Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

Кафедра технологий электронного обучения (ТЭО)

В.В.Кручинин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по организации практических занятий и самостоятельной работы

Томск 2018

Кручинин В.В. Математические методы исследования алгоритмического и программного обеспечения. Учебно-методическое пособие по организации практических занятий и самостоятельной работы/ Томск: изд-во ТУСУР. 2018. - 47 с.

Излагаются математические методы исследования алгоритмического и программного обеспечения вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей. Рассматривается организация практических занятий и самостоятельной работы по разделам комбинаторики и теории производящих функций, математической теории алгоритмов и теории графов, теории синтаксического анализа, перевода и компиляции, теории массового обслуживания. Для аспирантов направления «Информатика и вычислительная техника» по профилю «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей».

Оглавление

1. Введение

Дисциплина «Математические методы для алгоритмического и программного обеспечения» является дисциплиной подготовки аспирантов направления «Информатика и вычислительная техника», по профилю «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей» Целью данной дисциплины является: формирование навыков разработки и исследования математического обеспечения вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей; повышение квалификации в области научных основ и применении математических моделей и методов для программного и алгоритмического обеспечения компьютерных сетей для решения фундаментальных научных и прикладных научно-технических проблем; получение знаний в области теории программирования, создания и исследования алгоритмов программных средств на основе различных подходов и технологий. Значение решения указанных проблем состоит в повышении эффективности и надежности процессов обработки и передачи данных и знаний в вычислительных машинах, комплексах и компьютерных сетях. Основные задачи дисциплины:
1) подготовка научных и научно-технических публикаций и отчетов НИР в области математического обеспечения вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей;
2) разработка подходов, методов, моделей, алгоритмов разработки и исследования программных комплексов;
3) планирование процессов и ресурсов для решения задач в области прикладной математики, информатики и системного программного обеспечения;
4) использование методов разработки программного обеспечения в научно-исследовательской, педагогической и производственно-технологической деятельности, включая разработку решений в области системного и прикладного программирования.

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

1. Знать основные понятия и математические модели и методы для исследования и разработки программного и алгоритмического обеспечения вы-

числительных машин и комплексов.

2. Уметь применять математические модели и методы исследования проблем алгоритмического и программного обеспечения; разрабатывать новые модели и методы анализа и разработки программного обеспечения компьютерных сетей; анализировать, получать знания с помощью самостоятельной работы с печатными источниками; применять полученные теоретические знания при решении практических задач, демонстрировать способность уметь работать самостоятельно, расширять свои математические знания и проводить математический анализ прикладных инженерных задач; разрабатывать модели, методы, алгоритмы, языки и программные инструменты для программного обеспечения компьютерных сетей; разрабатывать модели и методы создания программ и программных систем для параллельной и распределенной обработки данных.

3. Владеть способностью к участию в работах по использованию математического аппарата исследования алгоритмического и программного обеспечения компьютерных сетей, комплексным исследованием научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования; методами, алгоритмами и программными средствами для организации глобально распределенной обработки данных.

Формируемые компетенции:

ПК-3 – способность разработки и применения комплексов программ компьютерного моделирования физических процессов, технических объектов и систем управления.

ПК-4 – способность применять теоретические знания, умения и навыки использования средств компьютерного моделирования при исследовании технических объектов и систем управления.

2. Методическое указания по организации практических занятий

2.1 Практическое занятие №1 Комбинаторные задачи

2.1.1 Метод математической индукции

Метод математической индукции это метод, который доказывает что некоторое утверждение $S(n)$, зависящее от натурального аргумента n истино для всех наперед заданных n. Этот метод состоит из следующих шагов:
1. Доказывается, что $S(1)$ истинно.
2. Делается предположение, что $S(n)$ истинно.
3. Доказывается, что $S(n+1)$ истинно.

Пример, доказать утверждение

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство 1. Доказываем, что $S_1 = 1$

$$S_1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

утверждение для $n = 1$ истино.

2. Преполагаем что,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Доказываем, что

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Доказательство. По определению имеем

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).$$

Подставляем выражение для S_n

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2. Записать формулу для числа операций вывода в приведенном фрагменте программы

```
for i:=1 to n do
for j:=1 to i do print(i,j)
```

(Правильный ответ $\frac{n(n+1)}{2}$)

2.1.2 Множества

Множество одно из фундаментальных понятий математики. Его можно определить как собрание различных элементов. Например,
F={яблоко, груша, айва, абрикос, персик}
перечисленные фрукты объединены в множество F, которое имеет всего 5 элементов. Или
$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ Здесь представлено множество всех натуральных чисел, N имеет бесконечное число элементов. Кроме того, имеется так называемое пустое множество: $\oslash$ – множество, в котором нет ни одного элемента. Важно отметить что все элементы множества различны. Обычно множество обозначают большой латинской буквой, например, M. Элементы обозначают, как правило, малой буквой с индексом, например, a_j Принадлежность элемента множеству записывается значком $\in$, например, $a_j \in M$ - элемент a_j принадлежит множеству M.

Если некоторое множество A состоит из элементов другого множества B, причем A содержит не все элементы множества B, то о таком множестве говорят что оно является подмножеством множества B и записывают

$$A \subset B.$$

В тех случаях, когда множества могут совпадать, то записывают

$$A \subseteq B.$$

Способы задания множеств

Множества задаются тремя способами:
1) простым перечислением;

2) набором правил проверки принадлежности;
3) набором правил порождения.

Первый способ тривиален и годен для записи простых множеств. Для второго способа задается некоторое условие (в общем случае некоторый набор правил проверки принадлежности). Например,

$$N_1 = \{n \in N \mid n < 20\}$$

- множество целых чисел меньше 20.

$$N_o = \{n \in N \mid n - \text{нечетно}\}$$

В общем случае, для данного способа необходимо записать условие (предикат, автомат, алгоритм) $P(a)$, которое примет значение "истина для $a \in A$

$$A = \{a | P(a) - \text{истина}\}.$$

Данный способ задания множества удобен для теоретических исследований или некоторого описания множества. Для практических целей удобен третий способ задания множества. Этот способ основан на ипользовании правил построения (порождение, генерации) элемента множества. Например, для построения всех правильных выражений некоторого языка, например, программирования, используется грамматика. Другим примером такого задания множества, является с множество перестановок. Дадим определение комбинаторного множества. Это конечное множество с конструктивной процедурой порождения (генерации) элементов. Как правило, элементы таких множеств имеют некоторую структуру. В общем случае можно записать

$$A = \{a = G(i)\}_{i=1}^{n},$$

где $G(i)$- процедура порождения $i-$ элемента множества A.

2.1.3 Отображения

Отображения играют важную роль при доказательстве комбинаторных утверждений, в том числе и для анализа алгоритмов. Многие комбинаторные задачи решаются на основе доказательства взаимно-однозначного соответствия между множествами.

Определение 1.1 Отображение из множества X в множество Y это правило, сопоставляющее каждому элементу X какой-то элемент множества Y:
$x \in X$; $y \in Y$; $f : X \to Y$. $f(x) = y$.
Тогда y называется образом x. Соответственно, элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$, называется прообразом y.

Определение 2.1. Инъекцией (вложением) называется отображение, при котором образы различных элементов различны, т.е. из условия $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Определение 2.2. Сюръекцией называется отображение, при котором у любого элемента $y \in Y$ существует прообраз (иными словами, любой элемент $y \in Y$ является образом какого-то элемента $x \in X$, т.е. $f(X) = Y$).

Определение 2.3. Отображение называется биекцией (взаимно однозначным соответствием), если оно одновременно инъекция и сюръекция.

Определение 2.4. Обратным к отображению $f : X \to Y$ называется такое отображение $g : Y \to X$, что $g(f(x)) = x$, $\forall x?X$ и $f(g(y)) = y$, $\forall y \in Y$.

Пример №1

.

Доказать, что существует биекция между множеством строк состоящих из нулей и единиц длинной n и $P(S)$ множеством подмножеств. $S = \{s_i\}_{i=1}^{n}$ имеет мощность n.

Для доказательства определим функцию $f(a_1a_2\dots a_n) = p$, $p \in P(S)$, которая бинарной строке ставит в соответствие подмножество p, следующим образом: если $a_i = 1$, то соответствующий элемент s_i входит в множество p; если $a_i = 0$, то соответствующий элемент s_i не входит в множество p.

Докажем, что отображение f инъективно, т.е. если $a_1a_2\dots a_n \neq b_1b_2\dots b_n$ то $f(a_1a_2\dots a_n) \neq f(b_1b_2\dots b_n)$. Если $a_1a_2\dots a_n \neq b_1b_2\dots b_n$, то найдется такое i, что $a_i \neq b_i$, но тогда не совпадет присутсвие или отсутсвие элемента s_i в рассматриваемых подмножествах, откуда вытекает, что $f(a_1a_2\dots a_n) \neq f(b_1b_2\dots b_n)$.

Теперь докажем, что отображение f сюрьективно, т.е . для каждого элемента подмножества существует бинарная строка. Возьмем некоторое подмножество $p \in P(S)$, состоящее из k элементов $p = \{s_j\}_{j=1}^{k}$, построим бинарную строку a следующим образом: берем i элемент из множества S, если s_i имеется в подмножестве p, то $a_i = 1$, иначе $a_i = 0$. Проделывая эту процедуру для всех i получим бинарную строку. Таким образом, для любого подмножества существует бинарная строка и отображение f сюрьективно. Откуда вытекает что между множеством строк состоиящих из нулей и единиц длинной n и $P(S)$ множеством подмножеств существует биекция.

Пример №2

Используя биекцию определить число дорожек из точки $(0,0)$ в точку (n,m) на прямоугольной решетке, используя только шаги вверх и вправо.

Идея доказательства состоит в том, что данную проблему преобразуем в нечто, которое легче сосчитать. В данном случае используем кодирование дорожек, каждый шаг кодирукм буквами U (шаг вверх), и R (шаг вправо). Легко видеть, что разным дорожкам соответствуют разные строки, следовательно между множеством дорожек и строк существует инъекция. Каждой строке можно всегда поставить в соответствие дорожку, следовательно между множествами дорожек и строк существет сюръекция. Откуда между множествами дорожек и строк существует биекция. Это означает что число дорожек равно числу строк. Подсчитаем общее число строк. В каждой строке содержится ровно n букв R и m букв U. Общее число букв в строке будет равно $n+m$. Тогда чтобы разместить n букв R в строке существует

$$\binom{n+m}{n}$$

комбинаций. Таким образом, число дорожек между точками $(0,0)$ и (n,m) равно числу сочетаний из $n+m$ по n.

2.1.4 Задачи

Задача 1 Найдите число перестановок, в который число 1 предшествует числу 2.

Ответ: Половина всех пересановок, $\frac{n!}{2}$.

Задача 2 Найдите число перестановок, в который числа 1 и 2 не следуют друг за другом.

Ответ: $n! - 2(n-1)(n-2)! = (n-1)!(n-2)$.

Задача 3 Найдите число слов длины k в алфавите из n букв

1) в которых нет двух подряд одинаковых букв.

Решение: Первая буква может быть выбрана из n букв, вторая из $(n-1)$ букв, третья - из $(n-1)$, и т.д. Тогда общее число будет равно $n(n-1)^{k-1}$.

2) которые являются палиндромами.

Решение: Первые $\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$ букв образуют любое слово длиной $\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$. Таким образом имеется $n^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}$ палиндромов

Задача 4 Найдите число слов длины n в алфавите из $\{0,1\}$ имеет четное число единиц

Решение: Пусть w слово в алфавите $\{0,1\}$ длиной n. Рассмотрим первые $n-1$ букв этого слова. Первые $(n-1)$ букв w является сочетанием нулей и едениц и соответственно чило вариантов равно 2^{n-1}. откуда для слов у которых четное число единиц добавляем 0, а для нечетного числа едениц добавляем единицу. Тогда общее число слов w с четным числом единиц равно 2^{n-1}.

Задача 5. Найдите число подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ содержащее все нечетные числа.

Задача 6. Найдите число разбиений множества состоящее из n элементов на два непересекающичся подмножества.

Решение: Если порядок подмножеств не важен, то общее число разбиений равно $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Задача 7. Пусть дано множество S состоящее из n элементов. Найти число двух подмножеств, не обязательно разных, таких, что их объединение дает множество S. Порядок следования не важен.

Решение: Запишем $A \cup B = S$, это означает, что для каждого $x \in S$ имеется одно из трех утверждений $x \in A$, $x \notin B$ или $x \notin A$, $x \in B$ или $x \in A$, $x \in B$. Тогда, имеется $3n$ вариантов выбрать A и B. Принимая во внимание случаи $A = B$, и $A = B = S$ получим $\frac{(3^n?1)}{2} + 1$.

Задача 8. 25 девушек и 20 парней сидят за круглым столом. Сколько возможных вариантов, что у парня соседями будут девушки?

Задача 9 Имеется две паралледьные линии, на первой отмечено n точек, на второй - m. Сколько треугольников может быть построенино. Сколько четырехугольников?

Решение: $n\binom{m}{2} + m\binom{n}{2}$ $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$

Задача 10 Сколько двоичных $n \times m$ матриц попарно разными строками может быть записано.

Задача 11 Пусть даны множество U из n элементов и подмножество $A \subseteq U$ k элементов. Определить число подмножеств $B \subseteq U$ удовлетворяющих:

(a) $B \subset A$

(b) $B \supset A$

(c) $A \cap B = \oslash$

(d) $A \cap B \neq 0$

2.2 Практическое занятие №2. Задачи по теории алгоритмов

1. Написать программу МТ, которая аннулирует все слова в алфавите $\{a, b\}$, содержащие вхождение заданного непустого слова u. Указание: пусть $u =$

$u(1)\dots u(m)$; буквы слова u должны содержаться в программе машины в качестве параметров.

2. Написать схему нормального алгорифма Маркова (НАМ), обращающего любое слово в заданном алфавите V, т.е. перерабатывающего любое слово $w \in V^*$, в слово w^R.

3. Определим операцию $*$ склеивания слов следующим образом: $x = x(1)\dots x(k)$ и $y = y(1)\dots y(m)$ по общей букве: $x * y = x = x(1)\dots x(k-1)y(2)\dots y(m)$, если $x(k) = y(1)$, и xy иначе. Написать программу МТ, выполняющую операцию склеивания, т.е. перерабатывающую пару слов x и y в слово $x * y$.

4. Написать схему НАМ, который аннулирует входное слово тогда и только тогда, когда оно содержит не менее трех вхождений некоторого фиксированного непустого слова u.

5. Используя теоремы сочетания применительно к МТ, построить МТ, выполняющей умножение натуральных чисел, представленных словами в алфавите $V_0 = \{0, |\}$ (именно, натуральное число n записывается как слово $0||\dots|$ - с n палочками).

6. Используя теоремы сочетания, построить НАМ, аннулирующий все палиндромы в алфавите V. Указание: используйте схемы алгорифмов обращения и правого присоединения слова через разделитель).

7. Написать программу МТ, которая к произвольному слову в алфавите $\{a, b\}$ приписывает слева слово aba.

2.3 Практическое занятие №3. Задачи по теории алгоритмов

1. Написать программу МТ, которая удваивает любое входное слово в заданном алфавите.

2. Построить МТ, которая обращает любое входное слово в заданном алфавите. Указание: используйте программу МТ, удваивающей заданное слово, и сочетания МТ.

3. Написать схему НА, который входное слово x в некотором алфавите V перерабатывает в слово xRx.

4. Является ли алгорифмически разрешимым множество всех двойных слов, т.е. слов вида ww, в заданном алфавите V

5. Используя теоремы сочетания, построить МТ, которая проверяет делимость на 3 конструктивного натурального числа.

6. Построить МТ, которая вычисляет остаток от деления заданного конструктивного натурального числа на 5.

7. Написать программу МТ, которая сдвигает входное слово на заданное число k ячеек вправо, а в освободившиеся k первых после маркера начала ленты ячейки записывает специальный символ \$.

8. В виде НА реализовать алгоритм сложения натуральных чисел, заданных в двоичной системе счисления.

9. Написать схему НАМ, утраивающего заданное слово.

10. Реализовать в виде НАМ разрешающий алгоритм для множества правильных скобочных структур.

11. Написать программу для вычисления примитивно рекурсивных функций, используя базис Клини и операции примитивной рекурсии и суперпозиции. Программа должна уметь вычислять следующие функции:

- SUM(x,y) = x + y,
- MUL(x,y) = x*y,
- EXP (x,y) = x в степени y,
- TETR (x,y) - операция тетрации,
- FAC(x) = факториал x,
- PRED(x) = x - 1, x >0, 0 в противном случае,
- DIFF(x,y) = x - y, x > y, 0 в противном случае,
- ABS (x,y) = |x-y|,
- sg(x) = 1, x > 0, 0 в противном случае,
- REM(x,y) - остаток от деления x на y,
- MOD(x,y) - целая часть при делении x на y.

2.4 Практическое занятие №4. Ассимптотические методы решения реккурентных соотношений на основе основной теоремы о рекуррентных соотношениях

Найдем асимптотическое выражение $T_{DC}(n)$ для временной сложности алгоритма, работающего по обощенной схеме.

Теорема Для решения рекуррентного уравнения

$$T_{DC}(n) = a\,T_{DC}\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d),$$

где $a > 1$, $b > 1$, $d \geqslant 0$ будет верна следующая формула

$$T_{DC}(n) = \begin{cases} O(n^d), & d > \log_b a, \\ O(n^d \log n), & d = \log_b a, \\ O(n^{\log_b a}), & d < \log_b a. \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство

1. Считаем что n степень b

2. Дерево вызовов рекурсивного вызова содержит $\log_b n$ уровней. Каждый k- уровень содержит a^k подзазадач размером $\left(\frac{n}{b^k}\right)$
3. Число операций которое необходимо на этот уровнь равно

$$t_k = a^k \times O\left(\frac{n}{b^k}\right)^d = O(n^d)\left(\frac{a}{b^d}\right)^k$$

4.Последоваельность t_k является геометрической последовательность с отношением $\left(\frac{a}{b^d}\right)$, причем $t_0 = O(n^d)$, $t_{\log_b n} = O(n^{\log_b a})$
5. Оценка суммы геометрическрй прогресс зависит от отношения $\left(\frac{a}{b^d}\right)$ 6. Если отношение меньше 1, то сумму можно оценить через его первый член $O(n^d)$
7. Если отношение больше 1, то сумму можно оценить через его последний член $O(n^{\log_b a})$
8. Если отношение равно 1, то все $\log_b n$ члено в последовательности равны откуда сумма будет равна

$$O(n^d \log n)$$

Упражнения

Решить следующие рекуррентные уравнения:

1. $T(n) = T(n/2) + n^3$.

2. $T(n) = T(9n/10) + n$.

3. $T(n) = 7\,T(n/3) + n^2$.

4. $T(n) = 7\,T(n/2) + n^2$.

5. $T(n) = T(n-3) + n$.

6. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$.

7. $T(n) = 2\,T(n-1) + n^2$

2.5 Практическое занятие №5. Метод Акрра-Бази

Метод Акрра-Бази расширяет метод решения рекуррентных уравнений и основан на следующей теореме

Теорема Пусть дано рекуррентное соотношение

$$T(x) = \begin{cases} \Theta(1), & 1 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \sum_{i=1}^{k} a_i\, T(b_i\, x) + g(x), & x > x_0, \end{cases}$$

где
1. $x \geqslant 1$ действительное число.
2. x_0 константа, такая что $x_0 \geqslant 1/b_i$ и $x_0 \geqslant 1/(1-b_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant k$,
3. $a_i > 0$ - константа для $1 \leqslant i \leqslant k$.
4. $b_i \in [0,1]$ константа для $1 \leqslant i \leqslant k$.
5. $k \geqslant 1$ константа. 6. $g(x)$ – неотрицательная функция, удовлетворяющая условию полиномиального роста, т.е. имеются положительные константы c_1 и c_2 и выполняется условие

$$c_1\, g(x) \leqslant g(u) \leqslant c_2\, g(x),$$

для всех $x > x_0$ и $u \in [x\, b_i, x]$.
И дано p действительное число, для которого выполняется условие $\sum_{i=1}^{k} a\, b^p = 1$.
Тогда

$$T(x) = \Theta\left(x^p \left(1 + \int_1^x \frac{g(u)}{u^{p+1}} du\right)\right).$$

Рассмотрим пример

Пусть дано

$$T(x) = 2T(x/4) + 3T(x/6) + \Theta(x \log x),$$

$k = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_1 = 1/4$, $b_2 = 1/6$,
выполняются все условия для 1-6. Определяем константу p.

$$\sum_{i=1}^{k} a\, b^p = 2/4^p + 3/6^p = 1.$$

Откуда $p = 1$. Тогда

$$\int_1^x \frac{g(u)}{u^{p+1}} du = \int_1^x \frac{g(u)}{u^2} du = \frac{\log(x)^2}{2}.$$

$$T(x) = \Theta(x(1 + \frac{\log(x)^2}{2}) = T(x) = \Theta(x\ \log(x)^2).$$

Упражнения

Решить следующие рекуррентные уравнения:

1. $T(x) = 2T(x/2) + 8/9\, T(3x/4) + \Theta(x^2/\log x)$.

2. $T(x) = T(x/2) + \Theta(\log x)$.

3. $T(x) = 1/2T(x/2) + \Theta(1/x)$.

4. $T(x) = 4T(x/2) + \Theta(x)$.

2.6 Практическое занятие №6. Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций

Пусть заданы две функции $H(x) : N \to R$ и $G(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) : R \to R$. Тогда рекурентное соотношение строится по следующей схеме

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ H(n), & n \leqslant n_0, \\ G(T(n-1), T(n-2), \ldots, T(n-k), n), & n > n_0, \end{cases}$$

где $n \in N$, $n_0 \in N$ - некоторая константа.

Представленная схема вычисления $T(n)$ задает некоторую последовательность чисел $T(0), T(1), \ldots, T(n), \ldots$. Построим степенной ряд следующего вида:

$$T(x) = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \ldots + T(n)x^n + \ldots$$

В нашем случае, переменная x является формальной, а имеет значение $T(n)$. Тогда $T(x)$ является производщей функцией для последовательности $T(0), T(1), \ldots$ Найдем производящую функцию для последовательности $1, 1, \ldots, 1, \ldots$, зыпишем

$$A(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$A(x) = 1 + x(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots)$$

$$A(x) = 1 + x\, A(x).$$

$$A(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Теперь если продифференциируем $A(x)$ получим

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

если проинтегрируем $A(x)$, то получим

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n}x^n + \ldots$$

Дадим определение степени производящей функции

$$A(x)^k = \sum_{n\geqslant k} A(n,k)x^n.$$

Например, $A(x) = 1 + x$ на основе бинома Ньютона можно записать

$$A(x)^k = (1+x)^k = \sum_{n\geqslant 0} \binom{k}{n} x^n.$$

Степени производящих функций играют важнейшую роль в выполнении операций определения коэффициентов композиции производящих функций, обратной и взаимной производящей функций, решении ряда функциональных уравнений.

Для манипулирования коэффициентами производящих функций и их степеней введем операцию и извлечения коэффициентов. Пусть имеется $A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a(n)x^n$ и $A(x)^k = \sum_{n\geqslant 0} A(n,k)x^n$ тогда извлечение коэффициента при степени x^n записывается в виде

$$a(n) = [x^n]A(x),$$

а для степени

$$A(n,k) = [x^n]A(x)^k,$$

2.7 Практическое занятие №7. Получение явного выражения на основе композиции производящих функций

Пусть для некоторого рекуррентного соотношения получена производящая функции $T(x) = R(F(x))$, представленная в виде композиции производящих функций. Тогда

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n} F^{\Delta}(n,k)r(k), \tag{2.2}$$

где $F^{\Delta}(n,k) = [x^n]F(x)^k$, $r(k) = [x^k]R(x)$

2.7.1 Пример №1

Пусть имеется рекуррентное соотношение вида

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 2T(n-1) + T(n-2), & n > 0. \end{cases}$$

Тогда это соотношение можно представить в виде уравнения для производящей функции вида

$$T(x) = 1 + 2xT(x) + x^2T(x).$$

Откуда

$$T(x) = \frac{1}{1 - 2x - x^2}$$

Представим $T(x) = R(F(x))$ - композицией функций $R(x) = \frac{1}{1-x}$ и $F(x) = 2\,x + x^2$.

$$F(x)^k = \sum_{n \geqslant k} \binom{k}{n-k} 2^{2\,k-n}\,x^n.$$

Используя формулу (2.2) для композиции производящих функций получим явную формулу для $T(n)$

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n-k} 2^{2k-n}$$

2.7.2 Пример №2

Пусть имеется рекуррентное соотношение вида

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ T(n-1) + 3\,T(n-2) + 2\,T(n-3), & n > 0. \end{cases}$$

Тогда это соотношение можно представить в виде уравнения для производящей функции вида

$$T(x) = 1 + x\,T(x) + 3\,x^2\,T(x) + 2\,x^3\,T(x).$$

Откуда

$$T(x) = \frac{1}{1 - x - 3\,x^2 - 2\,x^3}.$$

Представим $T(x) = R(F(x))$ - композицией функций $R(x) = \frac{1}{1-x}$ и $F(x) = x + 3x^2 + 2x^3$. Используя таблицу коэффициентов степеней производящих функций получим

$$F(x)^k = \sum_{n \geqslant k} \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{n-k-j} \binom{k}{j} 3^{-n+k+2\,j}\, 2^{n-k-j}\, x^n.$$

Используя формулу (2.2) для композиции производящих функций получим явную формулу для $T(n)$

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{n-k-j} \binom{k}{j} 3^{-n+k+2\,j}\, 2^{n-k-j}.$$

Задание

Решить следующие рекуррентные уравнения:

1	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + 3T(n-2), & n > 0. \end{cases}$
2	$T(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ T(n-1) + 2T(n-2), & n > 0. \end{cases}$
3	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 3/4T(n-1) + 5T(n-2), & n > 0. \end{cases}$
4	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2T(n-1) + 3\,T(n-2) + T(n-3), & n > 0. \end{cases}$
5	$T(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 3T(n-1) + 2\,T(n-2) + 2T(n-3), & n > 0. \end{cases}$
6	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 3/2T(n-1) + 2\,T(n-2) + 1/2T(n-3), & n > 0. \end{cases}$
7	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + 2\,T(n-2) + T(n-3) + T(n-4), & n > 0. \end{cases}$
8	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2\,T(n-1) + 3\,T(n-2) + 4\,T(n-3) + T(n-4), & n > 0. \end{cases}$
9	$T(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 2\,T(n-1) + 3\,T(n-2) + 4\,T(n-3) + T(n-4), & n > 0. \end{cases}$
10	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2\,T(n-1) + 3\,T(n-2) + 4\,T(n-3) + 1/2\,T(n-4), & n > 0. \end{cases}$

2.8 Практическое занятие №8. Решение рекурентных уравнений на основе уравнений вида $T(x) = x\,R(T(x))$

Рассмотрим способы решения уравнений вида $T(x) = x\,R(T(x))$, где $R(0) \neq 0$. Такие функциональные уравнения решаются с помощью инверсной теоремы Лагранжа, согласно которой для степенного ряда $U(x)$ удовлетворяющему функциональному уравнению

$$U(x) = x\,F(U(x))$$

где $F(x)$ - степенной ряд, у которого $F(0) \neq 0$ выполняется тождество

$$[x^n]U(x)^k = \frac{k}{n}[x^{n-k}]F(x)^n.$$

Здесь запись выражения $[x^n]U(x)^k$ означает извлечение коэффициенты при x^n у степени производящей функции $U(x)^k$.

Например, найдем выражение для коэффициентов $A(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k$ для этого решим функциональное уравнение вида

$$B(x) = x(1 + B(x))$$

$$[x^n]B(x)^k = \frac{k}{n}[x^{n-k}]F(x)^n,$$

где $F(x) = 1 + x$

$$F(x)^k = \sum_{n \geqslant 0} \binom{k}{n}.$$

Тогда

$$B(n,k) = \frac{k}{n}\binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{n-k}$$

Откуда

$$A(x)^k = \left(\frac{B(x)}{x}\right)^k = \sum_{n \geqslant 0} \binom{n+k-1}{k}$$

Рассмотрим теперь нахождение явного выражение для реккурентного соотношениия вида

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\,T(n-i-1), & n > 0. \end{cases}$$

Запишем функциональное уравнение для $T(x)$, заметим, что

$$x\,T(x)^2 = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\,T(n-i-1)x^n.$$

Тогда

$$T(x) = 1 + x\,T(x) + x\,T(x)^2$$

Умножим левую и правую части на x, сделаем замену $xT(x) = B(x)$ перегруппировку, получим

$$B(x) = x\frac{1+B(x)}{1-B(x)}$$

для этого найдем

$$R(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k = \sum_{n\geqslant 0} B(n,k)x^n$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k = (1+x)^k\,\frac{1}{(1-x)^k}$$

Откуда

$$R(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}\binom{n+k-i-1}{n-i}$$

Тогда воспользуемся формулой Лагранжа

$$B(n,k) = \frac{k}{n}R(n-k,n) = \frac{k}{n}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\binom{2n-k-i-1}{n-k-i}$$

Откуда искомое явное выражение равно

$$T(n) = B(n+1,1) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}\binom{2\,n-i}{n-i}.$$

Задание

Решить следующие рекуррентные уравнения:

№	Рекурентное выражение
1	$T(n) = \begin{cases} 1, & n=0,\\ T(n-1)+2\sum_{i=0}^{n-1}T(i)\,T(n-i-1), & n>0.\end{cases}$
2	$T(n) = \begin{cases} 1, & n=0,\\ 3T(n-1)+\sum_{i=0}^{n-1}T(i)\,T(n-i-1), & n>0.\end{cases}$
3	$T(n) = \begin{cases} 2, & n=0,\\ T(n-1)+3\sum_{i=0}^{n-1}T(i)\,T(n-i-1), & n>0.\end{cases}$
4	$T(n) = \begin{cases} 1, & n=0,\\ T(n-1)+\sum_{i=0}^{n-2}T(i)\,T(n-i-2), & n>0.\end{cases}$
5	$T(n) = \begin{cases} 1, & n=0,\\ T(n-1)+2\sum_{i=0}^{n-2}T(i)\,T(n-i-2), & n>0.\end{cases}$
6	$T(n) = \begin{cases} 2, & n=0,\\ T(n-1)+2\sum_{i=0}^{n-2}T(i)\,T(n-i-2), & n>0.\end{cases}$
7	$T(n) = \begin{cases} 1, & n=0,\\ T(n-1)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-2}T(i)\,T(n-i-2), & n>0.\end{cases}$

2.9 Практическое занятие №9. Решение рекурентных уравнений на основе функциональных уравнений вида $R(T(x)) = F(x)$

Рассмотрим пример. Пусть дано рекррентное соотношение вида

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\,T(n-i-1) + n, & n > 0. \end{cases}$$

Найдем явное выржение для $T(n)$. Заметим, что данное рекуррентное выражение похоже на выражение из предыдущего примера, отличается лишь присытсвием слагаемого n. Производящая функция для последовательности $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ имеет выражение

$$\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Откуда можно записать уравнение в для производящих функций

$$T(x) = 1 + x\,T(x) + x\,T(x)^2 + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Далее умножим левую и правую части уравнения на x, и произведем замену $x\,T(x) = B(x)$. Получим

$$B(x) - x\,B(x) - B(x)^2 = x + \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

Теперь представим левую часть как композицию двух функций

$$S(x, B(x)) = x + \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

, где

$$S(x, y) = y - x\,y - y^2 = y\,(1 - x - y).$$

Откуда

$$B(x) = S^{-1}\left(x, x + \frac{x^2}{(1-x)^2}\right),$$

где $S^{-1}(x, y)$ обратная функция $S(x, y)$ и

$$S(x, S^{-1}(x, y)) = y.$$

Теперь необходимо найти выражение коэффициентов $S^{-1}(x,y)$. Для этого воспользуемся теоремой Лагранжа (см. выше). Найдем коэффициенты степени взаисной производящей функции $S(x,y)$

$$\left(\frac{y}{S(x,y)}\right)^k = \left(\frac{1}{1-x-y}\right)^k.$$

Для этого воспользуемся теоремой о степени композиции производящих функций

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k = \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+k-1}{n}x^n.$$

и

$$(x+y)^k = \sum_n\sum_m \delta(k,n+m)\binom{n+m}{n}x^n\,y^m.$$

Откуда

$$\left(\frac{1}{1-x-y}\right)^k = \sum_n\sum_m\sum_{j=0}^{n+m}\delta(j,n+m)\binom{n+m}{m}\binom{j+k-1}{j}x^n\,y^m.$$

После упрощения получим

$$\left(\frac{y}{S(x,y)}\right)^k = s(n,m,k)x^n\,y^m.$$

, где

$$s(n,m,k) = \sum_n\sum_m = \binom{n+m}{m}\binom{n+m+k-1}{n+m}.$$

Тогда на основании теоремы Лагранжа будем иметь

$$s^{-1}(n,m,k) = \frac{k}{m}s(n,m-k,m) = \frac{k}{m}\binom{n+m-k}{m-k}\binom{n+2m-k-1}{n+m-k}$$

При $k=1$ будем иметь коэффициенты обратной функции

$$S^{-1}(x,y) = \sum_n\sum_m\frac{1}{m}\binom{n+m-1}{m-1}\binom{n+2m-2}{n+m-1}x^n\,y^m.$$

Теперь найдем коэффициенты для

$$\left(x+\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^k = \sum_{n\geqslant k}u(n,k)x^n.$$

Для этого рассмотрим композицию функций $(1+x)$ и $\frac{x}{(1-x)^2}$ зная что

$$(\frac{1}{(1-x)^2})^k = \sum_{n\geqslant 0} \binom{n+2k-1}{n}.$$

Откуда

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^k = \sum_{n\geqslant 0} \binom{n+k-1}{n-k}.$$

Тогда композиция

$$\left(1+\frac{x}{(1-x)^2}\right)^k = \sum_{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j-1}{n-j} \binom{k}{j} x^n$$

Откуда

$$\left(x+\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^k = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k+j-1}{n-k-j}.$$

$$\frac{\binom{n+m-1}{m-1}\binom{n+2\,m-2}{n+m-1}}{m}$$

$$\delta_{0,i} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{m}{j} \binom{n-m+j-1}{n-m-j}$$

.

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{\binom{k+i-1}{k-1}\binom{2\,k+i-2}{k+i-1} \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{k}{j} \binom{n-k+j-i-1}{n-k-j-i}}{k}.$$

Задание

Решить следующие рекуррентные уравнения:

№	Формула
1	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\, T(n-i-1) + n, & n > 0. \end{cases}$
2	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + 3\sum_{i=0}^{n-1} T(i)\, T(n-i-1) + n, & n > 0. \end{cases}$
3	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\, T(n-i-1) + 1, & n > 0. \end{cases}$
4	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\, T(n-i-1) + (-1)^n, & n > 0. \end{cases}$
5	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\, T(n-i-1) + 1/n, & n > 0. \end{cases}$
6	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\, T(n-i-1) + 1/n!, & n > 0. \end{cases}$
7	$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\, T(n-i-1) + (1+(-1)^n)/2, & n > 0. \end{cases}$

2.9.1 Пример №1

Пусть дано рекуррентное соотношение вида

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\,(1 + T(n-i-1)), & n > 0. \end{cases}$$

$$T(x) = 1 + \frac{x\,T(x)}{1-x} + x\,T(x)^2.$$

$$xT(x) = x + \frac{x^2\,T(x)}{1-x} + x^2\,T(x)^2.$$

$$B(x) = \frac{x}{1-B(x)}\left(1 + \frac{B(x)}{1-x}\right).$$

$$B(x,y) = \frac{x}{1-B(x,y)}\left(1 + \frac{B(x,y)}{1-y}\right).$$

$$G(x,y) = \frac{1}{1-x}\left(1 + \frac{x}{1-y}\right).$$

$$\left(\frac{x}{1-y}\right)^k = \sum_n \sum_m \delta(n,k) \binom{m+k-1}{m} x^n\, y^m.$$

$$G(x,y)^k = \sum_n \sum_m g(n,m,k) x^n\, y^m.$$

$$g(n,m,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \binom{m+i-1}{m} \binom{n+k-i-1}{n-i}.$$

$$B(x,y) = x\,G(B(x,y),y).$$

$$b(n,m,k) = \frac{k}{n} g(n-k,m,n) = \frac{k}{n}\sum_{i=0}^{n-k} \binom{m+i-1}{m}\binom{n}{i}\binom{2\,n-k-i-1}{n-k-i}.$$

$$b(n,m,1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+i-1}{m}\binom{n}{i}\binom{2\,n-i-2}{n-i-1}.$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i}\binom{2\,j-i}{j-i}\binom{n-j+i-2}{n-j-1}.$$

2.9.2 Пример №2

Пусть дано рекуррентное соотношение вида

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ T(n-1) - T(n-2) + \sum_{i=0}^{n-2} T(i)\,T(n-i-2) + (-1)^n, & n > 0. \end{cases}$$

$$T(x) = 1 + x^2\,T^2(x) - x^2\,T(x) + x\,T(x) - \frac{x}{x+1}.$$

$$T(x) = \frac{-\sqrt{x^6 - 2\,x^3 - 4\,x^2 + 1} + x^3 + 1}{2\,x^3 + 2\,x^2}.$$

$$x\,T(x) = x^3\,T^2(x) - x^3\,T(x) + x^2\,T(x) + \frac{x}{x+1}$$

$$B(x) - x\,B(x)^2 + x^2\,B(x) - x\,B(x) = \frac{x}{x+1}.$$

$$S(x, B(x)) = \frac{x}{x+1},$$

$$S(x,y) = y - x\,y^2 + x^2\,y - x\,y.$$

$$\frac{y}{S(x,y)} = \frac{1}{1 - x\,y + x^2 - x}$$

$$B(x) = S^{-1}\left(x, \frac{x}{x+1}\right).$$

$$(x - x^2)^k = \binom{k}{n-k}\,(-1)^{n-k}.$$

$$\left(\frac{1}{1-x-y}\right)^k = \sum_n \sum_m \binom{n+m}{m}\binom{n+m+k-1}{n+m} x^n\,y^m.$$

$$\left(\frac{1}{1-x+x^2-y}\right)^k=\sum_n\sum_m\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{n-j}(-1)^{n-j}\binom{j+m}{m}\binom{j+m+k-1}{j+m}x^n\,y^m.$$

$$\left(\frac{1}{1-x+x^2-x\,y}\right)^k=\sum_n\sum_m\sum_{j=0}^{n-m}\binom{j}{n-m-j}(-1)^{n-m-j}\binom{j+m}{m}\binom{j+m+k-1}{j+m}x^n\,y^m$$

$$S^{-1}(x,y)^k=\frac{k}{m}s(n,m-k,m),$$

где

$$s(n,m,k)=\sum_{j=0}^{n-m}\binom{j}{n-m-j}(-1)^{n-m-j}\binom{j+m}{m}\binom{j+m+k-1}{j+m}.$$

Откуда

$$s^{-1}(n,m,k)=\frac{k}{m}\sum_{j=0}^{n-m+k}\binom{j}{n-m+k-j}(-1)^{n-m+k-j}\binom{j+m-k}{m-k}\binom{j+2\,m-k-1}{j+m-k}.$$

$$s^{-1}(n,m,1)=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{n-m+k}\binom{j}{n-m+1-j}(-1)^{n-m+1-j}\binom{j+m-1}{m-1}\binom{j+2\,m-2}{j+m-1}.$$

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^k=\sum_n\binom{n-1}{n-k}(-1)^{n-k}x^n.$$

$$B(x)=S^{-1}\left(x,\frac{x}{x+1}\right).$$

$$T(n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{n-i}\binom{n-i-1}{n-k-i}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{i-k+1}\binom{j}{i-k-j+1}\binom{k+j-1}{k-1}\binom{2\,k+j-2}{k+j-1}(-1)^{n-j-1}.$$

2.10 Практическое занятие №10. Решение задач теории графов

Задача о кратчайшем пути: замена оборудования, составление расписания движения транспортных средств, размещение пунктов скорой помощи, размещение телефонных станций. Задача о максимальном потоке: анализ пропускной способности коммуникационной сети, организация движения в динамической сети, оптимальный подбор интенсивностей выполнения работ, задача о распределении работ.

Задание

1. Изучить разделы теории графов, посвященные переесисленным задачам.

2. Выбрать предметую область для задач о кратчайшем пути и максимальном потоке.

3. Построить соответствующий граф и изучить его свойства.

4. Разработать или выбрать алгоритм решения.

5. Реализовать в системе компьютерной алгебры.

6. Представть отчет.

2.11 Практическое занятие №11. Решение задач теории графов

Задача об упаковках и покрытиях: оптимизация структуры ПЗУ (постоянного запоминающего устройства), размещение диспетчерских пунктов городской транспортной сети.
Раскраска в графах: распределение памяти в компьютере, проектирование сетей телевизионного вещания.
Связность графов и сетей: проектирование кратчайшей коммуникационной сети, синтез структурно-надежной сети циркуляционной связи, анализ надежности стохастических сетей связи.

Задание

1. Изучить разделы теории графов, посвященные переесисленным задачам.

2. Выбрать предметую область для задач об упаковках (покрытиях) и связности сетей.

3. Построить соответствующий граф и изучить его свойства.

4. Разработать или выбрать алгоритм решения.

5. Реализовать в системе компьютерной алгебры.

6. Представть отчет.

2.12 Практическое занятие №12.Решение задач теории графов

Изоморфизм графов и сетей: структурный синтез линейных избирательных цепей, автоматизация контроля при проектировании БИС.
Изоморфное вхождение и пересечение графов: локализация неисправности с помощью алгоритмов поиска, покрытие схемы заданным набором типовых подсхем.
Автоморфизм графов: конструктивное перечисление структурных изомеров для производных органических соединений, синтез тестов цифровых устройств

Задание

1. Изучить разделы теории графов, посвященные перeесисленным задачам.
2. Выбрать предметую область для перечисленных выше задач .
3. Построить соответствующий граф и изучить его свойства.
4. Разработать или выбрать алгоритм решения.
5. Реализовать в системе компьютерной алгебры.
6. Представтв отчет.

2.13 Практическое занятие №13. Решение задач теории синтаксического анализ: вывод цепочки, определение типа грамматики, построение грамматик

1. Дана грамматика. Построить вывод заданной цепочки.
$S \to T \mid T + S \mid T - S$
$T \to F \mid F * T$
$F \to a \mid b$
Цепочка $a - b * a + b$

2. Дана грамматика. Построить вывод заданной цепочки.
b) $S \to aSBC \mid abC$
$S \to aSBC \mid abC$
$CB \to \ BC$
$bB \to \ bb$

$bC \to \ bc$
$cC \to \ cc$

Цепочка aaabbbccc

3. Построить все сентенциальные формы для грамматики с правилами:
$S \to A + B \mid B + A$
$A \to a$
$B \to b$

4. К какому типу по Хомскому относится данная грамматика? Какой язык она порождает? Каков тип языка?

a)
$S \to \ APA$
$P \to + \mid -$
$A \to a \mid b$

b)
$S \to \ aQb \mid \varepsilon$
$Q \to \ cSc$

c)
$S \to \ 1B$
$B \to B0 \mid 1$

d)
$S \to \ A \mid SA \mid SB$
$A \to \ a$
$B \to \ b$

4. Построить грамматику, порождающую язык :
a) L $= \{a^n b^m | n, m \geqslant 1\}$
b) L $= \{\alpha c \beta c \gamma c | \alpha\, \beta\, \gamma -$ любые цепочки из a и b$\}$
c) L $= \{a_1 a_2 \ldots a_n a_n \ldots a_2 a_1 | a_i = 0\,$или$\,1,\ n \geqslant 1\}$
d) L $= \{a^n b^m | n \neq m; n, m \geqslant 0\}$
e) L $= \{$цепочки из 0 и 1 с неравным числом 0 и 1$\}$
f) L $= \{\alpha\alpha | \alpha \in \{a, b\}^+\}$
g) L $= \{\omega | \omega \in \{0, 1\}^+$и содержит равное количество 0 и 1, причем любая подце
h) L $= \{(a^{2m} b^m)^n | m \geqslant 1, n \geqslant 0\}$

5. К какому типу по Хомскому относится данная грамматика? Какой язык она порождает? Каков тип языка?

a) $S \to a \mid Ba$	b) $S \to Ab$
$B \to Bb \mid b$	$A \to Aa \mid ba$
b) $S \to 0A1 \mid 01$	d) $S \to AB$
$0A \to 00A1$	$AB \to BA$
$A \to 01$	$A \to a$
	$B \to b$
*e) $S \to A \mid B$	*f) $S \to 0A \mid 1S$
$A \to aAb \mid 0$	$A \to 0A \mid 1B$
$B \to aBbb \mid 1$	$B \to 0B \mid 1B \mid \perp$
*g) $S \to 0S \mid S0 \mid D$	*h) $S \to 0A \mid 1S \mid \varepsilon$
$D \to DD \mid 1A \mid \varepsilon$	$A \to 1A \mid 0B$
$A \to 0B \mid ?$	$B \to 0S \mid 1B$ $B \to 0A \mid 0$
*i) $S \to SS \mid A$	*j) $S \to AB\perp$
$A \to a \mid bb$	$A \to a \mid cA$
$B \to bA$	
*k) $S \to aBA \mid ?$	*l) $S \to Ab \mid c$
$B \to bSA$	$A \to Ba$
$AA \to c$	$B \to cS$

2.14 Практическое занятие №14. Решение задач теории синтаксического анализ: эквивалентные преобразования, построение синтаксических деревьев нисходящими и восходящими методами

Построить КС-грамматику, эквивалентную грамматике с правилами:

a)

$S \to aAb$

$aA \to aaAb$

$A \to \varepsilon$

b)

$S \to\ AB \mid ABS$
$AB \to\ BA$
$BA \to\ AB$
$A \to\ a$
$B \to\ b$

Построить регулярную грамматику, эквивалентную грамматике с правилами:

a)
$S \to\ A \mid AS$
$A \to\ a \mid bb$

b)
$S \to\ A.A$
$A \to\ B \mid BA$
$B \to\ 0 \mid 1$

Дана грамматика
$S \to\ AB$
$A \to\ aB \mid bS \mid b$
$B \to\ AB \mid Ba$
$B \to\ AS \mid b$
Преобразуйте грамматику в эквивалентную КС-грамматику не содержащуюю бесполезных символов.

Дана грамматика с правилами: a)
$S \to\ S0 \mid S1 \mid D0 \mid D1$
$D \to\ H.$
$H \to\ 0 \mid 1 \mid H0 \mid H1$

b)
$S \to\ if\ B\ then\ S \mid B = E$
$E \to\ B \mid B + E$
$B \to\ a \mid b$

Построить восходящим и нисходящим методами дерево вывода для цепочки: a) 10.1001 b) if a then b = a+b+b

2.15 Практическое занятие №15. Решение задач теории синтаксического анализ: построение грамматики для проблемно-ориентированного языка

Задание

1. Выбрать предметную область, например, школьная информатика, некоторая библитотека программ моделирования, класс микропроцесооров, инструментальная система и т.д.
2. Разработать проблемно-ориентированный язык представления задачи, проблемы, программы.
3. Псотроить грамматику и определить тип языка.
4. Провести анализ языка с целью построения транслятора или интерпретатора
5. Выбрать средство реализации и реализовать.
6. Представть отчет.

2.16 Практическое занятие №16. Одноканальные СМО

Задача 1. К серверу базы данных происходит обращение в среднем 20 человека за 1 минуту. Найти вероятность того, что за 10 минут за данными обратится: а) 40 раз, б) не менее 30 раз.

Задача 2. На сервере имеются два CGI-модуля, работающих независимо друг от друга. Время безотказной работы определяется показательным законом. Среднее время безотказной работы 1-го модуля – $t_1 = 2$ года, 2-го – $t_2 = 1$ год. Найти вероятность того, что за 1,5 года: а) не откажет ни один из модулей; б) откажет только 2-й модуль; в) откажут оба модуля.

Задача 3. Анализ сервера показал, что среднее время ответа на запрос составляло 100 мс, а сервер получал около 100 запросов в секунду. Если для каждого активного запроса требуется 5 КБ памяти, сколько памяти необходимо зарезервировать для среднего количества запросов в системе?

2.17 Практическое занятие №17. Многоканальные СМО

Задача 1. Рассматривается работа сервера с n потоками. Если заняты все n потоков колонки, то клиентский запрос не встает в очередь ожидания, а покидает сервер. Среднее время обработки запроса 3 сек. Интенсивность потока запросов - 20 ед/мин. Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы сервера.

Задача 2. На некоторый сервер баз данных в среднем через 5 мин прибывает запрос на обработку. Среднее время обработки запроса составляет 15 сек. Обработку выполняют два процессора. В очереди на обработку может быть 5 запросов. Определить показатели работы СМО.

2.18 Практическое занятие №18. Многоканальные СМО

Задача 1. Какое оптимальное число каналов обслуживания должна иметь СМО, если интенсивность потока заявок равна 3, среднее число, заявок обслуженных в единицу времени равно 2, штраф за каждый отказ равен 5, а стоимость простоя одной линии равна 2?

Задача 2. Какое оптимальное число каналов обслуживания должна иметь СМО, если интенсивность потока заявок равна 3, среднее число, заявок обслуженных в единицу времени равно 1, штраф за каждый отказ равен 7, а стоимость простоя одной линии равна 3?

Задача 3. Анализ систем массового обслуживания с марковскими потоками требований 1. Система с несколькими серверами: M/M/m 2.Система обслуживания с m серверами явными потерями: M/M/m/Loss 1.

3. Методические указания по организации самостоятельной работы

Целью самостоятельной работы является систематизация, расширение и закрепление теоретических знаний, использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельной подготовки к лабораторным работам. Самостоятельная работа включает в себя подготовку к практическим работам, проработку лекционного материала и проработку тем дисциплины, вынесенных на самостоятельное изучение.

3.1 Проработка лекционного материала

Изучение теоретической части дисциплин призвано не только углубить и закрепить знания, полученные на аудиторных занятиях, но и способствовать развитию у аспирантов творческих навыков, инициативы и организовать свое время. Проработка лекционного материала включает:
• чтение студентами рекомендованной литературы и усвоение теоретического материала дисциплины;
• знакомство с Интернет-источниками;
• подготовку к различным формам контроля (контрольные работы);
• выполнение контрольных работ;
• подготовку ответов на вопросы по различным темам дисциплины в той последовательности, в какой они представлены.

Планирование времени, необходимого на изучение дисциплин, студентам лучше всего осуществлять весь семестр, предусматривая при этом регулярное повторение материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо регулярно прорабатывать и дополнять сведениями из других источников литературы, представленных не только в программе дисциплины, но и в периодических изданиях. При изучении дисциплины сначала необходимо по каждой теме прочитать рекомендованную литературу и составить краткий конспект основных положений, терминов, сведений, требующих запоминания и являющихся основополагающими в этой теме для освоения последующих тем курса. Для расширения знания по дисциплине рекомендуется использовать Интернет-ресурсы; проводить поиски в различных системах и использовать материалы сайтов, рекомендованных преподавателем.

Задачи, стоящие перед студентом при подготовке и написании контрольной работы:
- закрепление полученных ранее теоретических знаний;
- выработка навыков самостоятельной работы;
- выяснение подготовленности студентов к зачету.

3.2 Самостоятельное изучение тем теоретической части курса

3.2.1 Алгебра

1. Понятие алгебры. Замкнутые операции. N-арные операции, бинарные операции, арность операции. Тип алгебры, сигнатура. Свойства бинарных операций: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность слева, дистрибутивность справа. Два вида процедур в алгебре: вычисление формул и преобразование формул.

2. Изоморфизм алгебр. Гомоморфизм алгебр. Полугруппа. Единица полугруппы. Моноид. Группа. Обратный элемент. Способ задания (полу)групп: с помощью бинарной таблицы и с помощью образующих.

3. Решетка. Наименьшая верхняя грань, наибольшая нижняя грань. Единственность максимального и единственность минимального элемента. Единица решетки и нуль решетки. Решетка подмножеств любого множества. Фактор множества. Отношения частичного порядка. Теоретико-множественное и алгебраическое определения решетки, их эквивалентность. Свойства решеток. Булевы решетки. Полные решетки.

3.2.2 Основы криптографии

1. История развития криптографии. Основные понятия Краткий исторический очерк развития криптографии. Исторические примеры: шифр Цезаря, квадрат Полибия, шифр Виженера, шифр Сцитала, решетка

Кардано, книжный шифр и др. Основные этапы становления криптографии как науки. Частотные характеристики открытых сообщений. Математические модели открытых сообщений. Критерии на открытый текст. Способы представления информации, подлежащей шифрованию. Особенности нетекстовых сообщений. Понятие конфиденциальности, целостности и неотслеживаемости. Пассивные и активные атаки противника. Симметричные и асимметричные криптосистемы. Имитостойкость. Понятие аутентификация применительно к сеансу, к корреспондентам, к информации. Предварительное распределение ключей. Схемы разделения секрета. Сертификация открытых ключей. Функции Центра сертификации открытых ключей. Инфраструктура открытых ключей.

2. Основные классы шифров и их свойства Содержание темы: Разновидности шифров перестановки: маршрутные, вертикальные перестановки, решетки и лабиринты. Криптоанализ шифров перестановки. Шифры замены. Обобщенная модель шифра замены. Криптоанализ шифров замены. Шифр гаммирования. Табличное и модульное гаммирование. Случайные и псевдослучайные гаммы. Криптограммы, полученные при повторном использовании ключа. Анализ криптограмм, полученных применением неравновероятной гаммы. Сеть Фейстеля. DES-алгоритм. Усложнения DES-алгоритма. Российский стандарт шифрования ГОСТ-28147. Различия между DES и ГОСТ. Шифр AES. Режимы блочного шифрования.

3. Хеш-функции. Асимметричное шифрование. Цифровая подпись Содержание темы: Функции хеширования и целостность данных. Ключевые функции хеширования. Бесключевые функции хеширования. Целостность данных и аутентификация сообщений. Системы шифрования с открытыми ключами. Шифрсистема RSA. Понятие вероятностного шифрования. Шифрсистема Эль-Гамаля. Общие положения. Цифровые подписи на основе шифрсистем с открытыми ключами. Цифровая подпись Фиата-Шамира. Цифровая подпись Эль-Гамаля. Стандарты цифровой подписи.

4. Идентификация. Угрозы схеме идентификации с фиксированным паролем. Методы хранения паролей в системе. Угрозы при хранении пароля в системе в шифрованном виде. Правила составления паролей. Усложнение процедуры проверки ключей. «Подсоленные» ключи. Парольные фразы, как они хранятся в системе. Тотальный перебор ключей. Атака со словарем. 3 схемы использования одноразовых ключей. Одноразовые пароли на основе однонаправленной функции. Понятие «сильной»

идентификации. Цель использования метки времени и уникальная метка сообщения в протоколах аутентификации. Проблемы, связанные с использованием метки времени. Запрос-ответ с использованием симметричных алгоритмов. Идентификация на основе асимметричного шифрования. Односторонняя и взаимная идентификация с использованием ЦП и временных меток. Односторонняя идентификация с использованием ЦП и случайных чисел. Общие понятия. Идеи, лежащие в основе протоколов с нулевым разглашением. Протокол Фиата-Шамира. Вероятность обмана в протоколе Фиата-Шамира.

5. Протоколы распределения ключей. Односторонняя передача ключей с использованием симметричного шифрования и хеширования. Двусторонний протокол по выработке ключа. Бесключевой протокол Шамира (передача ключа). Протокол распределения ключей Нидхема-Шредера с использованием Центра. Базовый протокол и полный протоколы Kerberos. Одношаговый протокол передачи ключа с использованием асимм-го шифрования. Взаимная аутентификация и выработка общего ключа по Нидхему-Шредеру. 3 типа протоколов аутентифицированной передачи ключей. Протокол распределения ключей Диффи-Хеллмана. Протоколы STS (station-to-station) и MTI. Тривиальный пример распределения ключей для конференцсвязи. Аналог протокола Д-Хеллмана для трех участников. Протокол формирования общего ключа для конференцсвязи Бурмейстера-Десмедта. Суть схем предварительного распределения ключей. Схема распределения ключей Блома. суть схемы разделения секрета. Простейшая схема. 2 назначения схемы разделения секрета. (n, t)-пороговая схема разделения секрета Шамира.

6. Управление ключами. В чем состоит управление ключами. Цель управления ключами. Что определяет политика безопасности в управлении ключами. Разделение ключей по уровням. Цель уменьшения сроков действия ключа. Классификация ключей по срокам действия. Требования к длительности хранения ключей. Жизненный цикл ключей. Регистрация и установка ключей. Замена ключа, архивирование. Уничтожение и восстановление ключей. Отмена ключей. Функции третьей доверенной стороны Описание функций сервера имен абонентов и сертификационного центра. Описание функций ключевого сервера и центра управления ключами. Функции центра установки временных меток. Функции центра нотаризации.

7. Практические криптографические протоколы. Понятие виртуальная частная сеть (VPN). Протоколы PPTP и MPPE. Протоколы IPSec, AH, ESP,

ISAKMP, Oakley. Стек протоколов SSL/TLS.

3.2.3 Сети Петри

1. Сеть Петри. Определение, формальное задание, граф сети Петри, описание работы сети Петри. Формальное определение функционирования сети Петри, свободный язык сети Петри, граф разметок, теорема о свободных языках сети с различной начальной разметкой. Матрица инциндентности сети, вектор Париха, леммы о достижимой разметке и разбиении последовательности срабатываний ординарной сети.

2. Основные свойства сетей Петри и их анализ. Понятие о языках сети Петри. Основные свойства сетей Петри, ограниченность, безопасность, живость, устойчивость. Анализ ограниченности сети, теорема о покрывающем дереве. Теорема о разрешимости проблемы ограниченности сети Петри, анализ ограниченности места. Анализ свойств потенциальной живости переходов, безопасности сетей, t-тупиковости разметки, R-включения и R-эквивалентности, достижимости и живости. Помеченные сети и классы языков сетей Петри, соотношения классов языков сетей Петри. Теорема о соотношениях классов языков помеченных сетей.

3. Элементарные сетевые системы и ординарные сети Петри. Элементарные сетевые системы. Виды эквивалентностей, теорема о «свойстве ромба». Свободные от контактов ЭСС. Преобразование ЭСС в свободную от контактов. Ординарные сети Петри. Живость ОСП, связность и сильная связность ОСП. Преобразование произвольной сети Петри в ординарную, теорема о сохранении свойств сетей. Взаимосвязь ординарных сетей Петри с ЭСС. Теоремы о свободных, префиксных и терминальных языках ординарных сетей Петри. Автоматные сети и их свойства. Синхронизационные графы и их свойства. Свободные сети и их свойства.

4. Распараллеливание алгоритмов. Постановка задачи. Многопроцессорные системы. Конвейерные вычисления. Параллельная форма алгоритма. Построение графов параллельных форм. Сетевое представление параллельных процессов. Сетевое представление параллельных процессов, понятие О-сети. S-сети. Сетевое представление параллельно-альтернативных процессов, А-сети. Сетевое представление параллельных процессов с конкуренцией. Алгебраические сети. Развертка сетей Петри в сети–процессы.

3.2.4 Задачи и методы машинного обучения

1. Основные понятия. Определение предмета машинного обучения. Примеры задач и областей приложения. Образы и признаки. Типы задач предсказания. Регрессия. Таксономия. Классификация. Типы ошибок классификации. Обобщающая способность классификатора. Принцип минимизации эмпирического риска. Недообучение. Переобучение. Статистический, нейросетевой и структурно-лигвистический подходы к распознаванию образов. Структура типичной системы распознавания образов. Цикл построения системы распознавания образов.

2. Классификация. Общие принципы. Этапы классификации. Алгоритмы обучения классификаторов с учителем и без учителя. Дискриминантный анализ. Геометрическая интерпретация задачи классификации. Проективный подход. Метрики в пространстве признаков. Евклидово расстояние. Расстояние Махалонобиса. Ошибки первого и второго рода. Чувствительность и избирательность. Кривая мощности критерия классификации. ROC-кривые. Проверка классификатора. Проверка тестовой выборкой. Перекрестная проверка. Оценка информативности признаков.

3. Байесовская классификация. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Статистическое распознавание образов. Наивный байесовский классификатор. Задача классификации спама. Критерий отношения правдоподобия. Байесовский уровень ошибки. Байесовский риск. Критерий Байеса. Максимальный апостериорный критерий. Критерий максимального правдоподобия. Многоклассовые байесовские классификаторы. Байесовские классификаторы для нормально распределенных классов при различной структуре матрицы ковариации

4. Оценивание функций распределения. Параметрическое оценивание. Метод максимума правдоподобия. Байесовское оценивание. Непараметрическое оценивание. Оценивание ядерным сглаживанием. Окна Парзена. Гладкие ядра. Оценка многомерной плотности. Оценивание по K ближайшим соседям. Классификация по K ближайшим соседям. Взвешивание признаков. Повышение скорости поиска ближайших соседей. Метод $k - D$-дерева Распознавание рукописных цифр с помощью наивного байесовского Деревья решений. Основные понятия. Классы решаемых задач: описание данных, классификация, регрессия. Общий алгоритм построения дерева решений. Критерии выбора наилучшего атрибута: прирост информации, относительный

прирост информации, индекс Гини. Правила остановки разбиения дерева. Обрезание дерева. Алгоритм ID3. Переобучение деревьев решений. Обработка непрерывных атрибутов. Обучение на данных с пропусками.

5. Анализ многомерных данных. Корреляция признаков и структура данных. Латентные структуры в данных. Формальная и эффективная размерность данных. Структура и шум в данных. Понижение размерности данных. Поиск латентных структур. Отделение структуры от шума. Метод главных компонент как декомпозиция матрицы данных. Матрица счетов. Матрица нагрузок. Матрица ошибок. Объясненная и остаточная вариация в данных. Предобработка данных. Графическая интерпретация метода главных компонент. Критерии выбора количества главных компонент Понижение размерности признакового пространства методом главных компонент при диагностировании клеток опухоли по изображениям мазка крови Регрессия. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова. Обобщенный метод наименьших квадратов. Рекурсивный метод наименьших квадратов. Анализ регрессионных остатков. Графическая проверка линейности, гомоскедастичности. Объясненная и необъясненная вариация. Коэффициент детерминации. Неустойчивость МНК к выбросам. Робастная регрессия

6. Теоретико-множественный подход к регрессии. Ошибки регрессии: нормальность и ограниченность. Теоретико-множественное оценивание параметров регрессии и прогноза при интервальной ошибке. Статус образцов. ПИО-размах и ПИО-отклонение. Выбросы, инсайдеры, аутсайдеры и абсолютные выбросы. Эмпирическое оценивание интервальной ошибки. Планирование эксперимента при построении регрессии с интервальной ошибкой Многомерная регрессия. Особенности построения регрессии по многомерным данным. Множественная линейная регрессия, ее преимущества и недостатки. Мультиколлинеарность данных. Регрессия на главные компоненты. Интерпретация РГК-моделей. Проверка регрессионных моделей. Ошибка обучения и ошибка прогноза. Критерий выбора количества главных компонент при построении РГК. Проекция на латентные структуры. ПЛС1 и ПЛС2. Алгоритм NIPALS. Интерпретация ПЛС-моделей.

Приложение А
(справочное)
Онлайн энциклопедия целых последовательностей

Онлайн энциклопедия целых последовательностей (www.oeis.org) - открытый англоязычный интернет ресурс, содержащий обширную базу математических знаний и являющимся мощным инструментом математических исследований Все целые последвательности, хранящиеся в OEIS, имеют некоторый номер Axxxxxx, где xxxxxxx - десятичный номер например, A002017. Каждая статья в этой энциклопедии, как правило, содержит:

1. Последовательность целых чисел не менее 20
2. Производящую функцию, уравнения, рекуррентные, закрытые или приближенные формулы вычисления элементов последовательности
3. Комментарии, связанные с этой последовательностью.
4. Ссылки на ресурсы в Итернете
5. Ссылки на статьи и монографии.
6. Программы для вычисления формул, записанные для разных пакетов (Maple, Matematica, PARI, Maxima и др.)
7. Ссылки на другие последовательности.

Использование данного ресурса позволяет существенно сократить поиск литератруных источников по теме исследования.

Приложение Б
(справочное)
Коэффициенты степеней полиномов и рациональных производящих функций

1	$ax+bx^2$	$a^{2\,k-n}\,b^{n-k}\,\binom{k}{n-k}$
2	$ax+cx^3$	$\frac{1}{2}a^{\frac{3\,k-n}{2}}\,c^{\frac{n-k}{2}}\,\binom{k}{\frac{n-k}{2}}\,\left((-1)^{n-k}+1\right)$
3	$ax+bx^2+cx^3$	$\sum_{j=0}^{k}\binom{j}{n-k-j}\binom{k}{j}a^{k-j}\,b^{-n+k+2\,j}\,c^{n-k-j}$
4	$ax+px^m$	$\delta(0,mod(n-k\,m,m-1))\binom{k}{\frac{k\,m-n}{m-1}}\,a^{\frac{k\,m-n}{m-1}}\,p^{\frac{n-k}{m-1}}$
5	$x+x^2+\ldots+x^m$	$\sum_{i=0}^{\frac{n-k}{m}}(-1)^i\,\binom{k}{k-i}\binom{n-i\,m-1}{k-1}$
6	$ax+bx^2+cx^3+dx^4$	$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\,\sum_{i=j}^{n-k+j}\binom{j}{i-j}\binom{k-j}{n-3\,(k-j)-i}a^{2j-i}b^{i-j}c^{4(k-j)+i-n}d^{n-3(k-j)-i}$
7	$ax+bx^2+px^m$	$\sum_{j=\left\lfloor\frac{k\,m-n}{m-1}\right\rfloor}^{k}a^{k\,m-(m-2)\,j-n}\,b^{n-k\,m+j\,(m-1)}\,\binom{j}{n-k\,m+j\,(m-1)}\binom{k}{j}\,p^{k-j}$
1	$\frac{ax}{1-bx}$	$\binom{n-1}{k-1}a^k\,b^{n-k}$
2	$\frac{x}{(1-x)^m}$	$\binom{n+k\,(m-1)-1}{k\,m-1}$
3	$\frac{x}{1-ax-px^m}$	$\sum_{j=0}^{\frac{n-k}{m-1}}a^{n-k-m\,j}\,p^j\,\binom{n-(m-1)\,j-1}{k-1}\binom{n-k-(m-1)\,j}{j}$
4	$x\,\frac{(b\,x+a)}{c-d\,x}$	$\sum_{i=0}^{n-k}a^{-n+2\,k+i}\,b^{n-k-i}\,c^{-k-i}\,d^i\,\binom{k}{n-k-i}\binom{k+i-1}{k-1}$
5	$\frac{x}{(1-x)}-x^m$	$\sum_{j=\left\lceil\frac{-n+k\,m+1}{m}\right\rceil}^{k}(-1)^{k-j}\,\binom{k}{j}\binom{n-(k-j)\,m-1}{j-1}+(-1)^k\,\delta_{(k\,m),n}$
6	$\frac{x}{1-ax-bx^2-cx^3}$	$\sum_{k=0}^{n-m}\left(\sum_{j=0}^{k}a^{-n+m+3\,k-j}\,b^{n-m-3\,k+2j}\,c^{k-j}\,\binom{j}{n-m-3\,k+2\,j}\binom{k}{j}\right)\,\binom{m+k-1}{m-1}$
7	$\frac{x}{1-x-x^2-x^3-\ldots-x^m}$	$\sum_{k=0}^{n-r}\left(\sum_{i=0}^{\frac{n-k-r}{m}}(-1)^i\,\binom{k}{k-i}\binom{n-i\,m-r-1}{k-1}\right)\,\binom{r+k-1}{r-1}$

Приложение В
(справочное)
Коэффициенты степеней производящих функций логарифма и функций заданных радикалами

1	$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$	$(-1)^{n-k}\frac{k!}{n!}\left[{n \atop k}\right]$
2	$\ln(1+x)$	$\frac{k!}{n!}\left[{n \atop k}\right]$
3	$\frac{x^2}{\ln(1+x)}$	$\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{m+k-1}{m-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{j!\,(-1)^{j-k}\binom{k}{j}\left[{n-m+j \atop j}\right]}{(n-m+j)!}$
4	$x-\log(1+x)$	$\sum_{j=0}^{k}\frac{j!\,(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left[{n-k+j \atop j}\right]}{(n-k+j)!}$
1	$\frac{1-\sqrt{1-4ax}}{2a}$	$\frac{a^{n-k}\,k\binom{2\,n-k-1}{n-1}}{n}$
2	$\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}$	$\frac{k}{n}\binom{2\,n}{n-k}$
3	$\frac{(1-\sqrt{1-4x-4x^2})}{2(1+x)}$	$m\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\binom{k}{n-m-k}\binom{m+2\,k-1}{m+k-1}}{m+k}$
4	$\frac{-1-x+\sqrt{1+2x+5x^2}}{2x}$	$\frac{k}{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{-n-k+2\,j}(-1)^{j-k}\binom{n}{j}$
5	$\frac{1+x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2}$	$\frac{k}{2^k n}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\,2^{n-j}\binom{n}{j}\binom{2\,n-k-j-1}{n-1}$
6	$\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$	$\frac{k}{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{-n-k+2\,j}\binom{n}{j}$
7	$1-(1-x)^{\frac{1}{r}}$	$\frac{m}{n\,r^n}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n+k-1}{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{(-1)^{n-m-i}}{r^j}\binom{i\,r}{n-m+j}$

Литература

[1] Кручинин, В. В. Степени производящих функций и их применение: монография / В. В. Кручинин, Д. В. Кручинин. - Томск: Изд-во ТУСУРа, 2013. - 236 с. - ISBN 978-5-86889660-6

[2] Метод получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций и его реализация / Д. В. Кручинин [и др.]. — Томск: В-Спектр, 2017. — 172 с. — ISBN 978-5-91191-374-8

[3] Жигалова, Е. Ф. Дискретная математика: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Е. Ф. Жигалова — Томск: ТУСУР, 2014. — 98 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/5864

[4] Тихоненко, Олег Михайлович. Модели массового обслуживания в информационных системах : Учебное пособие для вузов / О. М. Тихоненко. - Минск : "Технопринт 2003. - 326[2] с. : ил. - Библиогр.: с. 322-324. - ISBN 985-464-362-X : 138.60 р. (5 экз.)

[5] Козлов, В. Г. Теория массового обслуживания: Учебное пособие [Электронный ресурс] / В. Г. Козлов — Томск: ТУСУР, 2012. — 57 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/1275

[6] Калайда, В. Т. Теория вычислительных процессов: Методическое пособие [Электронный ресурс] / В. Т. Калайда — Томск: ТУСУР, 2012. — 135 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/2048

[7] Калайда, В. Т. Теория языков программирования методов трансляции: Методическое пособие [Электронный ресурс] / В. Т. Калайда — Томск: ТУСУР, 2012. — 219 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/2063

[8] Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов : Учебное пособие для вузов / Ф. А. Новиков. - 2-е изд. - СПб. ; М. ; Нижний Новгород : Питер, 2007. - 363с. 80 экз.

[9] Шевелев Ю.П. Дискретная математика: Учебное пособие / Ю.П. Шевелев. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 592 с.

[10] Алиев Т.И., Муравьева-Витковская Л.А., Соснин В.В. Моделирование: задачи, задания, тесты. – СПб: НИУ ИТМО, 2011. – 197 с.

[11] Кёниг, Дитер. Методы теории массового обслуживания : Пер. с нем. / Д. Кёниг, Д. Штойян ; ред. Г. П. Климов, пер. В. Ф. Матвеев, пер. Р. Ш. Нагапетян. - М. : Радио и связь, 1981. - 127[1] с. : граф. - Библиогр.: с. 119-123. - Предм. указ.: с. 124-125. - Б. ц. (5 экз.)

[12] И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович, Т.О. Евдокимова, О.Н. Иванцова, И.Д. Мирошниченко. Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация. Учебное пособие. М., Национальный открытый университет Интуит-Бином. Лаборатория знаний. 2012, 343с.

[13] Федотов И.Е. Некоторые приемы параллельного программирования. М. 2008. 188 с.

[14] Котов В.Е. Сети Петри. М., Наука, 1984. 158 с.

[15] Петерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984.

[16] Воронцов К. В. Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин) Режим доступа: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf дата обращение 27.06.2018

[17] Вьюгин В.В. «Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования» М.: 2013. - 387 с. http://iitp.ru/upload/publications/6256/vyugin1.pdf дата обращения 27.06.2018