частотой среза  $\omega_{\text{ср}}$  называется частота, при которой ЛАЧХ пересекает ось частот, т.е.  $G(\omega_{\text{ср}}) = 0$ . Это означает, что частотный коэффициент передачи устройства или системы равен единице и при  $\omega < \omega_{\text{ср}}$  происходит усиление выходного сигнала, а при  $\omega > \omega_{\text{ср}}$  – его ослабление. Коэффициент передачи звена  $k = 10$ . Требуется определить постоянную времени  $T$ .

Нужно на графике или мысленно провести из точки на оси частот  $\lg \omega = \lg \omega_{\text{ср}} = \lg 100 = 2$  прямую с наклоном минус 20 дБ/дек до пересечения с горизонталью, проведенной на уровне  $G(\omega) = 20 \lg k = 20 \lg 10 = 20$ . Координата точки пересечения по оси частот даст логарифм сопрягающей частоты  $\lg \omega_c = 1$ , отсюда  $\omega_c = 10$  и  $T = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ с}$ .

### 3.2.1.5 Форсирующее звено

Часто в литературе это звено именуется как пропорционально-дифференцирующее. Выходная величина этого звена пропорциональна входной и производной от входной величины. Передаточная функция и основные частотные функции:

$$W(p) = k(\tau p + 1);$$

$$W(j\omega) = k(j\tau\omega + 1); \quad P(\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)] = k;$$

$$Q(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)] = k\omega\tau;$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg} \omega\tau;$$

$$G(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}.$$

Звено характеризуется двумя параметрами — коэффициентом передачи  $k$  и постоянной дифференцирования  $\tau$ .

На рис. 3.5, *a*—*в* приведены частотные характеристики форсирующего звена, они являются обратными характеристикам инерционного звена. АФЧХ (рис. 3.5, *a*) имеет вид вертикальной прямой, расположенной в первом квадранте комплексной плоскости на расстоянии  $k$  от начала координат. АЧХ (рис. 3.5, *б*) монотонно возрастает с ростом частоты, начиная со значения  $k$ . Низкочастотные асимптоты ЛАЧХ форсирующего (рис. 3.5, *в*) и инерционного звеньев совпадают, но высокочастотная асимптота ЛАЧХ форсирующего звена имеет наклон плюс 20 дБ/дек. Частота сопряжения равна  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ . ЛФЧХ форсирующего звена

точно такая же, как и у инерционного, только фаза имеет положительные значения.

На рис. 3.5, *г* приведена схемная реализация форсирующего звена на операционном усилителе (на пассивных четырехполюсниках это звено не реализуется). Поскольку в схеме

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{Cp}}{R_1 + \frac{1}{Cp}} = \frac{R_1}{R_1 Cp + 1}, \quad Z_{\text{ос}}(p) = R_2,$$

то 
$$W(p) = -\frac{Z_{oc}(p)}{Z_{вх}(p)} = -\frac{R_2}{\frac{R_1}{R_1 C p + 1}} = -k(\tau p + 1),$$

где  $k = \frac{R_2}{R_1}$ ,  $\tau = R_1 C$ .

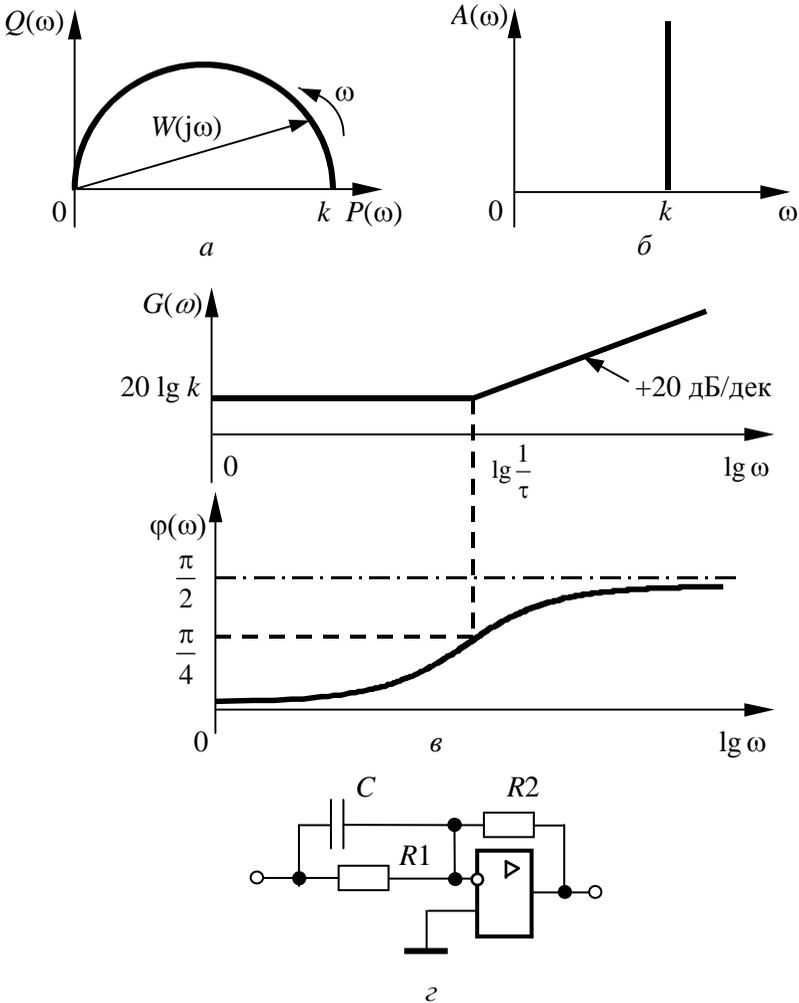


Рис. 3.5 — Частотные характеристики форсирующего звена (а—г) и его реализация на операционном усилителе (е)

Переходная характеристика форсирующего звена  $h(t) = k[\tau\delta(t) + 1]$ , т.е. равна сумме переходных характеристик дифференцирующего и пропорционального звеньев. В начальный момент времени она имеет скачок бесконечной амплитуды, как и у идеального дифференцирующего звена, а далее проходит горизонтально, как и у пропорционального звена.

Остальные звенья первого порядка образованы путем последовательного соединения рассмотренных звеньев, и их относят к типовым ввиду широкого применения в САУ.

### 3.2.1.6 Инерционное форсирующее звено

Это звено представляет последовательное соединение инерционного  $W_{\text{ин}}(p)$  и форсирующего  $W_{\text{форс}}(p)$  звеньев, поэтому их передаточные функции и АЧХ перемножаются, т.е.

$$W(p) = W_{\text{ин}}(p) \cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{Tp + 1},$$

$$A(\omega) = A_{\text{ин}}(\omega) \cdot A_{\text{форс}}(\omega) = \frac{k\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2T^2 + 1}},$$

а ЛАЧХ и ЛФЧХ — складываются:

$$G(\omega) = G_{\text{ин}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) =$$

$$= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} - 20\lg\sqrt{\omega^2T^2 + 1},$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ин}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega) = \arctg(\omega \cdot \tau) - \arctg(\omega \cdot T).$$

На рис. 3.6, *а*, *б* изображены логарифмические частотные характеристики инерционного форсирующего звена, их вид существенно зависит от соотношения постоянных времени  $\tau$  и  $T$ . При  $\tau < T$  (рис. 3.6, *а*) ЛАЧХ имеет наклон  $-20$  дБ/дек после

частоты сопряжения  $\omega_{c1} = \frac{1}{T}$  и нулевой наклон после частоты сопряжения  $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau}$ . При  $\tau > T$  (рис. 3.6, *б*) ее наклон  $+20$  дБ/дек

после частоты сопряжения  $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau}$  и нулевой наклон после

$\omega_{с2} = \frac{1}{T}$ . ЛФЧХ в результате суммирования составляющих  $\Phi_{ин}(\omega)$  и  $\Phi_{форс}(\omega)$  (на рис. 3.6, а, б они показаны штрихпунктирными линиями) имеет колоколообразную форму.

Расчетное выражение для переходной функции инерционного форсирующего звена может быть получено по формуле (2.15) при  $B(p) = k(\tau p + 1)$ ,  $A(p) = Tp + 1$ ,  $A'(p) = T$ ,  $p_1 = \frac{1}{T}$ :

$$h(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \frac{B(p_1)e^{p_1 t}}{p_1 A'(p_1)} = k + \frac{k\left(-\frac{\tau}{T} + 1\right)e^{-\frac{t}{T}}}{\left(-\frac{1}{T}\right)T} = k \left[ 1 + \left(\frac{\tau}{T} - 1\right)e^{-\frac{t}{T}} \right].$$

При  $t = 0$  переходная характеристика будет иметь начальный скачок, равный  $h(0) = k\frac{\tau}{T}$ , а при  $t = \infty$  установившееся значение  $h(\infty) = k$ . Если  $\tau < T$ , скачок на переходной характеристике (рис. 3.6, в) будет меньше установившегося значения, а при  $\tau > T$  скачок на переходной характеристике (рис. 3.6, г) превышает установившееся значение.

Схемная реализация инерционного форсирующего звена также зависит от соотношения  $\tau$  и  $T$ . На рис. 3.6, д приведена его реализация на операционном усилителе при  $\tau < T$ , для этой

$$\text{схемы } Z_{вх}(p) = R_1, \quad Z_{ос}(p) = \frac{R_2 \cdot \left(R_3 + \frac{1}{Cp}\right)}{R_2 + R_3 + \frac{1}{Cp}} = \frac{R_2 \cdot (R_3 Cp + 1)}{(R_2 + R_3) Cp + 1}.$$

Передаточная функция

$$W(p) = -\frac{R_2 \cdot (R_3 Cp + 1)}{(R_2 + R_3) Cp + 1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3 Cp + 1}{(R_2 + R_3) Cp + 1},$$

то есть  $k = \frac{R_2}{R_1}$ ,  $\tau = R_3 C$ ,  $T = (R_2 + R_3) C$ .

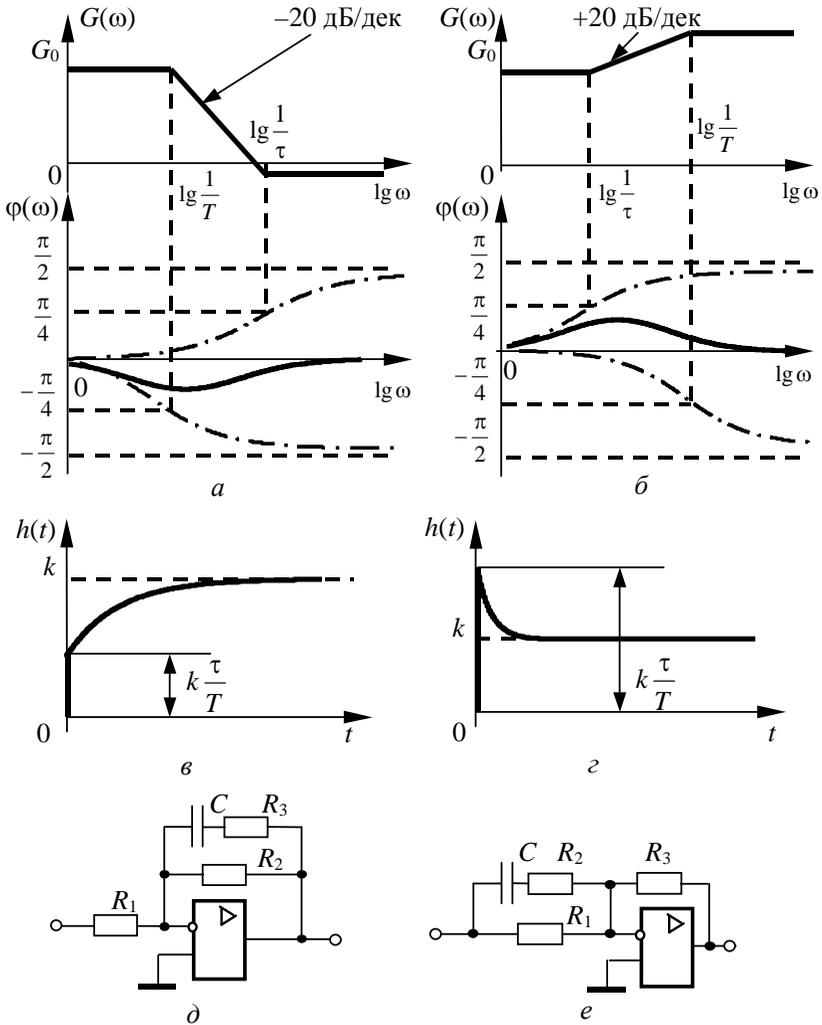


Рис. 3.6 — ЛАЧХ и ЛФЧХ (*a*, *b*), переходные характеристики (*в*, *г*) инерционного форсирующего звена (*a*—*в*) и варианты его реализации на операционном усилителе (*г*, *е*)

В схеме на рис. 3.6,  $e \tau < T$ , и для такого звена  $k = \frac{R_3}{R_1}$ ,  
 $\tau = (R_1 + R_2)C$ ,  $T = R_2C$ .

### 3.2.1.7 Изодромное звено

Это звено представляет последовательное соединение интегрирующего и форсирующего звеньев, его передаточная функция имеет вид

$$W(p) = W_{\text{инт}}(p) \cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p}.$$

Как и в предыдущем случае, ЛАЧХ и ЛФЧХ складываются, т.е.

$$G(\omega) = G_{\text{инт}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} - 20 \lg \omega,$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{инт}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega) = \arctg(\omega \cdot \tau) - \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 3.7, *a*, приведены ЛАЧХ и ЛФЧХ изодромного звена. До частоты сопряжения  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  ЛАЧХ проходит с наклоном  $-20$  дБ/дек, а после нее — горизонтально. Суммарная ЛФЧХ представляет собой ЛФЧХ форсирующего звена, смещенную за счет интегрирующего звена на угол  $-\frac{\pi}{2}$ .

Переходная функция изодромного звена может быть выведена по формуле (2.16), поскольку изображение выходной величины будет содержать нулевой полюс кратности 2, т.е.

$$h(t) = \frac{d}{dp} \left[ B(p) e^{pt} \right] \Big|_{p=0} = \frac{d}{dp} \left[ k(\tau p + 1) e^{pt} \right] \Big|_{p=0} = k(\tau + t).$$

Переходная характеристика звена (рис. 3.7, *б*) будет представлять собой линейную зависимость, смещенную относительно начала координат на величину  $k\tau$ .

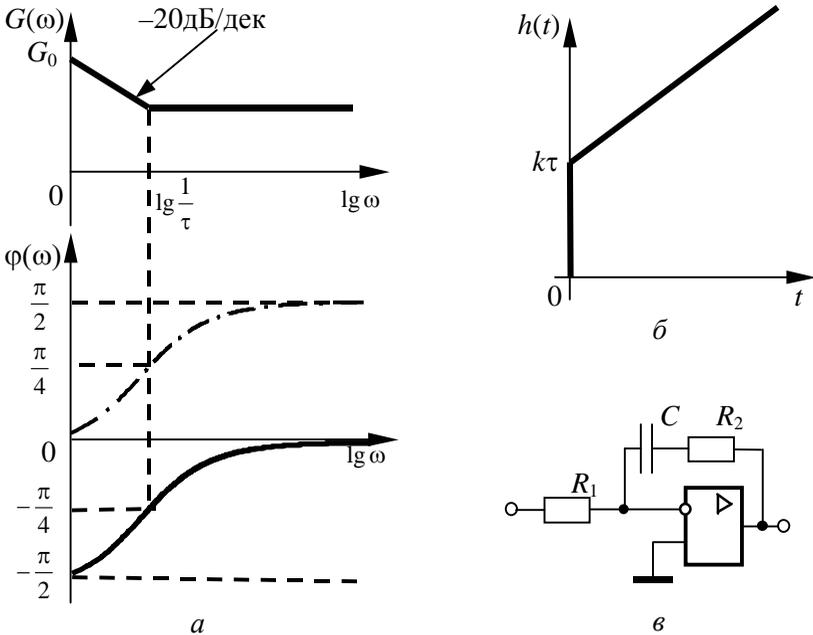


Рис. 3.7 — ЛАЧХ и ЛФЧХ (а), переходная характеристика (б) изодромного звена и его реализация на операционном усилителе (в)

На рис. 3.7, в приведена реализация изодромного звена на операционном усилителе. Для такой схемы

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_1, \quad Z_{\text{ос}}(p) = R_2 + \frac{1}{Cp} = \frac{R_2 Cp + 1}{Cp}.$$

Передаточная функция

$$W(p) = -\frac{R_2 Cp + 1}{R_1 Cp} = -\frac{1}{R_1 C} \cdot \frac{R_2 Cp + 1}{p} = -\frac{k(\tau p + 1)}{p},$$

где  $k = \frac{1}{R_1 C}$ ,  $\tau = R_2 C$ .

### 3.2.1.8 Реальное дифференцирующее звено

Такое звено является последовательным соединением дифференцирующего и инерционного звеньев, его передаточная функция имеет вид

$$W(p) = W_{\text{дифф}}(p) \cdot W_{\text{ин}}(p) = \frac{kp}{Tp + 1}.$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ складываются, т.е.

$$G(\omega) = G_{\text{дифф}}(\omega) + G_{\text{ин}}(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1},$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{дифф}}(\omega) + \varphi_{\text{ин}}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega \cdot T).$$

На рис. 3.8, а приведены логарифмические частотные характеристики реального дифференцирующего звена. До частоты сопряжения  $\omega_c = \frac{1}{T}$  ЛАЧХ проходит с наклоном +20 дБ/дек, а после нее — горизонтально. Суммарная ЛФЧХ представляет собой ЛФЧХ инерционного звена, смещенную за счет дифференцирующего звена на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Расчетное выражение для переходной функции этого звена может быть получено по формуле (2.14) при  $B(p) = kp$ ,

$$A(p) = Tp + 1, \quad A'(p) = T, \quad p_1 = \frac{1}{T}:$$

$$h(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \frac{B(p_1)e^{p_1 t}}{p_1 A'(p_1)} = 0 + \frac{k \left(-\frac{1}{T}\right) e^{-\frac{t}{T}}}{\left(-\frac{1}{T}\right) T} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

На рис. 3.8, б приведена переходная характеристика звена.

Она спадает по экспоненте до нуля от значения  $h(0) = \frac{k}{T}$ . На рис. 3.8, в приведена реализация реального дифференцирующего звена на операционном усилителе. Для такой схемы

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_1 + \frac{1}{Cp} = \frac{R_1 Cp + 1}{Cp}, \quad Z_{\text{ос}}(p) = R_2.$$

Передаточная функция

$$W(p) = -\frac{R_2}{\frac{R_1 Cp + 1}{Cp}} = -\frac{R_2 Cp}{R_1 Cp + 1} = -\frac{kp}{Tp + 1},$$

где  $k = R_2 C$ ,  $T = R_1 C$ .

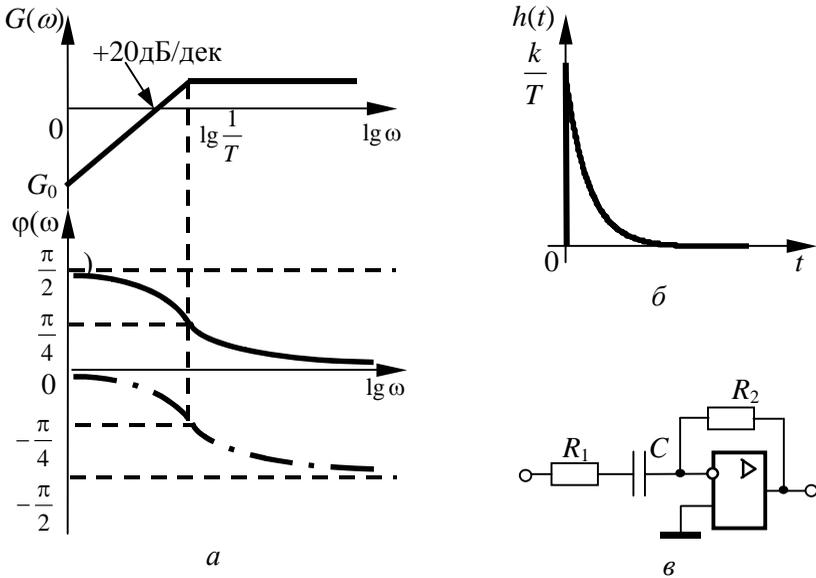


Рис. 3.8 — ЛАЧХ и ЛФЧХ (а), переходная характеристика (б) реального дифференцирующего звена и его реализация на операционном усилителе (в)

### 3.2.2 Звенья второго порядка

В общем случае звено второго порядка описывается уравнением

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

или в операторной форме записи

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)Y(p) = kX(p).$$

Отсюда определяем передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}. \quad (3.1)$$

В зависимости от характера полюсов передаточной функции (3.1) (корней уравнения  $T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = 0$ ) различают апериодическое звено второго порядка, колебательное и консервативное звенья.

### 3.2.2.1 Апериодическое звено второго порядка

Это звено имеет место при отрицательных вещественных полюсах передаточной функции (3.1), которую в этом случае можно представить в виде:

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad (3.2)$$

где эквивалентные постоянные времени  $T_3$ ,  $T_4$  рассчитываются по соотношению

$$T_{3,4} = \frac{T_2}{2} \pm \sqrt{\frac{T_2^2}{4} - T_1^2}. \quad (3.3)$$

Анализируя выражение передаточной функции (3.2), можно сделать вывод о том, что апериодическое звено второго порядка состоит из двух инерционных (апериодических) звеньев с эквивалентными постоянными времени  $T_3$ ,  $T_4$ , поэтому логарифмические частотные характеристики этих инерционных звеньев складываются.

На рис. 3.9, а показаны ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодического звена второго порядка. До частоты сопряжения  $\omega_{c1} = \frac{1}{T_4}$  ЛАЧХ горизонтальна на уровне  $G_0 = 20 \lg k$ , после этой частоты до

частоты сопряжения  $\omega_{c2} = \frac{1}{T_3}$  имеет наклон  $-20$  дБ/дек, а после  $\omega_{c2}$  проходит с наклоном  $-40$  дБ/дек. ЛФЧХ асимптотически приближается к значению  $-\pi$ .

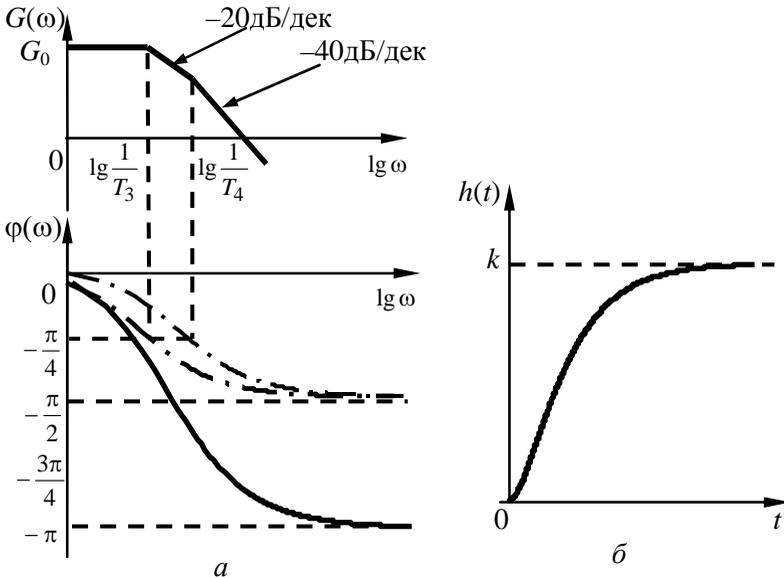


Рис. 3.9 — ЛАЧХ и ЛФЧХ (а), переходная характеристика (б) аperiodического звена второго порядка

По формуле (2.14) получим расчетное выражение для переходной функции аperiodического звена второго порядка. Для него  $B(p) = B = k$ ,  $A(p) = (T_3 p + 1)(T_4 p + 1)$ ,  $A'(p) = 2T_3 T_4 p + T_3 + T_4$ ,

$p_1 = -\frac{1}{T_3}$ ,  $p_2 = -\frac{1}{T_4}$ , тогда

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{B(0)}{A(0)} + \frac{B(p_1)e^{p_1 t}}{p_1 A'(p_1)} + \frac{B(p_2)e^{p_2 t}}{p_2 A'(p_2)} = \\
 &= k \left[ 1 + \frac{T_3}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_4}} \right].
 \end{aligned}$$

Переходная характеристика звена показана на рис. 3.9, б, ее характерная особенность — наличие точки перегиба вследствие суммирования двух экспоненциальных составляющих.

### 3.2.2.2 Колебательное звено

Это звено получается при комплексных сопряженных полюсах передаточной функции (3.1). Передаточную функцию звена удобнее записывать в виде

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1},$$

где  $T = T_1$ , а параметр  $\xi = \frac{T_2}{2T_1}$  называется *коэффициентом*

*демпфирования*. Для колебательного звена  $0 < \xi < 1$ . Можно также отметить, что при  $\xi \geq 1$  полюсы передаточной функции (3.1) становятся вещественными и звено будет аperiodическим второго порядка.

Получим формулы для частотных характеристик колебательного звена:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2 + 2j\xi\omega T} = \frac{k(1 - \omega^2 T^2 - 2j\xi\omega T)}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2},$$

$$P(\omega) = k \frac{1 - \omega^2 T^2}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2},$$

$$Q(\omega) = -k \frac{2\xi\omega T}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2},$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}},$$

$$G(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}.$$

Частотные характеристики колебательного звена приведены на рис. 3.10. Они существенно зависят от величины коэффициента демпфирования  $\xi$ . При  $1 > \xi > 0,707$  АЧХ  $A(\omega)$  (рис. 3.10, *a*) монотонно уменьшается с увеличением частоты. При  $\xi < 0,707$  на ней появляется «горб», который увеличивается по мере уменьшения  $\xi$ . На ЛАЧХ (рис. 3.10, *б*) «горб» проявляется при  $\xi < 0,5$ , при больших значениях коэффициента демпфирования ЛАЧХ приближается к ее асимптотическому варианту (имеет нулевой наклон до частоты сопряжения  $\omega_c = \frac{1}{T}$  и наклон  $-40\text{дБ/дек}$  после этой частоты).

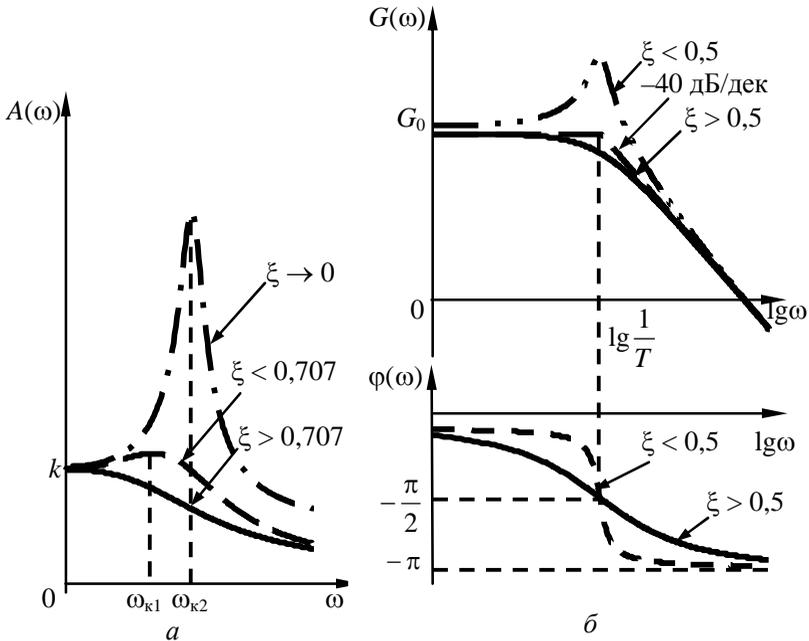


Рис. 3.10 — Частотные характеристики колебательного звена

Величина «горба» на частоте  $\omega_k = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\xi}$  может быть оценена по соотношению [6]:

$$H = 20 \lg \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} \approx 20 \lg \frac{1}{2\xi}.$$

Переходная функция колебательного звена может быть получена по формуле (2.14) при комплексных сопряженных полюсах  $p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}$  (при  $\xi < 1$  выражение  $\xi^2 - 1$  становится меньше нуля):

$$h(t) = k \left[ 1 - e^{-\frac{\xi t}{T}} \left( \cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) \right]. \quad (3.4)$$

На рис. 3.11 показаны переходные характеристики колебательного звена, рассчитанные по выражению (3.4) для различных значений коэффициента демпфирования  $\xi$ . Частота собственных колебаний переходной характеристики оценивается по выражению  $\omega_k = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$  и равна мнимой части полюсов  $p_{1,2}$ . Ее можно также определить и по АЧХ (см. рис. 3.10, а, частоты  $\omega_{k1}$  и  $\omega_{k2}$ , соответствующие максимальным значениям на АЧХ). Огибающая (см. пунктир на рис. 3.11) определяется формулой  $h_0(t) = k e^{-\frac{\xi t}{T}}$ . Время переходного процесса на практике оценивается соотношением

$$t_{\text{пп}} \approx \frac{3T}{\xi}.$$

Примером звена второго порядка может служить колебательный контур (см. схему на рис. 2.6 и вывод передаточной функции в примере 2.5).

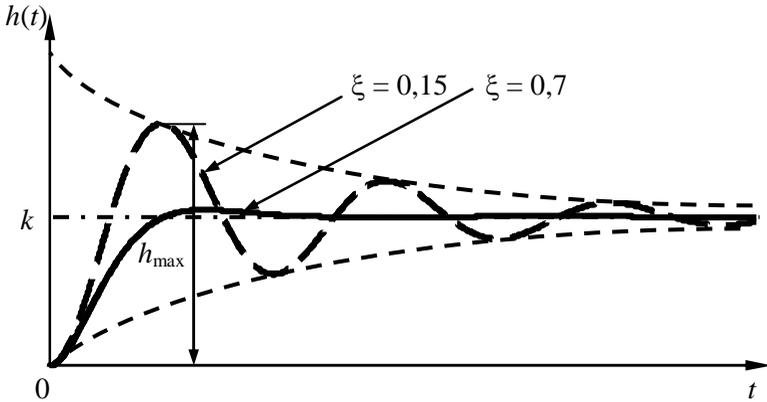


Рис. 3.11 — Переходные характеристики колебательного звена

### Пример 3.2

Определить, при каком соотношении параметров элементов схемы колебательный контур (см. рис. 2.6) является колебательным звеном.

Запишем полученную в примере 2.5 передаточную функцию с использованием коэффициента демпфирования:

$$W(p) = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{1}{\frac{R_2 LC}{R_1 + R_2} p^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 + R_2} p + 1} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Отсюда выразим коэффициент демпфирования:

$$\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 + R_2} = 2\xi T;$$

$$\xi = \frac{R_1 R_2 C + L}{2T(R_1 + R_2)} = \frac{R_1 R_2 C + L}{2(R_1 + R_2) \sqrt{\frac{R_2 LC}{R_1 + R_2}}} = \frac{R_1 R_2 C + L}{2\sqrt{(R_1 + R_2) R_2 LC}}.$$

Звено будет колебательным, если  $\xi < 1$ , т.е.

$$\frac{R_1 R_2 C + L}{\sqrt{(R_1 + R_2) R_2 LC}} < 2.$$

В противном случае, т.е. при

$$\frac{R_1 R_2 C + L}{\sqrt{(R_1 + R_2) R_2 LC}} \geq 2,$$

контур будет являться апериодическим звеном второго порядка.

Следует обратить внимание на то, что лишь с позиций математического описания схему можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка. Расчленив же принципиальную схему на два участка, каждый из которых был бы соответствующим апериодическим звеном первого порядка, невозможно.

### Пример 3.3

Вывести передаточную функцию и определить ее параметры для устройства, схема которого приведена на рис. 3.12, а.

Устройство выполнено на операционных усилителях, реализующих инерционное, интегрирующее и пропорциональное звенья (см. разделы 3.2.1.1, 3.2.1.2, 3.2.1.4). На выходе усилителя DA1 происходит преобразование и суммирование напряжений по каждому из его входов. Его передаточные функции относительно входного напряжения  $U_{вх}$  и напряжения обратной связи  $U_{ос}$  представляются выражениями

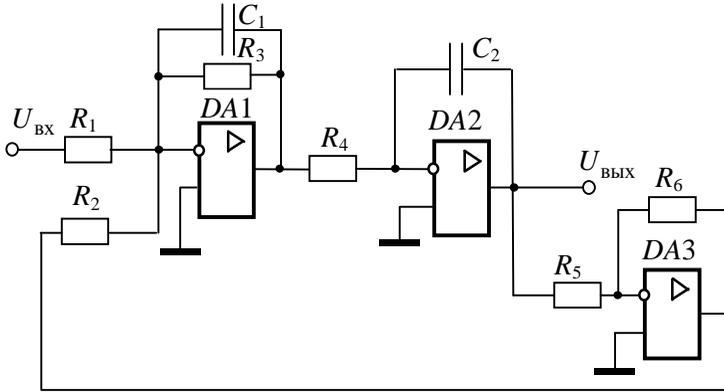
$$W_1(p) = -\frac{R_3}{R_1(R_3 C_1 p + 1)}, \quad W_2(p) = -\frac{R_3}{R_2(R_3 C_1 p + 1)}.$$

Полученный сигнал проходит через последовательно включенное интегрирующее звено на усилителе DA2 с передаточной

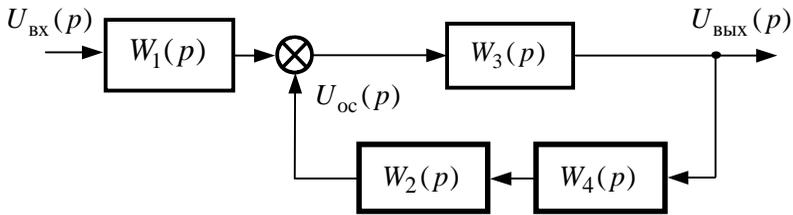
$$\text{функцией } W_3(p) = -\frac{1}{R_4 C_2 p}.$$

Выход усилителя DA2 образует выход устройства и сигнал с него через усилитель DA3 с передаточной функцией

$$W_4(p) = -\frac{R_6}{R_5} \text{ поступает на второй вход усилителя DA1.}$$



a



б

Рис. 3.12 — Устройство на операционных усилителях (а) и его структурная схема (б)

На рис. 3.12, б приведена структурная схема, соответствующая устройству, изображенному на рис. 3.12, а. Эквивалентная передаточная функция участка схемы, охваченного обратной связью, рассчитывается по выражению:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{экв}}(p) &= \frac{W_3(p)}{1 - W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p)} = \\
 &= \frac{\left( -\frac{1}{R_4 C_2 p} \right)}{1 - \left( -\frac{R_3}{R_2 (R_3 C_1 p + 1)} \right) \cdot \left( -\frac{1}{R_4 C_2 p} \right) \cdot \left( -\frac{R_6}{R_5} \right)} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{R_2 R_5 (R_3 C_1 p + 1)}{R_3 R_6 \left( \frac{R_2 R_4 R_5 C_1 C_2}{R_6} p^2 + \frac{R_2 R_4 R_5 C_2}{R_3 R_6} p + 1 \right)}.$$

Таким образом, передаточная функция устройства, изображенного на рис. 3.12, а, будет равна

$$\begin{aligned} W(p) &= W_1(p) \cdot W_{\text{эКВ}}(p) = \\ &= \frac{\left[ -\frac{R_3}{R_1 (R_3 C_1 p + 1)} \right] R_2 R_5 (R_3 C_1 p + 1)}{R_3 R_6 \left( \frac{R_2 R_4 R_5 C_1 C_2}{R_6} p^2 + \frac{R_2 R_4 R_5 C_2}{R_3 R_6} p + 1 \right)} = \\ &= \frac{R_2 R_5}{R_1 R_6} \cdot \frac{1}{\frac{R_2 R_4 R_5 C_1 C_2}{R_6} p^2 + \frac{R_2 R_4 R_5 C_2}{R_3 R_6} p + 1} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \end{aligned}$$

$$\text{где } k = \frac{R_2 R_5}{R_1 R_6}, \quad T = \sqrt{\frac{R_2 R_4 R_5 C_1 C_2}{R_6}}, \quad \xi = \frac{1}{2R_3} \sqrt{\frac{R_2 R_4 R_5 C_1}{R_6 C_2}}.$$

Рассмотренное устройство позволяет легко реализовать как колебательное, так и апериодическое звено второго порядка. Если, например, принять  $R_2 = R_5 = R_6 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ , то при известных значениях  $k$ ,  $T$  и  $\xi$  можно определить номиналы остальных элементов:

$$R_1 = \frac{k}{R}, \quad R_4 = \frac{T^2}{RC^2}, \quad R_3 = \frac{1}{2\xi} \sqrt{RR_4} = \frac{T}{2\xi C}. \quad (3.5)$$

### 3.2.2.3 Консервативное звено

Это звено получается при мнимых полюсах передаточной функции (3.1), и его можно рассматривать как частный случай колебательного звена при  $\xi = 0$ . Выражения для передаточной и некоторых частотных функций звена будут иметь вид:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1},$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}, \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 - \omega^2 T^2}},$$

$$G(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 - \omega^2 T^2}.$$

$$\varphi(\omega) = -\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \arctg \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \frac{1}{T}, \\ -\pi & \text{при } \omega \geq \frac{1}{T}. \end{cases}$$

На рис. 3.13, *a* изображены логарифмические частотные характеристики консервативного звена. Точная ЛАЧХ (сплошная линия) терпит разрыв непрерывности второго рода на частоте сопряжения  $\omega_c = \frac{1}{T}$ , асимптотическая ЛАЧХ (пунктирная линия) такая же, как у колебательного звена. ЛФЧХ в точке  $\omega_c$  терпит разрыв непрерывности первого рода (фаза скачком изменяется от 0 до  $-\pi$ ).

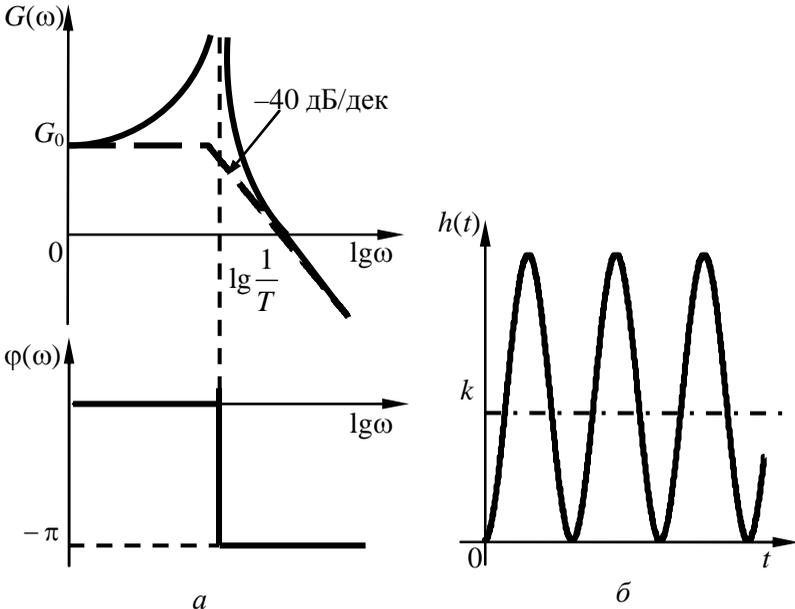


Рис. 3.13 — ЛАЧХ, ЛФЧХ (*a*), переходная характеристика (*б*) консервативного звена

Переходная функция консервативного звена может быть получена по формуле (2.10) при мнимых полюсах  $p_{1,2} = \pm \frac{j}{T}$  и имеет вид

$$h(t) = k \left( 1 - \cos \frac{t}{T} \right).$$

На рис 3.13, б показана переходная характеристика консервативного звена, она представляет собой незатухающие автоколебания частотой  $\frac{1}{T}$  и амплитудой  $k$ .

Консервативное звено на пассивных четырехполюсниках не реализуется. Если обратиться к приведенному выше примеру (см. рис. 2.6), то должны отсутствовать потери в контуре, т.е. выполняться условие  $R_1 = 0$ , что физически невозможно. В устройстве, схема которого приведена на рис. 3.12, а, в соответствии с формулами (3.5) получение консервативного звена возможно при  $R_3 = \infty$ . Для этого резистор  $R_3$  просто нужно удалить из устройства.

### 3.3 Особые звенья линейных САУ

#### 3.3.1 Неминимально-фазовые звенья

В ряде устройств, например при мостовых соединениях, процессы описываются дифференциальным уравнением, имеющим отрицательные коэффициенты в правой части:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left[ x(t) - \tau \frac{dx(t)}{dt} \right].$$

Передаточная функция такого звена будет иметь вид

$$W(p) = \frac{k(1 - \tau p)}{Tp + 1},$$

т.е. имеет положительный нуль  $p_0 = \frac{1}{\tau}$ .

Такие звенья относятся к устойчивым неминимально-фазовым звеньям первого порядка, их характеристики похожи на характеристики инерционного форсирующего звена.

*Пример 3.5*

На рис. 3.14 приведена мостовая схема, в которой выполняется соотношение  $R_2 \gg R_1$ . Для нее будет иметь место соотношение:

$$\left[ (R_1 + R_2)Cp + 1 \right] U_{\text{вх}}(p) = \left[ (R_1 - R_2)Cp + 1 \right] U_{\text{вых}}(p),$$

т.е. 
$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{(R_1 - R_2)Cp + 1}{(R_1 + R_2)Cp + 1} = k \frac{1 - \tau p}{1 + Tp},$$

где  $k = 1$ ,  $\tau = |(R_1 - R_2)C|$ ,  $T = (R_1 + R_2)C$ .

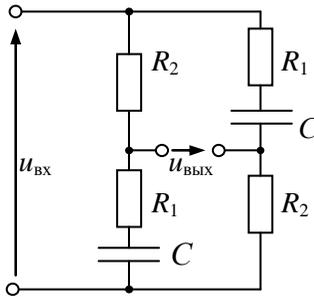


Рис. 3.14 — Пример неминимально-фазового устойчивого звена

На рис. 3.15, *а* показаны логарифмические частотные характеристики этого звена при  $k > 1$ . Его ЛАЧХ не отличается от ЛАЧХ инерционного форсирующего звена при  $\tau < T$ , а ЛФЧХ изменяется в диапазоне  $0 > \varphi > -\pi$ . Переходная характеристика (рис. 3.15, *б*) имеет при  $t = 0$  скачок в отрицательном направлении.

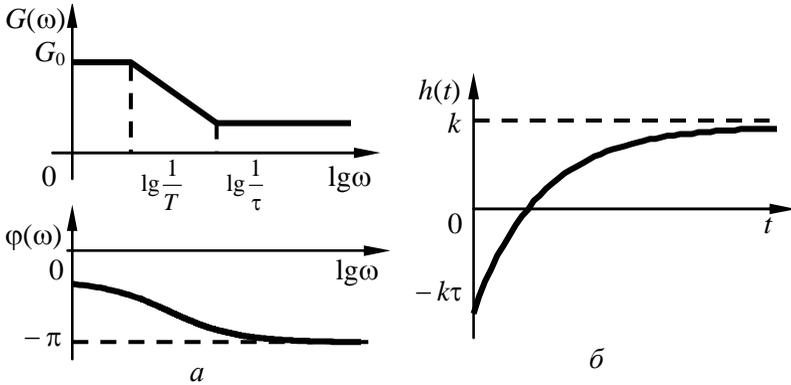


Рис. 3.15 — Характеристики устойчивого неминимально-фазового звена

Неустойчивые неминимально-фазовые звенья содержат в передаточных функциях положительные полюсы. Примером такого звена может служить асинхронный двигатель, работающий в режиме максимального скольжения. Другой пример — охват минимально-фазового звена положительной обратной связью.

Пусть инерционное звено с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$  охвачено положительной обратной связью с коэффициентом передачи  $k_{oc}$  (рис. 3.16, а). Передаточная функция получившегося эквивалентного звена будет иметь вид:

$$W_{\text{эKB}}(p) = \frac{\frac{k}{Tp + 1}}{1 - \frac{k \cdot k_{oc}}{Tp + 1}} = \frac{k}{Tp + 1 - k \cdot k_{oc}} = \frac{\frac{k}{1 - k \cdot k_{oc}}}{\frac{T}{1 - k \cdot k_{oc}} p + 1} = \frac{k_{\text{эKB}}}{T_{\text{эKB}} p + 1},$$

где  $k_{\text{эKB}} = \frac{k}{1 - k \cdot k_{oc}}$ ,  $T_{\text{эKB}} = \frac{T}{1 - k \cdot k_{oc}}$ .

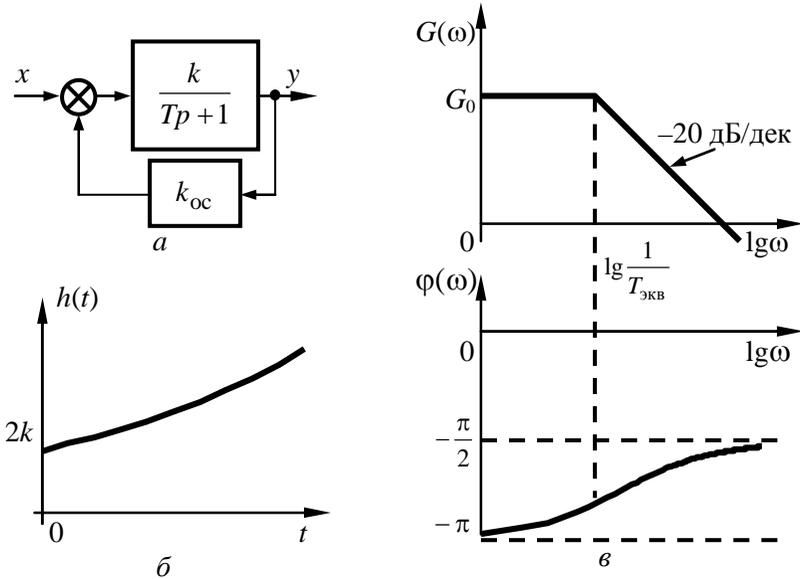


Рис. 3.16 — Неустойчивое неминимально-фазовое звено (а) и его характеристики (б, в)

При  $k \cdot k_{oc} > 1$  величины  $k_{эКВ}$ ,  $T_{эКВ}$  становятся отрицательными и передаточная функция  $W_{эКВ}(p) = \frac{|k_{эКВ}|}{|T_{эКВ}|p-1}$  становится такой, что ее полюс  $p_1 = \frac{1}{|T_{эКВ}|}$  будет положительным.

На рис. 3.16, б приведена переходная характеристика этого звена, она неограниченно нарастает, начиная со значения  $h(0) = 2k$ , поскольку рассчитывается по формуле  $h(t) = k \left( 1 + e^{\frac{t}{T}} \right)$ .

ЛАЧХ неустойчивого неминимально-фазового звена такая же, как и у инерционного звена, а ЛФЧХ, рассчитываемая по выражению  $\varphi(\omega) = -\pi + \text{arctg } \omega T$ , возрастает со значения  $-\pi$  до  $-\frac{\pi}{2}$  (см. рис. 3.16, в).

### 3.3.2 Звено чистого запаздывания

Это звено относится к трансцендентным, его передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = ke^{-p\tau}.$$

Получим расчетные формулы для частотных характеристик звена:

$$W(j\omega) = ke^{-j\omega\tau} = k[\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)],$$

$$P(\omega) = k \cos(\omega\tau), \quad Q(\omega) = -k \sin(\omega\tau),$$

$$A(\omega) = k\sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = k,$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = -\arctg[\operatorname{tg}(\omega\tau)] = -\omega\tau.$$

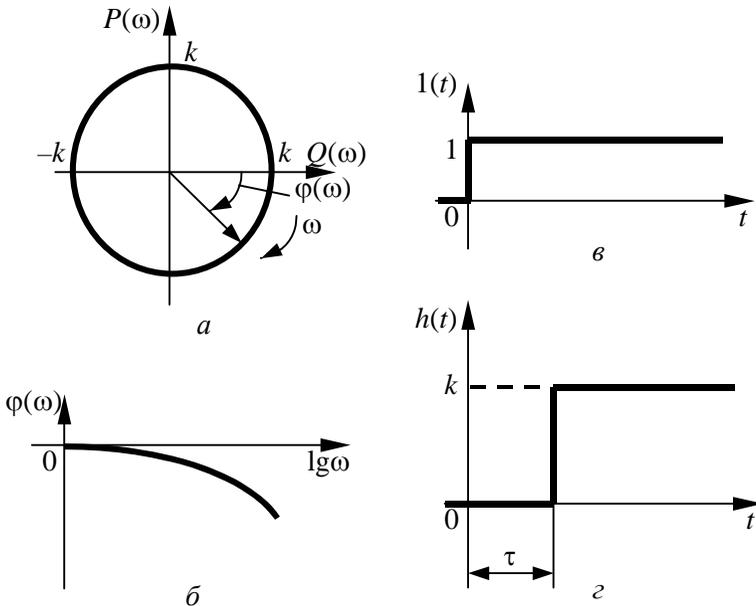


Рис. 3.17 — Частотные (а, б) и временные (в, г) характеристики звена чистого запаздывания

Годограф АФЧХ (рис. 3.17, *a*) представляет собой окружность радиуса  $k$  с центром в начале координат. АЧХ (а следовательно, и ЛАЧХ) звена чистого запаздывания такая же, как у пропорционального звена. ФЧХ  $\varphi(\omega)$  линейно убывает с ростом частоты, а ЛФЧХ (рис. 3.17, *б*) криволинейна за счет логарифмического масштаба по оси  $\omega$ .

Звено чистого запаздывания без искажения воспроизводит на выходе входную величину, как идеальное пропорциональное звено, но с той разницей, что выходная величина запаздывает относительно входной на постоянное время  $\tau$  (см. рис. 3.17, *в, г*). Переходная функция такого звена имеет вид:

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau) .$$

## 4 УСТОЙЧИВОСТЬ САУ

### 4.1 Передаточные функции линейных непрерывных САУ

На рис. 4.1 приведена структурная схема простейшей одноконтурной САУ. Ее можно получить, преобразуя структуру заданной системы по правилам, приведенным в подразделе 2.5 и в соответствующей литературе.

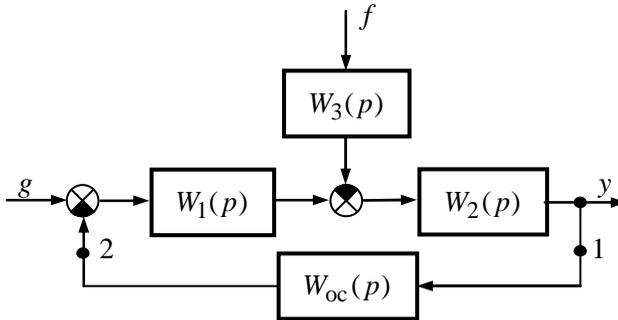


Рис. 4.1 — Структурная схема одноконтурной САУ

В соответствии с принципом суперпозиции, справедливым для линейных непрерывных САУ, данная система характеризуется следующими передаточными функциями.

**Передаточная функция разомкнутой системы по задающему воздействию  $W_{\text{pg}}(p)$ .** Ее можно получить, разомкнув САУ в точке 1 и положив  $f = 0$ , тогда

$$W_{\text{pg}}(p) = \prod_{i=1}^k W_i(p) = W_1(p) \cdot W_2(p),$$

где  $k$  — количество звеньев, расположенных между точкой приложения задающего воздействия и выходом САУ.

**Передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию**  $W_{pf}(p)$ . Ее получают аналогично, размыкая САУ в точке 1 при  $g = 0$ :

$$W_{pf}(p) = \prod_{i=1}^m W_i(p) = W_2(p) \cdot W_3(p),$$

где  $m$  — количество звеньев, расположенных между точкой приложения возмущающего воздействия и выходом САУ.

**Передаточная функция разомкнутой цепи**  $W_{pc}(p)$ . Эта передаточная функция получается при размыкании системы в точке 2 и обхода всего контура регулирования от точки приложения задающего воздействия до точки 2. Тогда

$$W_{pc}(p) = W_{pg}(p) \cdot W_{oc}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p).$$

**Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию**  $W_{zg}(p)$ . В соответствии с правилом охвата звена отрицательной обратной связью получим:

$$\begin{aligned} W_{zg}(p) &= \frac{W_{pg}(p)}{1 + W_{pg}(p) \cdot W_{oc}(p)} = \frac{W_{pg}(p)}{1 + W_{pc}(p)} = \frac{\frac{W_{pc}(p)}{W_{oc}(p)}}{1 + W_{pc}(p)} = \\ &= \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}, \end{aligned}$$

где  $B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$  — полином числителя передаточной функции,  $A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$  — характеристический полином САУ, причем  $n \geq m$ .

**Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию**  $W_{zf}(p)$ . Аналогично рассуждая, получим

$$W_{zf}(p) = \frac{W_{pf}(p)}{1 + W_{pg}(p) \cdot W_{oc}(p)} = \frac{W_{pf}(p)}{1 + W_{pc}(p)} = \frac{C(p)}{A(p)},$$

где  $C(p) = c_r p^r + c_{r-1} p^{r-1} + \dots + c_1 p + c_0$  — полином числителя этой передаточной функции, причем также  $n \geq r$ .

Следует отметить, что передаточные функции разомкнутой системы  $W_{\text{pg}}(p)$  и  $W_{\text{pf}}(p)$  самостоятельного значения не имеют, в то время как остальные передаточные функции играют существенную роль при исследовании характеристик САУ.

## 4.2 Понятие устойчивости линейных непрерывных САУ

Система называется устойчивой:

- если после снятия воздействия по окончании переходного процесса возвращается в исходное равновесное состояние;
- после изменения воздействия на постоянную величину по окончании переходного процесса приходит в новое равновесное состояние.

Определим условия устойчивости.

Пусть передаточная функция замкнутой по какому-либо из воздействий САУ имеет вид  $W(p) = \frac{D(p)}{A(p)}$ , причем она имеет

только  $n$  простых полюсов (корней характеристического уравнения  $A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ ). Подадим на вход САУ единичное ступенчатое воздействие амплитудой  $U_m$ , тогда, в соответствии с формулой (2.14), изменение выходной величины  $y(t)$  будет описываться выражением

$$y(t) = U_m \frac{D(0)}{A(0)} + U_m \sum_{k=1}^n \frac{D(p_k) e^{p_k t}}{p_k A'(p_k)} = y_{\text{уст}} + y_{\text{св}}(t),$$

где  $y_{\text{уст}} = U_m \frac{D(0)}{A(0)}$  — установившаяся (вынужденная) составляющая, однозначно связанная с изменением входной величины

(частное решение неоднородного дифференциального уравнения с правой частью);

$y_{\text{св}}(t) = U_m \sum_{k=1}^n \frac{D(p_k) e^{p_k t}}{p_k A'(p_k)}$  — свободная

составляющая, изменяющаяся во времени в течение переходного процесса (определяется общим решением однородного дифференциального уравнения  $n$ -ой степени).

Именно свободная составляющая и определяет переходный процесс в системе.

В общем случае полюсы являются комплексными. При этом они образуют пары сопряженных чисел:

$$p_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\omega_i,$$

где  $\alpha_i$  может быть положительной или отрицательной величиной.

При этом, если  $\alpha_i < 0$ , эта составляющая будет затухать. Наоборот, при  $\alpha_i > 0$  получатся расходящиеся колебания.

Отсюда следует, что общим условием затухания всех составляющих, а значит, и всего переходного процесса в целом является отрицательность вещественных частей всех полюсов передаточной функции САУ. Если хотя бы один полюс имеет положительную вещественную часть, переходный процесс будет расходящимся и система будет неустойчивой.

Изображая полюсы передаточной функции САУ (корни ее характеристического уравнения) точками на комплексной плоскости, как показано на рис. 4.2, условие устойчивости можно сформулировать еще так: необходимым и достаточным условием устойчивости САУ является расположение всех полюсов ее передаточной функции (корней характеристического уравнения) в левой комплексной полуплоскости.

Мнимая ось плоскости корней служит границей устойчивости. При этом можно выделить три случая выхода САУ на границу устойчивости, которые характеризуются соответственно:

- нулевым полюсом  $p_1 = 0$  ;
- парой чисто мнимых полюсов  $p_{1,2} = \pm j\omega$  ;
- бесконечно удаленным полюсом  $p_1 = \infty$  .

Бесконечность на комплексной плоскости рассматривается как бесконечно удаленная точка, противоположная нулевой. Поэтому она тоже является границей между правой и левой полуплоскостями.

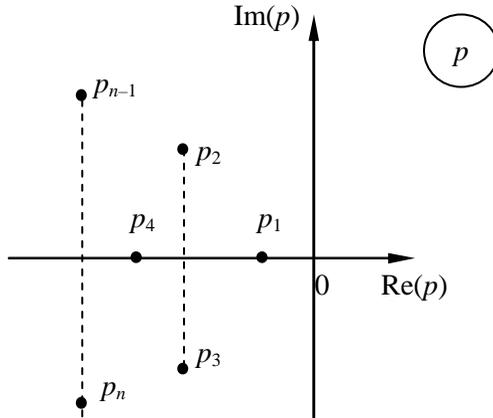


Рис. 4.2 — Расположение полюсов передаточной функции устойчивой САУ на комплексной плоскости

Вычисление корней весьма просто лишь для характеристического уравнения первой и второй степени. Но ведь для определения устойчивости не нужно знать абсолютное значение корней, необходимо знать лишь, в какой полуплоскости они находятся. Поэтому важное значение приобретают правила, позволяющие определять устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют *критериями устойчивости*.

К основным критериям устойчивости относятся алгебраический критерий Гурвица и частотные критерии Михайлова и Найквиста.

### 4.3 Критерий устойчивости Гурвица

По этому критерию условия устойчивости сводятся к выполнению ряда неравенств, связывающих коэффициенты уравнения системы. Пусть характеристический полином САУ (характеристический полином определяет левую часть уравнения САУ, т.е. знаменатель передаточной функции) будет

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Полагая  $a_n > 0$  (если  $a_n$  отрицательно, то это условие можно выполнить, умножив весь полином на минус единицу), составляют из коэффициентов  $A(p)$  определитель Гурвица:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Определитель Гурвица заполняется по следующим правилам:

- в диагональ определителя вносятся коэффициенты, начиная с  $a_{n-1}$  и заканчивая  $a_0$ ;
- в столбцы вписываются остальные коэффициенты, причем вверх от диагонали индекс коэффициентов уменьшается на единицу, а вниз — увеличивается на единицу;
- оставшиеся свободные места в столбцах заполняются нулями.

Система будет устойчива, если определитель Гурвица  $\Delta_n$  будет положителен.

Если САУ содержит только минимально-фазовые звенья, то все коэффициенты характеристического полинома положительны. Тогда, учитывая нули в последнем столбце определителя Гурвица, можно записать

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1},$$

где  $\Delta_{n-1}$  — главный минор определителя Гурвица

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку  $a_0 > 0$ , то знак определителя Гурвица определяется знаком его главного минора и, если  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ , ...,

$a_n > 0$ , устойчивость САУ определяется знаком главного минора этого определителя.

Выведем выражение для расчета предпоследнего диагонального минора  $\Delta_{n-1}$  систем первого — четвертого порядков.

Для САУ первого порядка ( $n = 1$ )  $A(p) = a_1 p + a_0$  и определитель Гурвица  $\Delta_n = a_0 > 0$  при положительном  $a_0$ .

Для САУ второго порядка ( $n = 2$ )  $A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0$  и определитель Гурвица имеет вид  $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \cdot a_1 > 0$  при положительных коэффициентах  $a_0, a_1$ .

Из изложенного можно сделать вывод о том, что системы первого и второго порядков, выполненные только на минимально-фазовых звеньях, всегда устойчивы.

Для систем третьего порядка ( $n = 3$ )

$$A(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3. \quad (4.1)$$

Для систем четвертого порядка ( $n = 4$ )

$$A(p) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_3a_0) - a_1^2a_4 = \\ = a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2.$$

Легко видеть, что за счет увеличения отрицательных знаков в главном миноре определителя Гурвица вероятность неустойчивости САУ с повышением ее порядка возрастает.

Вообще говоря, устойчивость САУ определяется положительностью всех миноров определителя Гурвица. Однако если его главный минор будет положителен, то положительными будут и остальные миноры. В то же время положительность низших миноров не говорит о том, что главный минор будет положителен.

#### Пример 4.1

Пусть задана САУ, структурная схема которой приведена на рис. 4.3. Получим для нее передаточные функции и определим соотношение параметров, обеспечивающих ее устойчивость.

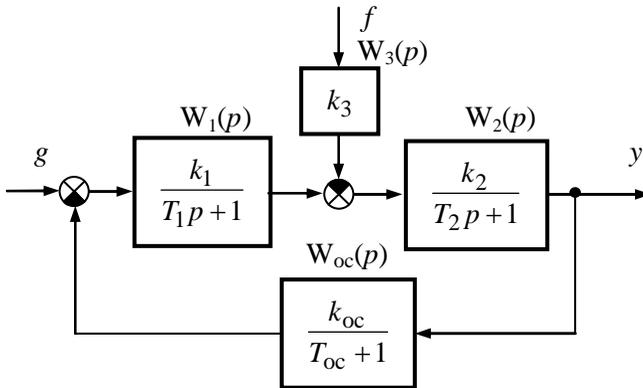


Рис. 4.3 — Пример анализа устойчивости САУ

Передаточная функция разомкнутой системы по задающему воздействию

$$W_{\text{pg}}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию

$$W_{\text{pf}}(p) = W_2(p) \cdot W_3(p) = \frac{k_2 k_3}{T_2 p + 1}.$$

Передаточная функция разомкнутой цепи

$$W_{\text{pc}}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{\text{oc}}(p) = \frac{k_1 k_2 k_{\text{oc}}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1)}.$$

Пусть  $K_p = k_1 k_2 k_{\text{oc}}$  — коэффициент передачи разомкнутой цепи, тогда

$$W_{\text{pc}}(p) = \frac{K_p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию

$$\begin{aligned} W_{\text{зг}}(p) &= \frac{W_{\text{pg}}(p)}{1 + W_{\text{pg}}(p) \cdot W_{\text{oc}}(p)} = \frac{\frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}}{1 + \frac{K_p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1)}} = \\ &= \frac{\frac{K_p}{k_{\text{oc}}}(T_{\text{oc}} p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1) + K_p}. \end{aligned}$$

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию

$$\begin{aligned} W_{\text{pf}}(p) &= \frac{W_{\text{pf}}(p)}{1 + W_{\text{pg}}(p) \cdot W_{\text{oc}}(p)} = \frac{\frac{k_2 k_3}{T_2 p + 1}}{1 + \frac{K_p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1)}} = \\ &= \frac{k_2 k_3 (T_1 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1) + K_p}. \end{aligned}$$

Характеристический полином САУ (знаменатель любой из передаточных функций замкнутой системы):

$$A(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{oc} p + 1) + K_p = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

где  $a_0 = 1 + K_p$ ,  $a_1 = T_1 + T_2 + T_{oc}$ ,  $a_2 = T_1(T_2 + T_{oc}) + T_2 T_{oc}$ ,  $a_3 = T_1 T_2 T_{oc}$ .

Легко видеть, что характеристический полином замкнутой САУ равен сумме числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой цепи.

Поскольку все коэффициенты характеристического полинома положительны, в соответствии с (4.1) условие устойчивости сводится к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1} &= a_1 a_2 - a_0 a_3 = \\ &= (T_1 + T_2 + T_{oc}) \cdot [T_1(T_2 + T_{oc}) + T_2 T_{oc}] - (1 + K_p) \cdot T_1 T_2 T_{oc} > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } K_p < (T_1 + T_2 + T_{oc}) \cdot \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{oc}} \right) - 1.$$

Это неравенство показывает, что устойчивость САУ в конце концов нарушится при неограниченном увеличении коэффициента передачи  $K_p$  при любых положительных значениях постоянных времени.

Предельное по величине значение  $K_p$ , при котором САУ теряет устойчивость, принято называть *критическим* (или *границным*). Для рассматриваемого примера

$$K_{гр} = (T_1 + T_2 + T_{oc}) \cdot \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{oc}} \right) - 1. \quad (4.2)$$

Значение граничного коэффициента передачи зависит не от абсолютных значений постоянных времени, а от их отношения.

Для рассмотренной здесь структуры при равенстве всех постоянных времени, преобразовав соотношение (4.2) к виду

$$K_{гр} = \left( \frac{T_1}{T_{oc}} + \frac{T_2}{T_{oc}} + 1 \right) \cdot \left( \frac{T_{oc}}{T_1} + \frac{T_{oc}}{T_2} + 1 \right) - 1,$$

легко определить, что  $K_{гр} = 8$ . Для данной структуры найденное значение  $K_{гр}$  является минимальным. Чем больше будут различаться постоянные времени, тем больше будет величина  $K_{гр}$ .

С помощью критериев устойчивости можно строить *области устойчивости*.

При проектировании САУ ряд параметров и звеньев являются заданными, так как они определяются требованиями технологического процесса и конструктивными особенностями объекта регулирования. В то же время имеется несколько параметров, которые можно менять в определенных пределах. Для определения влияния значений каких-либо варьируемых параметров на устойчивость строят области устойчивости системы в пространстве этих варьируемых параметров.

Уравнения границ области устойчивости получаются из условий устойчивости, если заменить в них неравенства на равенства (это соответствует нахождению системы на границе устойчивости).

В общем случае границы области устойчивости по критерию Гурвица строятся по следующим уравнениям:

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad a_n = 0, \quad a_0 = 0.$$

Первое уравнение соответствует наличию у характеристического уравнения пары сопряженных мнимых корней, второе равенство соответствует наличию нулевого корня, а третье — наличию бесконечного корня.

Для САУ, рассмотренной в примере 4.1 (см. рис. 4.3), зададим варьируемыми параметрами общий коэффициент передачи разомкнутой цепи  $K_p$  и постоянную времени  $T_1$ . Уравнениями для построения границ области устойчивости будут:

$$K_p = (T_1 + T_2 + T_{oc}) \cdot \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{oc}} \right) - 1, \quad K_p + 1 = 0, \quad T_1 = 0.$$

Границы области устойчивости изображены на рис. 4.4. Около границ принято наносить штриховку в сторону области устойчивости. Каждая точка внутри области устойчивости определяет комбинацию варьируемых параметров  $K_p$  и  $T_1$ , при которых система устойчива. Причем если система в пространстве всех своих параметров не имеет области устойчивости, она называется *структурно неустойчивой*. Для получения устойчивой САУ в этом случае необходимо изменить ее структуру.

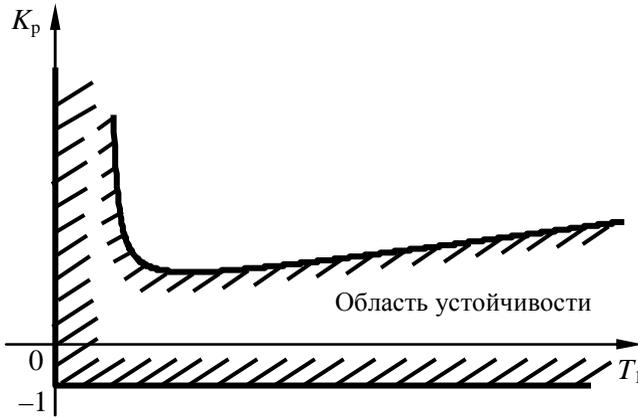


Рис. 4.4 — Построение области устойчивости САУ

*Пример 4.2*

Определить устойчивость САУ, структурная схема которой приведена на рис. 4.5, воспользовавшись критерием устойчивости Гурвица при  $\tau_1 = 0,01$  с,  $k_2 = 16,8$ ,  $T_{21} = \sqrt{0,03}$  с,  $T_{22} = 0,3$  с,  $k_{oc} = 0,5$ .

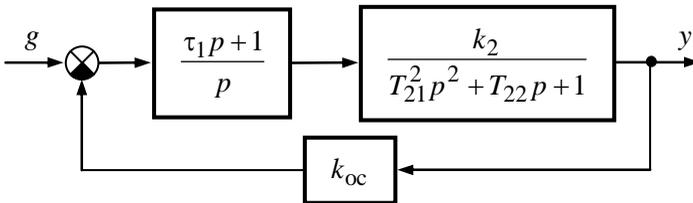


Рис. 4.5 — Пример расчета граничного коэффициента передачи

Для установления устойчивости определим граничное значение коэффициента передачи и сравним его с имеющимся значением коэффициента.

Передаточная функция разомкнутой цепи

$$W_{\text{рц}}(p) \frac{k_2 k_{oc} (\tau_1 p + 1)}{p(T_{21}^2 p^2 + T_{22} p + 1)} = \frac{K_p (\tau_1 p + 1)}{p(T_{21}^2 p^2 + T_{22} p + 1)}, \quad (K_p = k_2 k_{oc}).$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$A(p) = p(T_{21}^2 p^2 + T_{22} p + 1) + K_p(\tau_1 p + 1) = \\ = T_{21}^2 p^3 + T_{22} p^2 + (1 + \tau_1 K_p) p + K_p = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,$$

где  $a_3 = 0,03$ ;  $a_2 = 0,3$ ;  $a_1 = 1 + 0,01K_p$ ;  $a_0 = K_p$ .

Так как система имеет третий порядок, то она будет находиться на границе устойчивости при равенстве нулю выражения (4.1):

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,3(1 + 0,01K_{гр}) - 0,03K_{гр} = 0.$$

Отсюда находим  $K_{гр} = 11,1 \text{ c}^{-1}$ .

Коэффициент передачи разомкнутой цепи  $K_p = 8,4$  меньше, чем  $K_{гр}$ . Следовательно, система в замкнутом состоянии устойчива.

#### 4.4 Критерий устойчивости Михайлова

Исходным материалом для применения критерия Михайлова является также характеристический полином САУ  $A(p)$ .

Если в  $A(p)$  заменить оператор  $p$  на переменную  $j\omega$ , то получится функция комплексного переменного

$$A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где  $X(\omega)$  — вещественная часть, полученная из членов  $A(p)$ , содержащих четные степени  $p$ ;  $Y(\omega)$  — мнимая часть, полученная из членов  $A(p)$  с нечетными степенями  $p$ .

При изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности на комплексной плоскости получится кривая, которую описывает радиус-вектор функции  $A(j\omega)$ . Эту кривую называют *годографом Михайлова* (рис. 4.6). Каждому значению  $\omega$  соответствуют определенные значения  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$ , т.е. определенная точка на плоскости. При  $\omega = 0$  функция  $A(j\omega) = a_0$ , т.е. годограф начинается на вещественной оси. При  $\omega \rightarrow \infty$  функция  $A(j\omega)$  тоже неограниченно возрастает по модулю.

Формулировка критерия Михайлова звучит следующим образом: *система устойчива, если годограф  $A(j\omega)$ , начинаясь на действительной положительной полуоси, огибает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно  $n$  квадрантов комплексной плоскости, где  $n$  — порядок системы.*

Годограф устойчивой САУ четвертого порядка изображен на рис. 4.6, *а*. При нарушении порядка прохождения квадрантов комплексной плоскости САУ неустойчива (рис. 4.6, *б*). Если же система находится на границе устойчивости, то годограф Михайлова проходит через начало координат на частоте  $\omega_k$  (рис. 4.6, *в*), т.е. на границе устойчивости

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[A(j\omega_k)] = X(\omega_k) = 0, \\ \operatorname{Im}[A(j\omega_k)] = Y(\omega_k) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

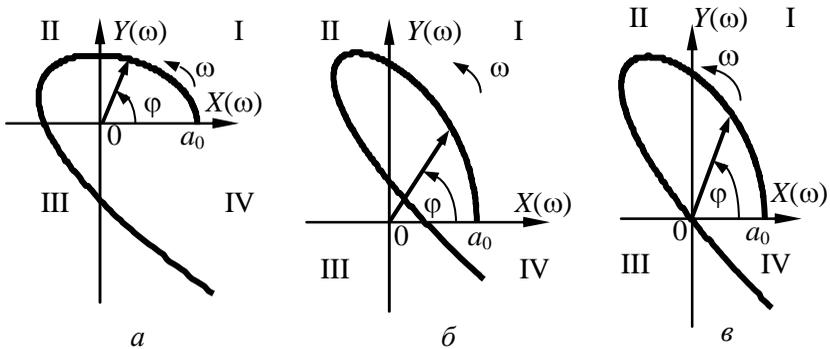


Рис. 4.6 — Годограф Михайлова для устойчивой (*а*), неустойчивой (*б*) САУ и САУ на границе устойчивости (*в*)

Следует отметить то обстоятельство, что расчетные выражения для граничных параметров, полученные по критериям Гурвица и Михайлова, совпадают. Продemonстрируем это для САУ третьего порядка, характеристический полином для которой имеет вид  $A(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$ . Тогда, в соответствии с (4.3), на границе устойчивости получим:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[A(j\omega_k)] = a_0 - a_2\omega_k^2 = 0, \\ \operatorname{Im}[A(j\omega_k)] = \omega_k(a_1 - a_3\omega_k^2) = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения квадрат частоты  $\omega_k^2$  и подставим результат во второе уравнение, не учитывая тривиальное решение  $\omega_k = 0$ :

$$\omega_k^2 = \frac{a_0}{a_2}, \quad a_1 - a_3 \cdot \frac{a_0}{a_2} = 0,$$

или  $a_1 a_2 - a_3 a_0 = 0$ , что совпадает с формулой (4.1).

Физический смысл величины  $\omega = \omega_k$  — это частота колебаний системы на границе устойчивости.

Годограф Михайлова можно строить по точкам, изменяя частоту от нуля до бесконечности с определенным шагом и вычисляя каждый раз значение  $A(j\omega)$ . Можно поступить по-другому: найти точки пересечения годографа с осями и соединить их плавной линией. Для этого, определив из уравнения  $X(\omega) = 0$  значения частот, соответствующих точкам пересечения годографа  $A(j\omega)$  с мнимой осью, подставляют их в выражение  $Y(\omega)$ . В результате получают соответствующие координаты. Аналогично находят точки пресечения  $A(j\omega)$  с действительной осью, приравнявая нулю мнимую часть  $Y(\omega)$ .

Из формулировки критерия следует, что система устойчива, если нули  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$  чередуются с ростом  $\omega$ , начиная с  $\omega = 0$ , когда  $Y(\omega) = 0$ , а  $X(\omega) > 0$ .

### Пример 4.3

По критерию Михайлова оценить устойчивость САУ, приведенной на рис. 4.5.

В соответствии с рассмотренным выше для этой системы

$$\begin{aligned} A(p) &= p(0,03p^2 + 0,3p + 1) + K_p(0,01p + 1) = \\ &= a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0, \end{aligned}$$

где  $a_3 = 0,03$ ,  $a_2 = 0,3$ ,  $a_1 = (1 + 0,01 \cdot 8,4) = 1,084$ ,  $a_0 = 8,4$ .

Проведем в характеристическом полиноме  $A(p)$  замену оператора  $p$  на переменную  $j\omega$  и произведем разделение действительной и мнимой частей. Тогда получим:

$$X(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 = 8,4 - 0,3\omega^2,$$

$$Y(\omega) = \omega(a_1 - a_3\omega^2) = \omega(1,084 - 0,03\omega^2).$$

Приравняем мнимую часть  $Y(\omega)$  к нулю и определим частоты  $\omega_0$ ,  $\omega_2$ :

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1,084}{0,03}} = 6,01 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь к нулю приравняем действительную часть  $X(\omega)$  и определим частоту  $\omega_1$ :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8,4}{0,3}} = 5,29 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку  $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$ , т.е. частоты, соответствующие равенству нулю действительной и мнимой частей  $A(j\omega)$ , чередуются (или, как говорят, перемежаются), САУ устойчива. В этом легко убедиться, рассчитав значения действительной и мнимой частей соответственно на таких частотах:

$$X(\omega_0) = 8,4; \quad X(\omega_2) = 8,4 - 0,3 \cdot 6,01^2 = -2,44;$$

$$Y(\omega_1) = 5,29 \cdot (1,084 - 0,03 \cdot 5,29^2) = 1,29.$$

Так как  $X(\omega_0) > 0$ ,  $Y(\omega_1) > 0$ ,  $X(\omega_2) < 0$ , годограф Михайлова последовательно проходит I, II, и III квадранты комплексной плоскости, что подтверждает устойчивость САУ.

Критерий Михайлова широко используется для построения областей устойчивости. Уравнения границы устойчивости в пространстве двух варьируемых параметров  $x_1$  и  $x_2$ , согласно этому критерию, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} X(x_1, x_2, \omega) &= 0 \\ Y(x_1, x_2, \omega) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.4)$$

Исключив из этих уравнений параметр  $\omega$ , можно получить уравнение границы устойчивости, связывающее входящие в выражения  $X(x_1, x_2, \omega)$  и  $Y(x_1, x_2, \omega)$  варьируемые параметры  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда область устойчивости строиться будет так же, как по критерию Гурвица (см. пример 4.3).

С другой стороны, можно построить границы устойчивости по приведенной системе уравнений, используя  $\omega$  как параметр, который изменяют от 0 до  $\infty$ . Каждому значению  $\omega$  при этом соответствует определенная точка границы устойчивости. Этот метод получения границы устойчивости принято называть методом **D-разбиений**.

Система уравнений (4.4) может быть линейной и нелинейной и способ ее разрешения относительно параметров  $x_1$  и  $x_2$  может быть различным. Поэтому рассмотрим применение D-разбиений на конкретных примерах.

#### Пример 4.4

Применяя D-разбиения, построить область устойчивости для САУ, структурная схема которой приведена на рис. 4.7, для которой  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 4 \text{ с}^{-1}$ ,  $k_{oc} = 0,5$ ,  $T_1 = 0,5 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0,1 \text{ с}$ ,  $\tau_1 = 0,05 \text{ с}$ ,  $\tau_3 = 0,01 \text{ с}$ .

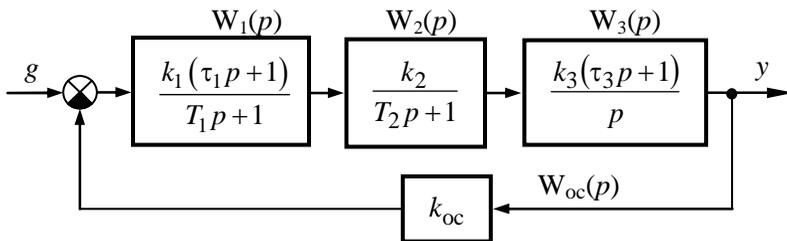


Рис. 4.7 — Пример проведения D-разбиений

Передаточная функция разомкнутой цепи и характеристический полином САУ будут иметь вид

$$W_{\text{рц}}(p) = \frac{K_p (\tau_1 p + 1)(\tau_3 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

$$\begin{aligned}
 A(p) &= p(T_1 p + 1)(T_1 p + 1) + K_p (\tau_1 p + 1)(\tau_3 p + 1) = \\
 &= a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0,
 \end{aligned}$$

где  $K_p = k_1 k_2 k_3 k_{oc} = 40 \text{ с}^{-1}$ ,  $a_0 = K_p$ ,  $a_1 = 1 + K_p (\tau_1 + \tau_3)$ ,  
 $a_2 = T_1 + T_2 + K_p \tau_1 \tau_3$ ,  $a_3 = T_1 T_2$ .

Вариант 1. Проведение D-разбиений в плоскости параметров  $x_1 = T_1$ ,  $x_2 = K_p$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 a_0(x_2) &= x_2, \quad a_1(x_2) = 1 + x_2 (\tau_1 + \tau_3), \\
 a_2(x_1, x_2) &= x_1 + T_2 + x_2 \tau_1 \tau_3, \quad a_3(x_1) = x_1 T_2,
 \end{aligned}$$

и систему уравнений (4.4) можно представить в виде:

$$\begin{cases} a_0(x_2) - a_2(x_1, x_2)\omega^2 = x_2 - (x_1 + T_2 + x_2 \tau_1 \tau_3)\omega^2 = 0, \\ \omega[a_1(x_2) - a_3(x_1)\omega^2] = \omega[1 + x_2(\tau_1 + \tau_3) - x_1 T_2 \omega^2] = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Упорядочив систему уравнений (4.5) относительно варьируемых параметров, перенеся свободные члены в правые части и исключив из второго уравнения тривиальное решение  $\omega = 0$ , получим:

$$\begin{cases} -\omega^2 x_1 + (1 - \tau_1 \tau_3 \omega^2) x_2 = T_2 \omega^2, \\ -T_2 \omega^2 x_1 + (\tau_1 + \tau_3) x_2 = -1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Система уравнений (4.6) является линейной относительно варьируемых параметров  $x_1$  и  $x_2$ , поэтому для ее решения можно воспользоваться методами линейной алгебры, например формулой

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{B}(\omega),$$

где  $\mathbf{X}(\omega) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  — вектор решений системы (4.6);

$$\mathbf{A}^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 1 - \tau_1 \tau_3 \omega^2 \\ -T_2 \omega^2 & \tau_1 + \tau_3 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{— обратная матрица}$$

системы (4.6);

$$\mathbf{B}(\omega) = \begin{bmatrix} T_2 \omega^2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ — вектор правых частей уравнений системы (4.6).}$$

мы (4.6).

Эту систему можно также решить через определители, определив неизвестные как

$$x_1(\omega) = \frac{\Delta_{x1}(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad x_2(\omega) = \frac{\Delta_{x2}(\omega)}{\Delta(\omega)},$$

где  $\Delta(\omega)$ ,  $\Delta_{x1}(\omega)$ ,  $\Delta_{x2}(\omega)$  — определители системы (4.6), причем

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 1 - \tau_1 \tau_3 \omega^2 \\ -T_2 \omega^2 & \tau_1 + \tau_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x1}(\omega) = \begin{vmatrix} T_2 \omega^2 & 1 - \tau_1 \tau_3 \omega^2 \\ -1 & \tau_1 + \tau_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x2}(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 & T_2 \omega^2 \\ -T_2 \omega^2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, решая систему (4.6) каким-либо способом, получим:

$$x_1(\omega) = \frac{\omega^2 [\tau_1 \tau_3 - T_2 (\tau_1 + \tau_3)] - 1}{\omega^2 [\tau_1 + \tau_3 - T_2 (1 - \tau_1 \tau_3 \omega^2)]},$$

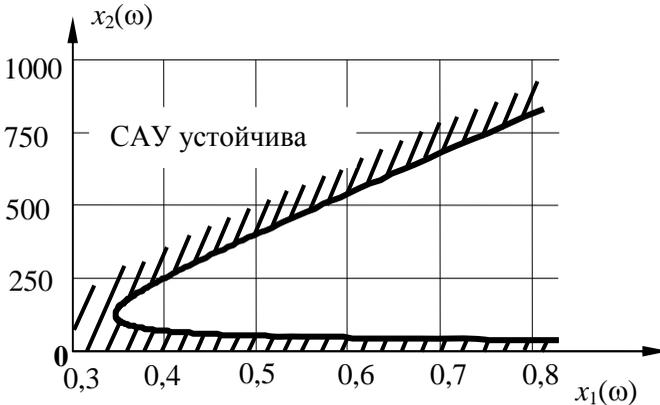
$$x_2(\omega) = \frac{T_2 \omega^2 + 1}{\tau_1 + \tau_3 - T_2 (1 - \tau_1 \tau_3 \omega^2)}.$$

Легко видеть, что для заданных значений постоянных времени при критических частотах  $\omega_{кр1} = 0$  и  $\omega_{кр2} = \sqrt{\frac{T_2 - \tau_1 - \tau_3}{\tau_1 \tau_3}} = 28,284 \text{ с}^{-1}$  знаменатели формул для  $x_1(\omega)$  и  $x_2(\omega)$  обращаются в нуль, поэтому этих частот нужно избегать при построении области устойчивости САУ.

В табл. 4.1 приведены рассчитанные значения варьируемых параметров  $x_1(\omega)$  и  $x_2(\omega)$  при изменении частоты от 7 до 21  $\text{с}^{-1}$ , а на рис. 4.8 показана область устойчивости САУ, построенная по табличным данным.

Таблица 4.1

$\omega$	7	9	11	13	15	17	19	21
$x_1(\omega)$	0,69	0,5	0,4	0,36	0,346	0,351	0,237	0,433
$x_2(\omega)$	39,7	50,4	65,1	85,3	113	152	210	301

Рис. 4.8 — Область устойчивости САУ  
при  $x_1(\omega) = T_1$ ,  $x_2(\omega) = K_p$ 

Для определения расположения штриховки оценим устойчивость САУ при различных значениях  $K_p$ , рассчитав частоты, как это делалось в примере 4.3, по формулам

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1 + K_p(\tau_1 + \tau_3)}{T_1 T_2}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{K_p}{T_1 + T_2 + K_p \tau_1 \tau_3}}.$$

При  $K_p = 40 \text{ с}^{-1}$  значения частот  $\omega_2 = 8,246 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 8,032 \text{ с}^{-1}$ . Так как  $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$ , т.е. частоты чередуются, САУ устойчива. При  $K_p = 100 \text{ с}^{-1}$  значения частот  $\omega_2 = 11,832 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 12,403 \text{ с}^{-1}$ . Здесь  $\omega_0 < \omega_2 < \omega_3$ , т.е. чередование частот нарушается, следовательно, САУ неустойчива. При  $K_p = 5000 \text{ с}^{-1}$  значения частот

$\omega_2 = 24,9 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 24,254 \text{ с}^{-1}$ . Поскольку  $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$ , САУ снова устойчива.

Таким образом, область устойчивости расположена с внешней стороны границы, как показано штриховкой на рис. 4.8. Асимптоты  $a_0 = 0$  и  $a_3 = 0$  являются прямыми  $K_p = 0$ ,  $T_1 = 0$ , т.е. совпадают с осями координат.

В а р и а н т 2. Проведем D-разбиения в плоскости параметров  $x_1 = \tau_1$ ,  $x_2 = K_p$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_0(x_2) &= x_2, \quad a_1(x_1, x_2) = 1 + x_2(x_1 + \tau_3), \\ a_2(x_1, x_2) &= T_1 + T_2 + x_2 x_1 \tau_3, \quad a_3(x_1) = T_1 T_2 = a_3. \end{aligned}$$

Система уравнений (4.4) примет вид:

$$\begin{cases} a_0(x_2) - a_2(x_1, x_2)\omega^2 = x_2 - (T_1 + T_2 + x_2 x_1 \tau_3)\omega^2 = 0, \\ \omega[a_1(x_2) - a_3\omega^2] = \omega[1 + x_2(x_1 + \tau_3) - a_3\omega^2] = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Система (4.7) является нелинейной, поскольку в обоих ее уравнениях присутствует произведение варьируемых параметров, поэтому ее можно решить только путем подстановки.

Выразим из второго уравнения системы переменную  $x_2$  и подставим получившееся значение в первое уравнение:

$$\begin{aligned} x_2(x_1, \omega) &= \frac{a_3\omega^2 - 1}{x_1 + \tau_3}, \\ \frac{a_3\omega^2 - 1}{x_1 + \tau_3} - \left( T_1 + T_2 + \frac{a_3\omega^2 - 1}{x_1 + \tau_3} x_1 \tau_3 \right) \omega^2 &= 0, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} x_1(\omega) &= \frac{[a_3 - \tau_3(T_1 + T_2)]\omega^2 - 1}{\omega^2(\omega^2 a_3 \tau_3 + T_1 + T_2 - \tau_3)}, \\ x_2(\omega) &= \frac{\omega^2(\omega^2 a_3 \tau_3 + T_1 + T_2 - \tau_3)}{\omega^2 \tau_3^2 + 1}. \end{aligned}$$

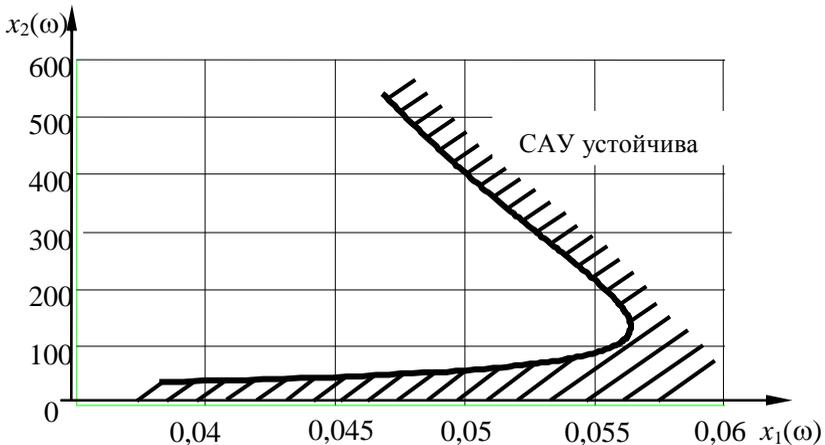
В полученных соотношениях присутствуют две критические частоты:  $\omega_{кр1} = 0$  и  $\omega_{кр2} = \sqrt{\frac{\tau_3 - T_1 - T_2}{a_3 \tau_3}}$  (уравнение  $\omega^2 \tau_3^2 + 1 = 0$  дает мнимые решения), причем, для заданных значений  $\tau_3$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  частота  $\omega_{кр2}$  также принимает только мнимые значения, поэтому при проведении дальнейших расчетов нужно избегать только значения  $\omega = 0$ .

Расчитанные значения варьируемых параметров  $x_1(\omega)$  и  $x_2(\omega)$  приведены в табл. 4.2 при изменении частоты от 7 до 21 с<sup>-1</sup>.

Таблица 4.2

$\omega$	7	9	11	13	15	17	19	21
$x_1(\omega)$	0,038	0,05	0,055	0,056	0,056	0,055	0,054	0,051
$x_2(\omega)$	30	50	77,8	112	155	206	268	342

На рис. 4.9 показана область устойчивости САУ для принятых варьируемых параметров. Она также располагается с внешней стороны границы устойчивости, поскольку при  $50 < K_p < 400$  нарушается чередование частот  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .

Рис. 4.9 — Область устойчивости САУ при  $x_1(\omega) = \tau_1$ ,  $x_2(\omega) = K_p$

Следует отметить, что построение области устойчивости с помощью D-разбиений является более общим подходом к решению этой задачи. Так, например, если бы в примере 4.3 данная задача решалась посредством критерия Гурвица, то граница устойчивости представлялась бы двумя кривыми  $x_{21} = f_1(x_1)$  и  $x_{22} = f_2(x_1)$ , точку сопряжения которых определить весьма сложно. При проведении D-разбиений этот вопрос разрешается автоматически, поскольку граница устойчивости — единая зависимость.

### 4.5 Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста позволяет оценить устойчивость замкнутой САУ по ее разомкнутой цепи. Для этого в передаточной функции  $W_{\text{рц}}(p)$  производят замену оператора  $p$  на переменную  $j\omega$  и на комплексной плоскости при изменении частоты от нуля (если это возможно) до бесконечности строят АФЧХ  $W(j\omega)$  (годограф Найквиста).

Если разомкнутая цепь устойчива (а это всегда имеет место, если САУ не содержит неустойчивых неминимально-фазовых звеньев), то формулировка критерия Найквиста звучит следующим образом.

*Для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не охватывал точку с координатами  $(-1, j0)$ .*

На рис. 4.10 изображены основные из возможных ситуаций прохождения годографа Найквиста на комплексной плоскости. Сплошная кривая 1 на рис. 4.10, а соответствует абсолютно устойчивой замкнутой САУ (системе, которая остается устойчивой при уменьшении коэффициента передачи разомкнутой цепи), а пунктирная кривая 2 — условно устойчивой САУ (системе, устойчивой только в некотором диапазоне изменения коэффициента передачи разомкнутой цепи, как это было в примере 4.4). Сплошная кривая 3 на рис. 4.3, б проходит через критическую точку с координатами  $(-1, j0)$ , и это означает, что замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

Пунктирная кривая 4 охватывает критическую точку, поэтому замкнутая САУ неустойчива.

Физический смысл критерия Найквиста заключается в том, что при увеличении частоты входного воздействия сигнал, проходящий по цепи обратной связи, оказывается в противофазе с входным. Это равносильно замене отрицательной обратной связи на положительную. Если же при этой частоте разомкнутый контур обладает усилением (т.е.  $K_p > 1$ ), то замкнутая САУ становится неустойчивой (любое увеличение сигнала на выходе приводит к увеличению сигнала на входе по цепи обратной связи, что вызывает дальнейший рост выходного сигнала и т.д.).

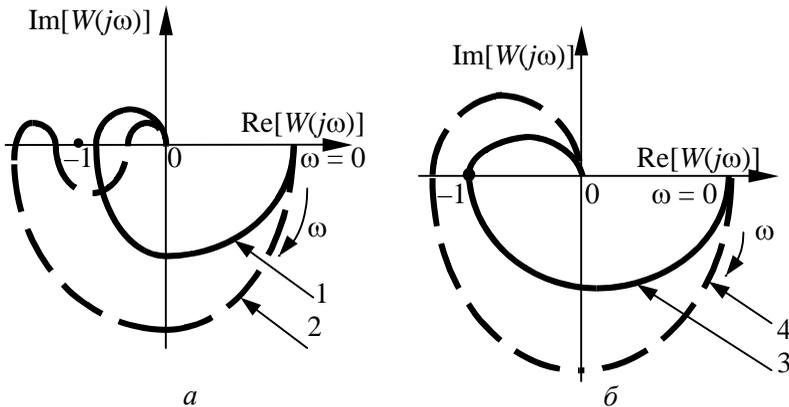


Рис. 4.10 — Варианты годографа Найквиста для устойчивой (а), неустойчивой САУ и САУ на границе устойчивости (б)

Для аналитических расчетов с помощью критерия Найквиста условия нахождения системы на границе устойчивости можно записать, используя вещественную и мнимую частотные функции разомкнутой цепи:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[W(j\omega_\pi)] = -1, \\ \operatorname{Im}[W(j\omega_\pi)] = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

где  $\omega_\pi$  — частота, соответствующая повороту радиус-вектора АФЧХ разомкнутой цепи на угол  $-\pi$ , т.е. до совпадения с отрицательной вещественной полуосью; ее называют *частотой переворота фазы*.

При решении практических задач для оценки устойчивости САУ не обязательно строить годограф Найквиста, достаточно в частотной передаточной функции разомкнутой цепи  $W(j\omega)$  приравнять к нулю мнимую часть и определить из получившегося уравнения частоту переворота фазы  $\omega_\pi$  (или ее квадрат). Затем подставить получившееся значение в вещественную часть  $W(j\omega)$  и вычислить ее модуль. Если  $|\operatorname{Re}[W(j\omega_\pi)]| < 1$ , то система устойчива, в противном случае — неустойчива.

Несмотря на наглядность критерия Найквиста и его физическую прозрачность, он имеет один существенный технический недостаток — вычислительные трудности, возникающие при разделении вещественной и мнимой частей  $W(j\omega)$ . Особенно это проявляется, если САУ содержит форсирующие звенья. Если же таких звеньев в структуре нет, то задача анализа устойчивости по критерию Найквиста решается просто. Продемонстрируем это на примере.

#### *Пример 4.5*

По критерию Найквиста получить выражение для оценки устойчивости и определить граничный коэффициент передачи для САУ, изображенной на рис. 4.3.

В примере 4.1 была получена передаточная функция разомкнутой цепи

$$\begin{aligned} W_{\text{рц}}(p) = W(p) &= \frac{k_1 k_2 k_{\text{oc}}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1)} = \\ &= \frac{K_p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{oc}} p + 1)}. \end{aligned}$$

Произведем в  $W_{\text{рц}}(p)$  замену оператора  $p$  на переменную  $j\omega$  и выделим в знаменателе получившегося выражения мнимую и вещественную части:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{K_p}{(1 + j\omega T_1)((1 + j\omega T_2))(1 + j\omega T_{oc})} = \\
 &= \frac{K_p}{[1 - \omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1 + T_2)](1 + j\omega T_{oc})} = \\
 &= \frac{K_p}{1 - \omega^2 [T_1 T_2 - (T_1 + T_2) T_{oc}] + j\omega [T_1 + T_2 + T_{oc} (1 - \omega^2 T_1 T_2)]} = \\
 &= \frac{K_p}{u(\omega) + jy(\omega)}.
 \end{aligned}$$

По правилам деления комплексных чисел [1] числитель и знаменатель полученного выражения нужно умножить на комплексную сопряженную функцию  $u(\omega) - jy(\omega)$ . Однако поскольку при определении частоты переворота фазы мнимая часть приравнивается к нулю и знак перед ней не играет роли, то операцию умножения на комплексную сопряженную функцию можно не проводить, приняв

$$\begin{aligned}
 \text{Im}[W(j\omega_\pi)] &= T_1 + T_2 + T_{oc} (1 - \omega_\pi^2 T_1 T_2) = 0, \\
 \text{Re}[W(j\omega_\pi)] &= \frac{K_p}{1 - \omega_\pi^2 [T_1 T_2 - (T_1 + T_2) T_{oc}]}.
 \end{aligned}$$

Выразив из первого уравнения квадрат частоты  $\omega_\pi$ , получим  $\omega_\pi^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_{oc}}{T_1 T_2 T_{oc}}$ , тогда

$$\begin{aligned}
 |\text{Re}[W(j\omega_\pi)]| &= \left| \frac{K_p}{1 - \frac{T_1 + T_2 + T_{oc}}{T_1 T_2 T_{oc}} [T_1 T_2 + (T_1 + T_2) T_{oc}]} \right| = \\
 &= \left| \frac{K_p}{1 - (T_1 + T_2 + T_{oc}) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{oc}} \right)} \right|.
 \end{aligned}$$

При  $|\operatorname{Re}[W(j\omega_\pi)]| < 1$  система будет устойчивой.

На границе устойчивости  $\operatorname{Re}[W(j\omega_\pi)] = -1$ , т.е.

$$\frac{K_{\text{гр}}}{1 - (T_1 + T_2 + T_{\text{ос}}) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{\text{ос}}} \right)} = -1,$$

отсюда

$$K_{\text{гр}} = (T_1 + T_2 + T_{\text{ос}}) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{\text{ос}}} \right) - 1.$$

Зададимся конкретными значениями коэффициентов передачи и постоянных времени. Пусть  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 10$ ,  $k_{\text{ос}} = 0,5$ ,  $T_1 = 0,5$  с,  $T_2 = 0,1$  с,  $T_{\text{ос}} = 0,05$  с. Тогда по полученным соотношениям при  $K_p = 5 \cdot 10 \cdot 0,5 = 25$  получим  $\omega_\pi^2 = 260$  с<sup>-2</sup>,  $|\operatorname{Re}[W(j\omega_\pi)]| = 1,263 > 1$ , следовательно, система с такими параметрами будет неустойчивой. Ее граничный коэффициент передачи

$$K_{\text{гр}} = (0,5 + 0,1 + 0,05) \left( \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,05} \right) - 1 = 19,8 < K_p.$$

Критерий Найквиста позволяет оценить устойчивость САУ, содержащих звенья чистого запаздывания.

Пусть звено чистого запаздывания с передаточной функцией  $e^{-p\tau}$  (при единичном коэффициенте передачи) включено последовательно с системой без запаздывания с передаточной функцией  $W_0(p)$ .

Результирующие передаточная и частотная передаточная функции разомкнутой цепи будут иметь вид

$$W(p) = W_0(p)e^{-p\tau}, \quad W(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau}.$$

Поскольку  $W_0(j\omega) = A_0(\omega)e^{j\varphi_0(\omega)}$ , то

$$W(j\omega) = A_0(\omega)e^{j[\varphi_0(\omega) - \omega\tau]}.$$

Таким образом, звено чистого запаздывания вносит лишь дополнительный фазовый сдвиг. При этом изменяется АФЧХ,

т.е. меняются условия устойчивости (характеристика «закручивается» по часовой стрелке). При некотором  $\tau$  система станет неустойчивой.

По АФЧХ системы без запаздывания можно определить граничное (предельное) значение запаздывания  $\tau_{гр}$ , что поясняется построением на рис. 4.11.

Пусть АФЧХ устойчивой САУ без запаздывания  $W_0(j\omega)$  пересекает окружность единичного радиуса на частоте  $\omega = \omega_{ср}$  (как будет показано ниже, это частота среза) при повороте радиус-вектора АФЧХ на угол  $\varphi_{ср}$ . При введении в САУ звена чистого запаздывания на границе устойчивости конец этого радиус-вектора совпадет с точкой  $(-1, j0)$  и будет справедливым соотношение  $\varphi_{ср} - \omega_{ср} \tau_{кр} = -\pi$ , откуда

$$\tau_{гр} = \frac{\pi + \varphi_{ср}}{\omega_{ср}}.$$

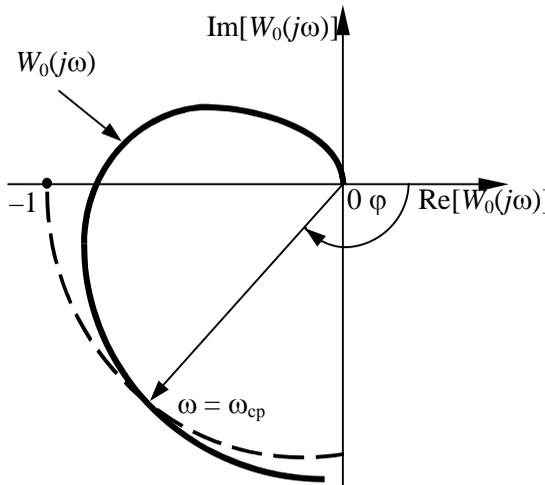


Рис. 4.11 — Определение граничного запаздывания

## 4.6 Оценка устойчивости САУ по логарифмическим частотным характеристикам. Запасы устойчивости

В соответствии с критерием Найквиста об устойчивости можно судить не только по АФЧХ, но и совместно по амплитудной и фазовой частотным характеристикам разомкнутой цепи. Обычно при этом пользуются логарифмическими характеристиками, что представляет большое удобство в силу простоты их построения. Но если ЛАЧХ используется асимптотическая, то расчеты будут достаточно грубыми.

Если АФЧХ не охватывает точку  $(-1, j0)$ , то при частоте, на которой  $A(\omega) = 1$ , абсолютное значение фазы больше  $-\pi$ . Но значение  $A(\omega) = 1$  соответствует  $G(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 0$ . Поэтому для устойчивости замкнутой САУ необходимо, чтобы ЛАЧХ разомкнутой цепи пересекла ось абсцисс раньше, чем фаза, спадая, окончательно перейдет за значение  $-\pi$ .

Однако  $G(\omega) = 0$  на частоте среза  $\omega_{cp}$ , а  $\varphi(\omega) = -\pi$  на частоте переворота фазы  $\omega_{\pi}$ . Следовательно, система будет абсолютно устойчива, если  $\omega_{cp} < \omega_{\pi}$ .

На рис. 4.12 для ЛАЧХ, показанной сплошной линией, это неравенство соблюдается ( $\omega_{cp1} < \omega_{\pi}$ ), значит, САУ устойчива,  $K_{p1} < K_{гр}$ . При увеличении коэффициента передачи  $K_p$  ЛАЧХ смещается вверх и на границе устойчивости (пунктирная кривая) при  $K_{p2} = K_{гр}$  частоты  $\omega_{cp2}$  и  $\omega_{\pi}$  равны друг другу. Дальнейшее увеличение величины  $K_p$  до  $K_{p3}$  приводит к неустойчивости системы, тогда  $\omega_{cp3} > \omega_{\pi}$  (штрихпунктирная кривая).

Возможен и более сложный случай. Как было показано в примере 4.4, САУ устойчива при  $K_{p1} = 40 \text{ с}^{-1}$ . При этом ее АФЧХ будет дважды пересекать отрицательную вещественную полуось, как показано на рис. 4.10, а, при частотах  $\omega_{\pi1}$  и  $\omega_{\pi2}$ . ЛАЧХ такой системы изображена сплошной линией на рис. 4.13, и

ее частота среза  $\omega_{cp1}$  меньше любой из частот  $\omega_{\pi1}$  и  $\omega_{\pi2}$ . При  $K_{p2} = 100 \text{ с}^{-1}$  частота среза  $\omega_{\pi1} < \omega_{cp2} < \omega_{\pi2}$  (на рис. 4.13 ЛАЧХ показана пунктирной линией) и САУ становится неустойчивой. При  $K_{p3} = 500 \text{ с}^{-1}$  САУ снова станет устойчивой, хотя частота среза  $\omega_{cp3}$  (ЛАЧХ изображена штрихпунктирной линией на рис. 4.13) больше частот  $\omega_{\pi1}$  и  $\omega_{\pi2}$ .

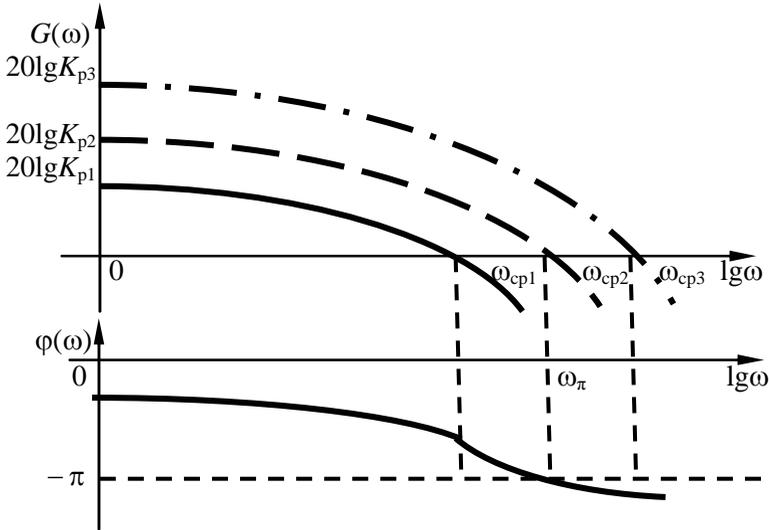


Рис. 4.12 — Оценка устойчивости САУ по ЛАЧХ и ЛФЧХ

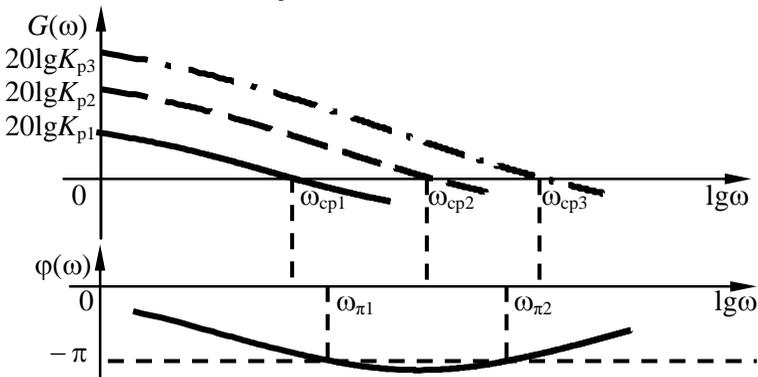


Рис. 4.13 — Варианты ЛАЧХ и ЛФЧХ  
для условно устойчивой САУ

Эта ситуация характерна для условно устойчивых систем, и для них оценка устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам выглядит по-другому: *система будет устойчивой, если все частоты переворота фазы больше частоты среза или если ее ЛФЧХ до частоты среза принимает значение  $\varphi(\omega) = -\pi$  четное число раз.* Именно такая ситуация имеет место при  $K_{p3} = 500 \text{ с}^{-1}$ .

При оценке устойчивости САУ одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо еще оценить величину запаса устойчивости, т.е. степени удаленности системы от границы устойчивости.

Основное распространение в качестве меры запаса устойчивости получили вытекающие из критерия Найквиста две величины — запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi$  и запас устойчивости по амплитуде  $\Delta G$ .

*Запас устойчивости по амплитуде  $\Delta G$*  определяется величиной допустимого подъема ЛАЧХ, при котором система окажется на границе устойчивости. Таким образом, запас по амплитуде представляет собой запас по коэффициенту передачи разомкнутой цепи по отношению к его граничному по устойчивости значению:

$$\Delta G = 20 \lg K_{гр} - 20 \lg K_p. \quad (4.9)$$

Оценку запаса устойчивости САУ по амплитуде можно также провести, зная частоту переворота фазы  $\omega_\pi$ , тогда

$$\Delta G = |G(\omega)| \Big|_{\omega=\omega_\pi}. \quad (4.10)$$

Таким образом, для определения запаса устойчивости по амплитуде необходимо либо по любому из критериев устойчивости рассчитать  $K_{гр}$  и воспользоваться далее формулой (4.9), либо вычислить частоту  $\omega_\pi$  и применить формулу (4.10).

*Запас устойчивости по фазе* определяется величиной  $\Delta\varphi$ , на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе с частотой среза  $\omega_{ср}$ , чтобы система оказалась на границе устойчивости.

При вычислении запаса устойчивости по фазе нужно вначале определить частоту среза из уравнения  $A_{\text{рц}}(\omega)=1$  и затем найти  $\varphi_{\text{рц}}(\omega_{\text{ср}})$ . Тогда запас устойчивости по фазе, вычисленный в градусах, будет равен

$$\Delta\varphi = \left[ \pi + \varphi_{\text{рц}}(\omega_{\text{ср}}) \right] \cdot \frac{180}{\pi}.$$

При наличии логарифмических частотных характеристик запасы устойчивости отсчитываются прямо с графиков, например как показано на рис. 4.14, *а*.

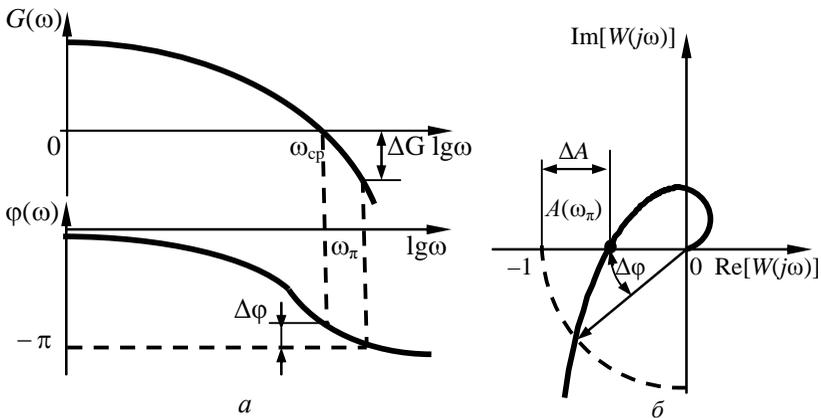


Рис. 4.14 — Запасы устойчивости САУ на логарифмических частотных характеристиках (*а*) и на АФЧХ (*б*)

Помимо ЛАЧХ и ЛФЧХ, с этой же целью можно использовать и АФЧХ (разомкнутой цепи), что проиллюстрировано на рис. 4.14, *б*.

Для определения запаса устойчивости по фазе нужно провести радиус-вектор из начала координат через точку АФЧХ, для которой выполняется условие  $A(\omega)=1$ . Для нахождения этой точки графически следует из начала координат провести окружность радиусом  $R=1$ . Угол между этим лучом и отрицательной действительной полуосью и будет  $\Delta\varphi$ .

Запас устойчивости по амплитуде характеризует удаленность точки АФЧХ  $A(\omega_\pi)$  от границы устойчивости, т.е. от точки с координатами  $(-1, j0)$  ( $\omega_\pi$  — это частота, при которой фаза составляет значение минус  $\pi$ ), выраженную в логарифмических единицах. Следовательно,

$$\Delta G = 20 \lg \Delta A = |20 \lg 1 - 20 \lg A(\omega_\pi)| = |20 \lg A(\omega_\pi)|.$$

## 4.7 Частотные характеристики разомкнутых систем

Как было показано в п. 3.2.1, передаточные и частотные функции последовательно соединенных звеньев перемножаются, а их логарифмические характеристики — складываются, т.е.

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p), \quad W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega), \quad A(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(j\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega), \quad G(\omega) = \sum_{i=1}^n G_i(\omega).$$

Отсюда вытекает правило построения ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой одноконтурной САУ: строят логарифмические характеристики звеньев и затем их графически складывают.

Но для построения асимптотической ЛАЧХ применяют более простой метод, который сформулируем после рассмотрения конкретного примера.

### Пример 4.6

Построить асимптотическую ЛАЧХ для разомкнутой цепи САУ с передаточной функцией

$$W_{\text{рц}}(p) = \frac{K_p(\tau_1 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_{21}^2 p^2 + T_{22} p + 1)},$$

где  $K_p = 225 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 1 \text{ с}$ ,  $T_1 = 10 \text{ с}$ ,  $T_{21} = T_{22} = 0,1 \text{ с}$ .

По виду передаточной функции можно заключить, что система состоит из последовательно соединенных интегрирующего, форсирующего, инерционного звеньев и звена второго порядка.

Определим, каким является звено второго порядка, рассчитав его коэффициент демпфирования:

$$\xi = \frac{T_{22}}{2T_{21}} = \frac{0,1}{2 \cdot 0,1} = 0,5.$$

Поскольку  $\xi < 1$ , звено второго порядка является колебательным.

Рассчитаем частоты сопряжения по соотношению  $\omega_{c,i} = \frac{1}{T_i}$ ,

где  $T_i$  — постоянная времени  $i$ -го звена:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0,1 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau_1} = 1 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_3 = \frac{1}{T_{21}} = 10 \text{ с}^{-1},$$

где  $\omega_1$  — частота сопряжения инерционного звена,  $\omega_2$  — частота сопряжения форсирующего звена,  $\omega_3$  — частота сопряжения колебательного звена.

Соответственно логарифмы частот сопряжения равны

$$\lg \omega_1 = -1 \text{ дек}, \quad \lg \omega_2 = 0, \quad \lg \omega_3 = 2 \text{ дек}.$$

Будем считать, что коэффициент передачи интегрирующего звена равен коэффициенту передачи разомкнутой цепи САУ, а коэффициенты передачи всех остальных звеньев равны единице. Определим величину  $G_0 = 20 \lg K_p = 20 \lg 60 = 47$  дБ.

На рис. 4.15 показан процесс построения асимптотической ЛАЧХ разомкнутой цепи САУ.

Характеристики звеньев построены на рис. 4.15, где соответственно ломаные линии 1, 2, 3, 4 являются ЛАЧХ интегрирующего, инерционного, форсирующего и колебательного звеньев. Так как коэффициенты передачи всех звеньев, кроме интегрирующего, приняты единичными, то ЛАЧХ этих звеньев при  $\omega < \omega_{c,i}$  совпадают с осью частот.

Просуммировав графически ЛАЧХ всех звеньев, получим характеристику 5, являющуюся асимптотической ЛАЧХ разомкнутой цепи САУ.

Из этого примера видно, что суммарную характеристику легко можно построить, не изображая характеристик отдельных звеньев. Поэтому при построении ЛАЧХ разомкнутых САУ

вначале проводят первую асимптоту через точку с координатами  $\omega=1$ ,  $G(\omega) = 20 \lg K_p$  с наклоном  $n(-20 \text{ дБ/дек})$ , где  $n$  равно разности между числами идеальных интегрирующих и дифференцирующих звеньев. После каждой сопрягающей частоты наклон ЛАЧХ изменяют, причем изменение наклона определяется типом звена, давшим сопрягающую частоту. Причем если у колебательного звена  $\xi < 0,4$ , на соответствующей частоте необходимо изобразить «горб» в соответствии с величиной  $\xi$ .

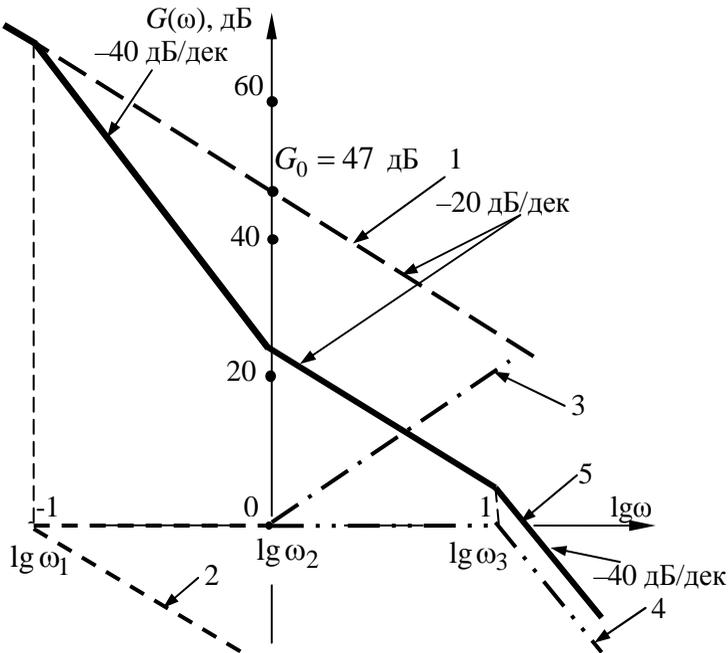


Рис. 4.15 — Построение асимптотической ЛАЧХ разомкнутой цепи

Возможно и решение обратной задачи — восстановление передаточной функции по ее асимптотической ЛАЧХ.

#### Пример 4.7.

По заданной на рис. 4.16 асимптотической ЛАЧХ одноконтурной разомкнутой системы требуется восстановить ее передаточную функцию.

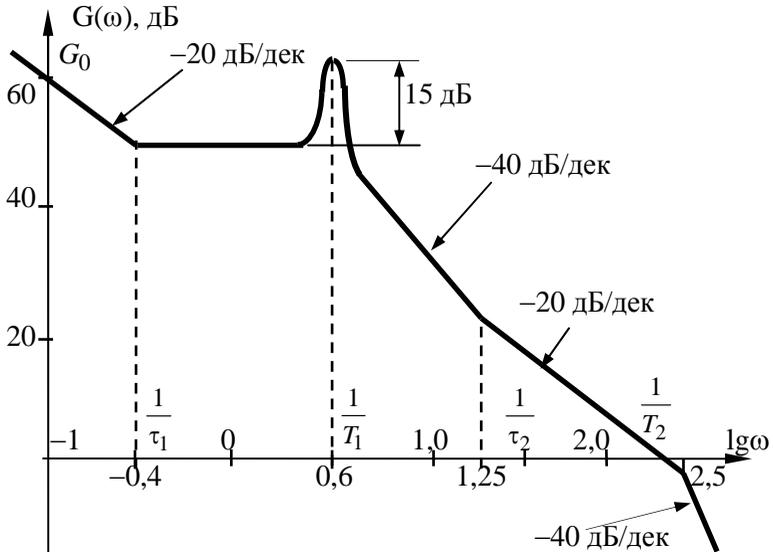


Рис. 4.16 — Восстановление передаточной функции по асимптотической ЛАЧХ

Величина наклона первой асимптоты (по мере роста частоты) указывает на присутствие в структуре системы интегрирующего звена.

Для первой асимптоты поэтому справедливо уравнение (см. характеристики интегрирующего звена):  $G(\omega) = 20 \lg K_p - 20 \lg \omega$ .

Определить параметр  $K_p$  можно, отсчитав с графика координаты любой точки этой асимптоты. Например

$$60 = 20 \lg K_p - 20 \lg(0,1), \quad 60 = 20 \lg K_p + 20, \quad 20 \lg K_p = 40, \\ K_p = 100.$$

После первой по величине частоты сопряжения наклон ЛАЧХ изменился на плюс 20 дБ/дек. Такой наклон имеет ЛАЧХ форсирующего звена. Следовательно, в структуре системы есть форсирующее звено. Анализируя изменение наклонов асимптот ЛАЧХ можно заключить, что помимо упомянутых типовых

звеньев в систему включены колебательное звено, еще одно форсирующее и инерционное звенья.

В общем виде передаточная функция будет следующей:

$$W(p) = \frac{100(\tau_1 p + 1)(\tau_1 p + 1)}{p(T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

По частотам сопряжения рассчитаем соответствующие постоянные времени:

$$\lg \frac{1}{\tau_1} = -0,4 \text{ дек}; \quad \omega_{c1} = 10^{-0,4} = 0,4 \text{ с}^{-1}; \quad \tau_1 = 2,5 \text{ с};$$

$$\lg \frac{1}{\tau_2} = 1,25 \text{ дек}; \quad \omega_{c1} = 10^{1,25} = 17,8 \text{ с}^{-1}; \quad \tau_2 = 0,056 \text{ с};$$

$$\lg \frac{1}{T_1} = 0,6 \text{ дек}; \quad \omega_{c3} = 10^{0,6} = 4 \text{ с}^{-1}; \quad T_1 = 0,25 \text{ с};$$

$$\lg \frac{1}{T_2} = 2,5 \text{ дек}; \quad \omega_{c4} = 10^{2,5} = 316,2 \text{ с}^{-1}; \quad T_2 = 0,0032 \text{ с}.$$

По всплеску ЛАЧХ на частоте сопряжения колебательного звена определим коэффициент демпфирования:

$$15 = 20 \lg \frac{1}{2\xi}; \quad \lg 2\xi = -\frac{15}{20}; \quad \xi = 0,09.$$

Окончательный ответ:

$$W(p) = \frac{100(2,5p + 1)(0,056p + 1)}{p(0,0625p^2 + 0,045p + 1)(0,0032p + 1)}.$$

Следует отметить, что восстановление передаточной функции САУ по асимптотической ЛАЧХ возможно в том случае, если система содержит только минимально-фазовые звенья. Если же в ней имеются особые звенья (неминимально-фазовые, иррациональные, звенья чистого запаздывания), эта задача не имеет однозначного решения, т.к. асимптотические ЛАЧХ этих звеньев такие же, как и у минимально-фазовых звеньев (см. подраздел 3.3).

## 5 ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

### 5.1 Показатели качества управления в статическом режиме работы САУ. Статические и астатические системы

Как всякая динамическая система, САУ может находиться в одном из двух режимов — стационарном (установившемся) и переходном. Стационарный режим может быть двух типов: статический и динамический. Ограничимся здесь рассмотрением лишь статического режима.

В статическом режиме, при котором все внешние воздействия и параметры системы не меняются, качество управления характеризуется точностью.

Рассмотрим САУ с двумя воздействиями: задающим  $g(t) = g_{\max} \cdot 1(t)$  и возмущающим  $f(t) = f_{\max} \cdot 1(t)$ , где  $g_{\max}$ ,  $f_{\max}$  — амплитуды этих воздействий. Структурная схема такой системы приведена на рис. 5.1.

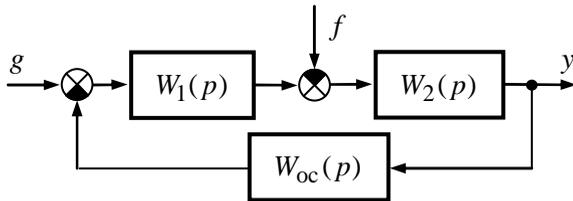


Рис. 5.1 — Структурная схема одноконтурной САУ

В соответствии с принципом суперпозиции линейная непрерывная САУ в операторной форме описывается уравнением динамики:

$$Y(p) = G(p) \cdot W_{zg}(p) - F(p) \cdot W_{zf}(p), \quad (5.1)$$

где  $G(p) = \mathbf{L}\{g(t)\} = \frac{g_{\max}}{p}$ ,  $F(p) = \mathbf{L}\{f(t)\} = \frac{f_{\max}}{p}$  — изображения задающего и возмущающего воздействий;

$$W_{zg}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)},$$

$$W_{zf}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)} \quad \text{—}$$

передаточные функции замкнутой системы по каждому из воздействий.

Для анализа поведения САУ в статическом режиме (при  $t = \infty$ ), в соответствии с теоремой операционного исчисления о конечном значении оригинала [1—3]  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)$ , в

уравнении (5.1) в передаточных функциях и изображениях нужно принять  $p = 0$ . При этом уравнение динамики превратится в уравнение статики вида

$$y(g, f) = g \cdot W_{zg}(0) - f \cdot W_{zf}(0), \quad (5.2)$$

где  $g, f$  — текущие значения задающего и возмущающего воздействий.

Пусть система, изображенная на рис 5.1, не содержит ин-

тегрирующих звеньев, тогда  $W_{zg}(0) = \frac{K_p}{1 + K_p}$ ,  $W_{zf}(0) = \frac{k_{pf}}{1 + K_p}$ ,

где  $K_p$  — коэффициент передачи разомкнутой цепи,  $k_{oc}$  — коэффициент передачи звена обратной связи,  $k_{pf}$  — коэффициент передачи разомкнутой САУ по возмущающему воздействию (звена  $W_2(p)$ , установленного после точки приложения этого воздействия). Тогда уравнение (5.2) можно представить в виде:

$$y(g, f) = g \frac{K_p}{1 + K_p} - f \frac{k_{pf}}{1 + K_p}. \quad (5.3)$$

По уравнению (5.3) можно построить статические характеристики САУ. В зависимости от характера изменения воздействий  $g$  и  $f$  различают регулировочные и внешние статические характеристики.

*Регулировочная* статическая характеристика определяет изменение значения выходной величины при изменении величины задающего воздействия и при постоянном возмущающем воз-

действии, т.е., например, при  $f = 0$  регулировочную характеристику можно рассчитать по выражению:

$$y(g) = g \cdot W_{zg}(0) = g \cdot \frac{K_p}{1 + K_p} = g \cdot K_g.$$

Эта характеристика изображена на рис. 5.2, *a* и представляет собой прямую, проходящую через начало координат под углом

лом  $\alpha = \arctg K_g$ , где  $K_g = \frac{K_p}{1 + K_p}$  — коэффициент передачи замкнутой системы по задающему воздействию.

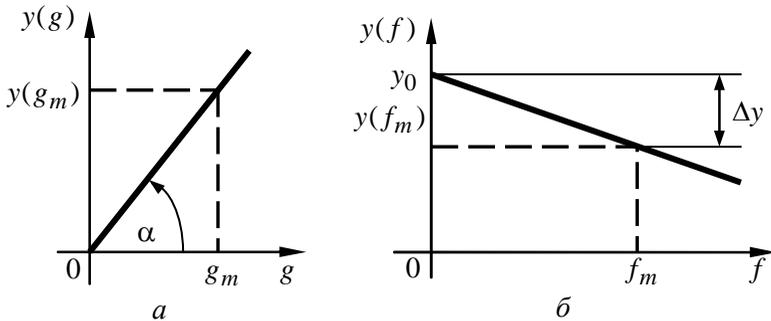


Рис. 5.2 — Регулировочная (*a*) и внешняя (*б*) статические характеристики

*Внешняя* статическая характеристика (рис. 5.2, *б*) определяет изменение значения выходной величины при изменении величины возмущающего воздействия при постоянном задающем воздействии и рассчитывается непосредственно по формуле (5.3) при  $g = g_{\max} = \text{const}$ :

$$y(f) = g_{\max} \cdot \frac{K_p}{1 + K_p} - f \cdot \frac{k_{pf}}{1 + K_p} = g_{\max} \cdot K_g - f \cdot K_f, \quad (5.4)$$

где  $K_f = \frac{k_{pf}}{1 + K_p}$  — коэффициент передачи замкнутой системы

по возмущающему воздействию.

Величина

$$\Delta y = f \cdot \frac{k_{pf}}{1 + K_p} = f \cdot K_f \quad (5.5)$$

называется *статической ошибкой системы* и является основной величиной, определяющей точностные параметры САУ.

В различных областях техники точность в установившемся (статическом) режиме принято характеризовать величиной отклонения выходной координаты в полном диапазоне изменения возмущающего воздействия в следующем виде:

– абсолютной величиной отклонения  $y = y_{ном} + \frac{\Delta y}{2}$ , где

под номинальным значением  $y_{ном}$  понимают усредненное значение выходной величины;

– относительной величиной отклонения, выраженной в процентах

$$\delta = y_{ном} \pm \frac{\Delta y}{2} \cdot 100 \text{ (\%)}; \quad (5.6)$$

– статизмом внешней характеристики, выраженным в процентах

$$S = \frac{\Delta y}{y_0} \cdot 100 \text{ (\%)},$$

где  $y_0$  — значение выходной величины на холостом ходу (при  $f = 0$ ).

Наличие статической ошибки в общем случае является нежелательным, т.к. создается погрешность управления. Для ее полного устранения, согласно формуле (5.5), требуется до бесконечности увеличивать коэффициент передачи  $K_p$ , а это, чаще всего, невозможно по условию обеспечения устойчивости системы. Системы, в которых нельзя полностью устранить статическую ошибку, называются *статическими*.

Вместе с тем имеется путь устранения статической ошибки при конечной величине коэффициента передачи  $K_p$ .

В статическую САУ (рис. 5.1) введем интегрирующее звено, например с единичным коэффициентом передачи, причем так, чтобы оно находилось между точками приложения задающего и возмущающего воздействий. Уравнение динамики системы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(p) &= G(p) \cdot W_{zg}(p) - F(p) \cdot W_{zf}(p) = \\ &= G(p) \frac{W_1(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)} - F(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)} = \\ &= G(p) \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{p + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)} - F(p) \frac{p \cdot W_2(p)}{p + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)}. \end{aligned}$$

При  $p = 0$  получим

$$y = g \cdot W_{zg}(0) - f \cdot W_{zf}(0) = g \frac{1}{k_{oc}} - f \frac{0 \cdot k_{pf}}{k_{oc}} = g \frac{1}{k_{oc}} - 0 = y_0.$$

Отсюда следует, что при включении интегрирующего звена на оговоренном выше участке системы удалось полностью ликвидировать статическую ошибку, т.е. получить  $\Delta u = 0$ .

Пусть теперь интегрирующее звено включено после точки приложения возмущения, например содержится в звене с передаточной функцией  $W_2(p)$ , т.е.  $W_2(p) = \frac{k_2}{p}$ . Тогда

$$\begin{aligned} Y(p) &= G(p) \cdot W_{zg}(p) - F(p) \cdot W_{zf}(p) = \\ &= G(p) \cdot \frac{W_1(p) \cdot \frac{k_2}{p}}{1 + W_1(p) \cdot \frac{k_2}{p} \cdot W_{oc}(p)} - F(p) \cdot \frac{\frac{k_2}{p}}{1 + W_1(p) \cdot \frac{k_2}{p} \cdot W_{oc}(p)} = \\ &= G(p) \frac{W_1(p) \cdot k_2}{p + W_1(p) \cdot k_2 \cdot W_{oc}(p)} - F(p) \frac{k_2}{p + W_1(p) \cdot k_2 \cdot W_{oc}(p)}. \end{aligned}$$

При  $p = 0$

$$y = g \cdot W_{zg}(0) - f \cdot W_{zf}(0) = g \frac{1}{k_{oc}} - f \frac{k_{pf}}{k_{oc}}, \quad \Delta y = f \frac{k_{pf}}{k_{oc}} = f \cdot K_f \neq 0,$$

то есть система остается статической.

Системы, в которых при стремлении возмущающего воздействия к постоянной величине отклонение выходной величины стремится к нулю и не зависит от величины приложенного воздействия, называются *астатическими*.

Изложенное выше позволяет сделать следующий вывод. Система будет астатической только в том случае, если интегрирующее звено будет включено на участке структурной схемы САУ между точками приложения задающего и возмущающего воздействий. Включение его после точки приложения возмущающего воздействия не делает систему астатической. Можно также показать, что введение интегрирующего звена в цепь обратной связи делает систему вообще неработоспособной, поскольку знаменатель ее передаточных функций при  $p = 0$  обращается в бесконечность и выходная координата становится равной нулю.

Порядок астатизма  $r$  САУ определяется количеством интегрирующих звеньев, включенных между точками приложения задающего и возмущающего воздействий.

Если возмущающее воздействие изменяется во времени, то в САУ с астатизмом второго порядка ( $r = 2$ ) нулю будет равна не только статическая ошибка, но и ошибка по первой производной от воздействия — *скоростная ошибка*. В системах с астатизмом третьего порядка, помимо перечисленных, нулю будет также равна ошибка по второй производной — *ошибка по ускорению*. Это свойство широко используется в следящих системах, системах с программным управлением, иначе, при нарастании задающего или возмущающего воздействий, скоростная ошибка будет также нарастать, а при сколько-нибудь длительном воздействии это недопустимо. Статическими могут быть только системы стабилизации.

Исключение статической и других (скоростной, по ускорению и т.д.) является несомненным достоинством астатических систем. Однако им присущ и ряд недостатков.

1. При введении интегрирующих звеньев снижается частота среза, сужается полоса пропускания средних частот, а как следствие – снижение быстродействия САУ. Расширить полосу пропускания и увеличить быстродействие астатической системы можно путём введения в неё не интегрирующих, а издромных звеньев с передаточной функцией  $W_{из}(p) = \frac{k_{из}(\tau_{из}p + 1)}{p}$ . Фор-

сирующее звено, входящее в структуру издромного звена, поднимет ЛАЧХ и ЛФЧХ САУ, увеличивая тем самым частоты среза и переворота фазы и расширяя полосу пропускания.

2. Повышение порядка астатизма снижает устойчивость САУ, и, например при двух интегрирующих звеньях, она может стать структурно неустойчивой. Рассмотрим эту ситуацию на конкретном примере.

Пусть в системе, структурная схема которой изображена на рис. 5.1, заданы следующие передаточные функции:

$$W_1(p) = \frac{k_1^2}{p^2}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}, \quad W_{oc}(p) = k_{oc}. \quad \text{Тогда передаточная}$$

функция её разомкнутой цепи  $W_{рц}(p) =$

$$= W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p) = \frac{k_1^2 k_2 k_{oc}}{p^2 (T_2 p + 1)}, \quad \text{характеристический полином}$$

САУ  $A(p) = p^2 (T_2 p + 1) + k_1^2 k_2 k_{oc}$ , т.е.  $a_0 = k_1^2 k_2 k_{oc}$ ,

$a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = T_2$ , главный минор определителя Гурвица

для системы 3-го порядка  $\Delta_{n-1} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = -a_0 a_3$  будет отрицательным при любых положительных значениях коэффициентов  $a_0$  и  $a_3$ , и система будет структурно неустойчивой.

Для повышения устойчивости астатических систем высокого порядка вместо интегрирующих звеньев также целесообразнее использовать издромные звенья, позволяющие устранить нулевые коэффициенты в характеристическом полиноме.

При соответствующем подборе постоянной времени  $\tau_{\text{из}}$  включение изодромного звена не оказывает или почти не оказывает влияния на запасы устойчивости САУ. Таким путем можно обеспечить астатизм второго, третьего и более высокого порядка.

3. Присутствие оператора Лапласа  $p$  во втором слагаемом формулы (5.7) соответствует умножению изображения возмущающего воздействия  $F(p)$  на этот оператор. Благодаря этому статическая ошибка в астатической системе и становится равной нулю. В то же время умножение изображения на  $p$  соответствует операции дифференцирования оригинала, и при его скачкообразном изменении производная будет равна бесконечности. Следовательно, в астатической САУ (первого порядка) при скачкообразном изменении возмущающего воздействия следует ожидать большого скачка выходной величины в отрицательном направлении в момент подачи возмущения. Правда, этот скачок будет конечным за счёт демпфирующего действия характеристического полинома, но всё равно он будет довольно большим.

Устранить этот недостаток можно, с одной стороны, подбором параметров астатической САУ, а с другой – повышением порядка её астатизма.

### *Пример 5.1*

Рассчитать статическую точность системы стабилизации выходного напряжения генератора постоянного тока (рис. 1.3) для следующих параметров и воздействий:  $k_y = 0,5$  А/В;  $k_{\text{п}} = 10$  В/А;  $k_{\text{д}} = 0,1$ ;  $r_{\text{вн}} = 0,1$  Ом;  $U_3 = 5$  В;  $I_{\text{н}} = (1 \dots 10)$  А.

Прежде всего необходимо составить уравнение статики рассматриваемой системы. Не зная передаточных функций отдельных элементов и системы в целом, составим математическое описание для установившегося режима на основе статических характеристик отдельных элементов (примем допущение, что все элементы имеют линейные статические характеристики).

В разомкнутой системе (см. рис. 1.2), как было выведено в разделе 1,

$$U_{\text{н}} = E - I_{\text{н}} r_{\text{вн}}. \quad (a)$$

ЭДС генератора пропорциональна току возбуждения, т.е.  $E_{\Gamma} = I_{\text{в}} k_{\Pi}$ , где  $k_{\Pi}$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от материала магнитопровода генератора, конструктивных особенностей генератора и т.д. Ток возбуждения  $I_{\text{в}}$ , в свою очередь, пропорционален входному сигналу усилителя У, т.е.  $I_{\text{в}} = U_{\text{з}} k_{\text{у}}$ , где  $k_{\text{у}}$  — коэффициент передачи функционального усилителя У.

С учетом этого соотношение (а) можно записать в следующем виде:

$$U_{\text{н}} = U_{\text{з}} k_{\text{у}} k_{\Pi} - I_{\text{н}} r_{\text{вн}}. \quad (\text{б})$$

Уравнению (б) соответствует структурная схема, представленная на рис. 5.3, а.

В замкнутой системе (см. рис. 1.3) часть выходного напряжения сравнивается с задающим и разность этих напряжений подается на вход усилителя У, в соответствии с чем можно записать

$$\Delta U = U_{\text{з}} - U_{\text{ос}} = U_{\text{з}} - k_{\text{д}} U_{\text{н}}, \quad (\text{в})$$

где  $k_{\text{д}} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$  — коэффициент передачи делителя.

С учетом формулы (в) на основе структурной схемы разомкнутой системы составим структурную схему замкнутой системы, как показано на рис. 5.3, б.

В соответствии с правилами преобразования структурных схем для схемы, изображенной на рис. 5.3, б, получим уравнение

$$U_{\text{н}} = U_{\text{з}} \frac{k_{\text{у}} k_{\Pi}}{1 + k_{\text{у}} k_{\Pi} k_{\text{д}}} - I_{\text{н}} \frac{r_{\text{вн}}}{1 + k_{\text{у}} k_{\Pi} k_{\text{д}}}. \quad (\text{г})$$

Уравнение статики (г), как видим, полностью соответствует обобщенному уравнению (5.3), отличаясь лишь обозначениями.

Подставим в уравнение (г) заданные значения величин и определим максимальное  $U_{\text{нmax}}$  и минимальное  $U_{\text{нmin}}$  значения выходного напряжения, соответствующие минимальному  $I_{\text{нmin}} = 1$  А и максимальному  $I_{\text{нmax}} = 10$  А токам нагрузки:

$$U_{H \max} = 5 \frac{0,5 \cdot 10}{1 + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,1} - 1 \frac{0,1}{1 + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,1} = 16,6 \text{ В};$$

$$U_{H \min} = 5 \frac{0,5 \cdot 10}{1 + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,1} - 10 \frac{0,1}{1 + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,1} = 16 \text{ В}.$$

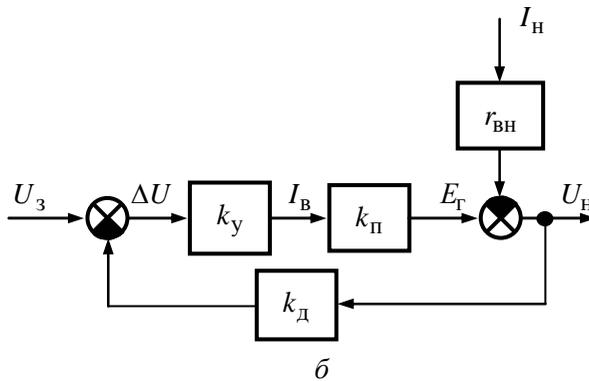
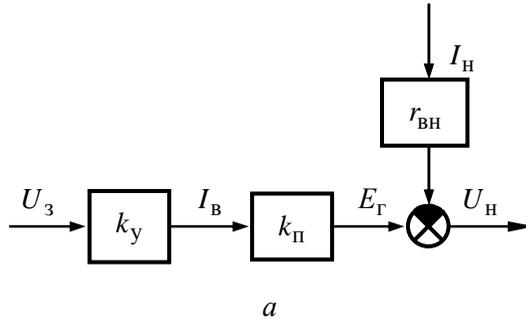


Рис. 5.3 — Пример статического расчета САУ

Представим выходное напряжение в форме (5.6):

$$U_{H \text{ ном}} = \frac{U_{H \max} + U_{H \min}}{2} = 16,3 \text{ В};$$

$$\Delta U_H = U_{H \max} - U_{H \min} = 0,6 \text{ В};$$

$$U_H = U_{H \text{ ном}} \pm \frac{\Delta U_H \cdot 100\%}{U_{H \text{ ном}}} = U_{H \text{ ном}} \pm \frac{0,6 \cdot 100\%}{2 \cdot 16,3} = U_{H \text{ ном}} \pm 1,84 \text{ \%}.$$

Таким образом, при изменении в оговоренном диапазоне возмущающего воздействия (тока нагрузки) отклонение выходного напряжения не превысит величины  $\pm 1,84\%$  от номинального значения.

## 5.2 Показатели качества в динамических режимах работы САУ

Основными показателями, характеризующими работу САУ в динамических режимах, являются время переходного процесса и перерегулирование. Напрямую их можно определить непосредственно по переходной характеристике САУ, приведенной на рис. 5.4.

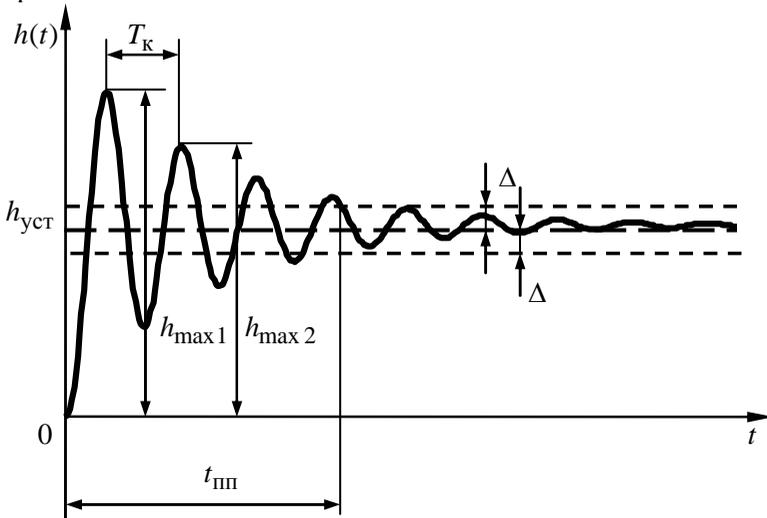


Рис. 5.4 — Определение показателей качества в динамике САУ

Время переходного процесса  $t_{пп}$  характеризует быстродействие системы. Определяется как интервал времени от начала переходного процесса до момента, когда отклонение выходной величины от ее нового установившегося значения  $h_{уст}$  становится меньше определенной достаточно малой величины. На рис 5.4. эта величина обозначена как  $\Delta$ . Для общепромышлен-

ных систем обычно принимается  $\Delta = 0,05 \cdot h_{уст}$ , т.е. 5 % от установившегося значения.

*Перерегулированием*  $\sigma$  называется максимальное отклонение выходной величины  $h_{max1}$  на интервале переходного процесса от установившегося после окончания переходного процесса  $h_{уст}$ , выраженное в процентах:

$$\sigma = \frac{h_{max1} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100 (\%).$$

Дополнительными показателями качества принято считать колебательность и период собственных колебаний.

*Колебательность*  $\mu$  характеризует степень затухания переходного процесса и обычно определяется отношением соседних максимумов на переходной характеристике:

$$\mu = \frac{h_{max1}}{h_{max2}},$$

т.е. чем больше  $\mu$ , тем быстрее затухает переходный процесс. В зависимости от характера затухания различают следующие типы переходных характеристик: монотонная (нет ни одного колебания), аperiodическая (не более одного колебания) и колебательная (несколько колебаний).

*Период собственных колебаний*  $T_k$  определен минимальным значением мнимой части корней характеристического уравнения  $A(p) = 0$ . На рис. 5.4 он показан как расстояние между соседними максимумами переходной характеристики САУ.

### 5.3 Косвенные методы оценки качества переходного процесса

Исчерпывающее представление о качестве переходного процесса дает, конечно, сама переходная характеристика. Однако при разработке САУ необходимо иметь возможность судить об основных показателях качества переходного процесса без построения переходных характеристик, по каким-либо косвенным признакам, которые определяются более просто и позволя-

ют связать показатели качества с параметрами САУ. Такие признаки называются *критериями качества* переходного процесса.

Существуют три группы критериев качества: частотные, корневые и интегральные.

### 5.3.1 Частотные критерии оценки качества

Наибольшее распространение получили частотные критерии, в основу которых положено использование частотных характеристик САУ. Для иллюстрации возможности оценки качества переходного процесса по частотным характеристикам установим точную аналитическую зависимость между переходной характеристикой  $h(t)$  и частотными характеристиками САУ (ВЧХ, АЧХ, ЛАЧХ и т.д.).

В качестве примера рассмотрим связь переходных характеристик САУ с вещественной частотной характеристикой  $P(\omega)$ .

Пусть на вход устойчивой САУ, передаточная функция которой  $W(p)$  не содержит полюсов в правой полуплоскости, подано единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$ . Из этого следует, что импульсная переходная функция  $w(t)$  удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости и может быть вычислена с помощью обратного преобразования Фурье по формуле

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega.$$

Если вещественная часть  $P(\omega)$  функции  $W(j\omega)$  — четная функция, а мнимая часть  $Q(\omega)$  — нечетная функция, то получим

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Так как при  $t < 0$  оригинал равен нулю и  $w(-t) = 0$ , то

$$\begin{aligned}
 w(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos(-\omega t) d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin(-\omega t) d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega = 0,
 \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

В окончательном виде оригинал запишется соотношением

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (5.7)$$

Поскольку переходная функция САУ является интегралом от импульсной переходной функции, т.е.  $h(t) = \int_0^t w(t) dt$ , то связь

между переходной характеристикой САУ и ее ВЧХ находится путем подстановки формулы (5.7) в соотношение между двумя временными характеристиками:

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^t \left[ \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega \right] dt. \quad (5.8)$$

Формула (5.8) представляет собой запись интеграла Фурье для четной функции в вещественной форме, поэтому, ввиду абсолютной интегрируемости функции  $w(t)$ , можно изменить порядок интегрирования:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t P(\omega) \left( \int_0^{\infty} \cos \omega t dt \right) d\omega.$$

После вычисления внутреннего интеграла окончательно получим:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.9)$$

Пользуясь формулой (5.9), можно непосредственно или приближенно [4, 5] по ВЧХ замкнутой САУ рассчитать ее переходную характеристику. Также можно составить предварительное приближенное суждение о качестве по виду ВЧХ. Различные виды ВЧХ представлены на рис. 5.5.

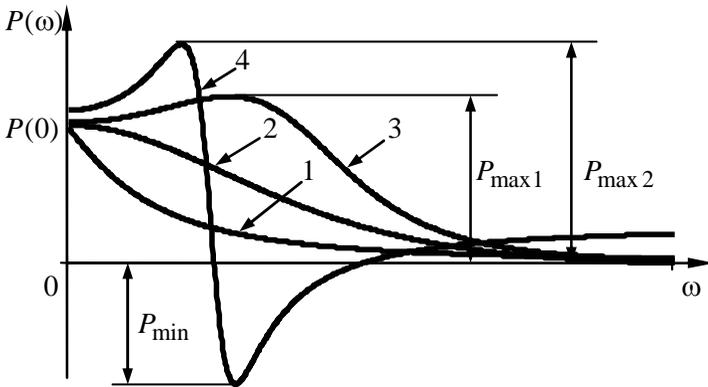


Рис. 5.5 — Типы вещественных частотных характеристик САУ

Основные положения оценки качества переходного процесса по ВЧХ сводятся к следующему.

1. Установившееся значение  $h_{уст} = h(\infty)$  переходной характеристики определяется начальным значением ВЧХ  $h_{уст} = P(0)$ . Начальное значение  $h_{нач} = h(0)$  определяется конечным значением ВЧХ  $h_{нач} = P(\infty)$ .

2. Двум ВЧХ, сходным по форме, но отличающимся масштабом по оси абсцисс в  $n$  раз, соответствуют переходные характеристики, сходные по форме, но отличающиеся масштабом по оси абсцисс в  $1/n$  раз. Двум ВЧХ, сходным по форме, но отличающимся масштабом по оси ординат в  $m$  раз, соответствуют переходные характеристики, также сходные по форме, но отличающиеся масштабом по оси ординат в  $m$  раз.

3. Разрыв непрерывности на ВЧХ свидетельствует о том, что система находится на границе устойчивости. Разрыву при

$\omega = 0$  соответствует аperiodическая граница устойчивости (наличие нулевого полюса в передаточной функции), а разрыву при  $\omega \neq 0$  — колебательная граница устойчивости (наличие чисто мнимых полюсов в передаточной функции).

4. Если ВЧХ непрерывна, положительна и имеет вид вогнутой кривой (кривая 1 на рис. 5.5), то переходная характеристика монотонна.

5. При положительной невозрастающей ВЧХ (кривая 2 на рис. 5.5) перерегулирование в системе не превышает 18 %, т.е.  $\sigma \leq 18$  %.

6. При наличии у положительной ВЧХ максимума (величина  $P_{\max 1}$  на кривой 3 рис. 5.5) перерегулирование в системе оценивается неравенством

$$\sigma \leq \frac{1,18P_{\max 1} - P(0)}{P(0)} \cdot 100 \% . \quad (5.10)$$

7. Если ВЧХ имеет положительный и отрицательный экстремумы (величины  $P_{\max 2}$  и  $P_{\min}$  для кривой 4 на рис. 5.5), то перерегулирование в системе оценивается неравенством

$$\sigma \leq \frac{1,18 \cdot P_{\max 2} + 0,277 \cdot |P_{\min}| - P(0)}{P(0)} \cdot 100 \% . \quad (5.11)$$

8. Острый пик на ВЧХ на угловой частоте  $\omega_k$  соответствует медленно затухающим колебаниям переходной характеристики с частотой, близкой к частоте  $\omega_k$ .

9. Если ВЧХ непрерывная, невозрастающая и по форме приближается к трапецеидальной (рис. 5.6), то время переходного процесса можно определить по соотношению

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t_{\text{пп}} < \frac{4\pi}{\omega_c} .$$

Частота  $\omega_c$  называется *существенной частотой*.

Следует отметить, что оценка перерегулирования по форме ВЧХ имеет весьма приблизительный характер. Реальное перерегулирование может быть в десятки раз меньше значений, рассчитанных по формулам (5.10), (5.11).

Колебательность переходной характеристики можно оценить по величине относительного максимума амплитудной частотной характеристики (АЧХ)  $A(\omega)$ , примерный вид которой представлен на рис. 5.7.

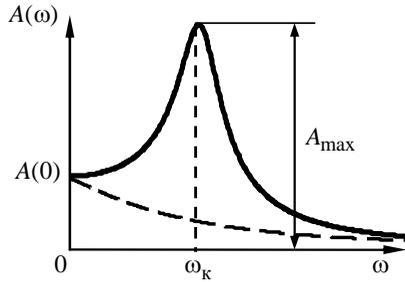
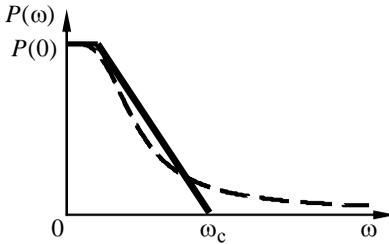


Рис. 5.6 — Трапецеидальная ВЧХ    Рис. 5.7 — Определение показателей качества по АЧХ

Величина относительного максимума называется *показателем колебательности*  $M$  и определяется соотношением

$$M = \frac{A_{\max}}{A(0)} = \frac{A(\omega_k)}{A(0)},$$

где  $\omega_k$  — частота собственных колебаний переходной характеристики замкнутой САУ.

При  $M < 1$  переходный процесс в САУ монотонный (пунктирная линия на рис. 5.7). Чем больше  $M$ , тем больше колебательность. При  $M \rightarrow \infty$  в системе имеют место незатухающие колебания.

Физический смысл этой оценки заключается в том, что она показывает максимально возможное отношение амплитуды выходной величины к амплитуде гармонического входного воздействия. Значение  $M$  примерно соответствует количеству колебаний, которые совершает переходная характеристика САУ до ее входа в область  $\pm 5\%$  от установившегося значения.

Показатель колебательности  $M$  также связан с запасами устойчивости. Считается, что система имеет допустимые запасы устойчивости, если  $1,5 < M < 1,7$ , хорошие запасы устойчивости,

если  $1,1 < M < 1,3$ . Оптимальным обычно считается, если  $1,2 < M < 1,5$ .

Вследствие предельной простоты построения ЛАЧХ удобно пользоваться именно этой характеристикой. Информацию здесь несет среднечастотная часть ЛАЧХ. На частоте среза  $\omega_{\text{ср}}$  наклон ЛАЧХ должен составлять минус 20 дБ/дек, а значение  $\omega_{\text{ср}}$  определяется временем переходного процесса  $t_{\text{пп}}$  и перерегулированием  $\sigma$ :

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{3k}{t_{\text{пп}}}.$$

Здесь значение  $k$  берется по графику, показанному на рис. 5.8, *а* в зависимости от величины перерегулирования  $\sigma$ . При этом частоты сопряжения слева и справа от частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$ , как показано на рис. 5.8, *б*, рассчитываются по формулам

$$\omega_{\text{с1}} \approx \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega_{\text{с2}}}, \quad \omega_{\text{с2}} \approx (2 \div 4)\omega_{\text{ср}}.$$

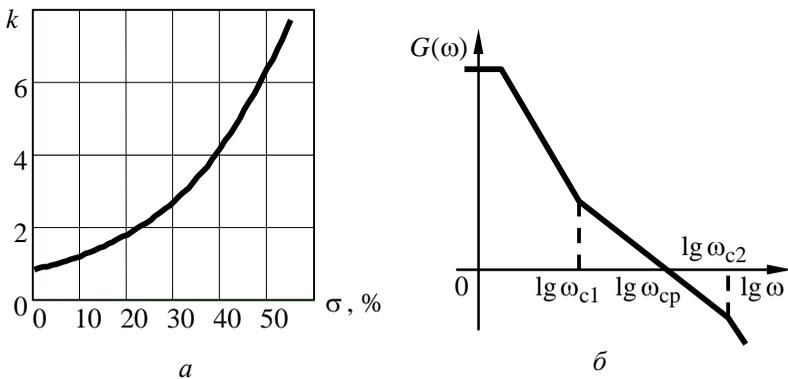


Рис. 5.8 — Оценка времени переходного процесса по ЛАЧХ

Величины наклонов ЛАЧХ слева от  $\omega_{\text{с1}}$  и справа от  $\omega_{\text{с2}}$  на качество переходного процесса почти не влияют.

Описанная методика оценки времени переходного процесса по ЛАЧХ применяется при синтезе последовательных корректирующих устройств, изложенном в разделе 6.

### 5.3.2 Корневые критерии оценки качества

Данная группа критериев основана на оценке качества переходного процесса по значениям полюсов и нулей передаточной функции САУ.

Заметим, что при изучении устойчивости нас интересовали лишь полюсы, здесь же необходимо учитывать и нули. Только в частном случае, когда нулей нет, качество переходного процесса определяется только полюсами. Начнем рассмотрение именно такого случая.

Переходный процесс в устойчивой системе распадается на затухающие и колебательные составляющие. Если найти длительность самой длительной составляющей и величину колебательности самой колебательной составляющей, то по ним можно оценить верхние пределы величин длительности и колебательности всего переходного процесса.

Время затухания отдельной составляющей определяется величиной

$$e^{\alpha_i t} = e^{-\frac{t}{T_i}},$$

где  $\alpha_i$  — вещественная часть  $i$ -го корня характеристического уравнения,  $T_i$  — постоянная времени затухания.

Можно считать, что длительность  $i$ -й составляющей переходного процесса  $t_{\text{пн},i} \approx 3T_i$ , то есть длительность составляющих переходного процесса обратно пропорциональна абсолютному значению действительной части корней характеристического уравнения.

Абсолютная величина  $|\alpha_i|_{\min}$  называется *степенью устойчивости* и обозначается  $\eta = |\alpha_i|_{\min}$ .

При этом время переходного процесса  $t_{\text{пн}}$  можно оценить неравенством

$$t_{\text{ин}} \leq \frac{3}{\eta}.$$

Термин «степень устойчивости» связан с тем, что геометрически  $\eta$  — это расстояние от мнимой оси, являющейся границей

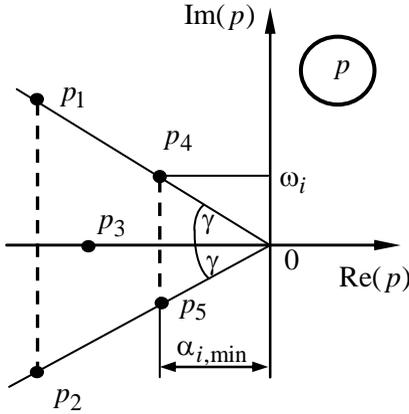


Рис. 5.9 — Понятие степени устойчивости и колебательности

устойчивости, до ближайшего корня (рис. 5.9).

Если  $\omega_i$  — мнимая часть  $i$ -го корня (рис. 5.9), то мерой колебательности считают отношение

$\frac{\omega_i}{|\alpha_i|}$ : чем оно

больше, тем больше колебательность составляющей переходной характеристики.

Наиболее колебательной является составляющая, у которой это отношение

максимально. Соответствующая величина обозначается

$\mu = \left| \frac{\omega_i}{\alpha_i} \right|_{\text{max}}$  и называется *степенью колебательности*. На

комплексной плоскости корень, определяющий наибольшую колебательность, соответствует наибольшему значению угла

$\gamma = \arctg \left| \frac{\omega_i}{\alpha_i} \right|_{\text{max}}$  между лучом, направленным через корень из

начала координат, и отрицательной вещественной полуосью (рис. 5.9).

Отметим также влияние на качество переходного процесса нулей передаточной функции. Положительные члены полинома числителя передаточной функции приведут к повышению колебательности и убыстрению переходного процесса, а отрицательные — к затягиванию переходного процесса.

### 5.3.3 Интегральные критерии качества

С помощью интегральных критериев качества можно одним числом оценить и величины отклонений, и время затухания переходного процесса. Для пояснения используем рис. 5.10.

Обозначим отклонение выходной величины от нового установившегося значения

$$\Delta y(t) = y(\infty) - y(t).$$

Для монотонного процесса интегральной оценкой может служить заштрихованная площадь над кривой переходного процесса (см. рис. 5.10), то есть

$$I_1 = \int_0^t \Delta y(t) dt.$$

Интеграл  $I_1$  называется *линейной интегральной оценкой*.

Однако такая оценка не годится для колебательного процесса, т.к. площади, расположенные ниже и выше прямой  $y(\infty)$ , будут иметь разные знаки. Поэтому по минимуму величины  $I_1$  наилучшим оказался бы процесс с незатухающими колебаниями. В связи с этим в общем случае принимают *квадратичную интегральную оценку качества* в виде

$$I_2 = \int_0^t [\Delta y(t)]^2 dt.$$

Целесообразность применения интегральных критериев заключается в том, что в литературе [4—8] имеются формулы, выражающие  $I_2$  (или другие интегральные оценки) непосредственно через коэффициенты дифференциального уравнения САУ.

Интегральные критерии качества используются для определения оптимальных значений варьируемых параметров по минимуму значения соответствующей интегральной оценки.

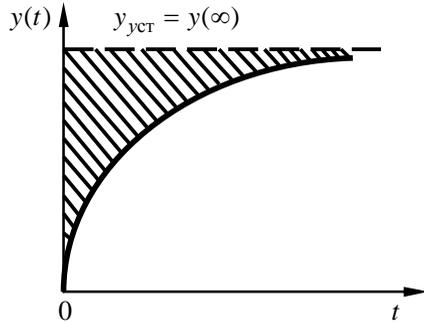


Рис. 5.10 — Монотонная переходная характеристика

## 6 КОРРЕКЦИЯ САУ

### 6.1 Понятие коррекции. Способы коррекции САУ

Для того чтобы добиться желаемых показателей качества процессов управления, т.е. требуемой точности и качества переходных процессов, есть два пути. Первый состоит в том, чтобы изменить заданные параметры системы, поскольку при этом изменятся коэффициенты характеристического уравнения и, следовательно, частотные и временные характеристики. Если при таком подходе невозможно добиться желаемых результатов, то идут другим путем — САУ подвергают коррекции, т.е. вводят в нее дополнительные звенья, которые называют *корректирующими устройствами*.

Различают несколько способов коррекции САУ:

- последовательная коррекция;
- параллельная коррекция;
- комбинированная коррекция;
- коррекция по внешнему воздействию.

При **последовательной коррекции** корректирующее устройство с передаточной функцией  $W_k(p)$  либо вводят последовательно в контур регулирования, либо подключают параллельно одному из звеньев нескорректированной САУ.

Оба варианта включения корректирующего устройства показаны на рис. 6.1. Нескорректированная система представлена звеньями с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$ , которые охвачены отрицательной обратной связью с передаточной функцией  $W_{oc}(p)$ . В первом случае (рис. 6.1, а) звено  $W_k(p)$  включено сразу на выходе сумматора, а во втором (рис. 6.1, б) подсоединено параллельно звену с передаточной функцией  $W_1(p)$ .

Последовательная коррекция, особенно в варианте, представленном на рис. 6.1, а, является наиболее распространенной. Это определяется простотой ее реализации и наглядностью при определении передаточной функции корректирующего устройства.

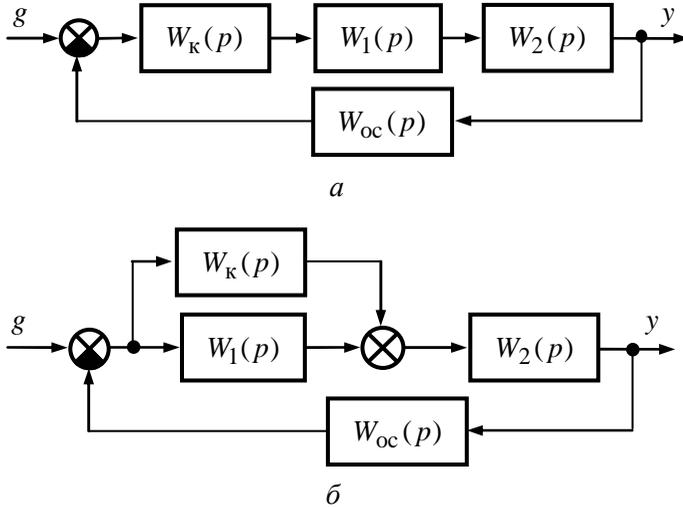


Рис. 6.1 — Варианты последовательной коррекции

Корректирующие устройства, включаемые по схеме рис.6.1, а, называют *регуляторами*.

На практике применяются следующие регуляторы:

**Пропорциональный (П) регулятор.** Его передаточная функция имеет вид

$$W_{\text{П}}(p) = k_{\text{П}},$$

т.е. П-регулятор представляет собой пропорциональное звено и служит для изменения коэффициента передачи и обеспечения требуемой статической точности САУ.

**Интегральный (И) регулятор.** Он является интегрирующим звеном с передаточной функцией

$$W_{\text{И}}(p) = \frac{k_{\text{И}}}{p}$$

и позволяет превратить статическую САУ в астатическую.

**Фильтр (Ф).** Представляет собой в общем случае инерционное форсирующее звено с единичным коэффициентом передачи и передаточной функцией

$$W_{\Phi}(p) = \frac{\tau_{\Phi} p + 1}{T_{\Phi} p + 1}.$$

В ряде случаев постоянная времени  $\tau_{\Phi}$  может равняться нулю.

Фильтр служит для компенсации некоторых постоянных времени нескорректированной САУ.

### **Пропорционально-дифференцирующий (ПД) регулятор.**

Образуется в результате параллельного соединения пропорционального  $W_{\text{п}}(p) = k_{\text{п}}$  и дифференцирующего  $W_{\text{д}}(p) = k_{\text{д}} p$  звеньев, т.е. его передаточная функция определяется выражением

$$W_{\text{ПД}}(p) = W_{\text{п}}(p) + W_{\text{д}}(p) = k_{\text{п}} + k_{\text{д}} p = k_{\text{п}} \left( \frac{k_{\text{д}}}{k_{\text{п}}} p + 1 \right) = k_{\text{ПД}} (\tau_{\text{ПД}} p + 1).$$

Таким образом, ПД-регулятор является форсирующим звеном и служит для повышения устойчивости САУ или компенсирует одну из ее постоянных времени.

### **Пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор.**

Образуется в результате параллельного соединения пропорционального  $W_{\text{п}}(p) = k_{\text{п}}$  и интегрирующего  $W_{\text{и}}(p) = \frac{k_{\text{и}}}{p}$  звеньев, его передаточная функция определяется соотношением

$$\begin{aligned} W_{\text{ПИ}}(p) &= W_{\text{п}}(p) + W_{\text{и}}(p) = k_{\text{п}} + \frac{k_{\text{и}}}{p} = \frac{k_{\text{п}}}{p} \left( \frac{k_{\text{п}}}{k_{\text{и}}} p + 1 \right) = \\ &= \frac{k_{\text{ПИ}} (\tau_{\text{ПИ}} p + 1)}{p}, \end{aligned}$$

где постоянная времени ПИ-регулятора  $\tau_{\text{ПИ}} = \frac{k_{\text{п}}}{k_{\text{и}}}$ .

ПИ-регулятор является изодромным звеном, позволяет повысить порядок астатизма САУ одновременно с повышением ее устойчивости (см. подраздел 5.1).

**Пропорционально-интегро-дифференцирующий (ПИД) регулятор.** Образуется в результате параллельного соединения пропорционального  $W_{\Pi}(p) = k_{\Pi}$ , дифференцирующего  $W_{\text{д}}(p) = k_{\text{д}}p$  и интегрирующего  $W_{\text{и}}(p) = \frac{k_{\text{и}}}{p}$  звеньев, его передаточная функция выражается формулой

$$\begin{aligned} W_{\text{ПИД}}(p) &= W_{\Pi}(p) + W_{\text{д}}(p) + W_{\text{и}}(p) = k_{\Pi} + k_{\text{д}}p + \frac{k_{\text{и}}}{p} = \\ &= \frac{k_{\text{д}}p^2 + k_{\Pi}p + k_{\text{и}}}{p} = \frac{k_{\text{и}} \left( \frac{k_{\text{д}}}{k_{\text{и}}} p^2 + \frac{k_{\Pi}}{k_{\text{и}}} p + 1 \right)}{p} = \\ &= \frac{k_{\text{ПИД}} (\tau_1 p + 1) (\tau_2 p + 1)}{p}, \end{aligned}$$

где  $k_{\text{ПИД}} = k_{\text{и}}$ ,  $\tau_{1,2} = \frac{k_{\Pi}}{2k_{\text{и}}} \pm \sqrt{\frac{k_{\Pi}^2}{4k_{\text{и}}^2} - \frac{k_{\text{д}}}{k_{\text{и}}}}$ .

ПИД-регулятор также способствует увеличению порядка астатизма САУ с одновременным повышением ее устойчивости, при этом может произойти компенсация одной из постоянных времени нескорректированной САУ.

*Параллельная коррекция* осуществляется следующим образом: либо одно из звеньев нескорректированной САУ охватывается местной обратной связью (рис. 6.2, а), либо корректирующее устройство подключается параллельно главной обратной связи нескорректированной САУ (рис. 6.2, б).

Корректирующие обратные связи могут быть положительными и отрицательными, жесткими и гибкими. *Жесткие обратные связи* действуют как в статическом, так и в динамическом режимах работы САУ. Они могут осуществляться с помощью пропорционального, инерционного, форсирующего звеньев и их последовательного соединения. *Гибкие обратные связи* действуют только в динамическом режиме работы и реализуются посредством включения идеальных или реальных дифференцирующих звеньев.

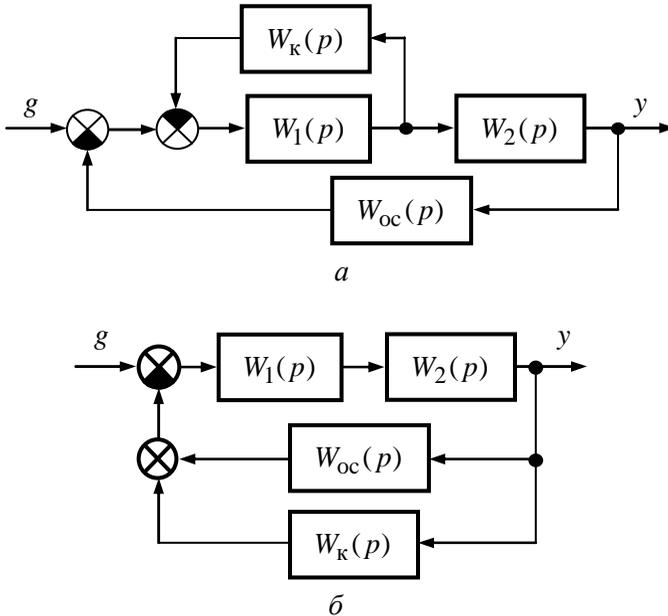


Рис. 6.2 — Варианты параллельной коррекции

Благодаря местным обратным связям изменяются параметры звеньев, входящих в структуру САУ, а иногда может измениться и тип звена, охваченного этой связью. Этот факт иллюстрируется приведенными ниже примерами.

*Пример 6.1*

Инерционное звено с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$  охвачено жесткой отрицательной обратной связью, причем  $W_{oc}(p) = k_{oc}$ . Определить, как изменятся параметры получившегося эквивалентного звена.

Определим передаточную функцию эквивалентного звена:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ЭКВ}}(p) &= \frac{W(p)}{1 + W(p)W_{\text{ос}}(p)} = \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1 + \frac{k}{Tp+1} \cdot k_{\text{ос}}} = \frac{k}{Tp+1 + kk_{\text{ос}}} = \\
 &= \frac{1}{1 + kk_{\text{ос}}} \cdot \frac{k}{\frac{T}{1 + kk_{\text{ос}}} p + 1} = \frac{k_{\text{ЭКВ}}}{T_{\text{ЭКВ}} p + 1}, \\
 k_{\text{ЭКВ}} &= \frac{k}{1 + kk_{\text{ос}}}, \quad T_{\text{ЭКВ}} = \frac{T}{1 + kk_{\text{ос}}},
 \end{aligned}$$

т.е. звено осталось инерционным, а его коэффициент передачи и постоянная времени уменьшились в  $1 + kk_{\text{ос}}$  раз. Следовательно, время переходного процесса и установившееся значение выходной величины также уменьшатся в  $1 + kk_{\text{ос}}$  раз.

### Пример 6.2

Инерционное звено с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$  охвачено жесткой положительной обратной связью,

причем  $W_{\text{ос}}(p) = k_{\text{ос}}$ . Определить, как изменятся передаточная функция и параметры получившегося эквивалентного звена.

Передаточная функция эквивалентного звена

$$W_{\text{ЭКВ}}(p) = \frac{W(p)}{1 - W(p)W_{\text{ос}}(p)} = \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1 - \frac{k}{Tp+1} \cdot k_{\text{ос}}} = \frac{k}{Tp+1 - kk_{\text{ос}}}.$$

Тип звена и его передаточная функция зависят от величины  $k_{\text{ос}}$ . При  $kk_{\text{ос}} < 1$  звено будет инерционным, а его коэффициент

передачи  $k_{\text{ЭКВ}} = \frac{k}{1 - kk_{\text{ос}}}$  и постоянная времени  $T_{\text{ЭКВ}} = \frac{T}{1 - kk_{\text{ос}}}$

увеличатся в  $1 - kk_{\text{ос}}$  раз. При  $kk_{\text{ос}} = 1$  звено станет интегри-

рующим,  $W_{\text{ЭКВ}}(p) = \frac{k_{\text{и}}}{p}$ ,  $k_{\text{и}} = \frac{k}{T}$ . При  $kk_{\text{ос}} > 1$  звено будет неус-

тойчивым неминимально-фазовым, его передаточная функция

$$W_{\text{ЭКВ}}(p) = \frac{k_{\text{ЭКВ}}}{T_{\text{ЭКВ}}p - 1}, \text{ при этом } k_{\text{ЭКВ}} = \frac{k}{kk_{\text{ОС}} - 1}, T_{\text{ЭКВ}} = \frac{T}{kk_{\text{ОС}} - 1}.$$

*Пример 6.3*

Инерционное звено с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$  охвачено жесткой отрицательной инерционной обратной связью, т.е.  $W_{\text{ОС}}(p) = \frac{k_{\text{ОС}}}{T_{\text{ОС}}p + 1}$ . Определить, как изменится

передаточная функция получившегося эквивалентного звена.

Передаточная функция эквивалентного звена

$$\begin{aligned} W_{\text{ЭКВ}}(p) &= \frac{W(p)}{1 + W(p)W_{\text{ОС}}(p)} = \frac{\frac{k}{Tp + 1}}{1 + \frac{k}{Tp + 1} \cdot \frac{k_{\text{ОС}}}{T_{\text{ОС}}p + 1}} = \\ &= \frac{k}{TT_{\text{ОС}}p^2 + (T + T_{\text{ОС}})p + 1 + kk_{\text{ОС}}} = \\ &= \frac{k}{1 + kk_{\text{ОС}}} \cdot \frac{1}{\frac{TT_{\text{ОС}}}{1 + kk_{\text{ОС}}}p^2 + \frac{T + T_{\text{ОС}}}{1 + kk_{\text{ОС}}}p + 1} = \frac{k_{\text{ЭКВ}}}{T_{\text{ЭКВ}}^2 p^2 + 2\xi T_{\text{ЭКВ}} p + 1}, \end{aligned}$$

где  $T_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{TT_{\text{ОС}}}{1 + kk_{\text{ОС}}}}$ ,  $\xi = \frac{T + T_{\text{ОС}}}{2} \sqrt{\frac{TT_{\text{ОС}}}{1 + kk_{\text{ОС}}}}$ . При  $\xi < 1$  звено будет

колебательным, а при  $\xi \geq 1$  — аperiodическим второго порядка.

При *комбинированной коррекции* используется как последовательная, так и параллельная коррекция.

Основной принцип автоматического управления состоит в формировании управляющего сигнала по величине рассогласования  $\varepsilon(t) = g(t) - x_{\text{ОС}}(t)$ . Если производится *коррекция по внешнему воздействию*, то реализуется *комбинированное управление* — по рассогласованию и по внешнему воздействию.

Путем введения коррекции по внешнему воздействию при определенных условиях удастся сводить величину установившейся ошибки к нулю при любой форме этого внешнего воздействия. Это свойство называется *инвариантностью* системы по отношению к данному внешнему воздействию.

Коррекция может производиться по отношению как к задающему, так и к возмущающему воздействию. Рассмотрим вариант введения корректирующего устройства по возмущающему воздействию.

Пусть задана система, охваченная единичной отрицательной обратной связью (рис. 6.3, а). Ее передаточная функция по возмущающему воздействию будет иметь вид:

$$W_{\text{зфнс}}(p) = \frac{W_{\text{рфнс}}(p)}{1 + W_{\text{пц}}(p)} = \frac{W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$

Введем корректирующее устройство так, как показано на рис. 6.3, б. Передаточная функция скорректированной САУ по возмущающему воздействию в этом случае будет представлена выражением

$$W_{\text{зфск}}(p) = \frac{W_2(p) \cdot [W_3(p) - W_k(p) \cdot W_1(p)]}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}. \quad (6.1)$$

Поскольку влияние возмущающего воздействия нужно уничтожить, необходимо принять  $W_{\text{зфск}}(p)$  равным нулю. Это возможно только, если в формуле (6.1) принять равным нулю выражение, расположенное в квадратных скобках. Тогда условие полной инвариантности системы по отношению к возмущающему воздействию будет иметь вид

$$W_k(p) = \frac{W_3(p)}{W_1(p)}. \quad (6.2)$$

Выполнение условия (6.1) иногда вызывает на практике существенные трудности из-за зачастую сложной технической задачи — измерения возмущающего воздействия и подачи его на вход системы, поэтому можно ограничиться частичной инвариантностью.

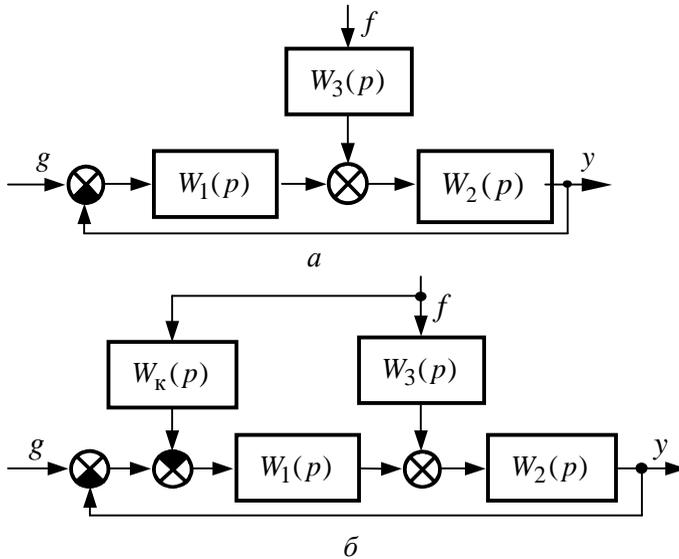


Рис. 6.3 — Нескорректированная (а) и скорректированная (б) системы

Рассмотренный способ коррекции, существенно повышая точность САУ, почти не влияет на качество переходных процессов. Это связано с тем, что знаменатель передаточной функции скорректированной системы остается таким же, как и у нескорректированной. Это выгодно отличает данный подход к повышению точности САУ от других вариантов, в которых почти всегда повышение точности сопровождается ухудшением ее динамических характеристик.

Предметом более подробного рассмотрения будет последовательная коррекция САУ.

## 6.2 Синтез последовательных корректирующих устройств

При введении корректирующего устройства последовательно в контур регулирования (рис. 6.1, а) его передаточная функ-

ция  $W_k(p)$  умножается на передаточную функцию нескорректированной САУ  $W_{н.с}(p)$ , т.е.

$$W_{ж}(p) = W_k(p)W_{н.с}(p),$$

где  $W_{ж}(p)$  — передаточная функция разомкнутой цепи скорректированной (желаемой) системы,  $W_{н.с}(p)$  — передаточная функция разомкнутой цепи нескорректированной САУ.

Поскольку логарифмические частотные характеристики последовательно соединенных звеньев складываются

$$G_{ж}(\omega) = G_k(\omega) + G_{н.с}(\omega),$$

то синтез последовательного корректирующего устройства наиболее просто провести по асимптотическим ЛАЧХ. В соответствии с этим методом ЛАЧХ корректирующего устройства

$$G_k(\omega) = G_{ж}(\omega) - G_{н.с}(\omega). \quad (6.3)$$

Зная желаемую ЛАЧХ  $G_{ж}(\omega)$ , по формуле (6.3) можно построить ЛАЧХ корректирующего устройства  $G_k(\omega)$  и затем, ориентируясь на частоты сопряжения и наклоны этой ЛАЧХ, синтезировать ее передаточную функцию на основе минимально-фазовых звеньев первого порядка.

Желаемая ЛАЧХ может быть построена на основе номограмм Солодовникова [5]. При этом выделяются три частотные области: низкочастотная, среднечастотная и высокочастотная.

Низкочастотная область желаемой ЛАЧХ расположена в окрестности оси ординат, она определяет точностные показатели САУ и формируется, исходя из заданной статической точности (для статических САУ) или коэффициентов ошибок [4—6] (для астатических САУ). Высокочастотная область расположена выше частоты среза и характеризует подавление системой высокочастотных помех.

Среднечастотная часть ЛАЧХ расположена в области частоты среза и определяет основные показатели качества работы САУ в динамическом режиме. Доказано, [4, 5] что если ЛАЧХ проходит через частоту среза с наклоном минус 20 дБ/дек, то система в замкнутом состоянии будет иметь наименьшую колебательность и наилучшие показатели качества.

Одним из подходов к построению желаемой ЛАЧХ является решение этой задачи с помощью номограмм Солодовникова, приведенных на рис. 6.4. Они представляют собой зависимости перегулирования  $\sigma$ , запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi$ , параметров  $\lambda$  и  $L_g$  от максимума вещественной частотной характеристики  $P_{\max}$ .

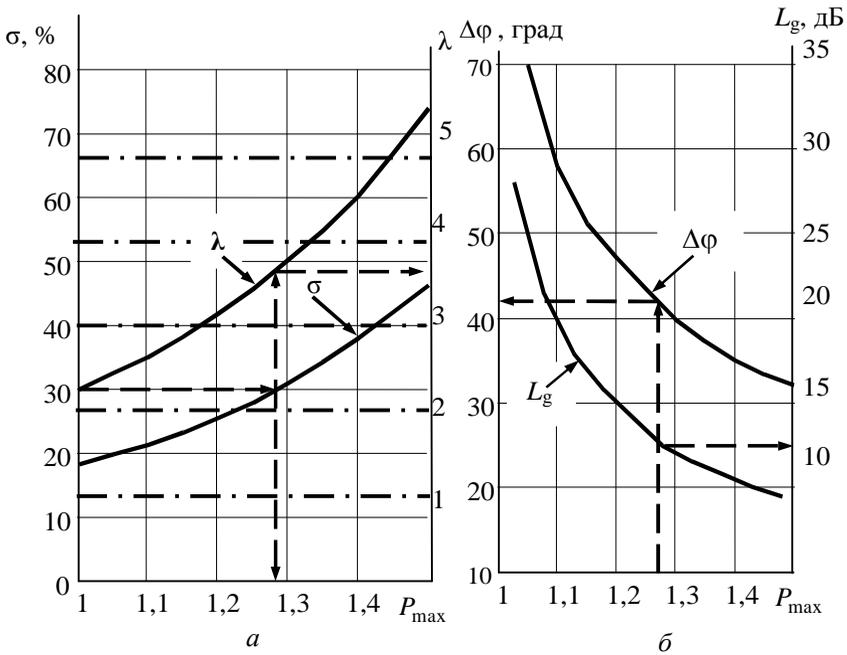


Рис. 6.4 — Номограммы Солодовникова

При известных значениях перегулирования  $\sigma$  и времени переходного процесса  $t_{\text{пп}}$  величина  $\sigma$  отмечается на графике  $\sigma = f_1(P_{\max})$  и по нему определяется значение  $P_{\max}$ , а затем из графика  $\lambda = f_2(P_{\max})$  находится величина параметра  $\lambda$ . Этот путь для  $\sigma = 30\%$  показан пунктирной линией со стрелками на рис. 6.4, а, согласно таким построениям получают значения

$P_{\max} \approx 1,28$ ,  $\lambda \approx 3,6$ . Тогда частота среза, через которую желаемая ЛАЧХ должна пройти с наклоном  $-20$  дБ/дек, определится из соотношения

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{\lambda \cdot \pi}{t_{\text{пп}}}. \quad (6.4)$$

Далее для полученной величины  $P_{\max}$  по кривым  $L_g = f_3(P_{\max})$  и  $\Delta\varphi = f_4(P_{\max})$ , приведенным на рис. 6.4, б, определяются значения параметра  $L_g$  и запаса устойчивости  $\Delta\varphi$ , если информация о нем необходима. Этот путь для  $\sigma = 30$  % также отражен пунктирной линией со стрелками и, согласно нему, получаются значения  $L_g \approx 12,5$  дБ,  $\Delta\varphi \approx 42$  градуса.

Затем можно приступить к построению желаемой ЛАЧХ и ЛАЧХ корректирующего устройства. Строится ЛАЧХ нескорректированной САУ  $G_{\text{н.с}}(\omega)$ , на ось  $\lg \omega$  в логарифмическом масштабе наносится рассчитанная по формуле (6.4) частота среза  $\omega_{\text{ср}}$  и прямая, пересекающая ось ординат на уровне  $L_g$  (рис. 6.5). Через частоту среза проводится прямая, проходящая с наклоном  $-20$  дБ/дек. В точке пересечения этой прямой и уровня  $L_g$  определяется частота  $\omega_0$  и отрезок длиной  $(\omega_0, \omega_{\text{ср}})$  откладывается симметрично относительно частоты среза справа от нее до точки  $\omega_{01}$ . На интервале  $\omega_{\text{ср}} < \omega < \omega_{01}$  произвольно выбираются две частоты  $\omega_4$  и  $\omega_5$ , на которых желаемая ЛАЧХ принимает наклоны  $-40$  дБ/дек и  $-60$  дБ/дек соответственно.

Если статическая ошибка нескорректированной САУ удовлетворяет заданной точности, то низкочастотный участок желаемой ЛАЧХ как удобно стыкуют с ЛАЧХ нескорректированной САУ. В частности, на рис. 6.5 эта стыковка произведена на уровне  $G_0$  на частоте  $\omega_6$ , но может быть произведена в любом другом месте при  $\omega < \omega_0$ .

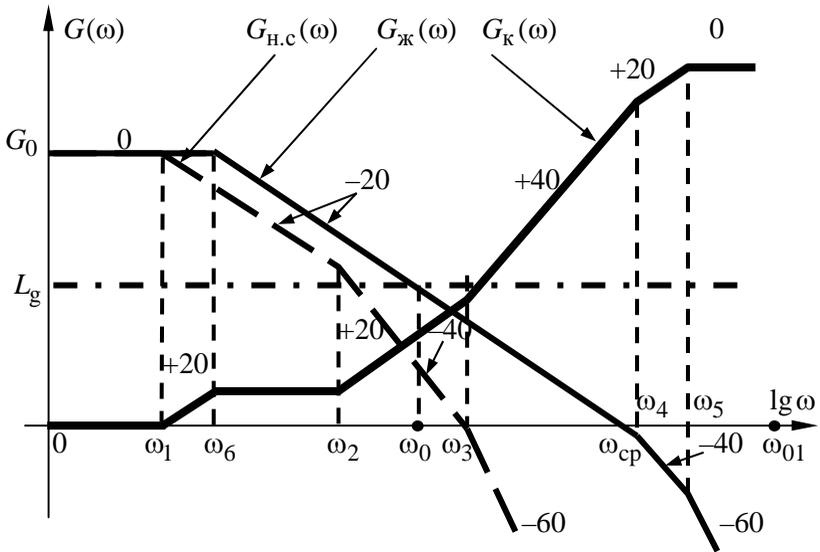


Рис. 6.5 — Построение желаемой ЛАЧХ и ЛАЧХ корректирующего устройства

ЛАЧХ корректирующего устройства  $G_k(\omega)$  получается путем графического вычитания ЛАЧХ нескорректированной системы  $G_{н.с.}(\omega)$  из желаемой ЛАЧХ  $G_{ж}(\omega)$ . По наклонам  $G_k(\omega)$  легко видеть, что корректирующее устройство состоит из трех форсирующих звеньев с постоянными времени  $\tau_{к1} = \frac{1}{\omega_1}$ ,

$\tau_{к2} = \frac{1}{\omega_2}$ ,  $\tau_{к3} = \frac{1}{\omega_3}$  и трех инерционных звеньев с постоянными

времени  $T_{к1} = \frac{1}{\omega_6}$ ,  $T_{к2} = \frac{1}{\omega_4}$  и  $T_{к3} = \frac{1}{\omega_5}$ , т.е. представляет собой

трехзвенный фильтр с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{(\tau_{к1}p + 1)(\tau_{к2}p + 1)(\tau_{к3}p + 1)}{(T_{к1}p + 1)(T_{к2}p + 1)(T_{к3}p + 1)}.$$

Поскольку нескорректированная САУ состоит из трех инерционных звеньев с постоянными времени  $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$ ,  $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$ ,  $T_3 = \frac{1}{\omega_3}$  с общим коэффициентом передачи  $K_p = 10^{20}$  (это видно по ее ЛАЧХ), то  $\tau_{k1} = T_1$ ,  $\tau_{k2} = T_2$ ,  $\tau_{k3} = T_3$  и при введении корректирующего звена последовательно в нескорректированную САУ происходит сокращение или, как говорят, компенсация инерционных звеньев нескорректированной системы:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ж}}(p) &= W_{\text{к}}(p) \cdot W_{\text{н.с}}(p) = \\
 &= \frac{(\tau_{k1}p + 1)(\tau_{k2}p + 1)(\tau_{k3}p + 1)}{(T_{k1}p + 1)(T_{k2}p + 1)(T_{k3}p + 1)} \cdot \frac{K_p}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1)} = \quad (6.5) \\
 &= \frac{K_p}{(T_{k1}p + 1)(T_{k2}p + 1)(T_{k3}p + 1)},
 \end{aligned}$$

а поскольку  $T_{k1} < T_1$ ,  $T_{k2} < T_2$ ,  $T_{k3} < T_3$ , то в скорректированной системе следует ожидать существенного улучшения показателей качества.

Далее по выражению (6.5) находится передаточная функция замкнутой скорректированной САУ, рассчитываются показатели качества и, если перерегулирование превышает заданное значение, увеличиваются частоты  $\omega_4$ ,  $\omega_5$  и пересчет переходной характеристики проводится заново до получения перерегулирования, близкого к заданному. Если это условие выполнено, то, как правило, время переходного процесса меньше заданного, т.е. требование к быстродействию САУ выполняется автоматически.

Рассмотренная методика синтеза последовательных корректирующих устройств дает хорошие результаты только при безынерционных и малоинерционных обратных связях. Если обратная связь системы имеет повышенную инерционность, т.е. ее постоянная времени  $T_{\text{ос}} \geq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}}$ , то переходный процесс, за счет

форсирующего действия такой связи, сопровождается повышенным перерегулированием и настройка САУ на заданное зна-

чение  $\sigma$  крайне затруднительна. В этом случае систему настраивают только на заданное время переходного процесса.

Применение описанного варианта синтеза последовательного корректирующего устройства особенно эффективно в расчетах с использованием персонального компьютера, например при работе в системе MathCAD.

### **6.3 Оптимальные характеристики САУ. Настройка систем на технический и симметричный оптимумы**

В ряде областей техники, например в многоконтурных системах электропривода с подчиненным регулированием, синтез последовательных корректирующих устройств осуществляется по-другому. Подчиненное регулирование предполагает независимость работы контуров системы. Так, например, в двухконтурной системе при работе внутреннего контура внешний отключен, и наоборот, если работает внешний контур, то отключается внутренний. Это возможно лишь в том случае, если каждый из контуров будет настроен на технический или симметричный оптимум.

Считается [9, 10], что система будет иметь наилучшие (оптимальные) переходные процессы, если передаточная функция ее разомкнутой цепи будет иметь вид:

$$W_{\text{рц,ТО}}(p) = \frac{1}{2T_{\mu} p(T_{\mu} p + 1)}, \quad (6.6)$$

где  $T_{\mu}$  — эквивалентная некомпенсируемая постоянная времени САУ.

Если для САУ имеет место (6.6), то говорят, что она настроена на *технический оптимум (ТО)*.

Известно [9, 10], что перерегулирование в САУ, для которой имеет место равенство (6.6), не превышает 5 %. Тогда, согласно номограммам Солодовникова, время переходного процесса можно оценить по соотношению:

$$t_{\text{пп,ТО}} \approx \frac{2}{\omega_{\text{ср}}}.$$

На рис. 6.6 приведена ЛАЧХ для системы, настроенной на ТО. Так как частота среза  $\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2T_{\mu}}$ , то

$$t_{\text{пп,ТО}} \approx \frac{2}{\frac{1}{2T_{\mu}}} = 4T_{\mu}. \quad (6.7)$$

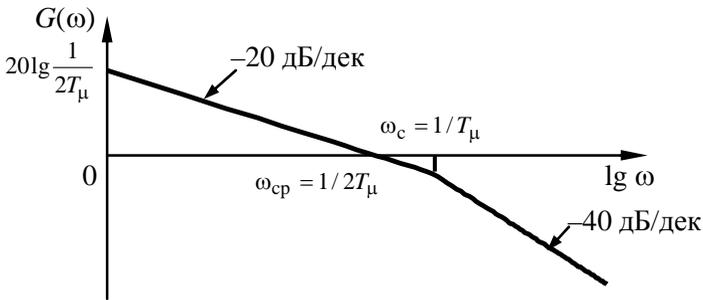


Рис. 6.6 — ЛАЧХ системы, настроенной на ТО

Из выражения (6.7) следует, что для САУ, настроенной на ТО,  $T_{\mu} \approx \frac{t_{\text{пп,ТО}}}{4}$ .

Если систему, настроенную на ТО, замкнуть инерционной обратной связью с коэффициентом передачи  $k_{\text{ос}}$  и постоянной времени  $T_{\text{ос}}$ , то ее передаточная функция будет иметь вид

$$W_{\text{зг,ТО}}(p) = \frac{1}{k_{\text{ос}}} \cdot \frac{T_{\text{ос}}p + 1}{2T_{\mu}p(T_{\mu}p + 1) + 1} = \frac{1}{k_{\text{ос}}} \cdot \frac{T_{\text{ос}}p + 1}{2T_{\mu}^2p^2 + 2T_{\mu}p + 1}.$$

На рис. 6.7 изображены переходные характеристики САУ, настроенной на ТО, при единичном входном воздействии,  $k_{\text{ос}} = 1$ ,  $T_{\mu} = 0,05$  с и различных значениях  $T_{\text{ос}}$ . При  $T_{\text{ос}} = T_{\mu}$  (кривая 1) перерегулирование составляет около 6,7 %, при

$T_{oc} = 0,5T_{\mu}$  (кривая 2) — около 4,9 %, при  $T_{oc} = 0$  (кривая 3) — около 4,3 %. При этом время переходного процесса  $t_{пп1} \approx 0,3$  с при  $T_{oc} = T_{\mu}$ ,  $t_{пп2} \approx 0,18$  с при  $T_{oc} = 0,5T_{\mu}$ ,  $t_{пп3} \approx 0,2$  с при  $T_{oc} = 0$ . Для сравнения здесь также приведена кривая 4, соответствующая аperiodическому переходному процессу с постоянной времени  $T_{\mu}$  (кривая 4), для нее  $t_{пп4} \approx t_{пп1} \approx 0,3$  с.

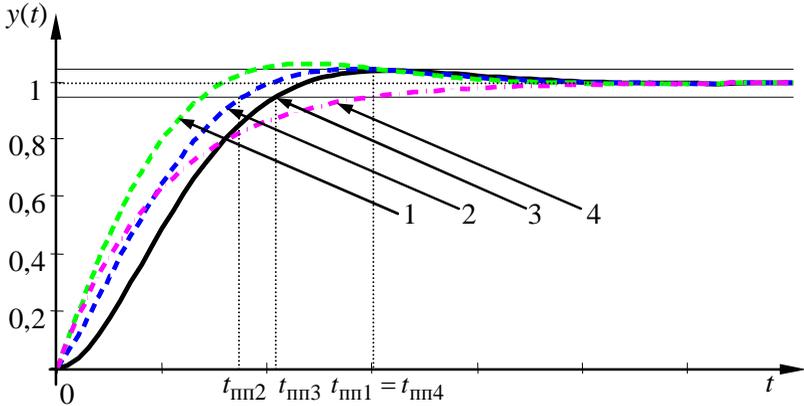


Рис. 6.7 — Переходные характеристики САУ, настроенной на ТО, при различной инерционности цепи ее обратной связи

Из анализа приведенных переходных характеристик можно сделать следующие выводы:

если  $\frac{T_{\mu}}{T_{oc}} > 2$ , то перерегулирование превышает 5 % и время

переходного процесса увеличивается примерно в 1,5 раза по сравнению с расчетным  $t_{пп} = 4T_{\mu} = 0,2$  с;

если  $\frac{T_{\mu}}{T_{oc}} < 2$ , то перерегулирование не превышает 5 % и

время переходного процесса уменьшается по сравнению с расчетным;

если  $T_{oc} = 0$ , то САУ *идеально настроена на ТО*, она эквивалентна колебательному звену с коэффициентом демпфирования

ния  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ , время переходного процесса совпадает с расчетным.

Поскольку отношение  $\frac{t_{\text{пн4}}}{t_{\text{пн2}}} \approx 1,5$ , иногда САУ, настроенную на ТО, приближенно эквивалентировать инерционным звеном, то есть

$$W_{\text{зг ТО}}(p) = \frac{1}{k_{\text{ос}}} \cdot \frac{1}{2T_{\mu}p(T_{\mu}p+1)+1} \approx \frac{1}{k_{\text{ос}}} \cdot \frac{1}{2T_{\mu}p+1}. \quad (6.8)$$

Этим приемом пользуются при настройке на ТО многоконтурных систем, в частности электромеханических систем (ЭМС).

Одна из задач настройки системы на ТО — сделать контур регулирования астатическим. Этого достичь не удастся, если в состав объекта регулирования входит интегрирующее звено. Тогда стремятся получить передаточную функцию системы, ЛАЧХ которой на частоте среза сохраняет свойственный для ТО наклон  $-20$  дБ/дек и меняет этот наклон до  $-40$  дБ/дек в области низкой  $\omega_{\text{н}}$  и высокой  $\omega_{\text{в}}$  частот пропускания, отличающихся от частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$  не менее чем в два раза.

Одним из вариантов таких САУ являются системы, настроенные на *симметричный оптимум* (СО) [9, 10]. При этом передаточная функция разомкнутой цепи для САУ, обеспечивающих характеристики СО, имеет вид:

$$W_{\text{рц СО}}(p) = \frac{4T_{\mu}p+1}{4T_{\mu}p} \cdot \frac{1}{2T_{\mu}p(T_{\mu}p+1)} = \frac{4T_{\mu}p+1}{4T_{\mu}p} \cdot W_{\text{рц ТО}}(p). \quad (6.9)$$

Известно [9, 10], что для системы, настроенной на СО, перерегулирование составляет около 43—45 %. Тогда, согласно номограммам Солодовникова, время переходного процесса можно оценить по соотношению:

$$t_{\text{пн СО}} \approx \frac{4}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (6.10)$$

На рис. 6.8 приведена ЛАЧХ для САУ, передаточная функция разомкнутой цепи которой представлена выражением (6.9).

Для нее  $\omega_H = \frac{1}{T_\mu}$ ,  $\omega_{cp} = \frac{1}{2T_\mu}$  и  $\omega_B = \frac{1}{4T_\mu}$ , поэтому, в соответствии с (6.10),

$$t_{ппСО} \approx \frac{4}{\frac{1}{2T_\mu}} = 8T_\mu,$$

отсюда

$$T_\mu \approx \frac{t_{пп,СО}}{8}. \quad (6.11)$$

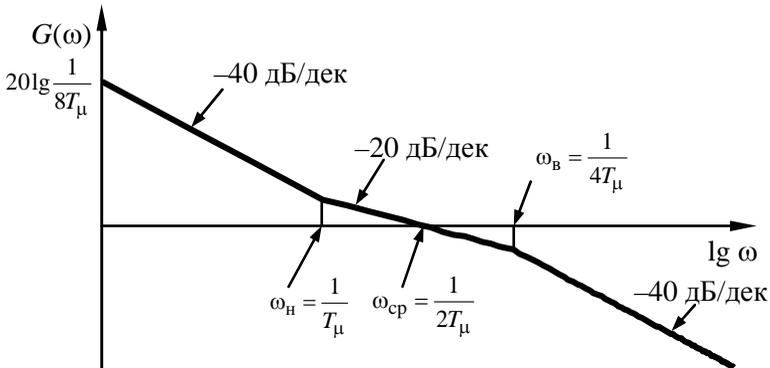


Рис. 6.8 — ЛАЧХ системы, настроенной на СО

Следует отметить, что запас устойчивости по амплитуде  $\Delta G$  для систем, настроенных на ТО или СО, равен бесконечности, т.к. их фазовые характеристики никогда не достигают значения  $-180^\circ$ . Запасы устойчивости по фазе соответственно равны  $\Delta\varphi_{ТО} \approx 63^\circ$  и  $\Delta\varphi_{СО} \approx 36^\circ$ .

Если САУ, настроенную на СО, замкнуть инерционной обратной связью с коэффициентом передачи  $k_{oc}$  и постоянной времени  $T_{oc}$ , то ее передаточная функция будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 W_{3g,CO}(p) &= \frac{\frac{4T_{\mu}p+1}{4T_{\mu}p} \cdot \frac{1}{2T_{\mu}p(T_{\mu}p+1)}}{1 + \frac{4T_{\mu}p+1}{4T_{\mu}p} \cdot \frac{1}{2T_{\mu}p(T_{\mu}p+1)} \cdot \frac{k_{oc}}{T_{oc}p+1}} = \\
 &= \frac{1}{k_{oc}} \cdot \frac{(4T_{\mu}p+1)(T_{oc}p+1)}{8T_{\mu}^3p^3 + 8T_{\mu}^2p^2 + 4T_{\mu}p+1} = \frac{1}{k_{oc}} \cdot \frac{(4T_{\mu}p+1)(T_{oc}p+1)}{a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p+1}.
 \end{aligned}$$

На рис. 6.9 приведены переходные характеристики САУ, настроенной на СО, при единичном входном воздействии,  $k_{oc} = 1$ ,  $T_{\mu} = 0,05$  с и различных значениях  $T_{oc}$ . При  $T_{oc} = T_{\mu}$  (кривая 3) перерегулирование составляет около 49,5 %, при  $T_{oc} = 0,5T_{\mu}$  (кривая 2) — около 45 %, при  $T_{oc} = 0$  (кривая 1) — около 43 %. Время переходного процесса  $t_{пн1} \approx t_{пн2} = 0,46$  с при  $T_{oc} = 0$  и при  $T_{oc} = 0,5T_{\mu}$ ,  $t_{пн3} \approx 0,66$  с при  $T_{oc} = T_{\mu}$ .

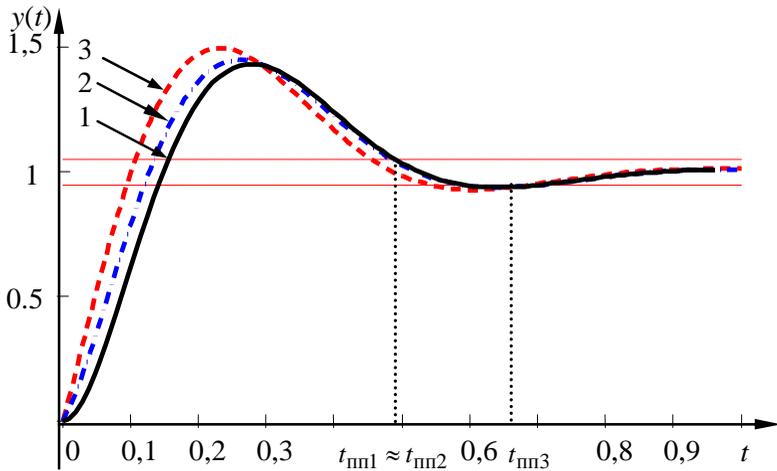


Рис. 6.9 — Переходные характеристики САУ, настроенной на СО, при различной инерционности цепи ее обратной связи

Таким образом, постоянная времени в цепи обратной связи САУ, настроенной на какой-либо оптимум, приводит к увеличению перерегулирования, и при  $T_{\mu} < 2T_{oc}$  существенно снижается быстродействие САУ.

Обеспечение оптимальных показателей качества регулирования в динамических режимах (настройка САУ на ТО или СО) достигается в результате структурно-параметрического синтеза корректирующих устройств. Рассмотрим решение этой задачи на конкретном примере.

#### Пример 6.4

Произвести настройку внутреннего контура (рис. 6.10) двухконтурной САУ на технический оптимум при следующих параметрах:  $W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$ ,  $W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}$ ,  $W_{oc}(p) = \frac{k_{oc}}{T_{oc} p + 1}$ , где  $k_1 = 40$ ,  $k_2 = 0.8$ ,  $k_{oc} = 0.2$ ,  $T_1 = 0,15$  с,  $T_2 = 0,01$  с,  $T_{oc} = 0,002$  с. При этом необходимо обеспечить время переходного процесса  $t_{\text{пн}} \leq 0,1$  с.

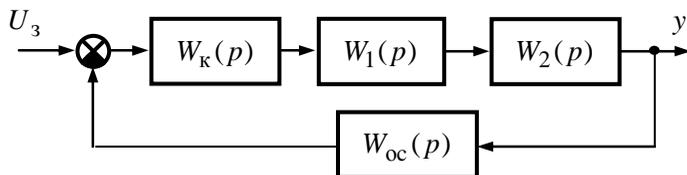


Рис. 6.10 — Структурная схема внутреннего контура двухконтурной САУ

Передаточная функция разомкнутой цепи нескорректированной системы будет равна

$$W_{\text{рц,нс}}(p) = W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p) = \frac{k_1 k_2 k_{oc}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{oc} p + 1)}.$$

Исходя из соотношения (6.7) определим значение эквивалентной некомпенсируемой постоянной времени  $T_{\mu}$  по формуле

$$T_{\mu} = \frac{t_{\text{ин}}}{4 \cdot 2^{m-1}},$$

где  $m$  — общее количество контуров регулирования.

При  $m = 2$  получим

$$T_{\mu} = \frac{0,1}{4 \cdot 2} = 0,0125 \text{ с.}$$

Таким образом,  $T_1 > T_{\mu} > T_2 > T_{\text{ос}}$ , и в качестве эквивалентной некомпенсируемой постоянной времени выбираем ближайшую к расчетному значению  $T_{\mu}$  меньшую постоянную времени нескорректированной САУ. Таковой в данном случае является постоянная времени  $T_2 = 0,01$  с, поэтому пусть  $T_{\mu} = T_2$ . Тогда для САУ, настроенной на ТО, в соответствии с (6.6) будем иметь

$$W_{\text{рц,ТО}}(p) = W_{\text{к}}(p) \cdot W_{\text{рц,нс}}(p),$$

$$\frac{1}{2T_2 p (T_2 p + 1)} = W_{\text{к}}(p) \cdot \frac{k_1 k_2 k_{\text{ос}}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{\text{ос}} p + 1)}.$$

Отсюда передаточная функция корректирующего устройства

$$W_{\text{к}}(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_{\text{ос}} p + 1)}{2k_1 k_2 k_{\text{ос}} T_2 p},$$

т.е. корректирующее устройство является ПИД-регулятором с передаточной функцией  $W_{\text{ПИД}}(p) = \frac{k_{\text{ПИД}} (\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{p}$ , у которого

$$k_{\text{ПИД}} = \frac{1}{2k_1 k_2 k_{\text{ос}} T_2}, \quad \tau_1 = T_1, \quad \tau_2 = T_{\text{ос}}.$$

Поскольку отношение  $\frac{T_{\text{ос}}}{T_{\mu}} = \frac{T_{\text{ос}}}{T_2} = \frac{0,002}{0,01} = 0,2$ , то переход-

ная характеристика замкнутой скорректированной САУ будет иметь вид, близкий к кривой 2 на рис. 6.9, перерегулирование не превысит 5 % и заданное быстродействие системы будет обеспечено.

Настройка САУ на симметричный оптимум производится аналогично. При этом для многоконтурной системы эквивалентная некомпенсируемая постоянная времени рассчитывается по формуле  $T_{\mu} = \frac{t_{\text{пп}}}{8 \cdot 2^{m-1}}$ , а корректирующее устройство будет более сложным и, как правило, состоит из нескольких последовательно соединенных типовых регуляторов (см. подраздел 6.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Магазинников Л.И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования: Учеб. пособие. — Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1999. — 205 с.

2. Математические основы теории автоматического регулирования: В 2 т. / Под ред. проф. Б.К. Чемоданова. — М.: Высшая школа, 1977.

3. Г. Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и  $Z$ -преобразования. — М.: ГИФМЛ, 1971. — 288 с.

4. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / Под ред. А.В. Нетушила. — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: Высшая школа, 1976. — 400 с.

5. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: Машиностроение, 1982. — 504 с.

6. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1989. — 304 с.

7. Теория автоматического управления: В 2 ч. / Н.А. Бабаков и др.; под ред. А.А. Воронова. — М.: Высшая школа, 1986. — Ч.1: Теория линейных систем автоматического управления. — 367 с.

8. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. — М.: Энергия, 1975. — 416 с.

9. Управление вентильными электроприводами постоянного тока / Е.Д. Лебедев, В.Е. Неймарк, М.Я. Пистарк, О.В. Служановский. — М.: Энергия, 1970. — 198 с.

10. Москаленко В. В. Теория электропривода. — М.: Высшая школа, 1991. — 392 с.

11. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 724 с.

12. Э. Джури. Импульсные системы автоматического регулирования. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 455 с.

13. Сигалов Г.Г., Мадорский Л.С. Основы теории дискретных систем управления. — Минск: «Вышэйш. школа», 1973. — 336 с.

14. Иванов В.А., Ющенко А.С. Теория дискретных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1983. — 336 с.

15. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Политехника, 2002. — 302 с.

16. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / С.В. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев и др.; под ред. В.Б. Яковлева. — 2-е изд., перераб. — М.: Высшая школа, 2005. — 567 с.

17. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. — СПб.: Питер, 2005. — 336 с. — (Серия «Учебное пособие»).