

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

## **РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНОЙ И ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕПИ**

Методические указания по выполнению лабораторной работы

Томск 2018

## 1 Введение

Система Mathcad — современный программный продукт, который может оказать существенную помощь студентам, инженерам и всем тем, кто выполняет какие-либо расчёты. Основное достоинство этой системы заключается в отсутствии необходимости пользователю осваивать основы программирования, так как Mathcad предельно приближен к обычному математическому языку. Поэтому на решение поставленных задач затрачивается незначительное время. Вычислитель системы содержит множество математических функций — от всем известных элементарных до весьма специфических.

Современные версии Mathcad дают пользователям возможность производить символьные расчёты. В этом случае результатом вычисления выражения является другое выражение. При этом желаемая форма этого второго выражения может быть задана. Первоначальное выражение можно продифференцировать, проинтегрировать, разложить на множители, в ряд и так далее.

Возможность производить практически любые операции с действительными и комплексными числами, большой набор векторных и матричных операций делают Mathcad незаменимым инструментом в руках студентов всех специальностей.

**Цель работы:** расчет импульсной и переходной характеристики с помощью MathCad. Построение сигналов на входе и выходе цепи, а также сравнение с результатами, полученными в первой лабораторной работе.

## 2 Требования к выполнению работы

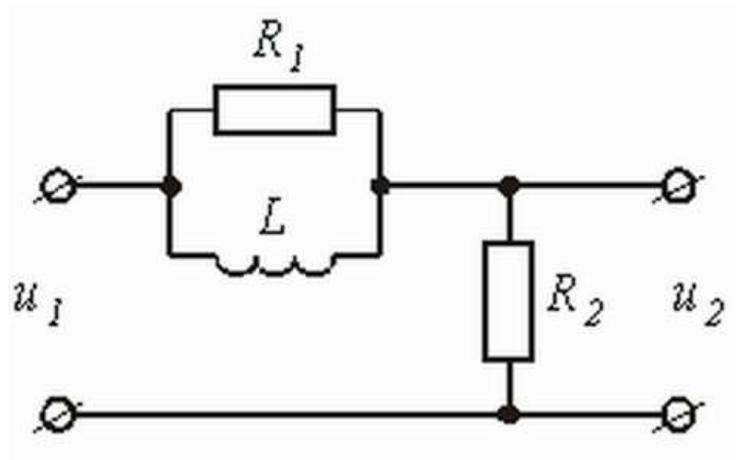
Задача посвящена временному и частотному (спектральному) методам расчета реакции цепей на сигналы произвольной формы. В качестве такого сигнала используется импульс прямоугольной формы (видеоимпульс). Электрические схемы цепей содержат емкости  $C$  или индуктивности  $L$ , а также сопротивления  $R$ . Во всех схемах входным напряжением  $u_1(t)$  является прямоугольный импульс длительностью  $t_u = 30$  нс и амплитудой  $U_1 = 5$  В.

1. Перерисуйте схему Вашего варианта, которую Вы проектировали в первой лабораторной работе. Выпишите исходные данные Вашего варианта.
2. Рассчитайте переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики цепи по напряжению классическим или операторным методом (по выбору).
3. Рассчитайте реакцию цепи в виде выходного напряжения  $u(t)$  используя:
  - интеграл Дюамеля;
  - интеграл наложения.
4. Постройте временные диаграммы входного и выходного напряжений.
5. Рассчитайте и постройте график модуля комплексной передаточной функции цепи (АЧХ)  $H_1(\omega) = |H_1(\omega)|$ , как функцию от циклической частоты  $f$  в диапазоне частот  $0-3/t_u$ .

Расчет производите в пакете MathCad в соответствии с представленным ниже примером.

### 3 Порядок выполнения работы

В качестве примера рассматривается схема цепи, представленная на рисунке 2.1. Электрическая схема цепи содержит индуктивность  $L = 20$  мкГн, резисторы сопротивлением  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 3$  кОм. Входным напряжением  $u_1(t)$  является прямоугольный импульс длительностью  $t_u = 30$  нс и



амплитудой  $U_1 = 3$  В.

Рисунок 2.1 – Электрическая принципиальная схема фильтра

Рассчитайте переходную  $g_2(t)$  и импульсную  $h_2(t)$  характеристики цепи по напряжению классическим или операторным методами (по выбору).

Переходная характеристика цепи рассчитывается, как переходной процесс в виде тока или напряжения, вызванный включением цепи с нулевыми начальными условиями на постоянное напряжение 1 В. В соответствие с этим составляется схема включения, на которой  $E = 1$  В. В задаче определяется переходная характеристика  $g_2(t)$  по напряжению относительно выходного контура, причем  $U_{R_1} = U_L$ , поэтому можно записать, что:

$$g_2(t) = u_{R_2}(t) = E - u_L(t) = E - L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Напряжение можно рассчитать с помощью формулы расчета переходных процессов в схемах первого порядка:

$$i_L(t) = i_{L np} + Ae^{pt},$$

где  $i_{L np} = i_L(\omega) = E/R_2 = 3.3 \cdot 10^{-4}$  А,  $p$  – корень характеристического уравнения, который находится из операторного сопротивления схемы при  $Z(p) = 0$ :

$$Z(p) = R_2 + \frac{R_1 p L}{R_1 + p L};$$

$$p = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Постоянная интегрирования находится из рассмотрения  $i_L(t)$  при  $t = 0_+$ , нулевых начальных условиях:

$$i_L(0_+) = i_{L np} + A = 0;$$

$$A = -i_{L np} = -3.3 \cdot 10^{-4}.$$

В окончательном виде запишем:

$$i_L(t) = 3.3 \cdot 10^{-4} \left( 1 - e^{-t \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}} \right),$$

где постоянная времени

$$\tau_1 = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot (1000 + 3000)}{1000 \cdot 3000} = 26.67 \cdot 10^{-9} \text{ с}.$$

Запишем выражение для переходной характеристики:

$$g_2(t) = E - L \frac{d}{dt} \left( 3.3 \cdot 10^{-4} \left( 1 - e^{-t \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}} \right) \right) = 1 - 3.3 \cdot 10^{-4} \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t};$$

$$g_2(t) = 1 - 0.25 \cdot e^{-37.5 \cdot 10^5 t}.$$

Импульсная характеристика цепи  $h(t)$  есть производная от переходной характеристики  $h(t) = g'(t)$ . Однако следует учесть, что, если переходная характеристика отлична от нуля при  $t=0$ , т.е. имеет скачок при  $t=0$ , то при дифференцировании появляется дополнительное слагаемое:

$$h(t) = g(0)\delta(t) + g'(t).$$

В нашем случае  $g(0) = 12.632$ , поэтому

$$h_2(t) = 0,75 \cdot \delta(t) + 93,75 \cdot 10^{-5} e^{-37,5 \cdot 10^6 t}$$

где  $\delta(t)$  – импульсная функция (функция Дирака).

Рассчитайте реакцию цепи в виде выходного напряжений  $u_2(t)$  используя:

- интеграл Дюамеля;
- интеграл наложения.

Постройте временные диаграммы входного и выходного напряжений. Интеграл Дюамеля можно записать в следующем виде:

$$u_2(t) = u_1(0)g_2(t) + \int_0^t u_1'(\tau)g_2(t-\tau)d\tau.$$

Входное напряжение  $u_1(t)$  имеет форму прямоугольного импульса, аналитическая запись которого может быть представлена как

$$u_1(t) = \begin{cases} U_1 & \text{при } 0 \leq t \leq t_u \\ 0 & \text{при } t \geq t_u \end{cases}$$

Следовательно,  $u_1(0) = U_1$ , а производная  $u_1'(t) = 0$  или для переменной  $\tau$  –  $u_1'(\tau) = 0$ , поэтому интеграл Дюамеля для интервала времени  $0 \leq t \leq t_u$  можно записать:

$$u_2(t) = U_1(0)g_2(t) + \int_0^t 0 \cdot g_2(t-\tau)d\tau = 3 \cdot (1 - 0,25 \cdot e^{-37,5 \cdot 10^6 t}) + \int_0^t 0 \cdot g_2(t-\tau)d\tau;$$

$$u_2(t) = 3 - 0,75e^{-37,5 \cdot 10^6 t}.$$

Для интервала времени  $t_u \leq t \leq \infty$ :

$$u_2(t) = U_1 g_2(t) + \int_0^{t_u} 0 \cdot g_2(t-\tau)d\tau - U_1 g_2(t-t_u);$$

$$u_2(t) = 3 \cdot (1 - 0,25 \cdot e^{-37,5 \cdot 10^6 t}) - 3 \cdot (1 - 0,25 \cdot e^{-37,5 \cdot 10^6 (t-30 \cdot 10^{-9})});$$

$$u_2(t) = 1,56e^{-37,5 \cdot 10^6 t}.$$

В отличие от интеграла Дюамеля в интеграле наложения не учитываются

дополнительными слагаемыми скачки входного напряжения:

$$u_2(t) = \int_0^t U_1(\tau) \cdot h_2(t-\tau) d\tau$$

С учетом найденной ранее импульсной характеристики реакция заданной цепи на прямоугольный импульс будет равна:

- для интервала времени  $0 \leq t \leq t_u$ :

$$u_2(t) = \int_0^t U_1 \cdot \left[ 0,75 \cdot \delta(t) + 93,75 \cdot 10^{-5} e^{-37,5 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau.$$

Используя фильтрующее свойство импульсной  $\delta$ -функции, получим

$$u_2(t) = 3 \cdot 0,75 + 3 \int_0^t 93,75 \cdot 10^{-5} e^{-37,5 \cdot 10^6 (t-\tau)} d\tau = 3 - 0,75 \cdot e^{-37,5 \cdot 10^6 t}$$

- Для интервала времени  $t_u \leq t \leq \infty$ :

$$u_2(t) = \int_0^{t_u} U_1 \cdot \left[ 0,75 \cdot \delta(t) + 93,75 \cdot 10^{-5} e^{-37,5 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau +$$

$$+ \int_{t_u}^t \left[ (0 - U_1) \cdot 0,75 \cdot \delta(\tau - t_u) + 0 \cdot 93,75 \cdot 10^{-5} e^{-37,5 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau;$$

$$u_2(t) = 3 \cdot 0,75 + 3 \cdot 93,75 \cdot 10^{-5} \frac{\left( e^{37,5 \cdot 10^6 \cdot 30 \cdot 10^{-9}} - 1 \right) \cdot e^{-37,5 \cdot 10^6 t}}{37,5 \cdot 10^6} - 3 \cdot 0,75 = 1,56 \cdot e^{-37,5 \cdot 10^6 t}$$

Сравнение результатов расчетов напряжения  $u_2(t)$  с использованием интегралов наложения и Дюамеля показывает, что они совпадают между собой.

Построение временной диаграммы входного и выходного напряжений. Диаграмма выходного напряжения строится с использованием найденных ранее выражений для напряжения  $u_2(t)$  путем подстановки в них соответствующих моментов времени. Результаты расчетов сведены в таблицу 1.

Таблица 1.

Время	0	$0,3t_v$	$0,6 t_v$	$t_{v-}$	$t_{v+}$	$t_v + \tau_1$	$t_v + 2\tau_1$	$t_v + 3\tau_1$
$t, \text{нс}$	0	9	18	30	30	56,67	83,33	110
$u_1, \text{В}$	3	3	3	3	0	0	0	0
$u_2, \text{В}$	2,25	2,465	2,618	2,757	0,507	0,186	0,069	0,025

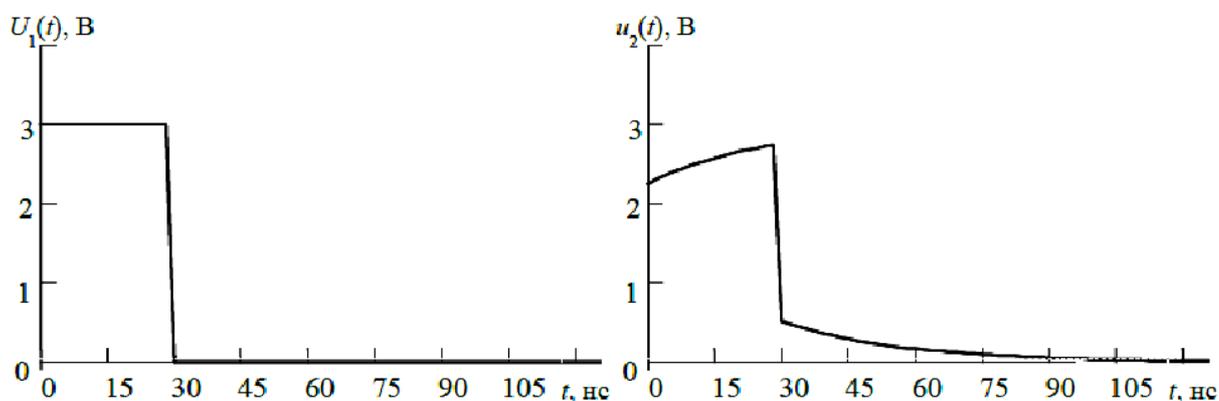


Рисунок 2.2 – Диаграммы входного  $u_1(t)$  (слева) и выходного  $u_2(t)$  (справа) напряжений в цепи

Расчет комплексных спектральных плотностей входного  $U_1(j\omega)$  и выходного  $U_2(j\omega)$  сигналов. Для расчета комплексной спектральной плотности непериодического сигнала  $f(t)$  произвольной формы используется прямое преобразование Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Для заданного входного сигнала преобразование Фурье дает выражение:

$$\begin{aligned}
 U_1(j\omega) &= \int_0^{t_u} U_1 e^{-j\omega t} dt = -\frac{U_1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{t_u} = -\frac{U_1}{j\omega} (e^{-j\omega t_u} - e^{-j\omega \cdot 0}) = \frac{U_1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_u}) = \\
 &= \frac{U_1}{j\omega} \left( 1 - \cos \frac{2\omega t_u}{2} + j \sin \frac{2\omega t_u}{2} \right) = \frac{U_1}{j\omega} \left( 2 \sin^2 \frac{\omega t_u}{2} + 2j \sin \frac{\omega t_u}{2} \cos \frac{\omega t_u}{2} \right) = \\
 &= \frac{U_1}{j\omega} \cdot \frac{-j}{-j} \cdot \frac{t_u/2}{t_u/2} \cdot 2 \sin \frac{\omega t_u}{2} \cdot \left( j \cos \frac{2\omega t_u}{2} + \sin \frac{2\omega t_u}{2} \right) = \\
 &= U_1 t_u \frac{\sin \frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}} \cdot \left( \cos \frac{2\omega t_u}{2} - j \sin \frac{2\omega t_u}{2} \right) = U_1 t_u \frac{\sin \frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}} \cdot e^{-j \frac{\omega t_u}{2}}.
 \end{aligned}$$

Подставив численные значения, получим:

$$U_1(j\omega) = 3 \cdot 30 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\sin 15 \cdot 10^{-9} \cdot \omega}{15 \cdot 10^{-9} \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega 15 \cdot 10^{-9}} = 6 \frac{\sin 15 \cdot 10^{-9} \cdot \omega}{\omega} e^{-j\omega 15 \cdot 10^{-9}}.$$

Комплексная спектральная плотность выходного сигнала находится по формуле:

$$U_2(j\omega) = H(j\omega) \cdot U_1(j\omega),$$

Функция  $H(j\omega)$  находится как отношение комплексного значения гармонического напряжения на выходе цепи к комплексному значению гармонического напряжения той же частоты, приложенному ко входу цепи. Согласно закону Ома при одном и том же токе напряжение прямо пропорционально сопротивлению цепи. Тогда передаточную функцию можно найти как отношение выходного сопротивления цепи ко входному:

$$H(j\omega) = \frac{Z_{\text{вых}}(j\omega)}{Z_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{j\omega LR_1}{j\omega L + R_1}}; \quad H(j\omega) = \frac{R_1 R_2 + j\omega LR_2}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}.$$

Спектральная плотность выходного сигнала:

$$H(j\omega) = \frac{R_1 R_2 + j\omega L R_2}{R_1 R_2 + j\omega L (R_1 + R_2)} \cdot U_1 t_u \frac{\sin \frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}} \cdot e^{-j \frac{\omega t_u}{2}}$$

Расчет и построение графиков модулей спектральной плотности входного и выходного сигналов и модуля комплексной передаточной функции цепи, как функций от циклической частоты  $f$  в диапазоне частот  $0 - 3/t_u$ . Спектральная плотность входного напряжения:

$$U_1(\omega) = |U_1(j\omega)| = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_u}{2}$$

Спектральная плотность входного напряжения комплексной передаточной функции (амплитудно-частотная характеристика цепи):

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{(R_1 R_2)^2 + (\omega L R_2)^2}{(R_1 R_2)^2 + (\omega L)^2 (R_1 + R_2)^2}}$$

Спектральная плотность выходного напряжения:

$$U_2(j\omega) = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_u}{2} \sqrt{\frac{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 R_2^2}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}}$$

Для построения графиков полученных функций необходимо выбрать расчетные точки по частоте. Учтем, что спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса измеряется в вольт×секундах [В·с] и что она обращается в ноль на частотах  $1/t_u, 2/t_u, 3/t_u$  и т.д. Поэтому дополнительно выбираются промежуточные точки между этими частотами. Максимальная частота в соответствии с заданием равна  $3/30 \cdot 10^{-9} = 100 \cdot 10^6$  Гц = 100 МГц. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2.

$f, \text{ МГц}$		$\omega \cdot 10^6, \text{ рад/с}$	$U_1(\omega) \cdot 10^{-9}, \text{ В} \cdot \text{с}$	$H(\omega)$	$U_2(\omega) \cdot 10^{-9}, \text{ В} \cdot \text{с}$
0	0	0	90	1	90
$0,5/t_u$	16,7	104,7	58,7	0,784	46
$1/t_u$	33,3	209,4	0	0,759	0
$1,5/t_u$	50	314,2	19,1	0,754	14,4
$2/t_u$	66,7	418,9	0	0,752	0
$2,5/t_u$	83,3	523,6	11,4	0,751	8,5
$3/t_u$	100	628,3	0	0,751	0

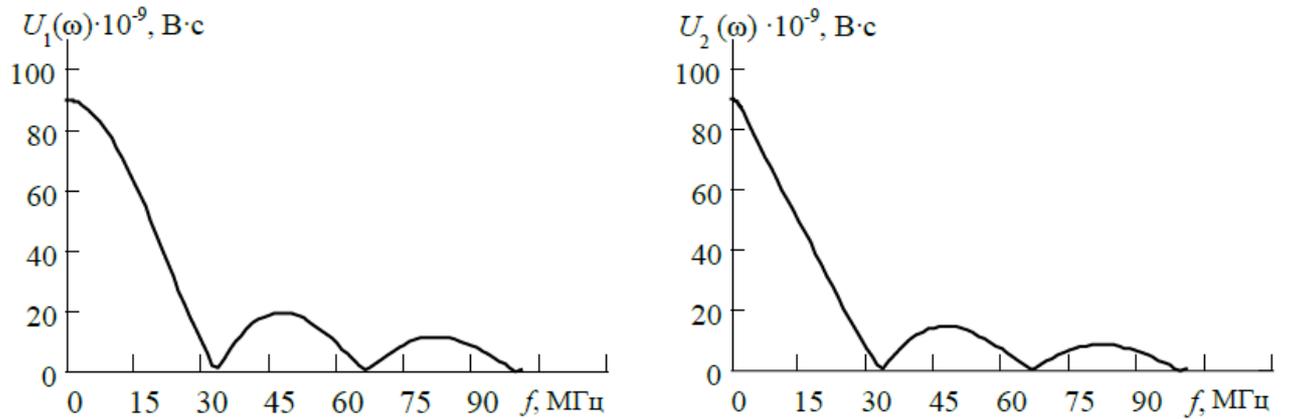


Рисунок 2.3 – Спектральная плотность входного сигнала ( $U_1(\omega)$ ),  
спектральная плотность выходного сигнала ( $U_2(\omega)$ )

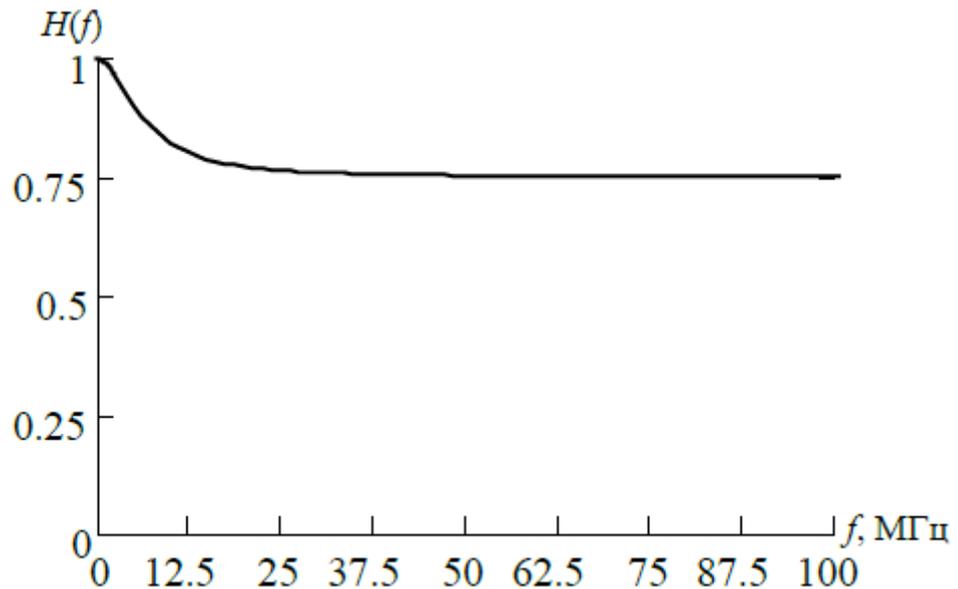


Рисунок 2.4 – Амплитудно-частотная характеристика цепи

#### 4 Контрольные вопросы

1. Поясните, как вы получили выражение для расчета переходной характеристики.
2. Поясните, как вы получили выражение для расчета импульсной характеристики.
3. Как выглядит интеграл Дюамеля для вашей схемы? Объясните, как вы его получили.
4. Как выглядит интеграл наложения для вашей схемы? Объясните, как вы его получили.
5. Объясните, почему изменился выходной сигнал?
6. Как производился расчет и построение графиков спектров сигналов?