Министерство образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники (ТУСУР)

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Методические указания

2018

Магазинников А.Л.
Лабораторный практикум по математике: методические указания / А.Л. Магазинников. – Томск, 2018. – 63 с.

Содержание

1 Введение

Настоящий сборник состоит из компьютерных лабораторных работ по следующим разделам математики:

- Линейная алгебра
- Аналитическая геометрия
- Введение в математический анализ и дифференциальное исчисление
- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Числовые и функциональные ряды

Лабораторные работы выполняются в системе MathCAD. Она содержит мощные средства для реализации численных методов расчёта и математического моделирования в сочетании с возможностью выполнения многих операций символьной математики. Система имеет удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства научной графики. MathCAD признана во всём мире наилучшей системой для научно-технических вычислений.

Тем, кто не обладает основными навыками работы в MathCAD, рекомендуется изучить пособие Баранник В.Г., Истигечева Е.В. Пакеты прикладных программ/ Лабораторный практикум на MathCAD. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2014. – 78 с.

Выполнив лабораторную работу, необходимо оформить отчёт. Отчёт должен состоять из следующих разделов:

1. Цель работы.
2. Листинг примера (в электронном виде) с комментариями.
3. Листинг выполненного задания (в электронном виде) с комментариями.
4. Ответы на контрольные вопросы.
5. Выводы.

Правила оформления отчётов даны в пособии ОС ТУСУР 01-2013 (СТО 02069326.1.01-2013). Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления. - Томск: ТУСУР, 2013. – 57 с.

2 Методические указания по проведению лабораторных работ

2.1 Лабораторная работа «Обратная матрица. Матричные уравнения»

Цель работы

Освоить следующие правила:

1) Вычисления определителей второго, третьего и четвёртого порядков
2) Вычисления обратных матриц
3) Решения матричных уравнений.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить разделы «Обратная матрица», «Решение матричных уравнений» в пособии Линейная алгебра. Аналитическая геометрия:
Учебное пособие / Магазинникова А. Л., Магазинников Л. И. – Томск, 2010. – 176 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примерах решения заданий.

- Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad K=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad Z=\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ p & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & p \\ -2 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Задание 1. Найти:

а) определители матриц $\det A$ и $\det B$;

б) обратные матрицы A^{-1} и B^{-1};

Задание 2. Решить матричные уравнения:

а) $AX = K$; б) $BY = Z$; в) $XA = K^T$; г) $YB = Z^T$

Задание 3. При каком значении параметра p матица C не имеет обратной?

Решение.

1. Вводим матрицы A и B:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Считаем определители:

$$|A| = -6 \qquad |B| = -192$$

Находим обратные матрицы:

$$A^{-1}\ \text{simplify} \ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\ \text{simplify} \ \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Решим матричные уравнения $AX = K$ и $BY = Z$.

Вводим матрицы K и Z:

$$\mathrm{K} := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Z} := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Считаем неизвестные матрицы X и Y:

$$\mathrm{X} := \mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{K} \qquad \mathrm{Y} := \mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{Z}$$

Выводим на экран матрицы X и Y:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Решим матричные уравнения $XA = K^T$ и $YB = Z^T$.

Имеем:

$$\mathrm{X} := \mathrm{K}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{A}^{-1} \qquad \mathrm{Y} := \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{B}^{-1}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} -0.917 & 0.583 & 0.583 & -0.417 \end{pmatrix}$$

Упрощаем решение:

$$\mathrm{Y}\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{11}{12} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\mathrm{X} = (0 \quad 1 \quad -1)$, $\mathrm{Y} = \frac{1}{12}(-11 \quad 7 \quad 7 \quad -5)$.

3. Вводим матрицу C:

$$C(p) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ p & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & p \\ -2 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Находим значение параметра p, при котором определитель равен нулю:

$$|C(p)| \text{ solve }, p \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица C не имеет обратной при двух значениях параметра p: $p_1 = 8$, $p_2 = \frac{7}{2}$.

Задание

- Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ p & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & p \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 1. Найти:

а) определители матриц $\det A$ и $\det B$;

б) обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}

Задание 2. Решить матричные уравнения

а) $AX = K$; б) $BY = Z$; в) $XA = K^T$; г) $YB = Z^T$

Задание 3. При каком значении параметра p матица C не имеет обратной?

Контрольные вопросы

1. Приведите пример числовой матрицы
2. Что такое порядок матрицы?
3. Поясните на примерах, как выполняются операции над матрицами: сложение, умножение на число, произведение?
4. Что такое транспонирования матрица?
5. Что называется определителем (детерминантом) матрицы?
6. Как найти определитель второго, третьего порядков? Приведите примеры
7. Перечислите свойства определителей.
8. В чём отличие минора от алгебраического дополнения?
9. Что такое обратная матрица? Приведите пример.
10. Приведите примеры матричных уравнений.
11. Дано матричное уравнение $AX = K$. Что можно сказать о свойствах матриц A и K?
12. Проиллюстрируйте на примере порядок решения матричного уравнения.

2.2 Лабораторная работа «Решение систем линейных алгебраических уравнений»

Цель работы

Приобретение навыков решения следующих систем линейных алгебраических уравнений:

1) однородных;
2) неоднородных;
3) определённых;
4) неопределённых.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Системы линейных уравнений» в пособии Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учебное пособие / Магазинникова А. Л., Магазинников Л. И. – Томск, 2010. – 176 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примерах.

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -15 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -8 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14 \end{cases}$$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Найти значение параметра p, при котором система

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ p \cdot x + 5y + 15z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой.

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений. Выразить неизвестные через параметр *p*. Найдите значение параметра *p*, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = p \\ p \cdot x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 11 \end{cases}$$

Задание 4. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги основной и расширенной матриц при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде матрицы-столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 16 \\ 7x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение.

1. Вводим матрицу коэффициентов при неизвестных и столбец свободных членов:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -5 & 2 \\ -5 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Решаем систему:

$$X := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Проверяем решение:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

2. Вводим матрицу коэффициентов при неизвестных и расширенную матрицу:

$$A(p) := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ p & 5 & 15 \end{pmatrix} \qquad D(p) := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ p & 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Находим значение параметра *p*, при котором определитель матрицы равен нулю:

$$|A(p)| \text{ solve }, p \ \to 8$$

Решаем неопределённую систему при $p = 8$:

$$\mathrm{rref}\,(D(8)) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Берём свободную неизвестную $z = 1$. Тогда $x = -\frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, решение системы:

$$X := \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверим ответ подстановкой:

$$A(8) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Вводим матрицы:

$$A(p) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ p & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad B(p) := \begin{pmatrix} p \\ 16 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Находим общее решение:

$$X(p) := A(p)^{-1}\cdot B(p)$$

$$X(p) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{16\cdot p}{12\cdot p-47}+\frac{402}{12\cdot p-47} \\ \frac{464}{24\cdot p-94}-\frac{99\cdot p-946}{24\cdot p-94}-\frac{39\cdot p-102}{24\cdot p-94}-\frac{p\cdot(4\cdot p-35)}{12\cdot p-47} \\ \frac{3\cdot p-3}{12\cdot p-47}-\frac{33\cdot p-33}{12\cdot p-47}-\frac{80}{12\cdot p-47}-\frac{p\cdot(4\cdot p-9)}{12\cdot p-47} \\ -\frac{6\cdot p-27}{12\cdot p-47}-\frac{66\cdot p-220}{12\cdot p-47}-\frac{32}{12\cdot p-47}-\frac{p\cdot(4\cdot p-13)}{12\cdot p-47} \end{bmatrix}$$

Упрощаем решение:

$$X(p)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1394}{3\cdot(12\cdot p-47)}+\frac{4}{3} \\ \frac{20213}{36\cdot(12\cdot p-47)}-\frac{p}{3}-\frac{149}{36} \\ -\frac{p}{3}-\frac{3485}{18\cdot(12\cdot p-47)}-\frac{55}{18} \\ -\frac{p}{3}-\frac{697}{9\cdot(12\cdot p-47)}-\frac{56}{9} \end{bmatrix}$$

Находим значение параметра *p*, при котором определитель равен нулю:

$$|A(p)|\ \text{solve}, p \rightarrow \frac{47}{12}$$

Таким образом, система не имеет решений, если $p=\frac{47}{12}$.

4. Вводим матрицу коэффициентов при неизвестных и столбец свободных членов:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -9 & -8 & 5 \\ 7 & 7 & 12 & 12 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Записываем расширенную матрицу:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & -9 & -8 & 5 & 16 \\ 7 & 7 & 12 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Находим ранги матриц *A* и *D*:

$$\mathrm{rank}(A) = 2 \qquad\qquad \mathrm{rank}(D) = 2$$

По теореме Кронекера-Капелли делаем вывод, что система неопределённая.

Приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$R := \mathrm{rref}(D) \qquad\qquad R \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{11}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По матрице *R* определяем x_3 и x_4 как свободные неизвестные, а x_1 и x_2 как главные. Обозначаем свободные неизвестные буквами p_1 и p_2 и записываем общее решение, перенося свободные неизвестные в правую часть уравнений.

$$X(p1, p2) := \begin{pmatrix} \frac{10}{7} - \frac{4}{7}\cdot p1 - \frac{11}{7}\cdot p2 \\ \frac{-8}{7} - \frac{8}{7}\cdot p1 - \frac{1}{7}\cdot p2 \\ p1 \\ p2 \end{pmatrix}$$

Проверяем полученный ответ подстановкой в систему:

$$A\cdot X(p1, p2) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Задание

1. При помощи команды lsolve решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 36 \\ 4x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -38 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -10 \end{cases}$$

2. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 11z = 0 \end{cases}$$

3. Найти общее решение системы уравнений. Выразить неизвестные через параметр p. Найдите значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 31 \\ p \cdot x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 56 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 4 \\ 7x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 + x_5 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 7x_5 = 5 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о базисном миноре.
2. Что такое ранг матрицы?
3. Перечислите виды систем линейных уравнений.
4. Что называют однородными и неоднородными системами линейных уравнений?
5. Что такое определённая и неопределённая системы линейных уравнений?
6. Какие системы линейных уравнений называют совместными и какие несовместными?
7. Какие системы линейных уравнений называются эквивалентными?
8. Что такое основная и расширенная матрица системы линейных уравнений?
9. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли о совместности систем линейных уравнений.
10. Проиллюстрируйте на примерах решение системы линейных уравнений методом Крамера и Гаусса.

2.3 Лабораторная работа «Операции над векторами. Прямые и плоскости»

Цель работы

1. Изучить правила вычисления скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.
2. С помощью алгебраических операций над векторами определить:
- длину вектора;
- угол между векторами;
- площадь треугольника;
- объём фигуры.

3. Используя уравнения прямой и плоскости, найти точку их пересечения.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить разделы «Скалярное произведение векторов», «Векторное произведение и его свойства», «Смешанное произведение», «Уравнение плоскости», «Уравнения прямой в пространстве» в пособии Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учебное пособие / Магазинникова А. Л., Магазинников Л. И. – Томск, 2010. – 176 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примерах.

Задание 1. Даны два вектора $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти их длины $\left|\overline{a}\right|$, $\left|\overline{b}\right|$; сумму $\overline{a}+\overline{b}$; линейную комбинацию $2\overline{a}-3\overline{b}$; скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$; векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$; угол α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Задание 2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и плоскости $x+3y+5z-42=0$.

Задание 3. Определить угол между плоскостями:

$$7x-5y-3z+12=0$$
$$-2x+2y+3z+4=0$$

Задание 4. Найти площадь основания *ABC*, объём и высоту пирамиды с вершинами в точках $A\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \end{pmatrix}$, опущенную из вершины *D* на грань *ABC*.

Решение.

1. Вводим координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$a := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Длины векторов:

$$|a| \rightarrow \sqrt{29} \qquad |b| \rightarrow \sqrt{3}$$

Сумма векторов:

$$a + b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация векторов:

$$2 \cdot a - 3 \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение:

$$a \cdot b = -5$$

Векторное произведение:

$$a \times b = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Угол между векторами:

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right)$$

$\alpha = 2.137$ в радианах

$\alpha \cdot \frac{180}{\pi} = 122.416$ в градусах

2. Вводим параметрическое уравнение прямой:

$$x(t) := 2t + 2$$

$$y(t) := 2 - t$$

$$z(t) := 3t + 4$$

Задаём функцию, определяющую уравнение плоскости:

$$F(x, y, z) := x + 3y + 5z - 42$$

Определяем параметр *t*:

$$F(x(t), y(t), z(t)) \text{ solve }, t \ \rightarrow 1$$

Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты:

$x(1) = 4$ $\qquad$ $y(1) = 1$ $\qquad$ $z(1) = 7$

3. Вводим векторы *a* и *b*, координаты которых составлены из коэффициентов при *x*, *y*, *z* соответственно:

$$a := \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Определяем угол между плоскостями:

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right)$$

$\alpha = 2.644$ $\qquad$ в радианах

$\alpha \cdot \dfrac{180}{\pi} = 151.464$ $\qquad$ в градусах

4. Вводим координаты точек:

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Считаем координаты векторов:

$$AB := B - A \qquad AC := C - A \qquad AD := D - A$$

Определяем площадь основания *ABC*, объём и высоту пирамиды соответственно:

$$S := \frac{|AB \times AC|}{2} \qquad V := \frac{|(AB \times AC) \cdot AD|}{6} \qquad h := \frac{3 \cdot V}{S}$$

$$S = 2.062 \qquad V = 7.5 \qquad h = 10.914$$

Задание

1. Даны два вектора $\overline{a}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ и $\overline{b}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Найти их длины $\left|\overline{a}\right|$, $\left|\overline{b}\right|$; сумму $\overline{a}+\overline{b}$; линейную комбинацию $2\overline{a}-3\overline{b}$; скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$; векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$; угол α (в градусах) между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ и плоскости $x+2y+3z-14=0$.

3. Определить угол между плоскостями:

$$3x+2y-4z+1=0$$
$$5x-3y+3z-20=0$$

4. Найти площадь основания *ABC*, объём и высоту пирамиды с вершинами в точках $A\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-4 & 6 & -3\end{pmatrix}$, опущенную из вершины *D* на грань *ABC*.

Контрольные вопросы

1. Что называется векторной величиной?
2. Что такое линейная комбинация векторов?
3. На примере поясните, как найти модуль вектора.
4. Какие векторы называются коллинеарными, а какие компланарными?
5. Что называется скалярным произведением векторов? Поясните на примере.
6. Что такое векторное произведение векторов?
7. Что такое смешанное произведение векторов?
8. Запишите общее уравнение прямой на плоскости.
9. Запишите уравнение прямой на плоскости в канонической форме.
10. Запишите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.
11. Запишите все виды уравнений прямой в пространстве.

2.4 Лабораторная работа «Полное исследование функций и построение графиков»

Цель работы

Изучение схемы исследования функций одной переменной и построения графиков.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Общая схема исследования и построение графика» в пособии Высшая математика. Дифференциальное исчисление:
Учебное пособие / Магазинников Л. И., Магазинников А. Л. – Томск, 2017. – 188 с.

Порядок выполнения работы

Будем придерживаться следующего плана действий.

1. Найти область определения и область значений функции.
2. Определить, является ли функция четной или нечетной или является функцией общего вида.
3. Выяснить, является ли функция периодической или непериодической.
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и охарактеризовать их, указать вертикальные асимптоты.
5. Найти наклонные асимптоты.
6. Найти производную функции и определить участки монотонности функции, найти точки экстремума.
7. Найти вторую производную, охарактеризовать точки экстремума, если это не сделано с помощью первой производной, указать участки выпуклости вверх и вниз графика функции и точки перегиба.
8. Вычислить значения функции в характерных точках.
9. По полученным данным построить график функции.

Пример. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+3}$ и построить график.

Решение.

1. Чтобы найти область определения функции, упростим знаменатель:

$$\left(x^2-4x+3\right) \text{ simplify } \rightarrow (x-1)\cdot(x-3)$$

Следовательно, область определения функции $(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$. Область значений функции $(-\infty;+\infty)$.

2. Так как $f(x)\neq f(-x)$, то функция $f(x)$ общего вида.

3. Функция непериодическая.

4. Функция терпит разрыв второго рода в точках $x_1=1$, $x_2=3$, поскольку:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{(x-1)\cdot(x-3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{(x-1)\cdot(x-3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{x^3}{(x-1)\cdot(x-3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{(x-1)\cdot(x-3)}=+\infty$$

Прямые $x=1$, $x=3$ – двусторонние вертикальные асимптоты.

5. Находим наклонную асимптоту $y=kx+b$:

$$\lim_{x\to 0+\infty}\frac{f(x)}{x}\to 1 \qquad \lim_{x\to 0+\infty}(f(x)-k\cdot x)\to 4$$

$$\lim_{x\to 0-\infty}\frac{f(x)}{x}\to 1 \qquad \lim_{x\to 0-\infty}(f(x)-k\cdot x)\to 4$$

Следовательно, $k = 1$, $b = 4$.

Итак, $y=x+4$ – наклонная асимптота.

6. Находим первую производную и упрощаем выражение:

$$f(x):=\frac{d}{dx}f(x)$$

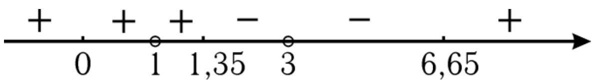
$$f'(x)\to\frac{3\cdot x^2}{x^2-4\cdot x+3}-\frac{x^3\cdot(2\cdot x-4)}{\left(x^2-4\cdot x+3\right)^2}$$

$$f'(x) := f'(x)\ \text{simplify}\ \rightarrow \frac{1}{2\cdot(x-1)^2} - \frac{27}{2\cdot(x-3)^2} + 1$$

Приравниваем первую производную к нулю и находим корни:

$$f'(x)\ \text{solve}\ , x\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7}+4 \\ 4-\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Видим, что в точках $x=0$, $x=\sqrt{7}+4\approx 6,65$, $x=\sqrt{7}-4\approx 1,35$ возможны экстремумы. На промежутках (–∞; 0), (0; 1,35), (1,35; 6,65), (6,65; +∞) производная функции имеет следующие знаки:



Таким образом, функция возрастает на промежутках (–∞; 1), (1; 1,35), (6,65; +∞), убывает на промежутках (1,35; 3), (3, 6,65). В точке $x=1,35$ – максимум, в точке $x=6,65$ – минимум. В точке $x=0$ экстремума нет, т.к. производная не меняет знак.

7. Находим вторую производную и упрощаем выражение:

$$f''(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

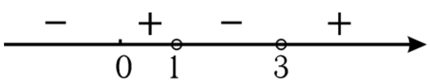
$$f''(x) \rightarrow \frac{6\cdot x}{x^2-4\cdot x+3} - \frac{2\cdot x^3}{\left(x^2-4\cdot x+3\right)^2} + \frac{2\cdot x^3\cdot(2\cdot x-4)^2}{\left(x^2-4\cdot x+3\right)^3} - \frac{6\cdot x^2\cdot(2\cdot x-4)}{\left(x^2-4\cdot x+3\right)^2}$$

$$f''(x) := f''(x)\ \text{simplify}\ \rightarrow \frac{27}{(x-3)^3} - \frac{1}{(x-1)^3}$$

Приравниваем к нулю вторую производную и находим *x*:

$$f''(x)\ \text{solve}\ , x\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{18}{13}+\frac{3i\cdot\sqrt{3}}{13} \\ \frac{18}{13}-\frac{3i\cdot\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix}$$

Таким образом, уравнение имеет один вещественный корень $x=0$ (комплексные корни не учитываем). Определим знаки второй производной:



Следовательно, на промежутках $(-\infty; 0)$, $(1; 3)$ функция $f(x)$ выпукла вверх, на промежутках $(0; 1)$, $(3; +\infty)$ – выпукла вниз. В точке $x = 0$ – перегиб (точки $x = 1$ и $x = 3$ являются точками разрыва, а потому точками перегиба быть не могут).

8. Полученные данные, а также значения функции в характерных точках занесём в таблицу:

x	0	1,35	6,65	$(-\infty; 1)$, $(1; 1{,}35)$	$(1{,}35; 3)$, $(3; 6{,}65)$	$(6{,}65; +\infty)$	$(-\infty; 0)$, $(1; 3)$	$(0; 1)$, $(3; +\infty)$
y	0	–4,26	14,26	возрастает	убывает	возрастает	выпукла вверх	выпукла вниз
	*	max	min					

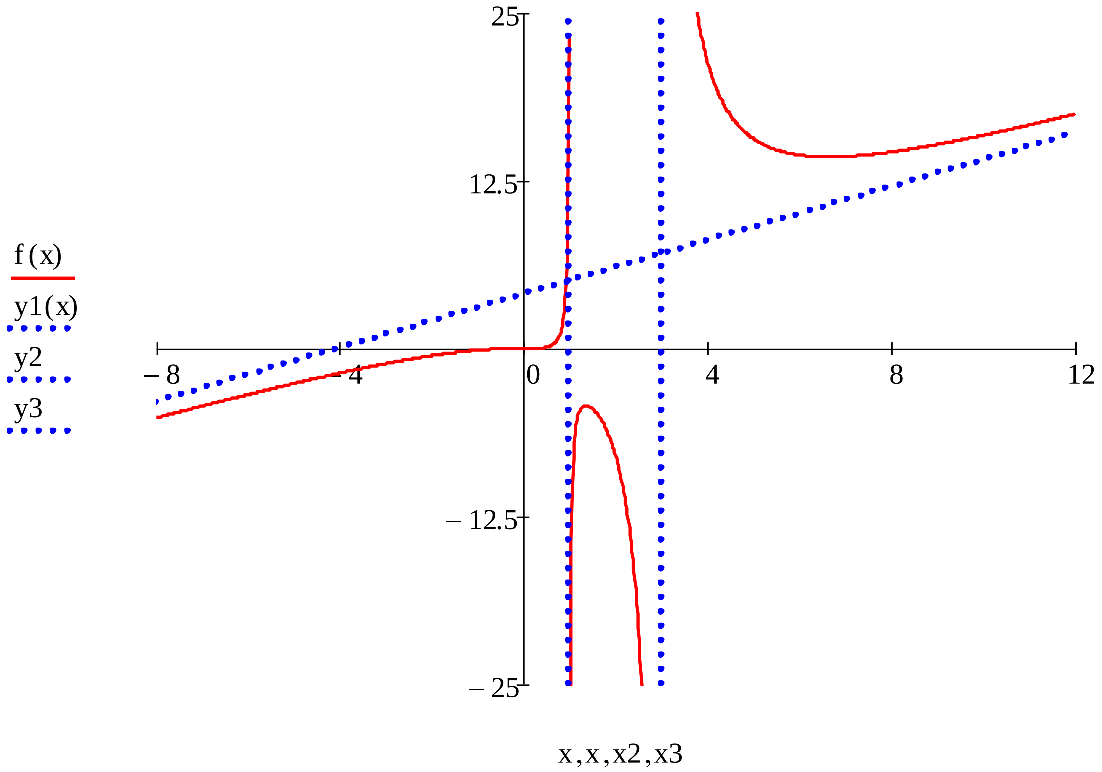
* - перегиб.

9. Строим график функции $f(x)$. Рекомендуется построить сначала асимптоты y1, y2, y3:

$$y1(x) := x + 4$$

$$y2 := \begin{pmatrix} -25 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad x2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y3 := \begin{pmatrix} -25 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad x3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Задание

- Провести полное исследование и построить график функции $f(x) = \dfrac{4+x^2}{4-x^2}$

Контрольные вопросы

1. Что такое область определения и область значений функции?
2. Дайте определение четных, нечетных функций, функций общего вида.
3. Какие функции называются периодическими?
4. Дайте определение непрерывной функции.
5. Приведите классификацию точек разрыва функций.
6. Асимптоты графика функции, их виды и отыскание.
7. Дайте определение точек экстремума. Необходимые условия экстремума.
8. Достаточные условия экстремума, связанные с первой производной.
9. Опишите процесс отыскания наибольшего и наименьшего значений функции.
10. Выпуклость графика функции. Условия выпуклости вверх и вниз графика функции.

2.5 Лабораторная работа «Экстремумы функции двух переменных»

Цель работы

Исследовать на экстремум функцию двух переменных и построить диаграмму линий уровня. Освоить правила вычисления частных производных от функции двух переменных.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Экстремумы» в пособии Высшая математика. Дифференциальное исчисление: Учебное пособие / Магазинников Л. И., Магазинников А. Л. – Томск, 2017. – 188 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере.

- Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x,y)=x^2+y^2+2y-2x+e^{2y}-2y\cos x-2xe^y+\cos^2 x-2\cos x+4$$

в области *D*, ограниченной неравенствами $1\le x\le 2,\ -1.5\le y\le -0.5$.

1. Изобразите линии уровня в области *D*.
2. Определите по графику приближённые координаты точки экстремума.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\end{cases}$ и найдите точку, подозрительную на экстремум.

4. Вычислите значения вторых производных $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ в полученной точке и проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

5. Определите тип экстремума и найдите значение функции $f(x,y)$ в этой точке.

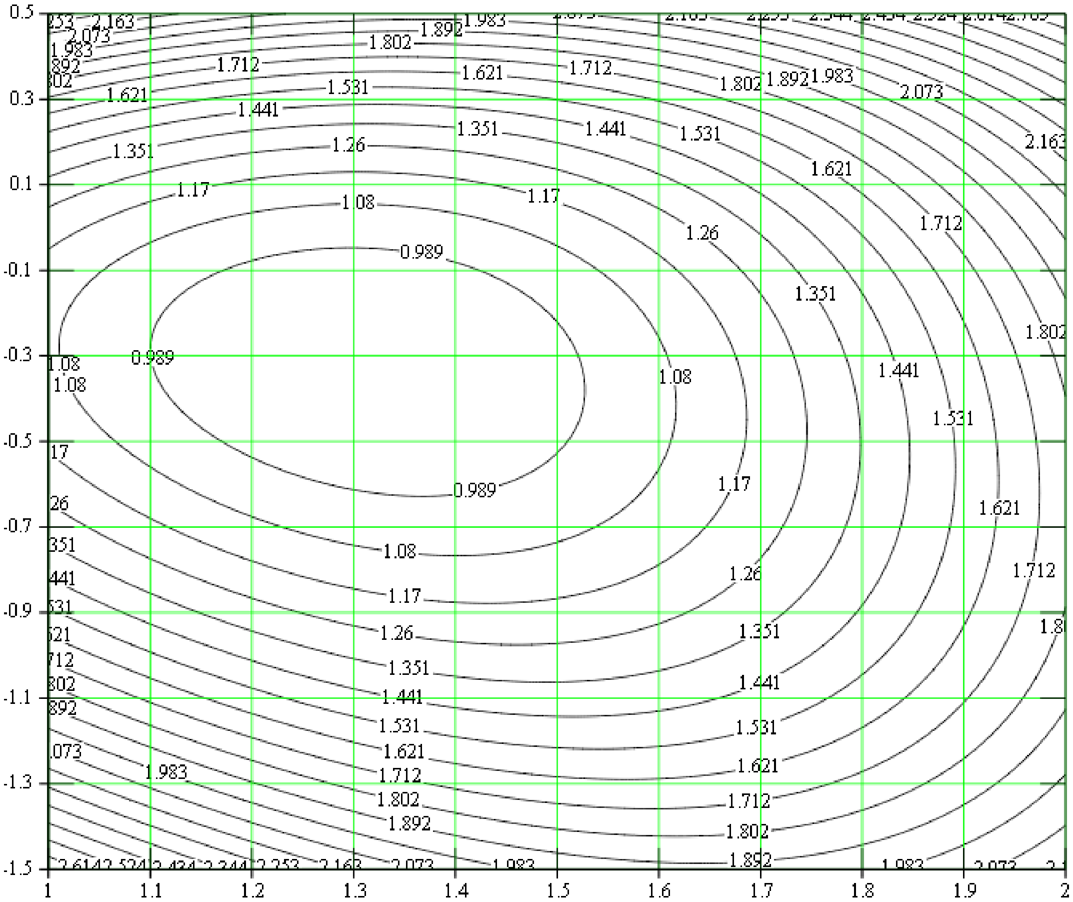
Решение.

1. Вводим функцию:

$$f(x,y) := x^2 + y^2 + 2\cdot y - 2\cdot x + e^{2\cdot y} - 2\cdot y\cdot\cos(x) - 2\cdot x\cdot e^{y} + (\cos(x))^2 - 2\cos(x) + 4$$

Строим линии уровня в заданном прямоугольнике. Через команду «Свойства» («Format») заказываем на графике 20 линий уровня, устанавливаем сетку по 10 линий по обеим осям, указываем границы прямоугольника. Число значений аргументов берём по 100 для каждой оси.

$$B := \mathrm{CreateMesh}(f, 1, 2, -1.5, 0.5, 100, 100)$$



B

2. Находим приближённо по графику координаты точки экстремума внутри замкнутой линии:

$x_0 \approx 1.35$, $y_0 \approx -0.3$,

что соответствует значению функции:

$f(x_0, y_0) \approx 0.902$

3. Находим частные производные:

$$\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow 2\cdot x + 2\cdot\sin(x) - 2\cdot e^{y} - 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) + 2\cdot y\cdot\sin(x) - 2$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow 2\cdot y + 2\cdot e^{2\cdot y} - 2\cdot\cos(x) - 2\cdot x\cdot e^{y} + 2$$

Вводим новые функции $f'x(x,y)$, $f'y(x,y)$ и присваиваем найденные производные:

$$f'x(x,y) := 2\cdot x + 2\cdot\sin(x) - 2\cdot e^{y} - 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) + 2\cdot y\cdot\sin(x) - 2$$

$$f'y(x,y) := 2\cdot y + 2\cdot e^{2\cdot y} - 2\cdot\cos(x) - 2\cdot x\cdot e^{y} + 2$$

При помощи блока команд GIVEN…FIND решаем систему для нахождения точных координат точки экстремума.

GIVEN

$x := 1.35$ $\qquad$ $y := -0.3$ $\qquad$ - начальное приближение к корню

$f'x(x,y) = 0$ $\qquad$ $f'y(x,y) = 0$

$$\begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x,y)$$

$x0 = 1.314$ $\qquad$ $y0 = -0.319$ $\qquad$ $f(x0,y0) = 0.899$

4. Находим вторые частные производные и их значения в критической точке.

$f''xx(x,y) := \frac{d}{dx}f'x(x,y)$ $\qquad$ $f''yy(x,y) := \frac{d}{dx}f'x(x,y)$ $\qquad$ $f''xy(x,y) := \frac{d}{dx}f'y(x,y)$

$A := f''xx(x0,y0)$ $\qquad$ $B := f''yy(x0,y0)$ $\qquad$ $C := f''xy(x0,y0)$

5. Определяем тип критической точки, применяя достаточные условия экстремума.

$A = 4.088$ $\qquad B = 4.088$ $\qquad C = 0.481$

$D := A \cdot B - C^2$ $\qquad D = 16.478$

Так как $D > 0$, $A > 0$, приходим к заключению:

В точке x0 = 1.314, y0 = –0.319 функция f(*x*, *y*) имеет локальный минимум. Значение функции в этой точке f(x0, y0) = 0.899.

Задание

- Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x,y)=9x^2+4y^2-8y+6x\cos y-4y\sin x+\cos^2 y-\cos^2 x+6$$

в области *D*, ограниченной неравенствами $-3\le x\le 2,\ -1\le y\le 5$.

1. Изобразите линии уровня функции $f(x,y)$ в области *D*.
2. Определите по графику приближённые координаты точки экстремума.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\end{cases}$ и найдите точку, подозрительную на экстремум.
4. Вычислите значения вторых производных $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ в полученной точке и проверьте выполнение достаточных условий экстремума.
5. Определите тип экстремума и найдите значение функции $f(x,y)$ в этой точке.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение экстремума функций двух переменных.
2. Необходимые условия экстремума функции двух переменных.
3. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.
4. Опишите, как найти экстремум функции $f(x,y)$.
5. Понятие дифференцируемости функции двух переменных.
6. Сформулируйте правила отыскания частных производных $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$.
7. Что такое линии уровня функции $f(x,y)$?

2.6 Лабораторная работа «Вычисление определённых интегралов»

Цель работы

Освоить следующие способы вычисления определённых интегралов:
1) Символьные вычисления
2) Вычисление интегралов методом их замены интегральной суммой
3) Точные и приближённые вычисления несобственных интегралов

Теоретические основы

Рекомендуется изучить разделы «Определённый интеграл. Определение, свойства, существование», «Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница», «Приближённое вычисление определённого интеграла», «Несобственные интегралы» в пособии Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения: Учебное пособие / Ельцов А. А., Ельцова Т. А. — 2003. 235 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примерах.

Задание 1. Найти определённые интегралы:

1) $\int_{-1}^{2} \frac{x+1}{x^3+2x+3}dx$; 2) $\int_{a}^{\pi} \frac{x-a}{x^2+1}dx$; 3) $\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{x^2+x+1}dx$

- Для первого и второго интегралов найти точные символьные выражения, используя знак $\rightarrow$.
- Третий («неберущийся») интеграл заменить интегральной суммой и вычислить приближённое значение. Найти абсолютную погрешность, допускаемую при этом. Определить число отрезков разбиения для достижения абсолютной точности вычисления 10^{-3}.

Задание 2. Найти несобственные интегралы:

1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{e^x+1}dx$

- Первый интеграл найти точно, используя знак $\rightarrow$.
- Второй интеграл найти с точностью до 10^{-5}, заменяя данный несобственный интеграл собственным, подбирая большое число вместо $+\infty$.

Решение.

1. Используя знак $\to$ вычисляем первый и второй интегралы:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x+1}{x^3+2\cdot x+3}\,dx \to \frac{4\cdot\sqrt{11}\cdot \mathrm{atan}\left(\frac{3\cdot\sqrt{11}}{11}\right)}{11} = 0.887$$

$$\int_{a}^{\pi} \frac{(x-a)}{x^2+1}\,dx \text{ simplify } \to \frac{\ln\left(\pi^2+1\right)}{2} - \frac{\ln\left(a^2+1\right)}{2} + a\cdot \mathrm{atan}(a) - a\cdot \mathrm{atan}(\pi)$$

- Найдём интеграл $\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{x^2+x+1} dx$. Непосредственное интегрирование с точностью 10^{-5} даёт:

$$TOL := 10^{-5}$$

$$I_0 := \int_{-1}^{2} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1}\,dx \qquad I_0 = -0.11895$$

- Заменим интеграл частичной суммой и вычислим приближённое значение.

Вводим нижние и верхние пределы:

$a := -1 \qquad b := 2$

Число разбиений отрезка интегрирования выберем равным:

$n := 10$,

что соответствует длине промежутка:

$$\Delta x := \frac{b-a}{n} \qquad \Delta x = 0.3$$

Вычисляем аргумент и функцию в середине каждого отрезка разбиения:

$$i := 1..n$$

$$x_i := a + i\cdot\Delta x - \frac{\Delta x}{2}$$

$$f_i := \frac{\sin(x_i)}{(x_i)^2 + x_i + 1}$$

Получаем приближённое значение интеграла:

$$I_{10} := \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$I_{10} = -0.11958$$

Допускаемая при этом абсолютная погрешность:

$$\delta := |I_0 - I_{10}| \qquad \delta = 6.297 \times 10^{-4}$$

- Будем теперь менять число отрезков разбиения (а значит, и ширину отрезков) и каждый раз вычислять частичную сумму:

$$a := -1 \qquad b := 2$$

$$n := 20$$

$$j := 1..n$$

$$i := 1..n$$

$$\Delta x_j := \frac{b-a}{j}$$

$$x_{i,j} := a + i\cdot\Delta x_j - \frac{\Delta x_j}{2}$$

$$f_{i,j} := \frac{\sin(x_{i,j})}{(x_{i,j})^2 + x_{i,j} + 1}$$

$$I_j := \Delta x_j \cdot \sum_{i=1}^{j} f_{i,j}$$

$\delta_j := |I_0 - I_j|$

Выведем на экран значения частичных сумм и абсолютных погрешностей:

I =

	0
0	-0.11895
1	0.82187
2	-0.08337
3	-0.15528
4	-0.13095
5	-0.12274
6	-0.12099
7	-0.12037
8	-0.12
9	-0.11975
10	-0.11958
11	-0.11946
12	-0.11937
13	...

δ =

	0
0	0
1	0.94082
2	0.03558
3	0.03633
4	0.012
5	$3.7898\cdot10^{-3}$
6	$2.03598\cdot10^{-3}$
7	$1.42162\cdot10^{-3}$
8	$1.04802\cdot10^{-3}$
9	$7.99157\cdot10^{-4}$
10	$6.29711\cdot10^{-4}$
11	$5.09842\cdot10^{-4}$
12	$4.21758\cdot10^{-4}$
13	...

Таким образом, для достижения точности 10^{-3} достаточно n = 9 отрезков разбиения.

2. Используя знак $\rightarrow$ вычисляем первый интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2} = 1.25331$$

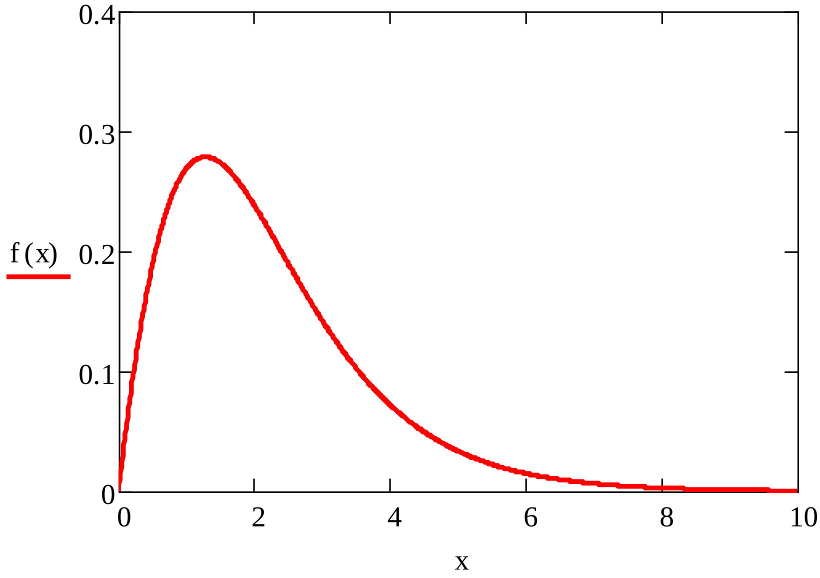
- С точностью 10^{-5} вычислим второй интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x}{e^x+1}dx$, заменяя бесконечный предел конечным.

Непосредственное вычисление такого интеграла не даёт результата:

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{e^x + 1}\,dx = ▪$$

Сначала решим уравнение $\frac{b}{e^b+1}=0.00001$.

Для определения начального приближения к корню построим график подынтегральной функции $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$.



Видим, что нужный корень лежит в области $x > 4$.

Вводим функцию, начальное приближение и получаем необходимое значение b:

$$f1(x) := \frac{x}{e^x+1} - 0.00001$$

$$x := 4$$

$$b := \mathrm{root}(f1(x), x)$$

$$b = 14.164$$

Подставляем значение $b = 15$ и вычисляем интеграл:

$$\int_2^{15} \frac{x}{e^x+1}\,dx = 0.38486$$

Оценим оставшуюся часть интеграла. Имеет место неравенство:

$$\int_b^{+\infty} \frac{x}{e^x+1}dx < \int_b^{+\infty} x \cdot e^{-x}dx$$

Считаем интеграл:

$$\int_{15}^{\infty} x \cdot e^{-x}\, dx = 4.89439 \times 10^{-6}$$

Таким образом, требуемая точность вычисления 10^{-5} достигнута.

Задание

Задание 1. Найти определённые интегралы:

1) $\int\limits_{-1}^{3} \left(x^3 + x\right) \cdot e^{-2x} dx$; 2) $\int\limits_{\alpha}^{\pi} \sin^2\left(\alpha \cdot x - \frac{\pi}{6}\right) dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^4 + x^2 + 1}\, dx$.

- Для первого и второго интегралов найти точные символьные выражения, используя знак $\rightarrow$.
- Третий («неберущийся») интеграл заменить интегральной суммой и вычислить приближённое значение. Найти абсолютную погрешность, допускаемую при этом. Определить число отрезков разбиения для достижения абсолютной точности вычисления 10^{-3}.

Задание 2. Найти несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^3 + x^2 + 2}{3^{x^2}} dx$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3 + \sin x} dx$.

- Первый интеграл найти точно, используя знак $\rightarrow$.
- Второй интеграл найти с точностью до 10^{-5}, заменяя данный несобственный интеграл собственным, подбирая большое число вместо $+\infty$.

Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой?
2. Опишите процесс построения интегральной суммы для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
3. Перечислите свойства определённого интеграла.
4. Запишите и поясните формулу Ньютона-Лейбница.
5. Дайте определение несобственных интегралов первого рода, их сходимости и расходимости. Приведите примеры.
6. Дайте определение несобственных интегралов второго рода, их сходимости и расходимости. Приведите примеры.
7. Запишите и поясните формулу Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов первого и второго рода. Приведите примеры.

2.7 Лабораторная работа «Приложения определённых интегралов»

Цель работы

Изучение геометрических и физических приложений определённого интеграла:
1) Определение площади плоской фигуры и длины кривой
2) Определение площади поверхности и объёма тела вращения
3) Расчёт кинетической энергии вращательного движения тела

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Приложения определённого интеграла» в пособии Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения:
Учебное пособие / Ельцов А. А., Ельцова Т. А. — 2003. 235 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере решения задания.

Задание. Плоская фигура ограничена линиями $y = x + 1 + \sqrt{-x^2 + 5x + 5}$ и $y = \frac{3}{2}x + 2$.

1. Постройте совместно графики обеих линий и найдите координаты точек пресечения.

2. Найдите площадь, периметр, а также координаты центра тяжести плоской фигуры.

3. Найдите объём и поверхность тела, образованного вращением фигуры вокруг оси X. Рассчитайте координату центра тяжести полученного тела вращения на оси X.

4. Определите кинетическую энергию вращения полученного тела вокруг оси X с угловой скоростью 5π рад/с. Удельный вес тела равен 8 т/м^3. Размеры тела даны в метрах. Ответ получить в Джоулях.

Решение.

1. Вводим уравнения линий:

$$yv(x) := x + 1 + \sqrt{-x^2 + 5\cdot x + 5} \qquad yn(x) := \frac{3}{2}\cdot x + 2$$

Выразим из уравнений *x* через *y*:

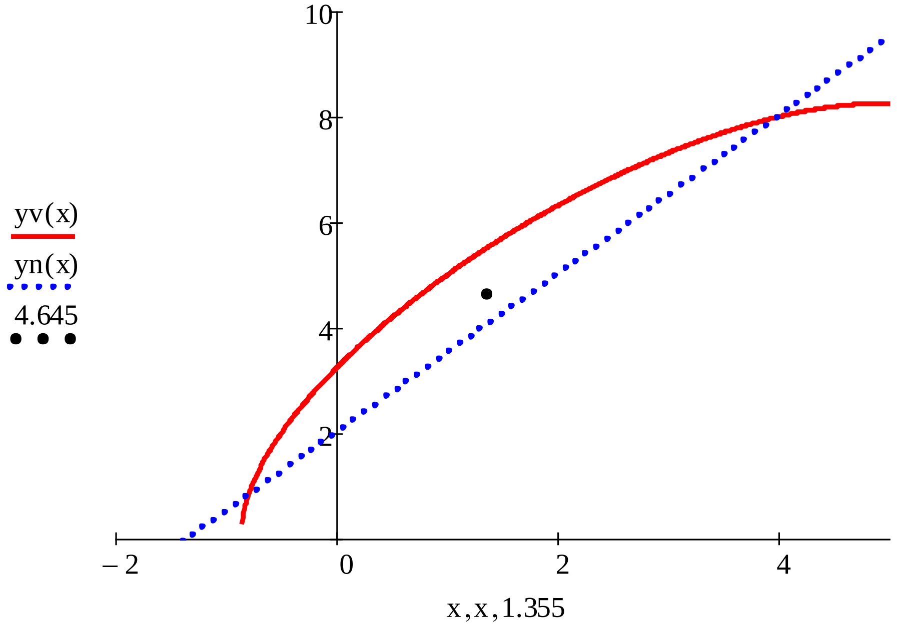
$$y = yv(x)\ \text{solve}\ ,x\ \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{28\cdot y - 4\cdot y^2 + 41}}{4} + \frac{3}{4} \\ \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{28\cdot y - 4\cdot y^2 + 41}}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$y = yn(x)\ \text{solve}\ ,x\ \rightarrow \frac{2\cdot y}{3} - \frac{4}{3}$$

$$xv(y) := \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{28\cdot y - 4\cdot y^2 + 41}}{4} + \frac{3}{4}$$

$$xn(y) := \frac{2\cdot y}{3} - \frac{4}{3}$$

Строим графики функций yv(x) и yn(x). Точка внутри графика – центр тяжести. Его мы отмечаем позже.



Находим точки пересечения графиков (начальные приближения x0 определяются по графику):

$x0 := -1 \qquad x1 := \mathrm{root}(yv(x0) - yn(x0), x0) \qquad x1 = -0.8 \qquad y1 := yv(x1) \qquad y1 = 0.8$

$x0 := 4 \qquad x2 := \mathrm{root}(yv(x0) - yn(x0), x0) \qquad x2 = 4 \qquad y2 := yv(x2) \qquad y2 = 8$

2. Площадь фигуры:

$$S := \int_{x1}^{x2} (yv(x) - yn(x))\,dx \qquad S = 5.032 \ \text{м}^2$$

Периметр:

$$P := \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}yv(x)\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}yn(x)\right)^2}\,dx \qquad P = 17.539 \ \text{м}$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$xc := \frac{1}{S}\cdot\int_{x1}^{x2} (yv(x) - yn(x))\cdot x\,dx \qquad xc = 1.355 \ \text{м}$$

$$yc := \frac{1}{S}\cdot\int_{y1}^{y2} (xn(y) - xv(y))\cdot y\,dy \qquad yc = 4.645 \ \text{м}$$

3. Объём тела вращения:

$$V := \int_{x1}^{x2} \left(yv(x)^2 - yn(x)^2\right)\cdot\pi\,dx \qquad V = 146.852 \ \text{м}^3$$

Площадь поверхности:

$$Sv := \int_{x1}^{x2} 2\cdot\pi\cdot yv(x)\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}yv(x)\right)^2}\,dx$$

$$Sn := \int_{x1}^{x2} 2\cdot\pi\cdot yn(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}yn(x)\right)^2}\,dx$$

$So := Sv + Sn$ $\qquad$ $So = 503.046$ м^2

Координата центра тяжести тела вращения:

$$Xc := \frac{1}{V}\cdot\int_{x1}^{x2}\left(yv(x)^2 - yn(x)^2\right)\cdot\pi\cdot x\,dx \qquad Xc = 1.744 \text{ м}$$

4. Найдём кинетическую энергию вращения полученного тела. Вводим данные (угловую частоту и удельный вес):

$\omega := 5\cdot\pi$ рад/с $\qquad$ $\gamma := 8000$ кг/м^3

Линейная скорость точек тела:

$v(y) := \omega\cdot y$

Масса точек тела:

$m(y) := (xn(y) - xv(y))\cdot 2\cdot\pi\cdot y\cdot\gamma$

Кинетическая энергия вращения:

$$K := \int_{y1}^{y2} m(y)\cdot v(y)^2\,dy \qquad K = 8.629\times 10^9 \text{ Дж}$$

Задание

- Плоская фигура ограничена линиями $y = 1 + \sqrt{3 - x - x^4}$ и $y = x^2 + 2$.

1. Постройте совместно графики обеих линий и найдите координаты точек пресечения.

2. Найдите площадь, периметр, а также координаты центра тяжести плоской фигуры.

3. Найдите объём и поверхность тела, образованного вращением фигуры вокруг оси X.

4. Найдите координату центра тяжести полученного тела вращения на оси X.

Контрольные вопросы

1. Как найти площадь фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$ и осью X ?
2. Запишите формулу для отыскания длины кривой, заданной явно уравнением $y = f(x)$.
3. Плоская фигура ограничена линиями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Фигура вращается относительно оси X. Запишите формулы для отыскания
   - Объёма тела вращения
   - Площади поверхности тела вращения
   - Кинетической энергии вращательного движения тела
4. Как найти указанные в предыдущем вопросе параметры, если фигура вращается относительно оси Y ?
5. Как Вы понимаете термины «центр тяжести плоской фигуры», «центр тяжести тела вращения» ?

2.8 Лабораторная работа
«Решение дифференциальных уравнений второго порядка»

Цель работы

Обретение навыков решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Уравнения высших порядков» в пособии Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения:
Учебное пособие / Ельцов А. А., Ельцова Т. А. — 2003. 235 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере решения заданий.

Задание 1. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+16.25y=\sin 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0.1$, $y'(0)=0$.

- Дифференциальное уравнение решить с помощью функции Odesolve на промежутке [0; 20].
- Построить график решения.

Задание 2. Тело массы $m = 1$ кг находилось в покое в момент времени $t_0 = 0$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ на оси X . Затем под действием переменной силы $F = -\sin(x)+\frac{\cos \mathrm{v}}{t^2+1}-\sin t$ тело стало двигаться вдоль оси X **.** Найти положение тела x и его скорость v в момент времени $t_1 = 20$ с.

- Решить полученное дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутта на промежутке [0; t_1]. Применить функцию Rkadapt.
- Полученные в виде таблицы решение $x(t)$ и его производную $x'(t)$ интерполировать кубическим сплайном при помощи функций interp и cspline. Построить график решения на промежутке [0; t_1].
- Найти значения $x(t_1)$, $x'(t_1)$, $x''(t_1)$, подставить в разность между левой и правой частями уравнения и найти невязку Err(t_1).

Решение.

1. При помощи блока команд Given…Odesolve решаем дифференциальное уравнение:

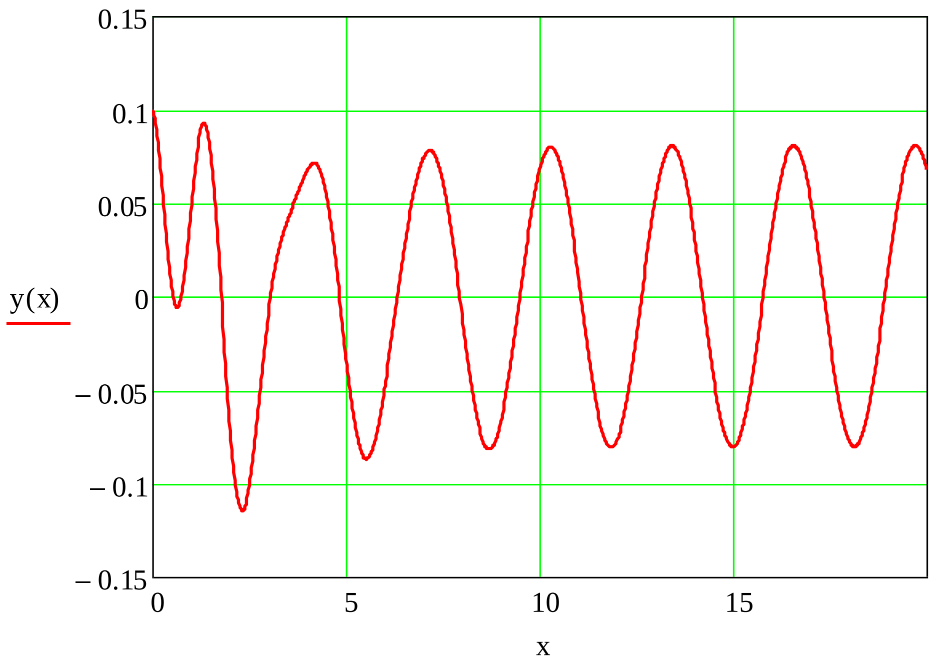
Given

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{d}{dx}y(x) + 16.25 \cdot y(x) - \sin(2 \cdot x) = 0$$

$y(0) = 0.1$ $\quad$ $y'(0) = 0$

$y := \text{Odesolve}(x, 20)$

Результатом решения является функция $y(x)$, график которой представлен на рисунке.



2. Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x + \frac{\cos(\text{v})}{t^2+1} - \sin t$$

Решим данное уравнение. Устанавливаем начало индексации и точность:

$\text{ORIGIN} := 1$ $\quad$ $\text{TOL} := 10^{-5}$

Вводим правую часть уравнения:

$$f(x, x', t) := -\sin(x) + \frac{\cos(x')}{t^2 + 1} - \sin(t)$$

Указываем начальные условия:

$t0 := 0 \qquad x0 := \frac{\pi}{2} \qquad x'0 := 0$

Указываем правый конец промежутка и число итераций:

$t1 := 20 \qquad N := 2000$

Решаем дифференциальное уравнение посредством функции Rkadapt:

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x'0 \end{pmatrix} \qquad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}$

$R := \mathrm{Rkadapt}(x, t0, t1, N, D)$

Результат решения – матрица R, состоящая из трёх столбцов. Извлекаем из полученной матрицы столбец аргументов T, столбец соответствующих значений искомой функции X (положений тела на оси x в данные моменты времени) и столбец скоростей тела в данные моменты времени X':

$T := R^{\langle 1\rangle} \qquad X := R^{\langle 2\rangle} \qquad X' := R^{\langle 3\rangle}$

Для получения непрерывной функции y(x) применяем кубическую интерполяцию. Решение получаем при помощи блока функций cspline, interp:

$V1 := \mathrm{cspline}(T, X) \qquad x(t) := \mathrm{interp}(V1, T, X, t)$

$V2 := \mathrm{cspline}(T, X') \qquad x'(t) := \mathrm{interp}(V2, T, X', t)$

Находим положение тела и его скорость в момент времени t1:

$x(t1) = -6.675 \qquad x'(t1) = -2.072$

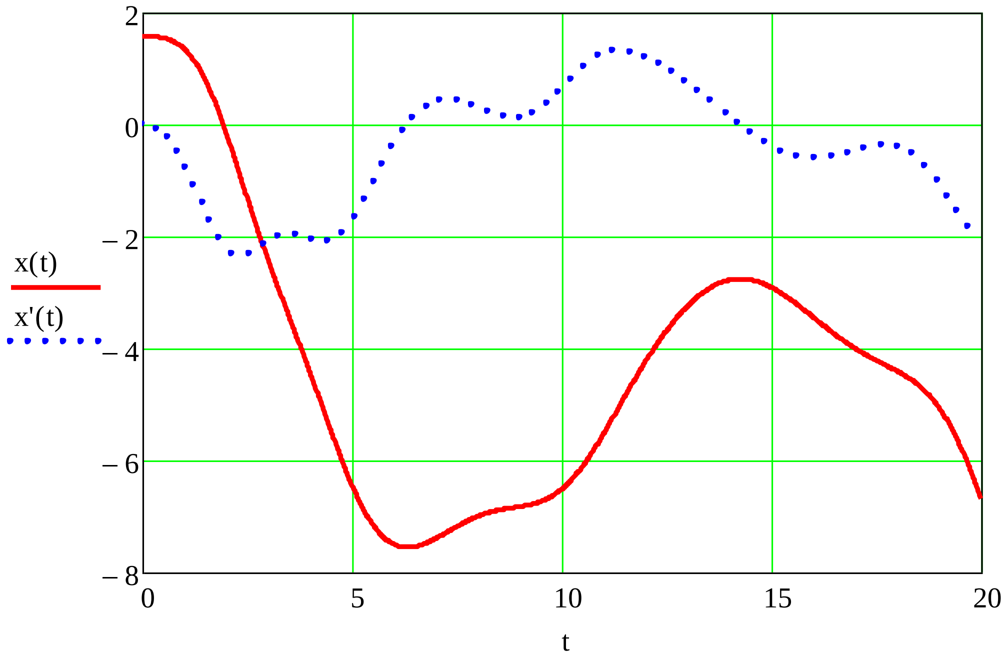
Находим вторую производную от решения, функцию невязки и подставляем значения аргумента на конце интервала:

$x''(t) := \frac{d}{dt} x'(t)$

$\mathrm{Err}(t) := x''(t) - f(x(t), x'(t), t)$

$\mathrm{Err}(t1) = 1.875 \times 10^{-6}$

Строим график зависимости координаты тела и его скорости от времени:



Задание

1. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка $\dfrac{d^2y}{dt^2}+6\dfrac{dy}{dt}+9y=10\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y'(0)=y(0)=0$.

- Дифференциальное уравнение решить с помощью функции Odesolve на промежутке [0; 20].
- Построить график решения.

2. Тело массы m = 1 кг находилось в покое в момент времени $t_0 = 0$ в точке $x = 0$ на оси X . Затем под действием переменной силы $F = \dfrac{\cos(xt)}{\text{v}+2}$ тело стало двигаться вдоль оси X **.** Найти положение тела x и его скорость v в момент времени t_1 = 12 с.

- Решить полученное дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутта на промежутке [0; t_1]. Применить функцию Rkadapt.
- Полученные в виде таблицы решение $x(t)$ и его производную $x'(t)$ интерполировать кубическим сплайном при помощи функций interp и cspline. Построить график решения на промежутке [0; t_1].
- Найти значения $x(t_1)$, $x'(t_1)$, $x''(t_1)$, подставить в разность между левой и правой частями уравнения и найти невязку Err(t_1).

Контрольные вопросы

1. Что называют дифференциальным уравнением второго порядка?
2. Приведите примеры задач, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений второго порядка.
3. Дайте определение общего и частного решений для уравнений второго порядка.
4. Интегрирование однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Приведите примеры.
5. Метод вариации интегрирования линейных неоднородных уравнений второго порядка. Приведите примеры.
6. Метод подбора частных решений по виду правой части линейных неоднородных уравнений второго порядка. Приведите примеры.

2.9 Лабораторная работа «Проверка сходимости числовых рядов»

Цель работы

Численное и аналитическое исследование сходимости числовых рядов.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Числовые ряды» в пособии Магазинников Л. И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 206 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере решения задания.

Задание. Численно и аналитически исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right). \qquad (1)$$

- Численное исследование сходимости.

Посмотрим, как ведёт себя частичная сумма. Подсчитаем частичные суммы S1 и построим графики зависимости частичных сумм S1 от количества слагаемых *k*.

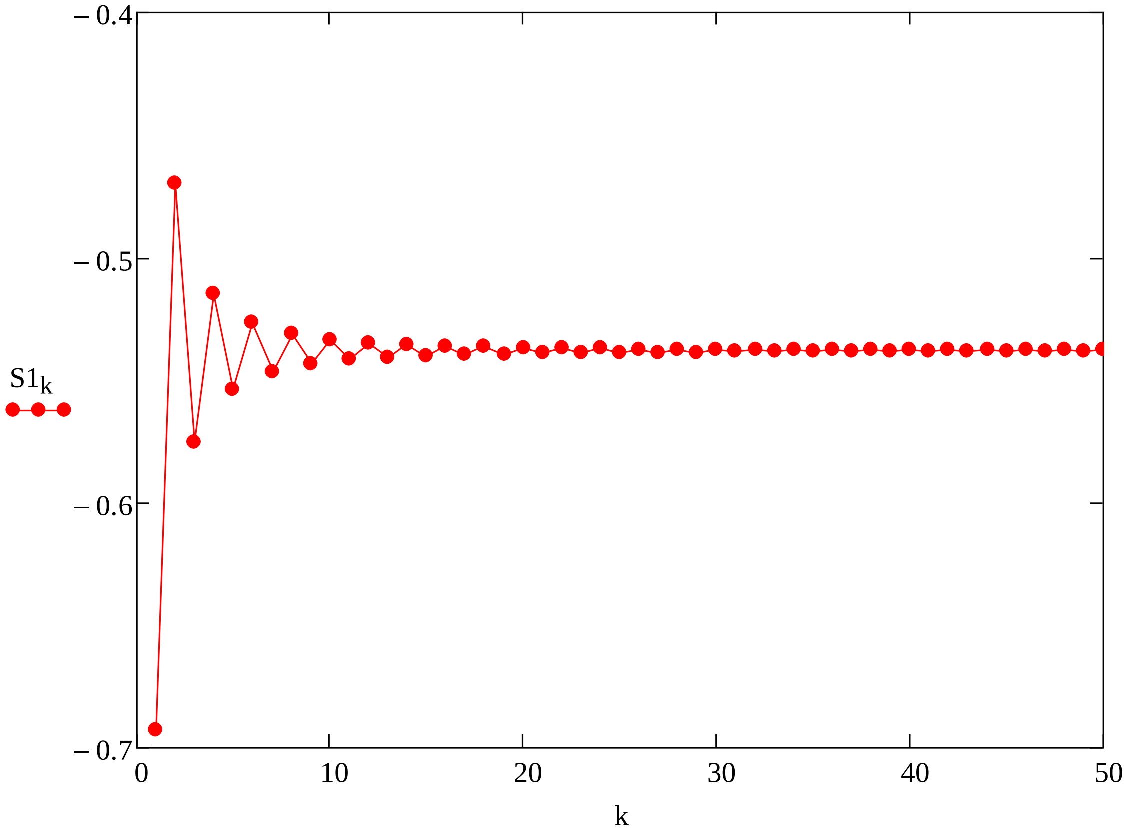
$$kmax := 50 \qquad k := 1..kmax$$

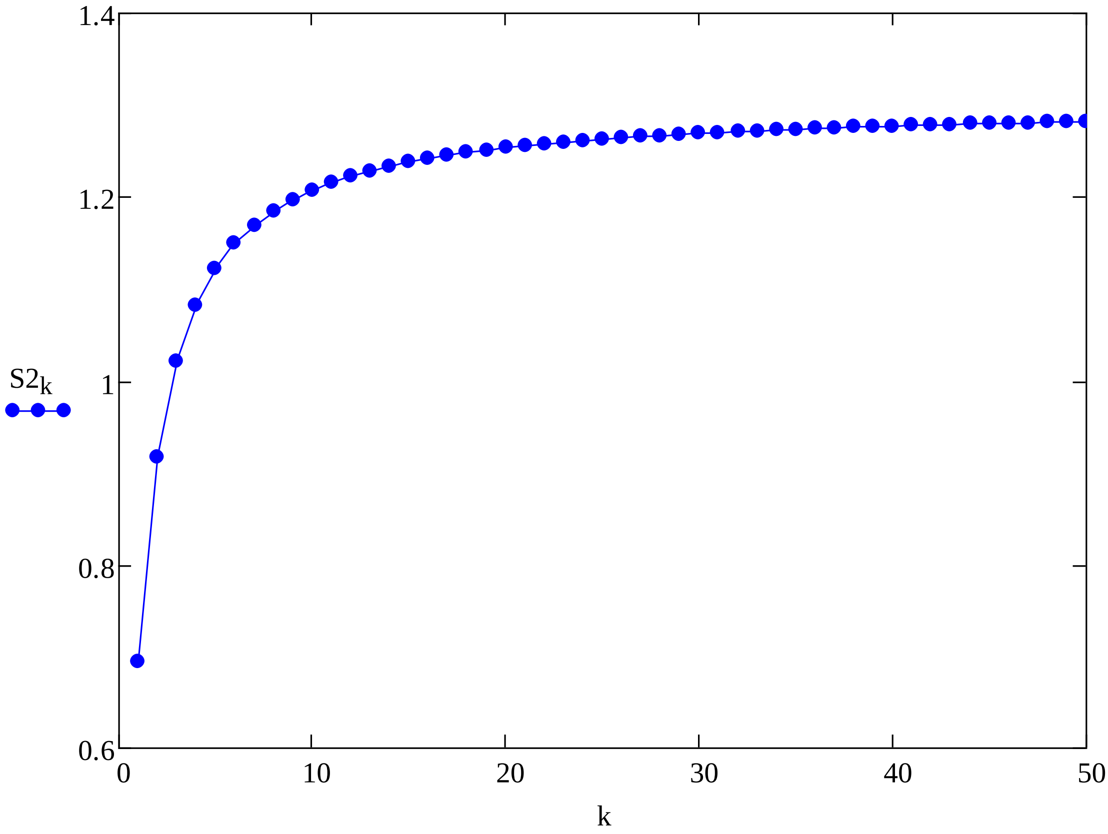
$$S1_k := \sum_{n=1}^{k}\left[(-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

Частичная сумма S1 стремится к постоянному конечному значению. Выдвигаем предположение, что ряд (1) сходится.

Поскольку ряд знакочередующийся, исследуем его на условную и абсолютную сходимость. Для этого подсчитаем частичные суммы S2 ряда (1), составленного из модулей:

$$S2_k := \sum_{n=1}^{k} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$


– 0.4
– 0.5
– 0.6
– 0.7
S1k
0
10
20
30
40
50
k


1.4
1.2
1
0.8
0.6
S2k
0
10
20
30
40
50
k

С увеличением n частичная сумма S2 стремится к некоторому постоянному значению (при необходимости, число слагаемых k можно изменить). Выдвигаем предположение, что ряд (1) сходится абсолютно.

- Аналитическое исследование сходимости.

Сравним ряд (1) со следующим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}. \tag{2}$$

По признаку Лейбница ряд (2) сходится.

Ряд, составленный из модулей членов ряда (2), сходится, как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ (здесь s=2).

Таким образом, ряд (1) сходится абсолютно.

Задание

Численно и аналитически исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{3^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!(3^n+1)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$

Контрольные вопросы

1. Что называют числовым рядом?
2. Дайте определение сходящихся и расходящихся числовых рядов. Приведите примеры.
3. Сформулируйте необходимый и достаточный признак сходимости. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.
4. Сформулируйте необходимый признак сходимости числовых рядов.
5. Дайте определения условной и абсолютной сходимости ряда.
6. Сформулируйте признаки сравнения абсолютной сходимости рядов.
7. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости ряда.
8. Что называют знакочередующимися рядами? Признаки их сходимости.

2.10 Лабораторная работа «Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена»

Цель работы

Изучение правил разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена. Определение области сходимости рядов. Приближённое вычисление интеграла с помощью рядов.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Степенные ряды. Ряды Тейлора» в пособии Магазинников Л. И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 206 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере решения заданий.

Задание 1. Найти первые 5 слагаемых ряда Тейлора для функции $f(x) = \dfrac{\sin x - 2}{x^2 - x + 1}$ в точке $x_0 = 1$, вычисляя непосредственно производные в точке x_0 и подставляя в формулу Тейлора. Записать частичную сумму $S_5(x)$. Построить совместно графики функций $f(x)$ и $S_5(x)$ в окрестности точки x_0. По совпадению графиков визуально найти ориентировочную область сходимости ряда Тейлора.

Задание 2. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2 + 3x - 2}$ в ряд Маклорена. Вывести на экран 5 слагаемых.

Задание 3. Найти интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Записать частичные суммы $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$ и $S_5(x)$. Вычислить интегралы от каждой частичной суммы, а также абсолютные погрешности, допускаемые при вычислении интегралов.

Задание 4. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 - x - 1}$ в точке $x_0 = 1$, применяя команду series.

Решение.

1. Считаем частичную сумму S5(x):

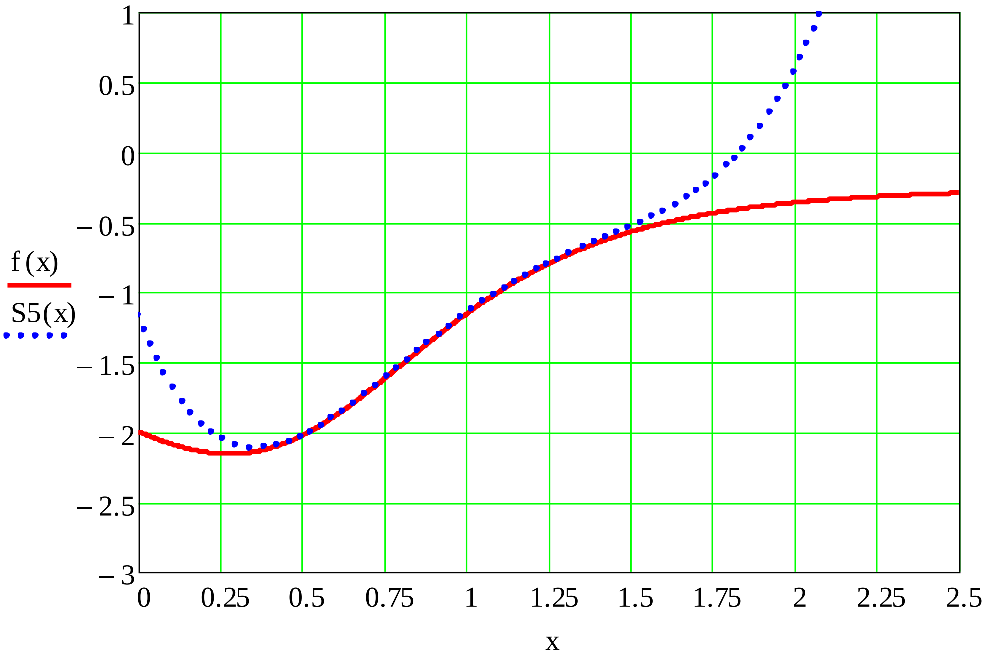
$$f(x) := \frac{\sin(x) - 2}{x^2 - x + 1}$$

$$x0 := 1$$

$$F(x, k) := \frac{d^k}{dx^k} f(x)$$

$$S5(x) := \sum_{k=0}^{4} \left[\frac{1}{k!} \cdot F(x0, k) \cdot (x - x0)^k \right]$$

Строим графики функций f(x) и S5(x).



Из графика следует, что область сходимости – приблизительно интервал (0.4; 1.3).

2. Набираем функцию

$$\frac{x+1}{2\cdot x^2+3\cdot x-2}$$

Подводим курсор под любую из букв x. Нажимаем кнопки «Символьные операции» (Symbolics), «Переменная» (Variable), «Разложить в ряд» (Expand to Series). Получаем ответ:

$$-\frac{1}{2}-\frac{5\cdot x}{4}-\frac{19\cdot x^2}{8}-\frac{77\cdot x^3}{16}-\frac{307\cdot x^4}{32}$$

Таким образом:

$$\frac{x+1}{2x^2+3x-2}=-\frac{1}{2}-\frac{5x}{4}-\frac{19x^2}{8}-\frac{77x^3}{16}-\frac{307x^4}{32}+\mathrm{o}(x^5)$$

3. Задаём точность и вычисляем интеграл:

$$\mathrm{TOL} := 10^{-5}$$

$$I_0 := \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

$$I_0 = 0.74682$$

Найдём интеграл другим способом. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Получаем:

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}+\mathrm{o}(x^{10})$$

Вводим частичные суммы:

$$S1(x) := 1$$

$$S2(x) := S1(x)-x^2 \qquad S3(x) := S2(x)+\frac{x^4}{2}$$

$$S4(x) := S3(x)-\frac{x^6}{6} \qquad S5(x) := S4(x)+\frac{x^8}{24}$$

Вычисляем интегралы и абсолютные погрешности:

$$I_1 := \int_0^1 S1(x)\,dx \qquad I_1 = 1 \qquad \delta_1 := |I_0 - I_1| \qquad \delta_1 = 0.253$$

$$I_2 := \int_0^1 S2(x)\,dx \qquad I_2 = 0.66667 \qquad \delta_2 := |I_0 - I_2| \qquad \delta_2 = 0.08$$

$$I_3 := \int_0^1 S3(x)\,dx \qquad I_3 = 0.76667 \qquad \delta_3 := |I_0 - I_3| \qquad \delta_3 = 0.02$$

$$I_4 := \int_0^1 S4(x)\,dx \qquad I_4 = 0.74286 \qquad \delta_4 := |I_0 - I_4| \qquad \delta_4 = 3.967 \times 10^{-3}$$

$$I_5 := \int_0^1 S5(x)\,dx \qquad I_5 = 0.74749 \qquad \delta_5 := |I_0 - I_5| \qquad \delta_5 = 6.626 \times 10^{-4}$$

Таким образом, интеграл от пятой частичной суммы $I_5 \approx 0.7475$ найден с абсолютной погрешностью $\delta_5 \approx 6 \cdot 10^{-4}$.

4. Применяя команду series, раскладываем в ряд Тейлора заданную функцию. Выводим на экран 5 слагаемых.

$$\frac{2-x}{x^2-x-1} \text{ series }, x = 1 \ \rightarrow -1 - (x-1)^2 - (x-1)^3 - 2\cdot(x-1)^4 - 3\cdot(x-1)^5$$

Разложение произведено в окрестности точки $x_0 = 1$.

Задание

1. Найти первые 5 слагаемых ряда Тейлора для функции $f(x) = \dfrac{2-\sin x}{x^2-x-1}$ в точке $x_0 = 1$, вычисляя непосредственно производные в точке x_0 и подставляя в формулу Тейлора. Записать частичную сумму $S_5(x)$. Построить совместно графики функций $f(x)$ и $S_5(x)$ в окрестности точки x_0. По совпадению графиков визуально найти ориентировочную область сходимости ряда Тейлора.

2. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^3+3}$ в ряд Маклорена. Вывести на экран 5 слагаемых.

3. Найти интеграл $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$, раскладывая подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Записать частичные суммы $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$ и $S_5(x)$. Вычислить интегралы от каждой частичной суммы, а также абсолютные погрешности, допускаемые при вычислении интегралов.

4. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ в точке $x_0 = 1$, применяя команду series.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятие функционального ряда, области сходимости функционального ряда.
2. Дайте определение равномерной и неравномерной сходимости функционального ряда.
3. Сформулируйте признак Вейерштрасса для равномерной сходимости функционального ряда.
4. Что называют степенными рядами? Дайте определения области сходимости, радиуса сходимости. Сформулируйте теорему Абеля.
5. Какой степенной ряд называется рядом Тейлора? Как определяются коэффициенты этого ряда?
6. В чём состоит необходимое и достаточное условие сходимости функции $f(x)$ к своему ряду Тейлора? Только достаточное?
7. Запишите общий вид ряда Тейлора, а также ряд Тейлора для функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \operatorname{arctg} x, (1+x)^\alpha$.
8. При решении каких задач применяются ряды Тейлора? Приведите примеры.
9. В чём отличие между рядами Тейлора и рядами Маклорена?

2.11 Лабораторная работа
«Построение графиков частичных сумм ряда Фурье»

Цель работы

1) Изучение правил разложения функций в тригонометрический ряд Фурье;
2) Построение графиков частичных сумм.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить раздел «Ряды Фурье» в пособии Магазинников Л. И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 206 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере решения задания.

Задание. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ -2<x<0,\\ x,\ \textit{если}\ 0\le x\le 2\end{cases}$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–2, 2].

Решение.

Определяем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx=1,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2-\frac{1}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+\frac{1}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

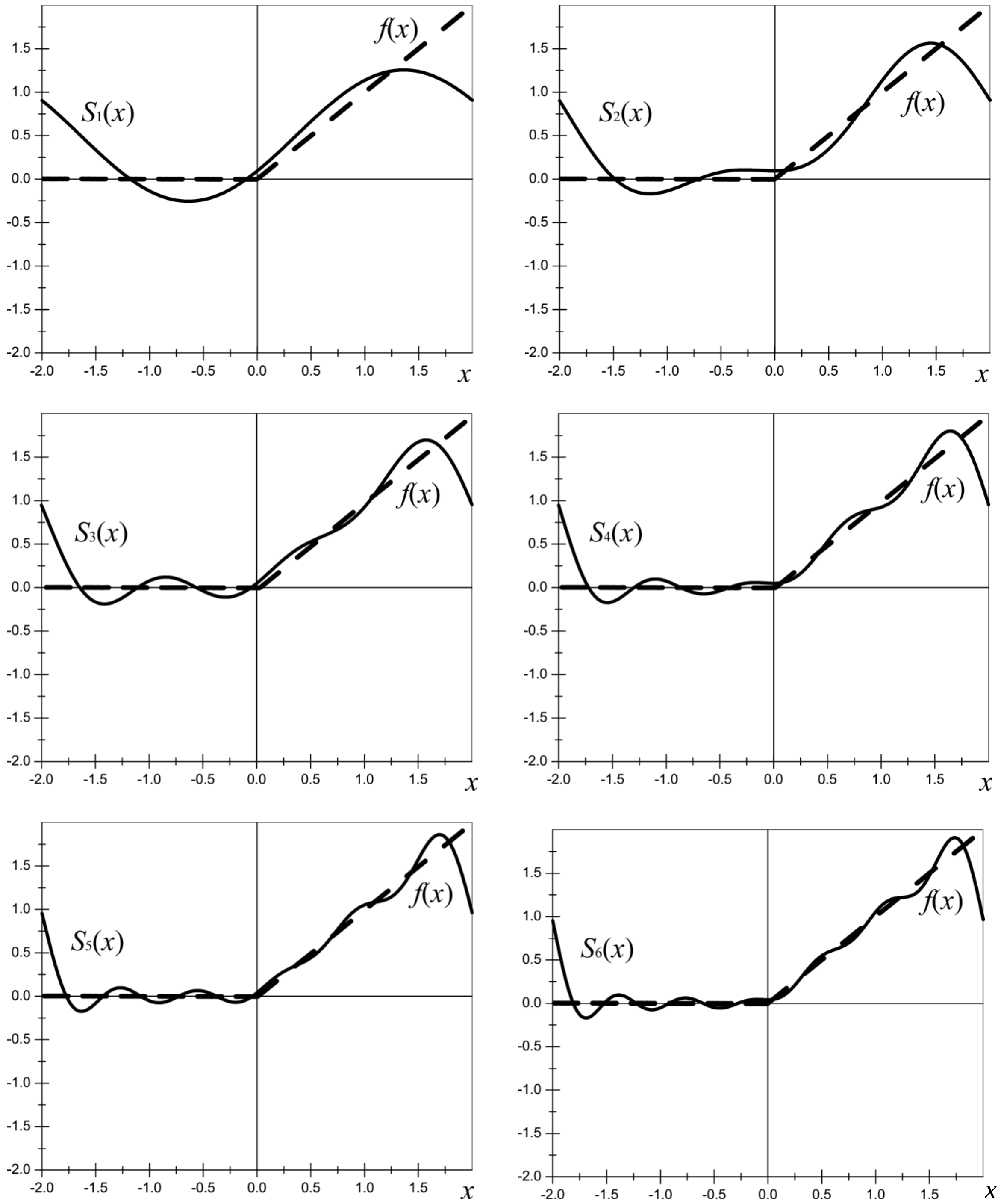
$$=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi},\ n=1,2,\dots$$

Заметим, что $a_{2m} = 0$, $a_{2m-1} = -\dfrac{4}{(2m-1)^2\pi^2}$.

Мы нашли, что

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}.$$

Графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$, $S_5(x)$ и $S_6(x)$ изображены на рисунках. Обратите внимание, как при увеличении количества слагаемых n, частичные суммы стремятся к функции $f(x)$.



Задание

Функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } -4<x<-2,\\ \frac{2}{3}(x+2), & \text{если } -2\le x<4\end{cases}$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$, $S_5(x)$ и $S_6(x)$, а также график функции $f(x)$.

Контрольные вопросы

1. Что называется основной тригонометрической системой и тригонометрической системой общего вида? Что означает ортогональность этих систем?
2. Запишите тригонометрический ряд Фурье и коэффициенты Фурье по основной тригонометрической системе и по тригонометрической системе общего вида.
3. Сформулируйте теорему Дирихле о достаточных условиях разложения функции в ряд Фурье.
4. Сформулируйте свойства коэффициентов Фурье, а также лемму Римана.
5. Как определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$? Какой вид принимает ряд Фурье для такой функции?
6. Запишите тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$:
   а) чётной на отрезке $[-l, l]$;
   б) нечётной на отрезке $[-l, l]$.
7. Сформулируйте теорему Вейерштрасса. Какими свойствами должна обладать функция, чтобы абсолютно и равномерно сходился её ряд Фурье?
8. Запишите тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме и коэффициенты Фурье. Приведите пример.

2.12 Лабораторная работа «Двойные интегралы»

Цель работы

Освоить приёмы вычисления двойных интегралов. С помощью двойного интеграла найти площадь заданной фигуры.

Теоретические основы

Рекомендуется изучить разделы «Кратные интегралы», «Определение и свойства», «Вычисление кратных интегралов», «Вычисление двойных интегралов», «Полярная система координат на плоскости», «Вычисление площадей плоских фигур» в пособии Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения: Учебное пособие / Ельцов А. А., Ельцова Т. А. — 2003. 235 с.

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере решения заданий.

Задание 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области *D*, ограниченной линиями. Изобразить на графике линии, ограничивающие область *D*.

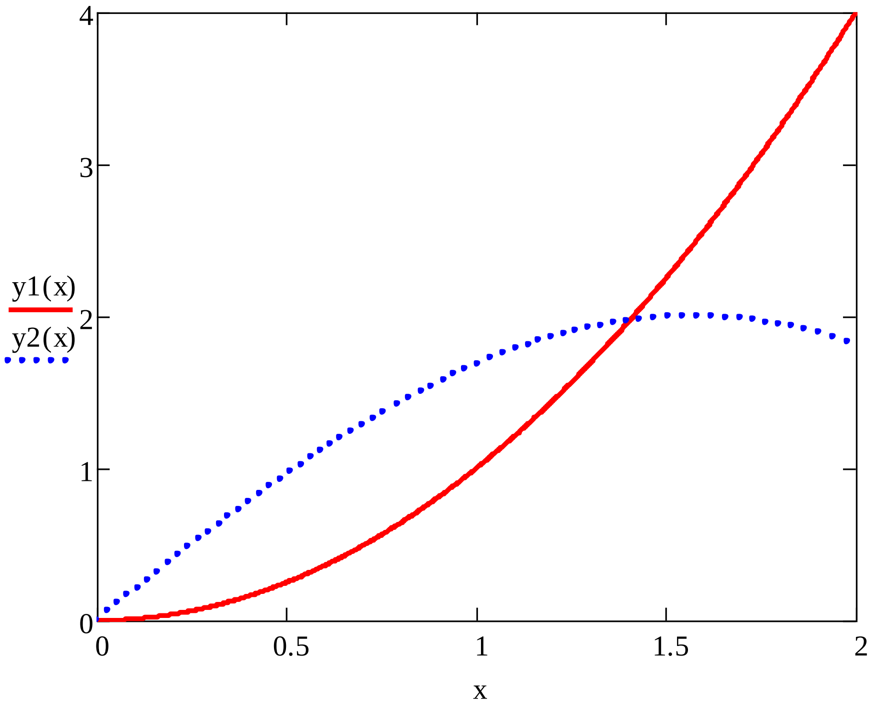
- $\iint\limits_D x^2\cos(xy^2)dxdy$, D: $y = x^2$, $y = 2\sin x$.

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2y^3$. Записать уравнение линии в полярных координатах. Изобразить фигуру на графике. Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам.

Решение.

1. Строим графики линий, ограничивающих область *D*:

$y1(x) := x^2$ $\qquad$ $y2(x) := 2\cdot\sin(x)$



Очевидно, одна из точек пересечения графиков $x1 = 0$. Найдём вторую точку пересечения (начальное приближение к корню определяется по графику):

$x := 1.5$ $\qquad$ $x2 := \mathrm{root}(y2(x) - y1(x), x)$ $\qquad$ $x2 = 1.404$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^{x2}\int_{y1(x)}^{y2(x)} x^2\cdot\cos\left(x\cdot y^2\right)\,dy\,dx = 3.588\times 10^{-3}$$

2. Переносим всё в левую часть уравнения и набираем функцию:

$f(x,y) := \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\cdot y^3$

Вместо x и y подставляем их выражения в полярных координатах:

$f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)$ simplify $\rightarrow \rho^3\cdot\left(\rho\cdot\cos\varphi^4 + 2\cdot\rho\cdot\cos\varphi^2\cdot\sin\varphi^2 + \rho\cdot\sin\varphi^4 - 2\cdot\sin\varphi^3\right)$

Выразим ρ из полученного уравнения:

$$\rho^3\cdot\left(\rho\cdot\cos\varphi^4+2\cdot\rho\cdot\cos\varphi^2\cdot\sin\varphi^2+\rho\cdot\sin\varphi^4-2\cdot\sin\varphi^3\right)\ \text{solve},\rho\to$$

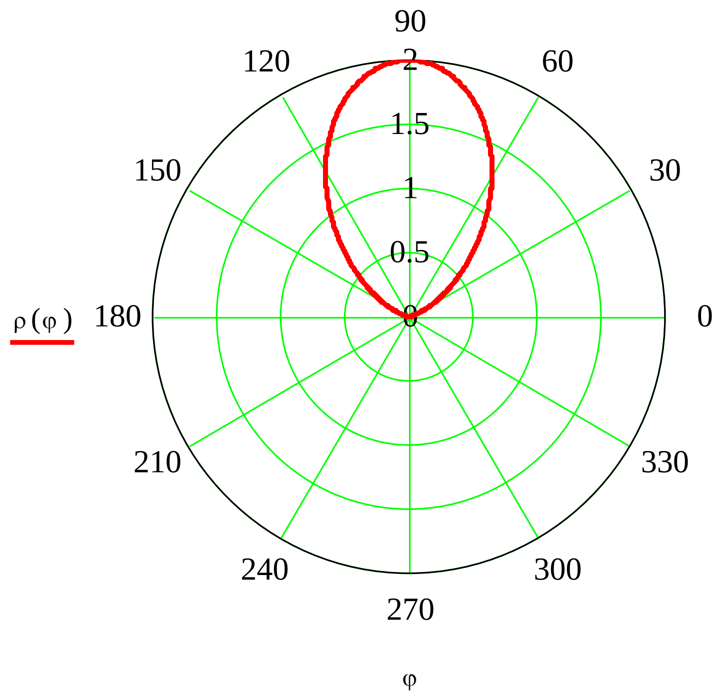
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{2\cdot\sin\varphi^3}{\cos\varphi^4+2\cdot\cos\varphi^2\cdot\sin\varphi^2+\sin\varphi^4} \end{pmatrix}$$

Упрощаем выражение:

$$\frac{2\cdot\sin\varphi^3}{\cos\varphi^4+2\cdot\cos\varphi^2\cdot\sin\varphi^2+\sin\varphi^4}\ \text{simplify}\ \to\frac{2\cdot\sin\varphi^3}{\left(\cos\varphi^2+\sin\varphi^2\right)^2}$$

Итак, $\rho(\varphi):=2\cdot(\sin(\varphi))^3$

Строим график области:



Находим площадь через двойной интеграл:

$$S:=\int_0^{\pi}\int_0^{\rho(\varphi)}\rho\ d\rho\ d\varphi \qquad S\to\frac{5\cdot\pi}{8}$$

Задание

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области *D*, ограниченной линиями. Изобразить на графике линии, ограничивающие область *D*.

а) $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy$; $\quad D: \ x=1, \ y=x^2, \ y=-\sqrt{x}$.

б) $\iint\limits_D ye^{\frac{xy}{2}}dxdy$; $\quad D: \ y=\ln 2, \ y=\ln 3, \ x=2, \ x=4$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = 2y^3$.

- Записать уравнение линии в полярных координатах
- Изобразить фигуру на графике
- Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам

Контрольные вопросы

1. Как вводится понятие двойного интеграла? Опишите процесс построения интегральной суммы.
2. Дайте определение предела интегральной суммы.
3. Перечислите свойства двойного интеграла.
4. Какой интеграл вычисляется в первую очередь (внутренний или внешний)?
5. Как расставляются пределы интегрирования?
6. Сформулируйте теорему о формуле среднего значения для двойного интеграла, аналогичную теореме для определённого интеграла.
7. По какой формуле вычисляется площадь фигуры.
8. Что называют полярной системой координат?
9. Как построить график функции в полярной системе координат?