Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические указания к лабораторным работам
и организации самостоятельной работы
для студентов направления
«Бизнес-информатика»
(уровень бакалавриата)

2018

Турунтаев Леонид Петрович
Исследование операций: Методические указания к лабораторным работам и организации самостоятельной работы для студентов направления «Бизнес-информатика» (уровень бакалавриата)
/ Л.П.Турунтаев. – Томск, 2018. – с.65

Оглавление

1 Введение

Данное руководство предназначено для выполнения лабораторных работ и изучения тем теоретической части курса, выносимых на самостоятельное освоение, по дисциплине «Исследование операций» с целью закрепления знаний поиска решения задач, возникающих в системах организационного управления. Методологической основой поиска решений является математическое моделирование деятельности объектов управления.

В лабораторных работах рассматриваются формализованные процедуры поиска и оценки решений для хорошо структуризованных задач выбора. Хорошо структуризованные задачи (проблемы) многовариантны по существу, но поскольку четко поддаются формализации и описанию в терминах количественных переменных, то могут быть однозначно решены с помощью построения и оптимизации детерминированной математической модели. Задачи такого рода называют задачами исследования операций (ИСО). Для задач исследования операций присущ объективный характер используемых моделей объекта управления. Математические модели являются средством отражения объективно существующей реальности. Если проблема, требующая решения, ясна, критерий определен, то сразу видно, насколько найденное оптимальное решение лучше существующего.

Каждая лабораторная работа включает краткое описание соответствующей задачи принятия решений и задания на их выполнение.

Из всего многообразия задач ИСО на лабораторных работах будут рассмотрены задачи следующих классов:

1) распределения:
   - общая линейная распределительная задача,
   - транспортная задача,
   - о назначениях;
2) выбора маршрута;
3) упорядочения и согласования.

2 Методические указания к проведению лабораторных работ

2.1 Лабораторная работа «Построение моделей задач объектов управления»

Цель работы

Закрепить навыки построения оптимизационных моделей для решения задач исследования операций линейного вида.

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

На рис. 2.1 приводится классификация задач и методов линейного программирования, которые используются при решении задач ИСО.

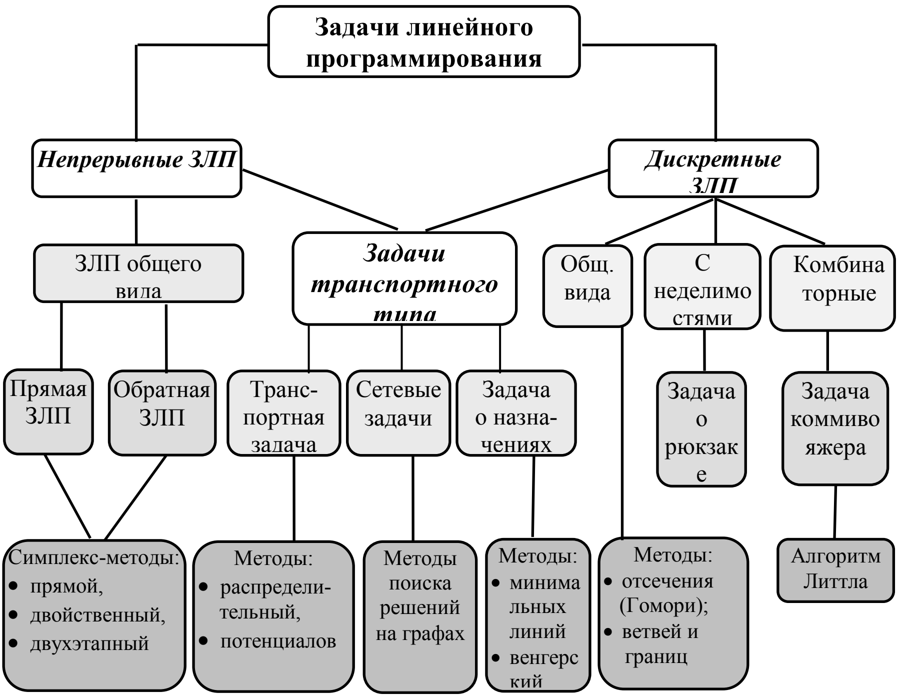

Рис. 2.1. Классификация задач и методов линейного программирования

Рассмотрим некоторые постановки задач исследования операций.

ЗАДАЧА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

Рассмотрим задачу линейного программирования об оптимальном использовании ресурсов. Её часто называют задачей планирования производства.

Пусть предприятие изготавливает n видов продуктов (рис. 2.1), располагая m видами ресурсов в количестве $b_1, b_2, ..., b_m$. Известна матрица $\mathrm{A} = |a_{ij}|$ расходов i-го ресурса на изготовление одной единицы j-го продукта $(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n})$. Эффективность (прибыль) выпуска единицы j-го продукта равна c_j. Требуется определить план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, максимизирующий прибыль предприятия.

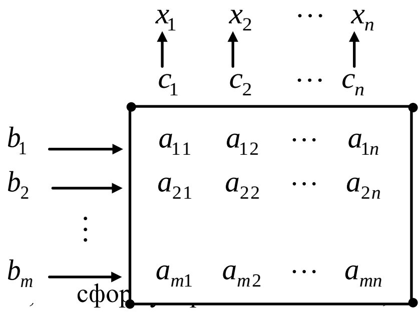

Рис. 2.1. Формализованное описание задачи

Для зад… сфор… математическая модель …

$$Z = \sum_{j=1} c_j x_j \tag{2.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m}, \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

ТРАСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛП

Имеется m поставщиков и n потребителей однородной продукции, возможности и потребности которых соответственно равны a_i и b_j, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта i в пункт j равна C_{ij}. Определить план перевозки продукции от поставщиков к потребителям x_{ij}, минимизирующий общую стоимость всех перевозок.

Математическая постановка задачи:

$$\min: \ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ , \tag{2.4}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j=\overline{1,n} \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ \mathrm{i}=\overline{1,m} \tag{2.6}$$

Ограничение (2.5) накладывается на спрос *j*-го потребителя, ограничение (2.6) — на возможности *i*-го поставщика. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задача называется закрытой, в противном случае — открытой.

ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Имеется m потенциальных исполнителей $(j=\overline{1,m})$ соответственно одной из имеющихся m работ $(i=\overline{1,m})$. Известны затраты c_{ij} на выполнение *j*-м исполнителем *i*-й работы. Требуется назначить каждого исполнителя на одну работу так, чтобы минимизировать суммарные затраты. Математическая постановка задачи:

$$\min: \ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{2.7}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,m} \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1,\ \ j=\overline{1,n} \tag{2.9}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ поручается } j\text{-му исполнителю;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Ограничение (2.8) указывает, что на каждую i-ую работу должен быть назначен только один исполнитель. Ограничение (2.9) указывает, что каждый j-й исполнитель должен быть назначен для выполнения только одной работы. Если число работ не равно числу потребителей, то задача о назначениях называется задачей открытого типа, в противном случае — закрытого.

ЗАДАЧА О КОММИВОЯЖЕРЕ

Коммивояжер (посыльный, развозчик заказанной продукции) должен посетить каждый из n пунктов, связанных между собой дорогами, только один раз и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути.

Формализуем задачу.

Пусть известна матрица $C = \left\| c_{ij} \right\|$ расстояний между пунктами i и j $(i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,n};\ \ i \neq j)$. В качестве неизвестной величины введем переменную

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из пункта } i \text{ переезжает в пункт } j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Модель задачи о коммивояжере будет иметь вид

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\ , \quad (2.11)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = \overline{1,n}\,; \quad (2.12)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = \overline{1,n}\,; \quad (2.13)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ \ i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,n}\ . \quad (2.14)$$

Еще одно ограничение сформулируем следующим образом: искомые переменные $x_{ij} \in \{0,1\}$ должны образовывать полный контур, включающий все пункты.

Ограничение (2.12) говорит о том, что коммивояжер должен в каждый пункт $j=\overline{1,n}$ заехать только один раз, а ограничение (2.13) – из каждого пункта $i=\overline{1,n}$ выехать только один раз. Ограничения (2.12)–(2.14) и дополнительное ограничение на маршруте коммивояжера создают так называемый гамильтоновый контур (по имени ирландского математика У. Гамильтона).

Порядок выполнения работы

1. Математическое моделирование тестовой задачи.
2. Получение индивидуальных заданий.
3. Выполнение индивидуального задания.

a) Для каждой задачи ввести формализованные обозначения управляемых и неуправляемых переменных;

b) сделать содержательную постановку задачи с введенными обозначениями по формату «Дано: из условия задачи; Требуется найти решение X с целью»;

c) сделать оптимизационную постановку задачи в виде модели математического программирования;

d) составить отчёт по лабораторной работе, в котором представляется:

формулировка индивидуального задания, математическая модель и пояснение к её построению.

Варианты заданий

1. Для приготовления комбикорма совхоз может закупить зерно 3-х сортов, отличающихся друг от друга содержанием питательных компонентов. Для обеспечения нормального питания скота в течение планируемого периода комбикорм должен содержать не менее Bj единиц питательного компонента j-го типа (j=1,n). Одна тонна зерна i-го сорта стоит Ri рублей и содержит Aij единиц питательного компонента j-го типа. Складские помещения позволяют хранить не более A тонн зерна. Определить, какое минимальное количество средств должен вложить совхоз в закупку зерна, чтобы обеспечить заданную питательность комбикорма с учетом емкости складских помещений. Сколько зерна каждого сорта необходимо закупить?

2. Цех производит изделия трех типов. Заказ на производство изделий i-го типа составляет B_i штук. Изделия, изготовленные сверх заказа, могут быть реализованы на свободном рынке. Все изделия обрабатываются последовательно на трех станках, плановый фонд времени k-го станка составляет T_k часов. Технология изготовления каждого изделия предусматривает три способа обработки. Норма времени на обработку i-го изделия j-м способом на k-ом станке составляет t_{ijk} часов, себестоимость i-го изделия при j-м способе обработки равна C_{ij} рублей, оптовая цена i-го изделия равна A_i рублей. Рассчитать план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

3. На n железнодорожных станциях S_i имеются пустые товарные вагоны в количестве M_i штук (i=1,…,m). На станциях D_j не хватает для перевозки грузов N_j вагонов (j=1,…,n). Расстояние между станциями S_i и D_j равно L_{ij} км. Найти план перегона вагонов, обеспечивающий минимум суммарных затрат на перегон, если стоимость перегона одного вагона пропорциональна расстоянию между станциями. Общее количество свободных вагонов больше их суммарной потребности.

4. В порту имеется n судов грузоподъемностью Q_i тыс. тонн (i=1,..,n), с помощью которых необходимо доставить грузы в n портов назначения. Расстояние до j-го порта назначения равно S_j км, и туда необходимо доставить R_j тыс. тонн груза. Распределить суда по маршрутам так, чтобы минимизировать суммарную величину неиспользуемой провозной способности (в тонно-километрах). Грузоподъемность любого судна достаточна для перевозки груза в любой порт.

5. В цехе имеется m станков, на которых могут быть изготовлены n типов деталей. Время, необходимое для изготовления детали j-го типа на i-ом станке, равно t_{ij} час. i-й станок в течение планового периода может работать T_i часов. За это время необходимо изготовить N_j деталей j-го типа. Распределить задания по выработке деталей между станками так, чтобы эксплуатационные расходы были минимальны. Затраты на эксплуатацию i-го станка равны P_i руб./час.

6. Строительной организации необходимо выполнить n видов земляных работ, объем которых составляет V_j куб. м (j=1,…, n). Для их осуществления можно использовать m механизмов. Производительность i-го механизма при выполнении j-ой работы составляет P_{ij} куб. м в час., а себестоимость одного часа работы S_{ij} руб. Плановый фонд рабочего времени i-го механизма составляет T_i часов. Составить план организации работ, обеспечивающий его выполнение с минимальными затратами.

7. В состав производственного объединения входит n заводов, производственные мощности каждого из которых позволяют выполнить в установленные сроки лишь один из n заказов, имеющихся в портфеле заказов объединения. Затраты на выполнение i-го заказа на j-ом заводе составляют P_{ij} тыс. рублей. Распределить заказы между заводами так, чтобы затраты всего объединения на выполнение заказов были минимальны.

8. Деревообрабатывающая фабрика получает m типов лесоматериалов в количестве B_i куб.м в месяц. Из этих материалов изготавливается n видов фанеры. На производство одного кв. метра фанеры j-го типа расходуется Q_{ij} куб.м i-го материала. Заказ на производство j-го вида фанеры составляет P_j кв.м. Составить план производства фанеры на месяц, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль, если i-й лесоматериал обходится фабрике в C_i руб/куб.м, расходы на производство одного кв. м фанеры j-го типа составляют V_j руб., а реализуется эта фанера по цене R_j руб./кв.м.

9. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено A тыс. руб. Его предполагается разместить на площади S кв.м. Участок может быть оснащен машинами пяти типов. Машина i-го типа стоит R_i тыс. руб., занимает площадь Q_i кв.м и производит P_i единиц продукции в смену. Определить, какое количество машин каждого типа необходимо закупить, чтобы обеспечить максимальную производительность участка.

10. В плановом году в городе будут сооружаться дома m типов. Количество r-комнатных квартир в доме i-го типа равно q_{ri}. Стоимость строительства одного дома i-го типа составляет R_i тыс.руб. За год необходимо сдать в эксплуатацию не менее Q_r r-

комнатных квартир. Рассчитать план строительства жилых домов, обеспечивающий минимальные затраты на строительство.
11. Сухогруз может принять на борт не более A тонн груза, общий объем которого не должен превосходить D куб.м. На причале находятся грузы n наименований. Вес i-го груза составляет B_i тонн, он занимает объем V_i куб. м и стоит R_i тыс.руб. На судно можно погрузить не более одной единицы груза каждого наименования. Найти вариант загрузки судна с максимальной стоимостью груза

12. Авиатранспортное предприятие располагает самолетами m типов, которые должны быть использованы для перевозки пассажиров по n маршрутам. Самолет i-го типа может перевезти по j-му маршруту за месяц A_{ij} пассажиров, при этом эксплуатационные расходы составляют C_{ij} тыс. руб. По статистическим данным по j-му маршруту в месяц летает не менее B_j пассажиров. Распределить самолетный парк по маршрутам так, чтобы обеспечить перевозку всех желающих при минимальных эксплуатационных расходах.

13. Предприятие, находящее в городе A, должно отправить потребителям в город B станки m типов. Вес одного станка i-го типа равен G_i тонн. Потребителями заказано N_i станков. За недопоставку станка i-го типа в установленный срок предприятие платит штраф R_i рублей. Железная дорога может предоставить предприятию транспортные средства общей грузоподъемностью Q тонн. Определить количество станков каждого типа, которые необходимо отправить потребителям, чтобы потери от неудовлетворительного спроса были бы минимальны.

14. Судно может принять на борт не более A тонн груза общим объемом не более V куб. м. На причале находятся грузы m наименований. Количество груза i-го наименования равно N_i единиц. Вес одной единицы груза i-го типа равен G_i тонн, объем Q_i куб.м, цена C_i тыс. рублей. Найти вариант загрузки судна наиболее ценным грузом.

Контрольные вопросы.

1. Назовите основные классы задач исследования операций.
2. В чем заключается сущность моделирования?

3. Чем отличается оптимизационная модель от имитационной?

4. Назовите основные этапы процесса построения модели исследования операций.

5. Дайте содержательную и математическую постановку задачи использования ресурсов.

6. Дайте содержательную и математическую постановку задачи о раскрое материалов.

7. Дайте содержательную и математическую постановку задачи о диете питания.

2.2 Лабораторная работа «Решение одноиндексных задач ЛП с помощью программных средств»

Цель работы

Закрепить знания по методам и алгоритмам решения задач линейного программирования (ЗЛП), освоить программные средства решения ЗЛП и закрепить навыки поиска и анализа решения задач на ПЭВМ.

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

Для задачи использования ресурсов, сформулированной выше, математическая модель имеет следующий вид: максимизировать

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Ограничения представляют собой многогранное множество допустимых решений ЗЛП. Если многогранное множество ограничено, то оно называется многогранником. Многогранное множество в ЗЛП выпукло, содержит крайние (угловые) точки $X_1, X_2, \ldots, X_k$, удовлетворяющие следующим условиям

1) любая точка X может быть представлена как выпуклая линейная комбинация угловых точек;

2) каждой угловой точке соответствует базисный допустимый план ЗЛП.

Базисный план задачи всегда имеет не более m (если ограничения являются линейно независимыми ($m < n$)) отличных от нуля координат. Они называются базисными. Если таких координат, отличных от нуля, меньше m, то базисный план называется вырожденным. Допустимый план X ЗЛП называется оптимальным, если целевая функция достигает своего экстремального значения в точке(ах) X^*. Оптимальный план X^* всегда является базисным планом.

На рис. 2.2 представлена геометрическая интерпретация ЗЛП для случая двух переменных x_1 и x_2. Геометрически целевая функция — семейство параллельных прямых линий уровня цели Z, множество допустимых решений — выпуклый многоугольник.

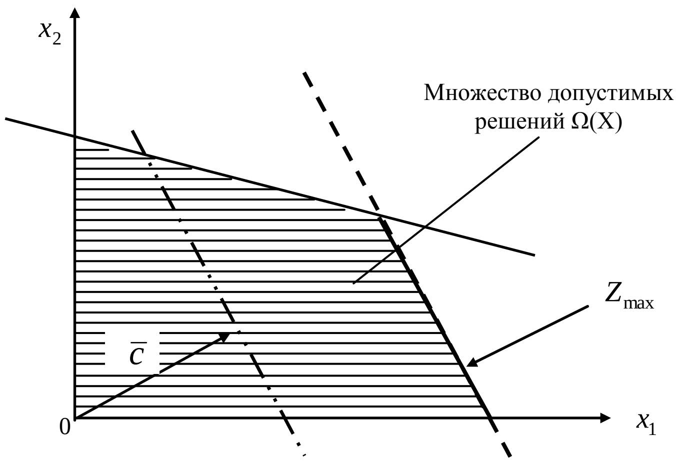

Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация ЗЛП

Для решения ЗЛП Г. Данцигом был предложен симплекс-метод. В основу симплекс-метода положено поэтапное движение к оптимуму X^* от исходной угловой точки области допустимых решений к рядом лежащей угловой точке, позволяющее последовательно улучшать значение целевой функции. Так как угловая точка характеризуется m базисными переменными, то на каждом этапе встают вопросы: какие переменные выбирать за базисные, а какие — за небазисные. Ответы на вопросы дает симплекс-алгоритм, который характеризуется сходимостью (последовательностью улучшения решений) и конечностью в силу конечности множества угловых точек.

Порядок выполнения работы

1) ознакомиться с существующими программными средствами решения задач ЛП;

2) получить задачу у преподавателя;

3) решить полученную задачу графически;

4 решить ее с помощью программного средства;

5) подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

Варианты заданий

1.	$-x_2 \to \min$	2.	$2x_1 + x_2 \to \max$
	$x_1 + x_2 \geq 1$		$x_1 - 2x_2 \leq 6$
	$x_1 + x_2 \leq 2$		$x_1 + 3x_2 \leq 8$
	$x_1 - x_2 \leq 1$		$x_1 \leq 4$
	$x_1 - x_2 \leq -1$		$x_2 \leq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
3.	$2x_1 + x_2 \to \max$	4.	$x_1 - 2x_2 \to \max$
	$x_1 + x_2 \leq 4$		$-2x_1 + x_2 \leq 8$
	$x_1 - x_2 \leq 0$		$x_1 - 2x_2 \leq 12$
	$x_1 \leq 4$		$x_1 \geq 10$
	$x_2 \leq 5$		$x_2 \geq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		
5.	$8x_1 + 5x_2 \to \max$	6.	$2x_1 - 3x_2 \to \min$
	$2x_1 + x_2 \leq 10$		$-5x_1 + 3x_2 \leq 15$

	$x_1 + x_2 \le 2$		$x_1 - 2x_2 \ge 4$
	$4x_1 + x_2 \le 8$		$5x_1 - 4x_2 \le 40$
	$x_1 + 4x_2 \le 10$		$-2x_1 + x_2 \le 2$
	$x_1, x_2 \ge 0$		$x_1, x_2 \ge 0$
7.	$3x_1 + x_2 \to \min$	8.	$x_1 + 2x_2 \to \max$
	$3x_1 + 5x_2 \ge 15$		$6x_1 + 2x_2 \ge 6$
	$5x_1 + 3x_2 \ge 15$		$3x_1 - 2x_2 \le 6$
	$x_1 \ge 1$		$3x_1 - x_2 \ge -3$
	$x_2 \ge 1$		$x_1 + x_2 \le 5$
			$x_1, x_2 \ge 0$
9.	$2x_1 + 3x_2 \to \min$	10.	$5x_1 + 4x_2 \to \max$
	$x_1 + 5x_2 \ge 16$		$2x_1 + 3x_2 \le 3$
	$3x_1 + 2x_2 \ge 12$		$x_1 + 3x_2 \le 4$
	$x_1 + x_2 \ge 8$		$-x_1 + x_2 \le 5$
	$x_1 \ge 1$		$5x_1 + 4x_2 \le 6$
	$x_1, x_2 \ge 0$		$x_1, x_2 \ge 0$
11.	$x_1 + 6x_2 \to \max$	12.	$x_1 + 2x_2 \to \max$
	$-x_1 - 4x_2 \le -12$		$-x_1 - 4x_2 \le -12$
	$x_1 + x_2 \le 14$		$x_1 + x_2 \le 14$
	$-3x_1 + x_2 \le 6$		$-3x_1 + x_2 \le 6$
	$x_1 - x_2 \le 2$		$-x_1 + x_2 \le -2$
	$x_1, x_2 \ge 0$		$x_1, x_2 \ge 0$
13.	$2x_1 + x_2 \to \max$	**14.**	$6x_1 - x_2 \to \max$
	$x_1 + 4x_2 \le 12$		$x_1 + 4x_2 \le 12$
	$x_1 + x_2 \le 14$		$x_1 + x_2 \le 14$
	$-3x_1 + x_2 \le 6$		$-3x_1 + x_2 \le 6$
	$x_1 - x_2 \le 2$		$-x_1 + x_2 \le -2$
	$x_1, x_2 \ge 0$		$x_1, x_2 \ge 0$

Контрольные вопросы

1. Дайте экономическую и геометрическую интерпретацию задач линейного программирования.
2. В чем заключается сущность методов математического программирования?
3. Какова идея симплекс-метода решения задач линейного программирования?
4. В чем отличие прямого, двойственного и двухэтапного симплекс-алгоритмов?

2.3 Лабораторная работа «Анализ линейных моделей задач линейного программирования»

Цель работы

Закрепить навыки поиска решения задач ЛП и научиться делать анализ результатов решения задачи

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

Для любой задачи ЛП всегда существует обратная (двойственная) ей задача.

Если прямая задача:		то двойственной будет задача:
$\max : Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (2.15)		$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ (2.18)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,m}$ (2.16)	y_i	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \ j = \overline{1,n}$ (2.19)
$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}$ (2.17)		$y_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}$ 2.20)

Пара задач (2.15)–(2.17) и (2.18)–(2.20) называется симметричной парой двойственных задач, где y_i — двойственная оценка. В содержательной постановке, если x_j — продукт, b_i — ресурс, c_j

— прибыль, то в двойственной задаче y_i — оценка ресурса (его дефицитность).

В линейном программировании существуют следующие теоремы двойственности.

1. Если одна из двойственных задач ЛП имеет оптимальное решение, то и другая его имеет, причем $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, в других случаях $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j < \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$. Если целевая функция одной из ЗЛП не ограничена, то система условий другой противоречива.

2. Чтобы допустимые решения X и Y пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Получить решение двойственной задачи можно из оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи. Допустим из оптимальной симплекс-таблицы получили оптимальные значения основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач:

Строка Z_{opt}	$0 \cdot x_1$	$5 \cdot x_2$	$0 \cdot x_3$	$12 \cdot x_4$	$0 \cdot x_5$
Решение X^*	Основные			Дополнительные	
	$x_1 = 6$	$x_2 = 0$	$x_3 = 4$	$x_4 = 0$	$x_5 = 8$
Решение Y^*	Дополнительные			Основные	
	$y_3 = 0$	$y_4 = 5$	$y_3 = 0$	$y_1 = 12$	$y_2 = 0$

Тогда:

x_j (основные), $j = \overline{1, n}$ — план выпуска продукции;

x_j (дополнительные), $j = \overline{n+i, n+m}$ — остаток ресурса b_i;

y_i (основные) — оценка дефицитности ресурса i, отражающая изменение целевой функции при изменении ресурса на одну единицу;

$$y_i \text{ (основные)} = \frac{\Delta Z}{\Delta b_i}, \ i = \overline{1, m};$$

y_i (дополнительные), $i = \overline{m+1, m+n}$ свидетельствуют об убытке производства продуктов x_j, $i = \overline{1, n}.$

Порядок выполнения работы

1) получить задачу у преподавателя (варианты заданий в лабораторной работе №2);
2) решить ее с помощью программных средств;
3) перейти от исходной задачи ЛП к двойственной, решить ее с помощью программных средств;
4) показать справедливость утверждений теорем линейного программирования:
   - о расположении точки оптимума в ограниченном и неограниченном множестве допустимых решений;
   - о составляющих вектора оптимальных решений для вырожденного и невырожденного базисного плана, для множества оптимальных решений;
   - о необходимом и достаточном условии существования точки оптимума прямой и двойственной задач;
5) найти связь между прямой и обратной задачами ЛП для случая вырожденности и множеством оптимальных решений;
6) дать анализ оптимального решения задачи ЛП на чувствительность:
   - на изменение одного из дефицитных ресурсов;
   - на изменение цены одного из продуктов.

Варианты заданий

Находятся в лабораторной работе 2.

Контрольные вопросы

1. Как делается анализ дефицитности ресурсов? Как определить интервалы изменения запасов ресурсов при их дефицитности?

2. Как делается анализ цен на продукты?
3. Сформулируйте теоремы двойственности.
4. Дайте экономическую интерпретацию теорем двойственности.

2.4 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач линейного программирования общего вида»

Цель работы

Закрепить навыки моделирования задач объектов управления, поиска и анализа решения

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

В качестве теоретической базы необходимо использовать теоретический материал, рассмотренный в лабораторных работах «Построение моделей задач объектов управления», «Решение одноиндексных задач ЛП с помощью программных средств», «Анализ линейных моделей задач линейного программирования». Особо следует обратить внимание на формализацию построения математической модели объекта управления, проверку целевой функции и ограничений задачи на их единицы измерения.

Порядок выполнения работы

1) получить задачу у преподавателя;
2) составить математическую постановку задачи;
3) решить ее с помощью программного средства;
4) провести анализ решения задачи ЛП;
5) составить подробный отчёт по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания,
- математическая модель и пояснение к её построению,
- входная таблица с экрана монитора и выходные таблицы для всех опций программы и содержательные пояснения к ним,
- выводы по лабораторной работе.

Варианты заданий

Задача 1.

На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий может быть использована ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней так же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Исходные данные

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани
	1	2	3	4	
I II III	1 - 4	- 1 2	2 3 -	1 2 4	180 210 800
Цена изделия (руб.)	9	6	4	7	

Задача 2.

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице.

Исходные данные

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	1	2	3	4	
Токарное Фрезерное Шлифовальное	2 1 1	1 - 2	1 2 1	3 1 -	300 70 340
Прибыль от реализации единицы продукции (руб.)	8	3	2	1	

В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Задача 3.

Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуются данными, приведёнными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии. Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации.

Исходные данные

Тип судна	Производительность судов (млн.тонномиль в сутки) на линии			Общее время эксплуатации судов
	1	2	3	
I II III	8 6 12	14 15 12	11 13 4	300 300 300
Заданный объём перевозок (млн. Тонно-миль)	3000	5400	3300	

Задача 4.

Найти решение, состоящее в определении плана изготовления изделий А, В и С, обеспечивающего максимальный их выпуск, в стоимости выраженной с учётом ограничений на возможное использование сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья, приведены в таблице.

Исходные данные

Вид сырья	Нормы затрат (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	А	В	С	
I II III	18 6 5	15 4 3	12 8 3	360 192 180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	-

Задача 5.

На ткацкой фабрике для изготовления трёх артикулов ткани используются станки двух типов, пряжа и красители. В таблице указаны производительность станка каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 метра ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющихся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-ч):				
I типа	0,02	-	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа (кг)	1,0	1,5	2,0	15000
Красители (кг)	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1м ткани (руб.)	5	8	8	-
Выпуск ткани (м):				
Минимальный	1000	2000	2500	-
Максимальный	2000	9000	4000	-

Задача 6.

Машиностроительное предприятие для изготовления четырёх видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия.

Кроме того, сборка изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов на изготовление каждого из изделий приведены в таблице.

В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-го вида.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия				Общий объём ресурсов
	1	2	3	4	
Производительность оборудования (человек-ч):					
Токарного	550	-	620	-	64270
Фрезерного	40	30	20	20	4800
Сверлильного	86	110	150	52	22360
Расточного	160	92	158	128	26240
Шлифовального	-	158	30	50	7900
Комплектующие изделия (шт)	3	4	3	3	520
Сборочно-наладочные работы (человек-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	315	278	573	370	-
Выпуск (шт.):					
Минимальный	-	40	-	-	-
Максимальный	-	-	120	-	-

Задача 7.

Для обогрева помещений используются четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, имеющемся в количествах 90, 110, 70, 80 и 150 т. Потребность в топливе каждого из агрегатов соответственно равна 80, 120, 140 и 160 т. Теплотворная способность i-ого сорта топлива при использовании его на j-ом агрегате задаётся матрицей

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

Задача 8.

Изготовляемый на пяти кирпичных заводах кирпич поступает на шесть строящихся объектов. Ежедневное производство кирпича и потребность в нём указаны в таблице. В ней же указана цена перевозок 1000 шт. кирпича с каждого из заводов к каждому из объектов.

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

Исходные данные

Кирпичный завод	Цена перевозки 1 тыс. шт. Кирпича к строящемуся объекту						Производство кирпича (тыс. шт.)
	1	2	3	4	5	6	
I	8	7	5	10	12	8	240
II	13	8	10	7	6	13	360
III	12	4	11	9	10	11	180
IV	14	6	12	13	7	14	120
V	9	12	14	15	8	13	150
Потребность в кирпиче (тыс. шт.)	230	220	130	170	190	110	-

Задача 9.

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в таблице.

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

Исходные данные

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	рыба	молоко	Масло	сыр	крупа	картофель
Белки Жиры Углеводы Минеральные соли	180 20 - 9	190 3 - 10	30 40 50 7	10 865 6 12	260 310 20 60	130 30 650 20	21 2 200 10
Цена 1 кг продуктов (руб.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Задача 10.

Для перевозок трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице.

Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (норм-ч):				
I типа	2	-	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырьё (кг):				
1-го вида	10	15	20	1495
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	-
Выпуск (шт.):				
Минимальный	10	20	25	-
Максимальный	20	40	100	-

В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготовляемой продукции максимальна.

Задача 11.

При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операции, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Исходные данные

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляции	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Освинцевание	3,0	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля	1,2	0,8	1,0	1,3	-

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции является максимальной.

Задача 12.

На мебельной фабрике изготовляется пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице. В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объёмов может изготовляться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от её реализации является максимальной. Найти решение задачи, а также провести после оптимизационный анализ полученного решения.

Исходные данные

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (человека-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина ($м^3$)	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	-	-	6	4	5	2400
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	8	10	16	14	12	-
Выпуск (шт.): Минимальный	120	90	20	40	30	-
Максимальный	480	560	180	160	120	-

Задача 13.

Из трёх видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. – вещества В и 24 ед. – вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее необходимого количества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

Исходные данные

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
A	1	1	-	4
B	2	-	3	5
C	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья (руб.)	5	6	7	8

Контрольные вопросы

1. Какие ресурсы являются дефицитными в Вашей задаче?
2. Что произойдет, если дефицитный ресурс уменьшить на 10 единиц?
3. Какие ещё программные средства позволяют решить и сделать анализ решения Вашей задачи?

2.5 Лабораторная работа «Моделирование и решение задач целочисленного программирования»

Цель работы

Закрепить навыки построения математических моделей задач принятия решений и освоить методы решения задач целочисленного программирования на контрольных примерах

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

Для выполнения работы следует знать методы целочисленного решения задач ЛП. Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с.104-120.

Порядок выполнения работы

1. Сформулировать математическую модель
2. Решить задачу с использованием прикладных программ
3. Дать анализ результатов решения задачи
4. Подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

Варианты заданий

Задача 1.

Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в следующей таблице:

Длина заготовки (см)	Вариант разреза					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Величина отходов (см)	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы обеспечить нужное количество заготовок каждого вида при минимальных отходах.
Как изменится модель и решение задачи, если из заготовок выпускаются комплекты: 2 заготовки по 45 см., 3 заготовки по 35 см., 1 заготовка по 50 см.
Максимизируется число комплектов. Число прутьев, которое имеется, взять из решения первоначальной задачи. Как при этом изменятся отходы?

Задача 2.

Для выполнения работ могут быть использованы n механизмов. Производительность i-го механизма (i=1,n) при выполнении j-ой работы (j=1,n) равна c_{ij}. Предполагая, что каждый механизм может быть использован только на одной работе и каждая работа может выполняться только одним механизмом, определить закрепление механизмов за работами, обеспечивающее максимальную производительность.

Построить математическую модель задачи.
Как изменится модель и решение, если имеется 2 механизма 1-го типа, 3 механизма 2-го типа, 1 механизм 3-го типа и 2 механизма 4-го типа и при этом на объекте не может находиться более 7 механизмов.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

Министерству необходимо составить план развития каждого из m предприятий, выпускающих однородную продукцию. Число возможных вариантов развития i-го предприятия различно и равно n_i. Реализация j-го варианта развития i-го предприятия (j=1,n) требует капитальных затрат, равных K_{ij}, и обеспечивает выпуск продукции в объеме b_{ij} единиц. При этом экономический эффект от капитальных вложений на развитие i-го предприятия по j-му варианту равен c_{ij}. Учитывая, что необходимо выпустить продукции в количестве B единиц и что общая величина капиталовложений ограничена и равна K, составить такой план развития предприятий, при котором экономический эффект от реализации выбранных вариантов развития предприятий является максимальным.

K=10 B=40

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{млн. руб.} \qquad b_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 30 & 12 & 17 \\ 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Как изменится решение, если K и B уменьшатся на 20 %.

Задача 4.

В аэропорту для перевозки пассажиров по n маршрутам может быть использовано m типов самолётов. Вместимость самолёта i-го типа равна a_i человек, а количество пассажиров, перевозимых по j-му маршруту за сезон, составляет b_i человек. Затраты, связанные с использованием самолёта i-го типа на j-ом маршруте, составляет c_{ij} руб.

Определить, сколько самолётов данного типа и на каком из маршрутов следует использовать, чтобы удовлетворить потребности в перевозках при наименьших общих затратах.

a_1=100 a_2=150 a_3=200

b_1=10т b_2=20т b_3=8т b_4=30т

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Подсчитать количество самолетов каждого типа в оптимальном решении. Как изменится решение, если самолетов 2-го типа есть только 100, а 3-го типа меньше 100.

Задача 5.

В обувном производственном объединении производится раскрой m различных партий материалов, причём каждая из партий состоит из b_i единиц материала, имеющего одинаковую форму (например, пластины) и размер. Из материалов всех партий требуется выкроить максимальное количество комплектов деталей обуви, в каждый из которых входит d_j (j=1,n) деталей j-того вида, если при раскрое единицы материала i-ой партии по k-му варианту (k=1,K) получается a_{ikj} деталей j-го вида.

b_1=100 b_2=200

d_1=2 d_2=1

a_{111}=2 a_{112}=4 a_{121}=3

a_{122}=1

a_{211}=4 a_{212}=7 a_{221}=5

a_{222}=6

Задача 6.

Для выполнения четырёх видов землеройных работ могут быть использованы экскаваторы четырёх типов. Производительность экскаватора i-го типа при выполнении j-ой работы задаётся матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.7 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что на каждой из работ может быть занят только лишь один экскаватор и что все экскаваторы должны быть задействованы, найти такое распределение экскаваторов между работами, которое обеспечивает максимальную производительность. Как изменится модель и решение, если имеется 2 экскаватора 1-го типа, 3 экскаватора 2-го типа, 1 экскаватор 3-го типа, 2 экскаватора 4-го типа, а общее число экскаваторов не может превышать 6?

Задача 7.

Пароход может быть использован для перевозки 10 наименований груза, масса, объём и цена единицы каждого из которых приведены в следующей таблице:

Параметры единицы груза	Номер груза									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65
Объём ($м^3$)	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114
Цена (тыс. руб.)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9

На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объёмом, не превышающим 600 $м^3$. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход так, чтобы общая стоимость размещённого груза была максимальной. Как изменится решение, если количество единиц каждого груза ограничено величинами соответственно: 2;1;4;2;2;3;4;4;4;3?

Задача 8.

Из листового проката нужно выкроить заготовки четырёх видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в таблице.

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

Длина заготовки (см)	Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа при разрезе определенным способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	-	-	-	-	-
50	-	1	-	-	2	-	1	1	3	2	1	-	2
65	-	-	1	-	-	2	1	-	-	1	2	1	-
85	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-
Величина отходов (см)	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Как изменится модель и решение, если в окончательное изделие (комплект) входит 2 заготовки 1-го и 2-го вида и 3 заготовки 3-го и 4-го вида. Максимизируется число комплектов. Изменятся ли отходы для такого оптимального решения? (Общее число листов
взять из результатов 1-й постановки задачи)

Задача 9.

Имеются одинаковые заготовки, которые могут быть раскроены тремя способами. Из имеющихся заготовок нужно получить не менее 10 деталей 1-го типоразмера, не менее 8-ми деталей 2-го типоразмера и не менее 10-ти деталей 3-го типоразмера. Способы раскроя определяются матрицей вида:

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь a_{ij} – количество деталей типоразмера i, получаемое из одной заготовки путём её раскроя способом j.

Количество заготовок, раскраиваемых каждым способом, должно быть целым и не превышать 4-х. Отходы от раскроя одной заготовки для каждого из способов составляют 4, 5 и 5 (усл. единиц). Предложить вариант раскроя с минимальными суммарными отходами. Определить величину этих отходов.

Фирма предполагает продавать выкроенные детали по ценам \$4, \$6 и \$2,5 соответственно для 1-го, 2-го и 3-го типоразмера. При этом потери от процедуры раскроя оцениваются величиной \$0,3 на условную единицу отходов. Оптимизируйте процесс раскроя, исходя из соображений получения максимальной прибыли.

Задача 10.

Рассматриваются пять проектов, которые могут быть осуществлены в течение последующих трёх лет

Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль
	Год 1	Год 2	Год 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	10	15
5	8	6	1	30
Максимальный объем капиталовложений	25	25	25	

В таблице приведены ожидаемые величины прибыли от реализации каждого из проектов и распределение необходимых капиталовложений по годам (в тыс. долларов).

Предполагается, что каждый утверждённый проект будет реализован за трёхлетний период.

Требуется выбрать совокупность проектов, которой соответствует максимум суммарной прибыли.Как изменится максимум суммарной прибыли, если максимальный объем капиталовложений уменьшать от 25 до 0, или увеличивать от 25 до бесконечности? Построить график.

Задача 11.

Руководство завода предполагает провести комплекс организационно-технических мероприятий по модернизации производства. Перечень возможных мероприятий приведён в таблице. На реализацию всех мероприятий завод может выделить:

- трудовых ресурсов – 1300 чел-дней,
- финансовых ресурсов – 800 млн. руб.
- производственных площадей –700 кв. м

Какие мероприятия следует провести, располагая этими ресурсами, чтобы общий экономический эффект был максимальным? Какова величина этого эффекта? Какой объём выделяемых ресурсов останется неиспользованным при реализации найденного варианта? Изменится ли решение задачи, если завод выделит на модернизацию 1 млрд. руб.?

Изменится ли решение задачи, если завод полностью удовлетворит потребности модернизации в производственных площадях и трудовых ресурсах при прежнем финансировании?

Мероприятие	Трудовые ресурсы (чел. дни)	Финансовые ресурсы (млн. руб.)	Производственные площади (кв. м)	Экономический эффект (млн. руб.)
Закупка станков с ЧПУ	350	400	130	13000
Текущий ремонт	250	90	-	3000
Монтаж транспортного конвейера	100	60	300	8000
Установка рельсового крана	200	300	150	12000
Ввод системы контроля качества	130	-	150	2500
Разработка АСУ	800	500	100	15000

Задача 12.

В регионе работают 4 химических завода. Им предложено принять участие в конкурсе по размещению госзаказа на производство изделий 5-ти наименований в объёмах, приведённых в таблице.

	Наименование изделия				
	А1	А2	А3	А4	А5
Объём заказа (шт.)	350	250	400	150	150

Каждый из заводов представил несколько вариантов годовой производственной программы по выполнению госзаказа и соответствующие финансовые условия. Программа включает выпуск всех изделий.

Каковы минимальные затраты на выполнение госзаказа?

Какой вариант размещения заказа обеспечивает его выполнение при минимальных объёмах финансирования?

Как изменится решение, если учесть, что заводы 1 и 4 не могут одновременно выполнять однотипные варианты размещения заказов?

	Варианты завода 1			Варианты завода 2		Варианты завода 3			Варианты завода 4	
Наименование изделия	1	2	3	1	2	1	2	3	1	2
А1	100	200	200	50	80	-	-	100	100	50
А2	200	100	150	-	-	200	250	100	40	60
А3	300	250	200	120	100	100	50	500	60	100
А4	100	50	100	100	50	-	-	-	50	-
А5	50	100	80	-	-	100	100	80	150	100
Объём финансирования (млрд. руб.)	12	16	14	7	9	16	15	17	5	8

Задача 13.

Нефтеперерабатывающее предприятие использует в производстве нефть трёх сортов (1, 2 и 3). Резервные запасы нефти каждого сорта должны быть не меньше соответственно 20, 40 и 60 тыс. тонн. Для хранения нефти могут быть использованы 4 резервуара ёмкостью 25, 30, 35 и 40 тыс. тонн. Затраты на хранение 1-ой тонны нефти сорта 2 на 10% выше, чем сорта 1, а сорта 3 – на 20% выше, чем сорта 1. Смешение нефти разных сортов при хранении не допускается.Резервуары заполняются полностью.

Сколько резервуаров следует использовать?

Как распределяются сорта нефти по резервуарам?

Каковы минимальные затраты на хранение нефти?

Целесообразно ли устанавливать дополнительный резервуар объёмом 20 тыс. тонн?

Задача 14.

Для реконструкции машиностроительного предприятия было представлено на выбор 10 проектов, каждый из которых характеризуется четырьмя агрегированными показателями и ежегодной ожидаемой прибылью, представленными в таблице.

При выборе проектов необходимо учесть ряд ограничений технологического характера:

- одновременно может быть реализовано не более семи проектов
- 5-ый и 8-ой проекты взаимно исключают друг друга

- 1-ый проект может быть реализован лишь при условии реализации второго
- 4-ый проект может быть реализован лишь при условии реализации хотя бы одного из двух проектов: либо 3-его, либо 10-ого.

Выбрать проекты для реконструкции предприятия, обеспечивающие максимальную ожидаемую прибыль. Каков размер этой прибыли?

Агрегированный показатель проекта	*Варианты проектов*									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Затраты труда (нормо-час)	50	60	30	40	80	70	50	20	40	50
Затраты энергии (тыс. квт)	4	4	2	5	5	2	3	6	6	3
Расходы на материалы (млн. руб.)	3	2	4	5	3	2	4	2	2	3
Финансовые средства (млн. руб.)	7	5	9	6	4	3	7	2	4	5
Ожидаемая прибыль (млн. руб.)	9	8	8.5	8.8	9	8	9	8.7	8.9	8

Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию задач целочисленного программирования. Приведите примеры.
2. Назовите методы решения задач целочисленного программирования.
3. Какое ограничение называется отсечением Гомори?
4. В чем сущность метода ветвей и границ?

2.6 Лабораторная работа «Задачи линейного программирования транспортного типа»

Цель работы

Закрепить навыки решения задач транспортного типа: классические транспортные задачи, с промежуточными пунктами, о назначениях, о коммивояжере.

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

В качестве теоретической базы необходимо использовать теоретический материал, рассмотренный в лабораторных работах «Построение моделей задач объектов управления», «Анализ линейных моделей задач линейного программирования». Особо следует обратить внимание на двойственную постановку транспортной задачи линейного программирования и теорему двойственности. Теоретический материал можно найти в учебном пособии Есипов В.А. Методы исследования операций: Учебное пособие для вузов - Издательство "Лань", ISBN, Гриф УМО МО, 2013 - 304с.

Порядок выполнения работы

1. Решить транспортную задачу.

Заводы автомобильной промышленности расположены в Москве, Нижнем Новгороде, Тольятти, Минске. Основные центры распределения продукции сосредоточены в пяти городах. Данные ежеквартальных объемов производства автомобилей указанных заводов, величины квартального спроса в центрах распределения автомобилей, стоимость перевозки одного автомобиля по железной дороге между заводами и центрами распределения приведены в вариантах заданий.

Найдите план перевозок с помощью программных средств:

а) исходной задачи двумя способами: симплекс-методом и методом потенциалов;

б) задачу с измененными условиями исходной в сторону увеличения объемов производства;

в) задачу с измененными условиями исходной в сторону увеличения центров спроса;

г) задачу с условиями (в) и с учетом штрафа за недопоставленный автомобиль в первый центр — 3 тыс. руб., в третий — 3,5 тыс. руб.;

д) задачу с условиями (б) и обязательными отправками автомобилей с завода г. Нижнего Новгорода.

2. Придумать задачу о назначениях размерностью 4×4. Решить ее с помощью программных средств как транспортную и как о назначениях, сравнить результаты;

3. Придумать задачу о коммивояжере размерностью 5×5.

Решить ее с помощью программных средств как задачу о назначениях и как задачу о коммивояжере, сравнить результаты;

4. Найти гамильтоновский путь с исходного города 2 и путь без указания исходного города.

5. подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

Варианты заданий

1.

26	30	17	10	16	4
30	37	26	9	23	6
13	4	32	3	1	10
3	1	5	14	24	10
7	7	7	7	2	

2.

25	1	22	19	1	20
21	28	11	4	3	20
26	29	33	26	24	20
21	10	3	29	27	20
19	19	19	19	4	

3.

27	20	29	26	25	15
3	14	5	15	24	15
19	2	32	4	13	15
20	27	1	27	19	15
11	11	11	11	16	

4.

30	26	24	26	29	13
15	30	29	26	23	17
4	10	37	30	7	17
9	16	29	30	3	13
12	12	12	12	12	

5.

31	22	2	13	7	8
27	20	4	24	9	12
3	16	35	5	4	7
28	11	17	20	29	13
8	8	8	8	8	

6.

20	17	9	20	30	15
13	14	24	26	26	15
22	24	40	27	29	19
25	12	11	34	23	11
9	24	9	9	9	

7.

40	24	11	12	25	21
26	14	29	20	24	19
27	14	24	10	18	15
6	14	28	18	2	25
15	15	15	15	20	

8.

15	15	3	6	10	9
23	18	13	27	12	11
30	1	15	24	25	14
8	26	7	38	9	16
8	9	13	8	12	

9.

19	17	29	28	8	12
13	31	27	16	29	8
20	30	34	7	26	7
11	19	30	16	2	18
7	7	7	7	7	

10.

40	2	5	6	15	16
5	39	9	5	7	15
16	24	24	6	26	14
13	28	4	35	8	15
6	6	13	20	15	

11.

22	11	25	17	21	17
22	28	14	8	1	14
9	13	12	28	15	21
26	21	3	14	27	43
19	22	23	1	14	

12.

12	24	4	2	3	28
20	20	15	27	7	13
15	15	22	25	19	15
2	6	3	15	5	30
27	16	25	11	7	

13.

25	6	25	11	12	9
13	24	20	27	30	18
16	7	29	10	21	23
1	29	23	35	18	26
11	22	31	6	6	

14.

32	24	25	23	29	24
1	31	10	7	19	14
2	26	28	30	27	19
22	10	29	36	23	17
22	9	12	13	18	

Контрольные вопросы.

1. Дайте содержательную и математическую постановку транспортной задачи линейного программирования.
2. Можно ли решить транспортную задачу линейного программирования симплекс-методом?
3. Сколько базисных переменных должно быть в допустимом плане решения транспортной задачи?
4. Сформулируйте математическую постановку двойственной ТЗЛП.
5. В чем идея распределительного метода решения транспортной задачи?
6. В чем отличие метода потенциалов от распределительного метода?
7. Укажите способы решения ТЗЛП с промежуточными пунктами.
8. Можно ли решить задачу о назначениях методом, используемым для решения ТЗЛП?

2.7 Лабораторная работа «Задачи динамического программирования»

Цель работы

Овладеть практическими навыками решения задач оптимизации методом динамического программирования на основе принципа оптимальности Беллмана.

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

Рассмотрим решение задачи о рюкзаке с помощью уравнений Р. Беллмана.

Пример. Самолет загружается предметами *N* различных типов с весом w_j и стоимостью c_j, $j=\overline{1,n}.$ (см. тадл.). Максимальная грузоподъемность равна *W* = 5. Определить максимальную стоимость груза, вес которого не более *W*.

Тип *j*	Вес w_j	Стоимость c_j
1	2	65
2	3	80
3	1	30

Решение. Сделаем математическую постановку. Пусть x_j — количество предметов *j*-го типа, загружаемых в самолет. Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le W, \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n},$$

$$x_j \text{ — целые.}$$

Отличительными особенностями задачи динамического программирования будут:

1. Этап *j* связан с загрузкой предметов *j*-го типа в количестве x_j единиц (x_j — управляемая переменная);

2. Состояние загружаемого самолета S_j на этапе j определяется через ограничение (1) математической модели. В алгоритме прямой прогонки состояния

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} w_i x_i, \quad j = \overline{1,n}; \quad 0 \le S_j \le W; \quad S_n = W.$$

В алгоритме обратной прогонки

$$S_j = \sum_{i=j}^{n} w_i x_i, \quad j = \overline{1,n}; \; 0 \le S_j \le W; \; S_1 = W.$$

3. Цель управления на этапе $z_j = c_j\, x_j, \;\; j = \overline{1,n}$.

4. Варианты решения x_j этапа j описываются количеством предметов типа j: $x_j = 0,\; 1,\; ...,\; [W / w_j]$ — целые.

Решим задачу методом обратной прогонки, загружая предметы с последнего типа.

Пусть $F_j(S_j)$ — значение целевой функции: максимальная стоимость предметов, включенных на этапах j, $j = 1, ..., n$ при заданном состоянии системы S_j.

Рекуррентное соотношение для процедур обратной прогонки:

$$F_{n+1}(S_{n+1}) = 0;$$
$$F_j(S_j) = \max\left\{ c_j\; x_j + F_{j+1}(S_j - w_j\; x_j)\right\}, \;\; j = 1,\; ...,\; n;$$
$$S_j = 0,\; 1,\; ..., W;$$
$$S_j \ge w_j x_j.$$

Этап 1. $\quad F_3(S_3) = \max\{c_3 x_3\};$

$$x_3 = 0,\; 1,\; ...,\; 5;$$
$$S_3 = 0,\; 1,\; ...,\; 5;$$
$$S_3 \ge 1 x_3.$$

Этап 2. $F_2(S_2) = \max\{c_2x_2 + F_3(S_2 - w_2x_2)\}$;

$$x_2 = 0,1;$$

$$S_2 = 0,1,\ \ldots,\ 5;$$

$$S_2 \geq 3x_2.$$

Значение условного оптимума $F_3(S_3)$ берется из предыдущей таблицы.

Этап 3. $F_1(S_1) = \max\{c_1x_1 + F_2(S_1 - w_1x_1)\}$;

$$x_1 = 0,\ 1,\ 2;$$

$$S_1 = 5.$$

Определение управляемых переменных начинается с последней таблицы (обратный ход):

$$x_1^* = 2 \to S_1 = 2\ \cdot\ 2 = 4;$$

$$S_2 = 5 - 4 = 1 \to x_2^* = 0 \to S_3 = 1 - 0 = 1 \to x_3^* = 1.$$

Оптимальное решение $X^* = (2,\ 0,\ 1)$.

Порядок выполнения работы

1) получить задачу у преподавателя;
2) составить математическую постановку задачи, уравнения Беллмана для прямой и обратной прогонки, таблицы расчетов;
3) решить ее с помощью программного средства;
4) провести анализ решения задачи ДП;
5) составить подробный отчёт по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания,
- математическая модель и пояснение к её построению,
- входная таблица с экрана монитора и выходные таблицы для всех опций программы и содержательные пояснения к ним,
- выводы по лабораторной работе.

Варианты заданий

Самолет загружается предметами N различных типов с весом w_j и стоимостью c_j, $j = \overline{1,n}.$ Максимальная грузоподъемность равна W = 6. Определить максимальную стоимость груза, вес которого не более W.

Исходные данные индивидуальных вариантов заданий

Вариант	Тип j	Вес w_j	Стоимость c_j
1	1	2	65
	2	3	80
	3	1	30
2	1	2	50
	2	3	20
	3	1	40
3	1	1	50
	2	2	20
	3	3	40
4	1	3	65
	2	2	80
	3	1	30
5	1	2	30
	2	1	40
	3	3	20
6	1	1	60
	2	2	70
	3	2	80
7	1	2	48
	2	1	27
	3	1	65
8	1	3	33
	2	3	41
	3	2	23
9	1	1	65
	2	2	78
	3	1	80
10	1	3	41
	2	1	22
	3	2	34

11	1	2	43
	2	2	25
	3	1	60
12	1	1	70
	2	3	80
	3	1	45
13	1	2	46
	2	2	27
	3	1	38
14	1	1	43
	2	3	25
	3	1	62

Контрольные вопросы.

1. Что из себя представляет динамическое программирование (ДП)?
2. Какова геометрическая интерпретация схемы решения задач динамического программирования?
3. Каковы основные принципы решения задач ДП?
4. Можно ли решать задачи линейного программирования методом ДП?
5. Назовите характерные особенности задач ДП.
6. В чем отличие управляемой переменной от переменной, характеризующей состояние системы в задачах ДП?
7. Запишите уравнение Беллмана для решения задачи о рюкзаке по алгоритму целевой прогонки.
8. Запишите уравнение Беллмана для решения задачи распределения однородного ресурса между подразделениями по алгоритму обратной прогонки.

2.8 Лабораторная работа «Сетевое планирование и управление»

Цель работы

Освоить и закрепить навыки решения задач сетевого планирования и управления.

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

Сетевой график — это ориентированный граф без контуров, дуги которого имеют одну или несколько числовых характеристик. Дугами изображают *работы*, а вершинами — *события*. Работа — любой трудовой процесс или действие, сопровождающееся затратами времени и ресурсов. Событие — итог того или иного процесса, результат выполнения предшествующих ему работ. События изображаются точками, кружками и т.п. В сетевом графике всегда есть исходное и завершающее события.

Сетевой график обладает следующими основными свойствами:

- ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;
- ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие.

В каждом сетевом графике имеется несколько полных путей (после-довательностей работ) от исходного события до конечного, продолжи-тельность каждого из них определяется суммой продолжительностей составляющих их работ. Среди полных путей сетевого графика особое значение имеет наиболее продолжительный из них — *критический путь*. Работы, находящиеся на критическом пути, называют критическими. Критический путь лимитирует выполнение задачи в целом, поэтому любая задержка на критических работах увеличивает время всего процесса. Работы (как и события), нележащие на критическом пути, имеют резервы времени их выполнения. Основные параметры сетевого графика приведены в следующей таблице.

Параметры сетевого графика

<table>
<tr><td>Событие
i</td><td colspan="2">Раннее время $t_р(i)$</td><td colspan="2">Поднее время $t_п(i)$</td><td>Резерв
$R(i)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Работа
(i,j)</td><td>Раннее</td><td>Позднее</td><td>Раннее</td><td>Позднее</td><td rowspan="3">Резерв
$R(ij)$</td></tr>
<tr><td>$t_{рн}(ij)$</td><td>$t_{пн}(ij)$</td><td>$t_{ро}(ij)$</td><td>$t_{по}(ij)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Начало</td><td colspan="2">Окончание</td></tr>
</table>

$t_р(i)$ — раннее время свершения события *i*;

$t_п(i)$ — позднее время сверешения события *i*;

$R(i)$ — резерв времени события *i*;

$t_{рн}(ij)$ — раннее время начала работы (*i*,*j*);

$t_{пн}(ij)$ — позднее время начала работы (*i*,*j*);

$t_{ро}(ij)$ — раннее время окончания работы (*i*,*j*);

$t_{по}(ij)$ — позднее время окончания работы (*i*,*j*);

$R(ij)$ — резерв времени работы (*i*,*j*).

Графическим способом временные параметры показываются на дугах - время выполнения работы, в вершинах - ранние, поздние сроки свершения события и резерв времени для события.

При табличном способе расчета параметров упорядочение и нумерация вершин графика производится обязательно послойно с выполнением правила: любая последующая вершина имеет больший номер, чем предшествующая, т.е. для любой дуги (i, j) должно выполняться условие $i < j$. Расчеты производятся в таблице $n \times n$, где n — число вершин. Строки и столбцы таблицы соответствуют событиям графика. Клетки главной диагонали таблицы (i, i) назовем главными, а остальные побочными. Для клеток, находящихся выше главной диагонали $(i < j)$, номер строки i соответствует номеру начального события, а номер столбца j — номеру конечного. Наоборот, для клеток, расположенных ниже главной диагонали $(i > j)$, начальному событию работы соответствует номер столбца *j*, а конечному — номер строки *i*.

определение параметров в таблице сетевого графика производится в два этапа.

На первом этапе (прямое движение к конечному событию) определяются параметры $t_{\text{ро}}(i, j)$ и $t_{\text{р}}(j)$. Для конечного события n — $t_{\text{р}}(n) = t_{\text{п}}(n)$.

На втором этапе (обратное движение к начальному событию) определяются параметры $t_{\text{пн}}(i, j)$ и $t_{\text{п}}(j)$. Эти параметры будут проставляться соответственно выше главной диагонали для $t_{\text{ро}}(i, j)$, ниже главной диагонали — $t_{\text{пн}}(i, j)$ и по главной диагонали — $t_{\text{р}}(i)$, $t_{\text{п}}(i)$, $t_{\text{р}}(j)$, $t_{\text{п}}(j)$.

<table>
<tr><th>Обратный ход</th><th>Верши-ны</th><th>i</th><th>j</th><th>Прямой ход</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$t_{\text{п}}(1) = t_{\text{р}}(1) = 0$
$t_{\text{п}}(i) = \min\limits_{j}\{t_{\text{пн}}(i, j)\}$

$t_{\text{пн}}(i, j) = t_{\text{п}}(i) - t_{ij}$</td><td>$i$</td><td>$t_{\text{р}}(i) \,/\, t_{\text{п}}(i)$</td><td>$t_{ij} \,/\, t_{\text{ро}}(i, j)$</td><td>$t_{\text{ро}}(i, j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}$</td></tr>
<tr><td>j</td><td>$t_{ij} \,/\, t_{\text{пн}}(i, j)$</td><td>$t_{\text{р}}(j) \,/\, t_{\text{п}}(j)$</td><td>$t_{\text{р}}(j) = \max\limits_{i}\{t_{\text{ро}}(i, j)\}$
$t_{\text{р}}(n) = t_{\text{п}}(n)$</td></tr>
</table>

Порядок выполнения работы

1. получить задачу у преподавателя;
2. составить сетевую модель задачи;
3. рассчитать параметры сетевого графика графическим и табличным способом, предварительно пронумеровав события послойно;
4. решить ее с помощью программного средства;
5. провести анализ и оптимизацию использования ресурсов (количество запланированных людей указаны в скобках);
6. составить и защитить отчёт по лабораторной работе.

Варианты заданий

1.

	1	2	3	4	5	6
1		10(3)		3(4)		
2			7(3)	8(2)	5(2)	
3						11(3)
4			2(4)		12(4)	
5						6(4)
6						

2.

	1	2	3	4	5	6
1		13(3)		7(4)		
2			7(2)	9(3)	8(2)	
3						18(1)
4			2(6)		10(1)	
5						4(4)
6						

3.

	1	2	3	4	5	6
1		5(2)		12(3)		
2			6(3)	7(2)	8(2)	
3						7(3)
4			7(4)		4(4)	
5						5(4)
6						

4.

	1	2	3	4	5	6
1				3(3)		
2	8(2)		7(2)	8(3)	5(5)	
3				9(3)		11(3)
4					12(4)	
5						6(4)
6						

5.

	1	2	3	4	5	6
1				3(5)		
2	5(4)		7(4)	8(3)	5(4)	
3				5(4)		11(3)
4					12(3)	
5						5(4)
6						

6.

	1	2	3	4	5	6
1				3(5)		
2			12(3)		5(4)	
3	11(2)			10(2)		11(2)
4					12(2)	
5						6(4)
6						

7.

	1	2	3	4	5	6
1		10(2)	8(3)	3(5)		
2			7(4)	8(3)	5(4)	
3						11(2)
4					12(2)	
5			7(3)			6(4)
6						

8.

	1	2	3	4	5	6
1		14(2)	6(3)	7(4)		
2			6(4)	8(3)	4(4)	
3						10(3)
4					12(3)	
5			7(4)			9(2)
6						

9.

	1	2	3	4	5	6
1				3(6)		
2			7(5)	8(4)	5(5)	
3	8(4)					11(3)
4					12(3)	
5						6(4)
6						

10.

	1	2	3	4	5	6
1			8(3)	3(5)		
2			7(2)	8(4)	5(4)	
3						11(3)
4					12(3)	
5			7(3)			6(4)
6						

11.

	1	2	3	4	5	6
1		15(3)	8(4)	7(4)		
2			6(5)	9(4)	4(4)	
3						11(2)
4					15(3)	
5			7(4)			6(4)
6						

12.

	1	2	3	4	5	6
1		10(3)	8(4)	3(5)		
2			7(6)	8(3)	5(4)	
3						11(5)
4						8(6)
5				4(7)		6(7)
6						

13.

	1	2	3	4	5	6
1		10(6)	8(6)	3(7)	8(7)	
2			7(6)	8(7)	5(4)	
3						11(3)
4					12(8)	
5			7(5)			6(6)
6						

14.

	1	2	3	4	5	6
1		5(5)	6(5)	3(6)		
2			7(6)	7(7)	3(8)	
3						3(9)
4					11(5)	
5			6(4)			7(8)
6						

Контрольные вопросы

1. Назовите способы разбиения графа на слои.
2. Назовите основные параметры сетевого графика, укажите их связь и способы определения.
3. Опишите графический способ определения параметров сетевого графика.
4. Опишите табличный способ определения параметров сетевого графика.

5. Что такое график Ганта?
6. Опишите алгоритм оптимизации распределения трудовых ресурсов на графиках Ганта.

2.9 Лабораторная работа «Задачи нелинейного программирования»

Цель работы

Овладеть практическими навыками решения задач нелинейного программирования условной оптимизации

Форма проведения

Каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Форма отчетности

Защита отчета, опрос по контрольным вопросам

Теоретические основы

Нелинейное программирование занимается оптимизацией моделей задач, в которых либо ограничения $q_i(x)$, либо целевая функция $Z(X)$, либо то и другое нелинейны.

Найти $\max(\min)\ Z = z(X)$

$$\text{в области } \Omega : \begin{cases} q_i(X) R b_i,\ i = \overline{1,m}; \\ X \geq 0, \end{cases}$$

где R — отношение порядка ($=, \geq, \leq$),

Ω — область допустимых решений;

b_i — константа, $i = \overline{1,m}$;

$X = (x_1, \ldots, x_n) = \{x_j\},\ j = \overline{1,n}$ — план или вектор управления.

Для выяснения трудностей решения задач данного класса, порождаемых нелинейностью, сопоставим задачи линейного и нелинейного программирования. Можно указать три характерные особенности для каждого класса.

Задачи линейного программирования	Задачи нелинейного программирования
1. Область Ω допустимых планов — *выпуклое множество* с конечным числом угловых (крайних) точек	1. Множество Ω допустимых планов может быть *невыпуклым, несвязным*, иметь бесконечное число крайних точек
2. Экстремальное значение линейная целевая функция $z(X)$ достигает в одной из крайних точек (на *границе* области Ω допустимых решений	2. Экстремум может достигаться не только на *границе*, но и *внутри* области Ω допустимых решений
3. Экстремальное значение $z(X)$ целевой функции является и *глобальным* значением	3. Целевая функция $z(X)$ в области Ω может иметь *несколько локальных* экстремумов

На рис. 2.3 приводится классификация задач и методов нелинейного программирования.

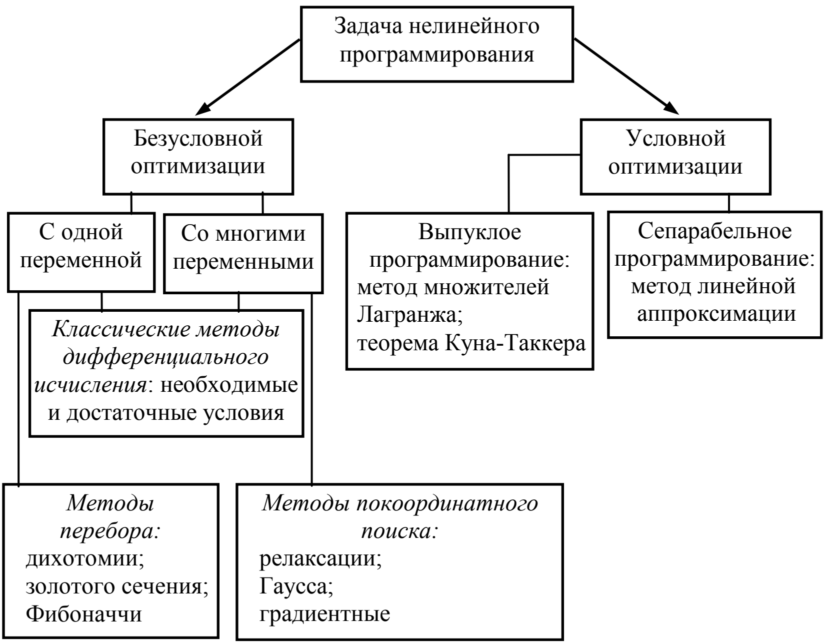

Рис. 2.3 Классификация задач и методов нелинейного программирования

Некоторые типы задач нелинейного программирования хорошо изучены и для них существуют методы определения глобального экстремума. Особое место среди задач нелинейного программирования занимают выпуклые задачи, у которых область допустимых ограничений и целевая функция являются выпуклыми или вогнутыми. К таким задачам относятся, в частности, задачи квадратичного программирования, для которых характерно то, что целевая функция и/или ограничения являются функциями своих аргументов, в степени не выше второй. Наиболее важной характеристикой выпуклых (вогнутых) моделей нелинейного программирования является то, что для них локальный экстремум обязательно является и глобальным экстремумом.

В лабораторной работе рассматриваются только выпуклые (вогнутые) задачи нелинейного программирования.

Порядок выполнения работы

1. получить задачу у преподавателя;
2. составить математическую модель задачи;
3. решить ее с помощью программного средства;
4. Дать анализ результатов решения задачи
5. Подготовиться к защите по нижеприведенным контрольным вопросам.

Варианты заданий

Задание 1.

Предприятие выпускает два вида продукции. На изготовление продукции затрачивается два вида ресурсов. Запасы ресурсов 1-го вида составляют 160 ед., 2-го вида 210 ед. Нормы расхода 1-го ресурса, идущего на изготовление единицы продукции, равны 2 ед. для продукции 1-го вида и 2,67 ед. – для продукции 2-го вида; нормы расхода 2-го ресурса составляют 3 ед. для продукции 1-го вида и 2 ед. – для продукции 2-го вида. Суммарный объем выпуска должен быть не менее 40 ед.

Затраты на изготовление единицы продукции определяются выражениями

$c_j - l_j x_j$, где x_j – искомый объем производства продукции j-го вида (j = 1, 2);

c_j – себестоимость продукции j-го вида; $c_1 = 100$ ден. ед.,

c_2 = 140 ден. ед.,

l_j – коэффициент снижения затрат с ростом объема производства, $l_1 = l_2$ = 1.

Составить математическую модель задачи и найти объемы производства продукции 1 и 2 вида, при которых суммарные затраты при производстве минимальны.

Задание 2.

Предприятие может изготовить 200 изделий двумя технологическими способами производства. При производстве одного изделия первым способом себестоимость производства равна $6 + x_1$, а вторым способом $2 + x_2$, где x_1, x_2 – объемы производства продукции по 1-му и 2-му способам.

Составить математическую модель задачи и найти, сколько изделий необходимо изготовить по каждому из способов производства, чтобы себестоимость произведенной продукции была минимальной.

Задание 3.

Предприятие производит продукцию по двум технологическим способам производства. Для производства продукции используется сырье двух видов, объемы которых у предприятия составляют b_1 = 186 ед., b_2 = 210 ед.

Оптовая цена единицы продукции по 1-му и 2-му способам производства составляют Р1 = 52 ден.ед. и Р2 = 68 ден.ед..

Себестоимость производства по 1-му и 2-му способам определяется выражениями

$c_j = c'_j + c''_j x_j$, j = 1, 2, где $c'_1 = 1, c''_1 = 0{,}1, c'_2 = 2, c''_2 = 0{,}1$.

Нормы расхода ресурсов затрачиваемых на производство единицы продукции по каждому технологическому способу равны a_{ij}, где $a_{11} = 6,\ a_{12} = 4,\ a_{21} = 5,\ a_{22} = 10$.

Построить математическую модель задачи и определить сколько продукции производить по каждому из технологических способов, чтобы получить максимум прибыли.

Задание 4.
Предприятие может изготовить 141 изделие и для этого использует две технологические линии. При производстве одного изделия на первой линии себестоимость производства равна $3+x_1$, а на второй линии – равна $1+x_2$, где x_1, x_2 – объемы производства продукции на 1-ой и 2-ой линиях.

Составить математическую модель задачи и найти, сколько изделий необходимо изготовить на каждой из технологических линий производства, чтобы себестоимость произведенной продукции была минимальной.

Задание 5.
По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя способами. При производстве x_1 изделий способом1 затраты определяются выражением $3x_1 + x_1^2$ руб, а при изготовлении x_2 изделий способом2 затраты определяются выражением $8x_2 + x_2^2$ руб.

Составить математическую модель задачи и определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Задание 6.
Фирма реализует автомобили через магазин и торговых агентов.

При реализации x_1 автомобилей через магазины расходы на реализацию составляют $4x_1 + x_1^2$ ден. ед., а при продаже x_2 автомобилей через торговых агентов расходы составляют x_2^2 ден. ед.

Составить математическую модель задачи и найти способ реализации автомобилей, приводящий к минимуму суммарных расходов, если общее число предназначенных к продаже автомобилей составляет 200 единиц.

Задание 7.
Средние ежедневные расходы ресторана на рекламу составляют 100$, которые затрачиваются на рекламные объявления в газете и

по радио. Введем обозначения: x_1 – сумма, затрачиваемая в день на рекламу в газете и x_2 – на рекламу на радио.

Суммарные годовые затраты ресторана на содержание отдела рекламы, включая ежедневные расходы на рекламу оцениваются следующей функцией:

$$20000 - 440x_1 - 300x_2 + 20x_1^2 + 12x_2^2 + x_1x_2$$

Составить математическую модель задачи и найти такое распределение бюджета ресторана, которое бы приводило к минимальным суммарным ежегодным затратам на содержание рекламного отдела, сохранив при этом ежедневные расходы на рекламу на уровне 100$.

Задание 8.

Компания производит две марки телевизоров. Производственные мощности компании таковы, что объем производства телевизоров марки1 составляет не более 70 телевизоров в день, а для телевизоров марки2 – не более 50 телевизоров в день.

На производство одного экрана для телевизоров затрачивается время в количестве 1 час для телевизоров марки1 и 2 час – для телевизоров марки2, причем производству экранов для обоих телевизоров может быть уделено не более 120 часов рабочего времени в день.

Для производства одного корпуса для телевизоров марки1 и марки2 требуется по одному часу, причем на производство корпусов обоих телевизоров может быть затрачено не более 90 часов рабочего времени в день.

Цены продаж одного телевизора описываются выражениями

- телевизора марки1 $\quad c_1 = 314 - 1{,}9x_1 + 0{,}01x_1^2$
- телевизора марки2 $\quad c_2 = 243 - 0{,}14x_2$

где x_1, x_2 – ежедневный выпуск телевизоров марки1и марки2.

Известно также, что затраты на производство одного телевизора марки1 и марки2 составляют 210$ и 230$ соответственно.

Составить математическую модель задачи и определить, каков должен быть дневной план производства каждого телевизора, чтобы суммарная прибыль в день от их реализации была максимальной.

Задача 9.
Инвестор, имеющий Р = 1000$, может вложить их в два вида ценных бумаг.

Ожидаемый годовой доход от каждого вида ценных бумаг 1 и 2 составляет R1 = 0,06 и R2 = 0,02 соответственно; верхние границы инвестиций в ценные бумаги 1 и 2 равны S1 = 0,75 и S2 = 0,9 соответственно; нижняя граница ожидаемого годового дохода от всех инвестиций равна b = 0,03.

Дисперсии годового дохода от ценных бумаг 1 и 2 равны σ_1^2 = 0,09 и σ_2^2 = 0,06, ковариация годового дохода от ценных бумаг 1 и 2 равна σ_{12} = 0,02.

Составить математическую модель задачи выбора портфеля инвестиций.

Определить сколько средств необходимо вложить в каждую ценную бумагу 1 и 2, чтобы годовой доход от их вложения был не меньше ожидаемого, а риск был бы минимальным.

Задача 10.
Пусть заданы рыночные цены трех товаров p1 = 2$, p2 = 2,8$ и p3 = 2,8$ и личный бюджет некоего субъекта, в количестве I = 250$.

Полезность потребительского набора, которую субъект извлекает из потребления x_1 единиц товара 1, x_2 единиц товара 2 и x_3 единиц товара 3, измеряется функцией полезности

$$x_1^{0,5} + x_2^{0,5} + x_3^{0,5}.$$

Составить математическую модель и определить потребительскую корзину, которая позволит субъекту получить максимальную пользу при соблюдении бюджетного ограничения субъекта.

Задача 11.
Пусть заданы рыночные цены трех товаров p1 = 1,2$, p2 = 4,5$ и p3 = 2,3$ и личный бюджет некоего субъекта, в количестве I = 1450$.

Полезность потребительского набора, которую субъект извлекает из потребления x_1 единиц товара 1, x_2 единиц товара 2 и x_3 единиц товара 3, измеряется функцией полезности

$$x_1^{0,3}\, x_2^{0,8}\, x_3^{1,5}$$

Составить математическую модель и определить потребительскую корзину, которая позволит субъекту получить максимальную пользу при соблюдении бюджетного ограничения субъекта.

Задача 12.

Личный бюджет Джека составляет 1900$. Основные продукты его ежедневного потребления 1, 2 и 3 имеют цены на рынке равные p1 = 1,2$, p2 = 2,5$ и p3 = 0,8$. Минимальные ежедневные потребляемые количества товаров каждого вида составляют $a1$ = 3 ед., $a2$ = 6 ед., $a3$ = 8 ед. соответственно.

Полезность потребительского набора, которую субъект извлекает из потребления x_1 единиц товара 1, x_2 единиц товара 2 и x_3 единиц товара 3, измеряется функцией полезности Стоуна

$$(x_1 - a_1)^{0,5}(x_2 - a_2)^{1,3}(x_3 - a_3)^{0,85}.$$

Составить математическую модель и определить потребительскую корзину, которая позволит субъекту получить максимальную пользу при соблюдении бюджетного ограничения субъекта.

Контрольные вопросы

1. В чем отличительные особенности задач нелинейного программирования от задач ЛП?
2. Дайте классификацию задач нелинейного программирования.
3. Что является необходимым условием существования экстремума для задачи безусловной оптимизации?
4. Дайте понятие седловой точки функции Лагранжа для задачи линейного программирования.
5. Запишите условия существования седловой точки функции Лагранжа (условия Куна-Таккера).
6. Покажите связь теорем Куна-Таккера для задачи нелинейного программирования и двойственности для задачи линейного программирования.
7. В чем суть метода линейной аппроксимации?
8. Чем отличается задача линейного программирования от задачи квадратического программирования?
9. Почему для решения задачи квадратического программирования можно применить симплекс-метод?
10. Опишите алгоритм решения задачи квадратического программирования на безе теоремы Куна-Таккера.

3 Методические указания для организации самостоятельной работы

3.1 Общие положения

Целями самостоятельной работы являются систематизация, расширение и закрепление теоретических знаний, приобретение навыков исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студента по дисциплине «Исследование операций и теория принятия решений» включает следующие виды его активности:

1. проработка лекционного материала;
2. изучение тем теоретической части дисциплины, вынесенных для самостоятельной проработки;
3. подготовка к лабораторным работам;
4. подготовка к экзамену.

3.2 Проработка лекционного материала

Лекция – традиционно ведущая форма обучения в вузе. Она является методологической и организационной основой для всех форм учебных занятий, в том числе самостоятельных. Ее основная цель – формирование у студентов ориентировочной основы для последующего усвоения студентами учебного материала. В ходе лекции преподаватель, опираясь на имеющиеся у студентов знания и практический опыт, подводит их к пониманию и усвоению новых знаний, формулированию правил и выводов.

Для усваивания лекционного материала студенту рекомендуется проработать материал по конспекту лекций и учебной литературе, при этом дополнительно законспектировать в рабочей тетради кратко, схематично, последовательно основные положения, выводы, формулировки, обобщения, помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Если материал связан с решением задач исследования операций и теории принятия решений, то обязательно нужно закрепить математическую постановку этих задач, методы и алгоритмы их решения на самостоятельном решении подобных задач, которые приводятся в методических указаниях к лабораторным работам или в учебной литературе. Следует обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации, на учебном занятии.

При первом ознакомлении с новым материалом полезно применить «партитурное чтение», беглый просмотр главы, раздела. Старайтесь получить общее представление об излагаемых вопросах, не задерживаясь на математических выводах, уравнениях реакций. Вникайте в сущность того или иного вопроса, а не пытайтесь запомнить отдельные факты или явления.

Повторное чтение (более медленное и вдумчивое) должно сопровождаться пометками, записями в рабочей тетради, выписками из прочитанного. Чтобы лучше запомнить и усвоить изучаемый материал, вносите в рабочую тетрадь формулировки законов и основных понятий, незнакомые термины и названия. Если материал поддается систематизации, составляйте графики. рисунки, диаграммы, таблицы – они очень облегчают запоминание, уменьшают объем конспектируемого материала. Приобретайте навыки конспектирования – краткий конспект помогает при повторении материала в период подготовки к экзамену.

Готовьтесь обязательно к последующей работе над лекцией, для этого:

• повторите изученный материал по конспекту или по вашим записям;
• неоконченные фразы, пропущенные слова и другие недочеты в записях устраните, пользуясь материалами из учебника и других источников;
• если пропущено занятие, оставьте несколько свободных страниц, содержание пропущенного материала нужно восполнить во время самостоятельной работы;
• подготовьте вопросы преподавателю по предыдущей теме.

3.3 Подготовка к лабораторным работам

Лабораторные занятия являются связующим звеном теории и практики. Они позволяют углубить и закрепить теоретические знания, получаемые на лекциях, проверить научно-теоретические положения экспериментальным путем, выработать у студентов практические умения и навыки. Одновременно они являются базой для научно-исследовательской работы студентов.

Студенты должны заранее самостоятельно подготовиться к лабораторной работе с использованием указанной преподавателем литературы: учебники, лекции, методические указания. Подготовить ответы на контрольные вопросы, предложенные преподавателем к данной лабораторной работе. Каждая лабораторная работа выполняется по определенной теме с указанием цели её выполнения. Следует помнить, что к методическим указаниям на выполнение определенных лабораторных работ прилагаются презентационные файлы, помогающие в усвоении тем дисциплины. Они выложены в вычислительной сети кафедры.

3.4 Самостоятельное изучение тем теоретической части курса

3.4.1 Задачи дробно-линейного программирования. Алгоритм решения

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Отличие задачи линейного программирования от задачи дробно-линейного программирования?
2. Способ сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования?
3. Алгоритм решения задачи дробно-линейного программирования.
4. Графический способ решения задачи дробно-линейного программирования.

Методические рекомендации по изучению

Для изучения данной темы, следует повторить рассмотрение вопросов по алгоритмам решения задач линейного программирования общего вида (симплекс-алгоритмы). На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, например: Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с. 81-87.

3.4.2 Квадратичное программирование

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Чем отличается задача линейного программирования от задачи квадратического программирования?

2. Почему для решения задачи квадратического программирования можно применить симплекс-метод?
3. Опишите алгоритм решения задачи квадратического программирования на безе теоремы Куна—Таккера.

Методические рекомендации по изучению

При изучения данной темы обратите внимание на связь двойственности задач линейного программирования и функции Лагранжа для задачи линейного программирования, а также понятие седловой точки. Следует повторить рассмотрение вопросов по поиску экстремумов задач безусловной оптимизации. На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, например: Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с.153-163.

3.4.3 Оптимизация сетевых графиков по времени выполнения работ и использованию рабочей силы

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Укажите способы определения резервов времени выполнения работ.
2. Что такое график Ганта?
3. Опишите алгоритм оптимизации распределения трудовых ресурсов на графиках Ганта.

Для изучения данной темы, следует повторить рассмотрение вопросов по определению основных параметров сетевого графика. На представленные вопросы можно найти ответы в интернете, а также в литературных источниках по данной дисциплине, например: Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учеб. пособие. – Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010, с. 182-192.

4 Рекомендуемая литература

1. Ржевский, С.В. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.В. Ржевский — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 480 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/32821
2. Горлач, Б.А. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б.А. Горлач — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/4865
3. Есипов, Б.А. Методы исследования операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б.А. Есипов — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 304 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/68467
4. Юкаева, В.С. Принятие управленческих решений [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Юкаева, Е.В. Зубарева, В.В. Чувикова — Москва: Дашков и К, 2016. — 324 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/93383
5. Колбин, В.В. Методы принятия решений [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.В. Колбин — Санкт-Петербург: Лань, 2016. — 640 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/71785.