
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Введение в математику

*Учебно-методическое пособие по выполнению практических работ и самостоятельной
работы для студентов ВУЗа*

Томск

2018

УДК 000.00:000.0

ББК 00.000 00

0 00

Пособие составлено в соответствии с тематикой практических работ и самостоятельной работы по дисциплине «Введение в математику». Пособие содержит темы и содержание практических работ, методические указания к их проведению. / сост.: Е.А. Шельмина, И.Г. Афанасьева, Е.В. Мыльникова; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2018. – 64 с.

© ФГБОУ ВО ТУСУР, 2018

© Шельмина Е.А, Афанасьева И.Г, Мыльникова Е.В., 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Практические работы	4
Практическая работа №1	4
Практическая работа №2	15
Практическая работа №3	35
Практическая работа №4	41
Практическая работа №5	46
Практическая работа №6	50
Практическая работа №7	58
Практическая работа №8	61
Раздел 2. Самостоятельная работа	64

Раздел 1. Практические работы

Практическая работа №1 Числовые множества. Понятие функции. Классификация функций. Элементарные функции.

Цель работы: получить навыки решения задач с использованием числовых множеств и функций.

1.1. Числовые множества. Их виды и границы. Операции над числовыми множествами: сумма, пересечение, разность.

Первичным понятием теории множеств является понятие самого множества.

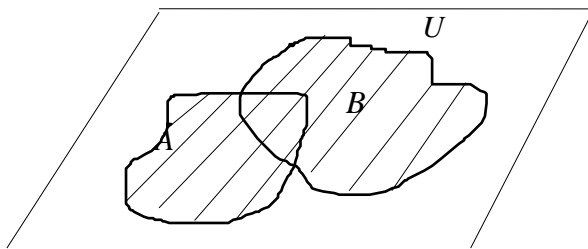
Множество - это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку. Элементы множества при этом должны быть различными. Множество обозначается парой скобок $\{\dots\}$, внутри которых либо просто перечисляются элементы, либо описываются их свойства. Например, $A = \{x \in \mathbb{N} / x + 2 = 1\}$ - множество натуральных чисел, удовлетворяющих условию $x + 2 = 1$, очевидно, пусто. $B = \{ \text{сложение, умножение} \}$ - множество основных арифметических операций.

Если необходимо указать, что объект a является элементом множества A , то пишут $a \in A$ (a принадлежит A), наоборот запись $a \notin A$ говорит о том, что a не принадлежит A .

Если каждый элемент множества A является элементом множества B , то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является **подмножеством** множества B . Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются **равными**, то есть $A = B$, в противном случае $A \neq B$. Если $M \subset A$ и $M \neq \emptyset$, $M \neq A$, то множество M называется **собственным подмножеством** множества A .

С помощью скобок и операций над множествами можно построить новые множества, более сложные чем исходные.

Объединение. Эта операция над множествами обозначается $A \cup B$, определяется как $C = A \cup B$. Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Если за некоторое универсальное множество, содержащее как подмножества все другие множества, обозначить U (или Ω) и изобразить его в виде всей плоскости, то любое множество $A \subset U$ можно изобразить в виде части плоскости, то есть в виде некоторой фигуры, лежащей на плоскости. C - объединение множеств A и B , C на рисунке заштриховано.



Пересечением двух множеств называется такое множество $C = A \cap B$, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам.

Разностью двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят в A и одновременно не входят в B . Если, в частности, A подмножество U , то разность $U \setminus A$ обозначается \bar{A} и называется **дополнением** множества A .

Основные законы алгебры множеств

- 1) Коммутативный: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- 2) Ассоциативный: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- 3) Дистрибутивный:
$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{cases}$$
- 4) Законы поглощения: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
- 5) Законы де Моргана (двойственности): $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- 6) Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$.
- 7) Закон включения: $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
- 8) Закон равенства: $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow (A \cap B) \vee (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

Декартово произведение множеств

Если каждому элементу из множества A сопоставлен в соответствие определенный элемент из множества B , то возникает множество, составленное из пар элементов множеств A и B , - **декартово произведение множеств**.

Записывают декартово произведение множеств следующим образом:

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Это значит, что если дано множество $A = \{1,2,3\}$ и множество $B = \{15,25\}$, то их декартово произведение будет состоять из пар: $A \times B = \{(1;15), (1;25), (2;15), (2;25), (3;15), (3;25)\}$.

Если во множестве A количество элементов равно m , а во множестве B — n , то их декартово произведение будет состоять из $m \times n$ элементов.

Следует иметь в виду что $A \times B$ и $B \times A$ разные множества, так как пары типа $(a; b)$ отличаются от пар тип $(b; a)$.

Примером декартова произведения множеств могут служить: таблица умножения, где умножаются два множества, содержащие натуральные числа; множество точек плоскости с координатами $(x; y)$, где $x \in A$, $y \in B$; множество дробей, в которых числитель принадлежит одному множеству, а знаменатель другому.

Ограниченность числовых множеств, их точные границы. Предельные точки числовых множеств.

Пусть X — произвольное непустое множество действительных чисел. Число $M = \max X$ называется **наибольшим (максимальным) элементом** множества X , если $M \in X$ и для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq M$. Аналогично определяется понятие **наименьшего (минимального) элемента** $m = \min X$ множества X .

Множество X называется **ограниченным сверху**, если существует действительное число a такое, что $x \leq a$ для всех $x \in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется **верхней гранью** множества X . Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется **точной верхней гранью** множества X и обозначается символом $\sup X$. Очевидно $\sup X = \max X$ тогда и только тогда когда $\sup X \in X$.

Аналогично определяются понятия **ограниченного снизу множества, нижней грани и точной нижней грани** множества X . Последняя обозначается символом $\inf X$.

Множество X , ограниченное снизу и сверху, называется **ограниченным**.

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется **предельной точкой** множества X , если любая окрестность точки x_0 содержит точку из множества X , отличную от x_0 , то есть для $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in X, y \neq x_0: |y - x_0| < \varepsilon$.

Пример №1.

Задание. Даны множества: $A = \{2,7,8,10\}$, $B = \{1,2,4,8\}$, $C = \{2,3,5,6,8\}$. Перечислите элементы множеств: а) $A + B$, б) $B + C$, в) $A \cdot B \cdot C$, г) $A \setminus B$, д) $C \setminus B$

Решение:

- а) $A + B = \{2,7,8,10,1,3,5,6\}$ объединение
 б) $B + C = \{1,2,4,8,3,5,6\}$
 в) $A \cdot B \cdot C = \{2,8\}$ пересечение
 г) $A \setminus B = \{7,10\}$ разность
 д) $C \setminus B = \{3,5,6\}$

Пример №2.

Задание. Записать множество $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$, перечислить его элементы.

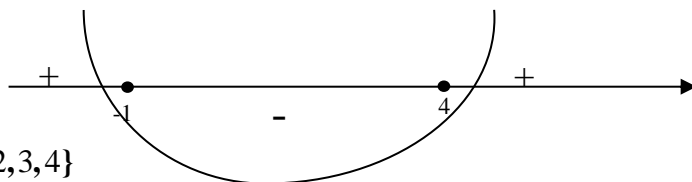
Решение:

$x \in \mathbb{N}$ обозначает, что элементы множества A – натуральные числа (1,2,3,4 и т.д.).

В качестве правила исходного множества выступает неравенство: $x^2 - 3x - 4 \leq 0$. Чтобы его решить нужно решить уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ вида $ax^2 + bx + c = 0$. Квадратное уравнение (парабола) можно решить с помощью дискриминанта, обозначается D .

Соответственно, $D = b^2 - 4ac = 25$. Следовательно, корни уравнения $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = 4; -1$

Отмечаем на числовой прямой точки (корни уравнения). Ветви параболы направлены \uparrow так как $a > 0$. Неравенство нестрогое $x \in [-1; 4]$.



Ответ: $A = \{1,2,3,4\}$

Пример №3.

Задание. Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными сверху?

$$A_1 = \{x : x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}; \quad A_6 = \{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\};$$

$$A_2 = \{x : x^2 - 6x + 8 = 0\}; \quad A_7 = \{x : x \in [1,8]\};$$

$$A_3 = \{x : (x-1)(x+2) > 0\}; \quad A_8 = \{x : x \in (-\infty, +\infty)\}.$$

$$A_4 = \{x : 0 < x < 1\};$$

$$A_5 = \{x : x^2 - 3x < 0\};$$

Решение:

Рассмотрим подробно каждое множество.

A_1 – бесконечное ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, его

точные грани: $\sup A_1 = \max A_1 = \frac{1}{2} \in A_1, \inf A_1 = 0 \notin A_1$

A_2 – бесконечное ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, т.е.

$$A_2 = \{2,4\};$$

A_3 – ограниченное снизу множество т.к. $x \in (1, +\infty)$, следовательно $\inf A_3 = 1 \notin A_3$

A_4 – ограниченное множество так как оно ограничено и сверху, и снизу, его точные грани:

$$\sup A_4 = 1 \notin A_4, \inf A_4 = 0 \notin A_4$$

A_5 – ограниченное сверху множество т.к. $x \in (-\infty, 0)$, следовательно $\sup A_5 = 0 \notin A_5$

A_6 – бесконечное ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, его

точные грани: $\sup A_6 = 1 \notin A_6, \inf A_6 = \frac{1}{2} \in A_6$

A_7 –ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, его точные грани:
 $\sup A_7 = \max A_7 = 8 \in A_7$, $\inf A_7 = 1 \in A_7$

A_8 – бесконечное множество, не ограниченное как сверху, так и снизу.

Ответ: $A_1, A_2, A_4, A_5, A_6, A_8$.

Пример №4

Задание. Найти декартово произведение множеств: $A = \{1,8,5\}$, $B = \{3,6\}$

Решение:

Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$, где $A \times B$ - упорядоченные пары элементов.

$A \times B = \{(1,3), (1,6), (8,3), (8,6), (5,3), (5,6)\}$

1.2. Понятие функции. Понятие графика функции. Линейная функция. Классы функций.

Определение. Постоянной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного процесса, то она называется параметром. Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Например, при равномерном движении $S = vt$, где S – путь и t – время есть постоянные величины, а v – скорость является параметром.

Если каждому элементу x множества X ($x \in X$) ставится в соответствие один элемент y множества Y ($y \in Y$), то говорят, что на множестве X задана **функция** $y = f(x)$.

При этом x называется независимой переменной (или аргументом), y – зависимой переменной, а f обозначает закон соответствия.

Множество X называется **областью определения** (или существования) функции и обозначается как $D(f)$, а множество Y – **областью значений** функции и обозначается как $E(f)$.

Существует несколько **способов задания** функции:

- **аналитический:** функция задается в виде формулы или закона соответствия:
 $y = f(x)$;

- **табличный:** значения функции перечисляются в виде таблицы с указанными значениями аргумента;

- **графический:** функция изображается в виде графика;

- **словесный:** функция описывается правилом ее составления.

Определение. Если $y = f(x)$ и $u = \varphi(x)$ – функции своих аргументов, причем область определения функции $f(x)$ содержит область значений функции $\varphi(x)$, то каждому x из области определения функции $\varphi(x)$ соответствует y такое, что $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием $y = f[\varphi(x)]$, называется **сложной** функцией, например, если $y = u^2$, где $u = \sin x$, то $y = (\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Функции обладают следующими **основными свойствами**:

1. Четность и нечетность. Функция называется **четной**, если для любых значений x из ее области определения выполняется условие: $f(-x) = f(x)$.

Функция называется **нечетной**, если для любых значений x из ее области определения выполняется условие: $f(-x) = -f(x)$.

Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется функцией **общего вида**.

2. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (убывающей) на промежутке X , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции. Возрастающие или убывающие функции относят к строго монотонным функциям.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$. Тогда функция возрастает на промежутке X , если $f(x_1) < f(x_2)$, и убывает, если $f(x_1) > f(x_2)$.

Если для условия $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$ выполняется нестрогое неравенство: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (или $f(x_1) \geq f(x_2)$), то функция называется **невозрастающей** (или **неубывающей**).

3. Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке X , если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$. Иначе функция называется **неограниченной**.

4. Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$.

Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y=kx+b$.

В уравнении функции число k , которое мы умножаем на x называется коэффициентом наклона.

Например, в уравнении функции $y=-2x+3$ $k=-2$ $b=3$;

Классификация функций

К **основным элементарным** функциям относятся:

- степенная функция $y = x^n$;
- показательная функция $y = a^x$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$;
- тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$,
 $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций. Например, функции $y = x + \operatorname{lg} \cos x$, $y = 3^{\sin x + \cos x}$ являются элементарными.

Пример №1

Задание: Найти области определения следующих функций:

1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

2) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

3) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

4) $y = \operatorname{lg}(x + 3)$

5) $y = \arcsin(x - 2)$

Решение:

$$1) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

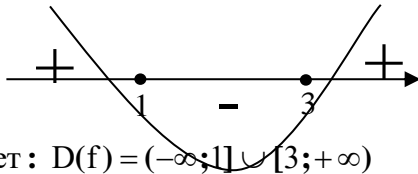
подкоренное выражение должно быть неотрицательным :

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm 2}{2} = 3; 1$$



Ответ : $D(f) = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

$$2) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$$

точки, в которых знаменатель обращается в ноль.

Решим квадратное уравнение :

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = 1$$

$$x_{1/2} = 2; 1$$

Данные значения не входят в $D(f)$

$$D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$3) y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

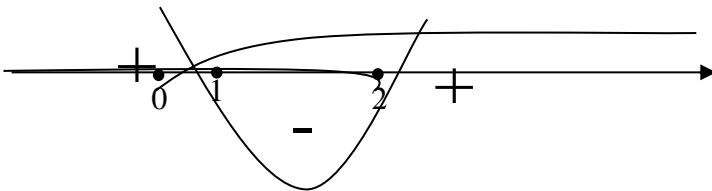
Должны выполняться 2 условия :

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2x - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad 2x - x^2 > 0$$

$$D = 1 \quad x(2 - x) > 0$$

$$x_{1/2} = 2; 1 \quad x > 0 \quad x < 2$$



Ответ : $D(f) = (0; 1]$

$$4) y = \lg(x + 3)$$

Натуральный логарифм ($\ln x$) – логарифм по основанию e ($\log_e x$)

Десятичный логарифм ($\lg x$) – логарифм по основанию 10 ($\log_{10} x$)

$$\log_a b = c \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

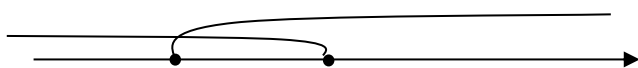
$$x + 3 > 0 \quad x > -3$$

$$\text{Ответ: } D(f) = (-3; +\infty)$$

$$5) y = \arcsin(x - 2)$$

$$-1 \leq x - 2 \leq 1$$

$$\begin{cases} x - 2 \leq 1 \\ x - 2 \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } D(f) = [1; 3]$$

Пример №2

Задание:

Определить, какие из данных ниже функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

$$1) y = 3 - x^2 + 2x^4 \quad 2) y = \frac{x-1}{x^2+1} \quad 3) y = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

Решение:

$$1) y = 3 - x^2 + 2x^4$$

Условия :

$$f(x) = f(-x) \text{ функция четная}$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ функция нечетная}$$

$$f(-x) = 3 - (-x)^2 + 2(-x)^4 = 3 - x^2 + 2x^4 \text{ четная}$$

$$2) y = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2+1} = \frac{-x-1}{x^2+1} \text{ функция ни четная}$$

Проверим на условие нечетности т.е. $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) = \frac{-x+1}{x^2+1}$$

Ответ : функция ни четная, ни нечетная.

$$3) y = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

Ответ : функция ни четная, ни нечетная из свойств натурального логарифма.

Пример №3

Задание:

Найти период функции:

$$a) y = \sin 3x \quad б) y = \cos \frac{x}{2} \quad в) y = \sin \frac{2x}{7} + 5 \cos \frac{x}{5}$$

Решение:

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет период T , если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$

Функция, имеющую отличный от нуля период T , называют периодической.

Если функция периодическая с периодом T , то при любом целом $k \neq 0$ число вида kT тоже период этой функции.

а) $y = \sin 3x$

Пусть T – основной период функции $y = \sin 3x$

$$f(x) = \sin 3x \Rightarrow f(x + T) = \sin 3(x + T) = \sin(3x + 3T)$$

Период функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ равен 2π

Чтобы число T было периодом f должно выполняться тождество $\sin(3x + 3T) = \sin 3x \Rightarrow 3T = 2\pi n$

по условию нужно найти основной период

$$3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ : $T = \frac{2\pi}{3}$

б) $y = \cos \frac{x}{2}$

$$f(x) = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow f(x + T) = \cos \frac{x}{2}(x + T) = \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}T \right)$$

$$\cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}T \right) = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}T = 2\pi \Rightarrow T = 4\pi$$

Ответ : $T = 4\pi$

Основной период функции $y = \cos kx$ или $y = \sin kx$ равен $\frac{2\pi}{k}$

в) $y = \sin \frac{2x}{7} + 5 \cos \frac{x}{5}$

$$\sin \frac{2x}{7} \Rightarrow f(x + T) = \sin \frac{2x}{7}(x + T) = \sin \left(\frac{2}{7}x + \frac{2}{7}T \right) = \sin \frac{2x}{7}$$

$$\frac{2}{7}T = 2\pi \Rightarrow T = 7\pi$$

$$\cos \frac{x}{5} \Rightarrow f(x + T) = \cos \frac{x}{5}(x + T) = \cos \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}T \right) = \cos \frac{x}{5}$$

$$\frac{1}{5}T = 2\pi \Rightarrow T = 10\pi$$

Период данной функции будет наименьшее кратное чисел 7π и 10π , т.е. $T = 70\pi$

Пример №4

Задание:

Вычислить значение функции в заданных точках:

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}; \quad f(2), \quad f\left(\frac{5}{2}\right), \quad f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Решение:

$$f(2) = \frac{2 * 2 - 3}{2^2 + 1} = \frac{1}{5}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2 * \frac{5}{2} - 3}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1} = \frac{8}{29}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 * \frac{1}{x} - 3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} = \frac{(2 - 3x)x}{(1 + x^2)}$$

Пример №5

Задание:

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{9\pi}{2} - 18x - 18\sqrt{2} \cos x + 97 \text{ на полуинтервале } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{5}\right).$$

Решение:

$$y' = \left(\frac{9\pi}{2} - 18x - 18\sqrt{2} \cos x + 97\right)' = -18 + 18\sqrt{2} \sin x$$

$$-18 + 18\sqrt{2} \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{18}{18\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Точка $x = \frac{\pi}{4}$ принадлежит заданному интервалу.

Вычислим значение функции в точках: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9\pi}{2} - 18\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 18\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 97 = \frac{9\pi}{2} + 9\pi + 97 = \frac{27\pi}{2} + 97 \approx 139,39$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9\pi}{2} - 18\left(\frac{\pi}{4}\right) - 18\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 97 = \frac{9\pi}{2} - \frac{18\pi}{4} - 18\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 97 =$$

$$= -18\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + 97 = -18 + 97 = 79$$

Ответ : 79

Пример №6

Задание:

Даны функции $f(x) = \frac{5x^2 + 2}{7x^2 + 3}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$. Найдите $f[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$, $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

Решение:

$$f[f(x)] = \frac{5\left(\frac{5x^2+2}{7x^2+3}\right)^2 + 2}{7\left(\frac{5x^2+2}{7x^2+3}\right)^2 + 3} = \frac{5(5x^2+2)^2 + 2(7x^2+3)^2}{(7x^2+3)^2} = \frac{223x^4 + 184x^2 + 38}{322x^4 + 266x^2 + 55}$$

$$\varphi[\varphi(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{2+x}$$

$$\varphi[f(x)] = \frac{1}{\frac{5x^2+2}{7x^2+3} + 1} = \frac{7x^2+3}{12x^2+5}$$

$$f[\varphi(x)] = \frac{5\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + 2}{7\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + 3} = \frac{7+4x+2x^2}{10+6x+3x^2}$$

Пример №7

Задание:

Представьте сложную функцию в виде цепочки элементарных функций:

$$\text{а) } y = \sqrt{x^2 + 8x - 17} \quad \text{б) } y = \lg(\cos(\sqrt{5x-3}))$$

Решение:

$$\text{а) } y = \sqrt{x^2 + 8x - 17}$$

Пусть $t = x^2 + 8x - 17$ (квадратная функция)

$$y = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \quad (\text{степенная функция})$$

$$\text{б) } y = \lg(\cos(\sqrt{5x-3}))$$

Пусть $t = 5x - 3$ (линейная функция)

$$z = \sqrt{t} \quad (\text{степенная функция})$$

$p = \cos z$ (тригонометрические функции)

$y = \lg p$ (логарифмические функции)

Пример №8

Задание:

Построить график функции:

$$\text{а) } f(x) = |x-1| + |x+3| \quad \text{б) } f(t) = |x^2 - x - 20|$$

Решение:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Находим нули подмодульных выражений

$$x-1=0 \quad x+3=0$$

$$x=1 \quad x=-3$$

Разбиваем ось на промежутки

Для каждого промежутка запишем функцию:

1) $x < -3$

$$x - 1 < 0 \quad x + 3 < 0$$

$$|x - 1| = -x + 1$$

$$|x + 3| = -x - 3$$

$$y = -x + 1 - x - 3 = -2x - 2$$

пусть $x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = 6$

$$x_2 = -5 \Rightarrow y_2 = 8$$

2) $-3 \leq x \leq 1$

$$x + 3 > 0$$

$$|x + 3| = x + 3$$

$$|x - 1| = -x + 1$$

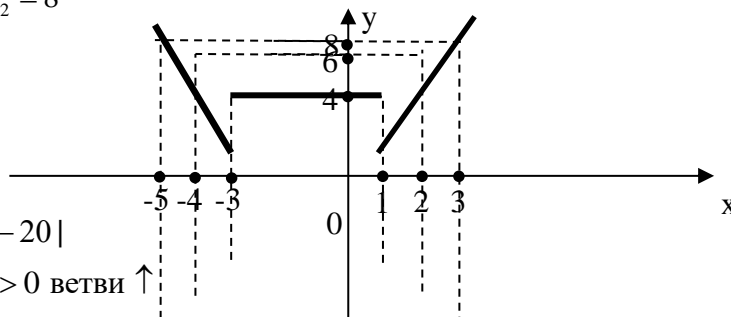
$$y = -x + 1 + x + 3 = 4$$

3) $x > 1$

$$y = x - 1 + x + 3 = 2x + 2$$

пусть $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 6$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 8$$



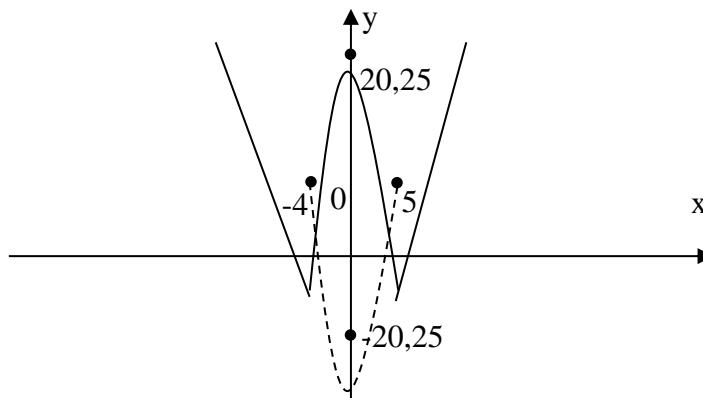
б) $f(x) = |x^2 - x - 20|$

$$x^2 - x - 20 = 0 \quad a > 0 \text{ ветви } \uparrow$$

$$x_{1/2} = 5; -4$$

$$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$y_B = -20,25$$



Задачи для самостоятельного решения

1) Даны два множества: A – отрезок $[1;10]$ и B – полуинтервал $[2;6)$. Перечислите элементы множеств: а) $A + B$ б) $A \cdot B$, г) $A \setminus B$, д) $B \setminus A$

2) Найти объединение множеств A и B , если $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ и $B = \{x \mid x^2 - 6x - 16 \leq 0\}$.

3) Записать множество

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\},$$

перечислить его элементы.

4) Найти декартово произведение множеств: $A = \{4,1,5\}$, $B = \{3,6\}$.

5) Для множества $X = [-1,1]$ найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$ и $\inf X$ если они существуют.

6) Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными снизу?

$$A_1 = \{x : |x| > 1\}; \quad A_6 = \{x : 0 \leq x < +\infty\};$$

$$A_2 = \{x : |x| < 1\}; \quad A_7 = \{1,10,100,1000\};$$

$$A_3 = \{x : x < 0\}; \quad A_8 = \{x : x(x-5) < 0\};$$

$$A_4 = \{x : -4 < x \leq 3\}; \quad A_9 = \{x : x \in (-\infty, -1]\};$$

$$A_5 = \{x : -\infty < x < 0\};$$

7) Найти области определения следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \sqrt{x+1}; \quad \text{б) } f(x,y) = \arccos \frac{x+y}{2} \quad \text{в) } f(x) = \begin{bmatrix} \arcsin \frac{3-2x}{5} \\ \sqrt{3-x} \end{bmatrix}.$$

8) Определить, какие из данных ниже функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

$$\text{а) } y = x^3 + 3 \quad \text{б) } y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad \text{в) } y = x \sin x + 2 \cos x$$

9) Вычислить значение функции в заданных точках:

$$f(x) = x^2 - x + 1; \quad f(2), \quad f(a+1), \quad f\left(\frac{2}{7}\right).$$

10) Найти период функции:

$$\text{а) } y = \cos 5x; \quad \text{б) } y = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \text{в) } y = \sin^2 x.$$

11) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

$$f(x) = x^2 - 2x + 5, \quad x \in [-1,4].$$

12) Пусть $f(x) = x^2$ и $\varphi(x) = 2^x$. Найдите : а) $f[\varphi(x)]$, б) $\varphi[f(x)]$.

13) Дано сложная функция

$$f(x) = \sqrt{\log_2(\sin x)},$$

представьте в виде цепочки элементарных функций.

14) Построить график функции:

$$\text{а) } f(x) = |x^2 - 4| \quad \text{б) } f(t) = |x + 3|$$

Практическая работа №2

Предел последовательности и предел функций. Непрерывность и дифференцируемость. Замечательные пределы. Экономический смысл производной в экономике.

Приложение производной в экономической теории.

Цель работы: получение навыков вычисления пределов и производных.

2.1. Последовательности и их виды. Понятие предела последовательности. Понятие предела функции. Понятие непрерывности и дифференцируемости.

Пусть каждому натуральному числу поставлено в соответствие определенное действительное число: числу 1 соответствует число a_1 , числу 2 – число a_2 , числу 3 – число a_3 , и т.д., числу n число a_n . Тогда говорят, что задана числовая последовательность и пишут: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, где $n = 1, 2, 3, \dots$.

Каждое значение a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) называется *элементом* или *членом* последовательности, а число n – его номером.

Обозначают последовательность как a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, либо $\{a_n\}$, либо перечислением ее членов.

Числовая последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов, среди которых могут быть равные. Например, 1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$; 2) $\{\cos \pi x\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots, 1\}$.

Способы задания последовательности

Аналитический. При данном способе последовательность задается формулой n -го члена или, говорят, общего члена последовательности. Например, формулой $a_n = \frac{n}{n+1}$

задается последовательность a_1, a_2, a_3, \dots , у которой:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}; a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \dots, \text{то есть последовательность } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Рекуррентный. При данном способе задания последовательности любой ее член, начиная с некоторого, выражается через предшествующие члены. При таком способе задания указывают первый член последовательности и формулу, по которой можно вычислить любой другой ее член по известным предшествующим. Например, пусть $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, тогда:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3;$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5;$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8,$$

и т.д., в результате имеем последовательность: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

Словесный. При данном способе последовательность задается описанием ее членов. Например, число $e = 2,71828$ может быть представлено в виде последовательности десятичных приближений с разной степенью точности: $2,; 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182; 2,71828; \dots$

Определение. Число a называется **пределом числовой последовательности** $\{x_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε , $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается предел последовательности как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Иными словами, число a есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N , начиная с которого (при $n > N$) все члены последовательности будут заключены в ε -окрестности точки a . Вне этой окрестности может быть лишь конечное число членов данной последовательности.

Таким образом, «доказать по определению», что число a есть предел последовательности $\{x_n\}$, означает указать способ определения по любому числу $\varepsilon > 0$ номера N , начиная с которого все члены последовательности не выходят за пределы ε -окрестности точки a .

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, не имеющая предел – *расходящейся*.

Свойства пределов:

- 1) если последовательность имеет предел, то он единственный;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$ ($C = const$);
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot x_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$;
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^m = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^m$;

В случае, когда общий член последовательности представляет собой отношение двух многочленов от n (дробь, числитель и знаменатель которой есть многочлены, называется рациональной), чтобы применить свойства предела, надо числитель и знаменатель разделить на старшую степень n , т.е. на максимальную из степеней числителя и знаменателя. Нетрудно убедиться, что в результате такого деления числитель и знаменатель уже имеют пределы и выполняется следующее *правило*: если степень числителя меньше степени знаменателя, рациональная дробь стремится к нулю. Если степени числителя и знаменателя совпадают, предел рациональной дроби равен отношению их старших коэффициентов (т.е. коэффициентов при старшей степени n).

Относительно арифметических действий с последовательностями можно сделать следующие замечания.

Замечание. Если последовательность x_n имеет предел (сходится), а последовательность y_n расходится, их сумма $x_n + y_n$ расходится. Если обе последовательности x_n и y_n расходятся, то их сумма может быть как сходящейся, так и расходящейся последовательностью.

Пусть дана некоторая последовательность $x_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Последовательно выбрав из нее элементы, например, только с четными номерами, мы получим новую последовательность, состоящую из чисел x_2, x_4, x_6 и т.д. Фактически сначала мы организовали последовательность номеров $n_k = 2k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, а затем выбрали из x_n элементы с номерами n_k . Важно, что при этом мы не возвращались назад, т.е. каждый следующий номер был больше предыдущего: $n_1 < n_2 < \dots$. Последовательность элементов x_{n_k} , полученная таким образом, называется *подпоследовательностью* последовательности x_n . Ясно, что существует бесконечно много способов выделения подпоследовательности из данной последовательности (т.е. бесконечно много последовательностей номеров n_k). Например, для $x_n = n$: $x_{2k} = \{2, 4, 6, \dots\}$; $x_{2k-1} = \{1, 3, 5, \dots\}$; $x_{k^2} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ и т.д.

Приведем еще одно **свойство предела последовательности**: последовательность x_n имеет предел тогда и только тогда, когда все ее подпоследовательности имеют предел, и притом один и тот же.

Определение. Говорят, что **последовательность стремится к бесконечности**, если, начиная с некоторого номера N , ее элементы становятся по модулю больше любого наперед заданного положительного числа $|x_n| > M$.

Если при этом все элементы последовательности, начиная с некоторого номера, остаются положительными, говорят, что последовательность сходится к «плюс бесконечности»: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, а если отрицательными — то к «минус бесконечности»:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Определение. Последовательность, сходящаяся к бесконечности, к $+\infty$ или к $-\infty$, называется *бесконечно большой* (б.б.). В свою очередь, последовательность, сходящаяся к нулю, называется *бесконечно малой* (б.м.).

Если об отношении $\frac{x_n}{y_n}$ нельзя сказать заранее ничего определенного: оно может иметь предел, стремиться к бесконечности или не иметь никакого предела, то говорят, что имеет место **неопределенность вида $\frac{0}{0}$** .

Неопределенность другого вида ($\infty - \infty$) возникает при вычитании бесконечно большой последовательности из бесконечно большой.

Определение. Число a называется **пределом** функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к x_0 , если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε , $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - a| < \varepsilon$. Обозначение предела функции: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Часто исследуется случай, когда x_0 — бесконечная величина. В таких случаях предел функции определяется следующим образом: число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число N , чтобы для всех значений x , удовлетворяющих условию $|x| > N$, выполнялось неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, а x_0 и x два произвольных значения аргумента из этого интервала. Разность между двумя значениями аргумента называется **приращением аргумента** и обозначается $x - x_0 = \Delta x$, откуда следует, что значение аргумента x можно определить через x_0 и его же приращение:

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Разность между двумя значениями функции называется **приращением функции** и обозначается: $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. Функция называется непрерывной в точке x_0 , если: а) функция определена в точке x_0 и в некоторой окрестности, содержащей эту точку; б) предел

приращения функции равен 0 при стремлении приращения аргумента к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

Замечание. Для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$.

Функция называется **непрерывной на промежутке**, если она непрерывна в каждой его точке. Если некоторая функция $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной, то эта точка называется **точкой разрыва**, а функция – **разрывной** в данной точке.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при условии $\varphi(x) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0 .

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0 , в которой $f(x) > 0$.

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке u_0 , а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right]$, то есть под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Свойства функций, непрерывных на отрезке:

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M (**теорем Вейерштрасса**).

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и значения на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = 0$ (**теорема Больцано-Коши**).

Определение. Функция называется **непрерывной слева** в точке x_0 , если левый предел в этой точке существует и равен значению функции: $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Аналогично определяется **непрерывность справа**: $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Из определения вытекает следующее **свойство** непрерывной функции в точке: если функция непрерывна в точке x_0 как слева, так и справа, то она непрерывна в этой точке (все три числа $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0)$ должны быть равны между собой). Фраза «левый и правый пределы имеют смысл (или существуют)», означает, что они конечны.

Если функция имеет предел в точке x_0 и при этом разрывна в этой точке, говорят, что в точке x_0 имеется **устранимый разрыв**. В этом случае необходимо доопределить функцию в этой точке, например, определив ее предел.

Неустранимым разрывом называется разрыв, когда предела функции в точке не существует. При этом выделяют разрывы I-го и II-го рода.

Если для функции в точке x_0 имеют смысл оба числа $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и при этом функция разрывна, то говорят, что в точке x_0 имеет место **разрыв I-го рода**. Все устранимые разрывы являются разрывами I-го рода. Величина $\Delta = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ называется **скачком функции**.

Если не существует конечного левого или правого предела (или обоих), говорят о **разрыве II-го рода (или бесконечном разрыве)**.

Пример №1

Задание:

Если $a_n = \frac{4n-1}{n}$, найдите a_{19} .

Решение:

$$a_{19} = \frac{4 \cdot 19 - 1}{19} = \frac{75}{19}$$

Пример №2

Задание:

Пусть последовательность $\{a_n\}$ определена формулой для явного члена $a_n = 5^n - 7^n + \frac{1}{n}$. Она возрастающая или убывающая?

Решение:

$$a_n = 5^n - 7^n + \frac{1}{n}$$

$$a_{n+1} - a_n = 5^{n+1} - 7^{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(5^n - 7^n + \frac{1}{n}\right) = 5 \cdot 5^n - 7 \cdot 7^n + \frac{1}{n+1} - 5^n + 7^n - \frac{1}{n} =$$

$$= 5^n(5-1) - 7^n(7-1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = 5^n \cdot 4 - 7^n \cdot 6 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$5^n \cdot 4 - 7^n \cdot 6 < 0$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+1} < 0$$

$x_{n+1} < x_n$ последовательность убывающая

Сумма этих 2^x отрицательных выражений представляет собой разницу между членами последовательности, поэтому последовательность уменьшается.

Пример №3

Задание:

1) Исследовать последовательность $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{2n-1}{2n}, \dots$; на ограниченность.

Решение:

$$\frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{2} \quad x_n = \frac{2n-1}{2n} \quad M = \frac{1}{2}$$

$\forall x \in X \Rightarrow x \leq M$ ограничен. сверху

$\forall x \in X \Rightarrow x \geq M$ ограничен. снизу

$x_n \geq M \Rightarrow$ ограниченная снизу

$x_{n+1} > x_n$ возрастающая последовательность

Пример №4

Задание:

Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n^2 + n + 1}{n^3 - 2n + 2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 4}{n^3 + 5n + 3}; \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 6} \right)^3$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right); \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n + 5} - 2}{\sqrt{18n + 1} - 3}$$

Решение:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n^2 + n + 1}{n^3 - 2n + 2} = \{ \text{делим числитель и знаменатель на старшую степень величины } n \} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^3} \right)} = 3$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 4}{n^3 + 5n + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} n^4 \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} n^4 \left(\frac{1}{n} + \frac{5}{n^3} + \frac{3}{n^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 6} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right) \left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 + 1} \right)}{\left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 + 1} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1 - (n^2 + 1)}{\left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 + 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3n}{\left(\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

$$\text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n + 5} - 2}{\sqrt{18n + 1} - 3}$$

Старшая степень числителя совпадает со старшей степенью знаменателя и равна $n^{\frac{1}{2}}$.

Вынесем $n^{\frac{1}{2}}$ за скобку в числителе и знаменателе и сократим на него:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n + 5} - 2}{\sqrt{18n + 1} - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n \left(2 + \frac{5}{n} \right)} - 2}{\sqrt{n \left(18 + \frac{1}{n} \right)} - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{18}} = \frac{1}{3}$$

Пример №5**Задание:**

Используя теорему о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, докажите существование следующих пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^3+3} + \dots + \frac{1}{3^n+n} \right)$$

Решение:

$$x_1 = \frac{1}{3+1}, x_2 = \frac{1}{3^2+2}, \dots, x_n = \frac{1}{3^n+n}$$

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n$$

Данная последовательность монотонно убывает

Последовательность является ограниченной сверху, поскольку для всех $n = 1, 2, 3, \dots, n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{3^n+n} \leq \frac{1}{3+1}$$

Пример №6

Задание:

Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 5x}{x} \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x}{x^2}$$

Решение:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = 4$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{3 \operatorname{tg} 3x} = \frac{5}{3}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} 2x}{2x} = 2$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{arcsin} 5x}{5x} = 5$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x}{x^2} = \left\{ \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} * \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{7x}{2} * \sin \left(-\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 * \frac{7}{2} \sin \frac{7x}{2} * \sin \frac{x}{2}}{\frac{7x}{2} * x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7 * \sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} * 7 * \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\frac{7}{2}$$

Пример №7

Задание:

Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{x^4 + 1} \right)^{2x^2 + 3} \quad ; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin^2 4x \right)^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 6}{x^2 + 4} \right)^{x^4} .$$

Решение:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{x^4 + 1} \right)^{2x^2 + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \text{ (второй замечательный предел)}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{x^2}{x^4 + 1} \Rightarrow n = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\left(1 + \frac{x^2}{x^4 + 1} \right)^{\frac{x^4 + 1}{x^2}} \right)^{\frac{x^2}{x^4 + 1}} \right)^{2x^2 + 3} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2x^2 + 3)}{x^4 + 1}} = e^2$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 4x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left((1 + \sin^2 4x)^{\frac{1}{\sin^2 4x}} \right)^{\sin^2 4x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x}} = e^0 = 1$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 6}{x^2 + 4} \right)^{x^4}$$

$$\frac{x^2 + 6}{x^2 + 4} - 1 = \frac{2}{x^2 + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\left(1 + \frac{2}{x^2 + 4} \right)^{\frac{x^2 + 4}{2}} \right)^{\frac{2}{x^2 + 4}} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{x^2 + 4}} = e^\infty$$

Пример №8

Задание:

Найти предел:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}; б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}; в) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 4x - 5)$$

Решение:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$D = 16, x_{\frac{1}{2}} = 5; 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = 1, x_{\frac{1}{2}} = 2; 1$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 4x - 5) = \lim_{x \rightarrow 2} (2^3 + 4 \cdot 2 - 5) = 11$$

Пример №9

Задание:

Исследовать на непрерывность функцию $y = x^2 - 2x$.

Решение:

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

Найдем приращение заданной функции Δy произвольной точке x :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - (x^2 - 2x) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x - x^2 + 2x = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

Вывод: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x) = 0$, следовательно функция $y = x^2 - 2x$

является непрерывной.

Пример №10

Задание:

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$

Решение:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

$x = 4$ – точка разрыва функции

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)} = 2$$

Односторонние пределы конечны и равны. Во всех остальных точках функция определяется формулой $f(x) = x - 2$ непрерывна.

Пример №11

Задание:

Исходя из определения, докажите, что функция $f(x) = x^2 + 4x$ дифференцируема в любой точке x_0 и $f'(x_0) = 2x_0 + 4$.

Решение:

Находим $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

Δf – приращение функции при переходе из x_0 в x .

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 + 4(x_0 + \Delta x) - (x_0^2 + 4x_0) =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 4x_0 + 4\Delta x - x_0^2 - 4x_0 =$$

$$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 4\Delta x$$

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \quad A = f'(x_0)$$

$A\Delta x$ обозначают df – дифференциал функции

$$A\Delta x = 2x_0\Delta x + 4\Delta x \quad \alpha(\Delta x) = \Delta x^2$$

$$\text{Т.к. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) = 0$$

то $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая порядка выше первого относительно Δx .

2.2. Задача о непрерывном начислении процентов

Рассмотрим задачу о непрерывном начислении процентов на следующем примере:

Первоначальный вклад в банк составил $Q_0 = 100\,000$ денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p=7\%$ годовых. Необходимо найти размер вклада через $t=10$ лет.

Решение:

При 7% годовых размер вклада ежегодно будет увеличиваться в

$$\left(1 + \frac{7}{100}\right) \text{ раз, т.е. } Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \dots, Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном

приросте $p\%$ процент начисления за $\frac{1}{n}$ – ю часть года составит $\frac{p\%}{n}$, а размер вклада за t лет

при nt начисления составит:

$$Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}$$

В зависимости от частоты начисления процентов наращение суммы осуществляется разными темпами, причем с возрастанием частоты накопленная сумма увеличивается:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} = Q_0 * e^{\frac{t * p}{100}} = 100\,000 * e^{\frac{10 * 7}{100}} = 201375,3$$

2.3. Понятие производной. Таблица производных. Производная от суммы, произведения, частного. Сложная производная. Понятие дифференциала функции.

Пусть дана функция $f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) и непрерывна на нем. Дадим аргументу $x \in (a, b)$ приращение Δx , тогда функция получит приращение Δf

: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ – функция от Δ и выражает

среднюю скорость изменения функции $f(x)$ относительно аргумента x на интервале $(x, x + \Delta)$.

Определение. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю, называется **производной** функции $f(x)$ в точке x и обозначается

$$y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**. Если функция в точке имеет конечную производную, то функция называется **дифференцируемой** в этой точке. Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X , называется **дифференцируемой на этом промежутке**.

Существует определенная зависимость между непрерывностью функции и ее дифференцируемостью, которая выражается следующей теоремой.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.

Обратное, вообще говоря, неверно, поэтому непрерывность функции – это необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции.

Геометрический смысл производной функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что $f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику в точке x_0 относительно оси OX .

Как известно, уравнение прямой можно записать в виде: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k – коэффициент наклона прямой относительно оси OX . Тогда уравнение касательной можно переписать, используя вместо k производную:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Производные основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3. $(e^x)' = e^x$	10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	11. $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6. $(\sin x)' = \cos x$	13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	

При нахождении производных используют следующие **правила дифференцирования**.

1. $(c)' = 0$, где $c - \text{const}$	5. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
2. $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$	

3. $(c \cdot x)' = c$	6. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ при $g(x) \neq 0$
4. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	

Пусть переменная y есть функция от переменной u ($y = f(u)$), а переменная u , в свою очередь, есть функция от независимой переменной x , то есть задана **сложная** функция $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x :

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X . Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x = \varphi(y)$ является обратной к данной и, можно доказать, непрерывной на соответствующем промежутке X .

Теорема. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, то

$$\text{есть } x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Пример №1

Задание:

Найдите производную данной функции и вычислите значение производной в точке x_0 :

а) $y(x) = 4x^{\frac{7}{3}} + 5x^{\frac{5}{2}} + \sqrt{x} + 1$ в точке $x_0 = 1$

б) $y(x) = \frac{3}{x^3\sqrt{x^2}} + \frac{8}{x^2\sqrt[4]{x^3}} + 2$ в точке $x_0 = 1$

в) $y(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot \arcsin(0,5 + x)$ в точке $x_0 = 0$

г) $y = x^4 \cdot \operatorname{arctg} 2x$ в точке $x_0 = \frac{1}{2}$

д) $y(x) = (x^4 + 3x^2 + 2x + 3)^{20}$ в точке $x_0 = 0$

е) $y(x) = (\operatorname{arccotg} \sqrt{x})^2$ в точке $x_0 = 0$

Решение:

$$a) y(x) = 4x^{\frac{7}{3}} + 5x^{\frac{5}{2}} + \sqrt{x} + 1 = 4x^{\frac{7}{3}} + 5x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$y' = 4 * \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}} + 5 * \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{28\sqrt{x^4}}{3} + \frac{25\sqrt{x^3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(1) = \frac{67}{3}$$

$$б) y(x) = \frac{3}{x^3\sqrt{x^2}} + \frac{8}{x^{2.4}\sqrt{x^3}} + 2 = \frac{3}{x * x^{\frac{2}{3}}} + \frac{8}{x^2 * x^{\frac{3}{4}}} + 2 =$$

$$= \frac{3}{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{8}{x^{\frac{11}{4}}} + 2 = 3x^{-\frac{5}{3}} + 8x^{-\frac{11}{4}} + 2$$

$$y' = 3 * \left(-\frac{5}{3}\right) x^{-\frac{8}{3}} + 8 * \left(-\frac{11}{4}\right) x^{-\frac{15}{4}}$$

$$y'(1) = -27$$

$$в) y(x) = (x^2 + 2x + 2) * \arcsin(0,5 + x)$$

$$y' = (x^2 + 2x + 2)' * \arcsin(0,5 + x) + (x^2 + 2x + 2) * (\arcsin(0,5 + x))' =$$

$$= (2x + 2) \arcsin(0,5 + x) + (x^2 + 2x + 2) \frac{1}{\sqrt{0,75 - x - x^2}}$$

$$y' = (\arcsin(0,5 + x))'$$

$$t = 0,5 + x$$

$$(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} * t' = \frac{1}{\sqrt{1-(0,5+x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,75-x-x^2}}$$

$$y'(0) = 2 * \frac{\pi}{6} + 2 \frac{1}{\sqrt{0,75}} = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$г) y = x^4 * \operatorname{arctg} 2x$$

$$y' = (x^4)' \operatorname{arctg} 2x + x^4 (\operatorname{arctg} 2x)' = 4x^3 \operatorname{arctg} 2x + x^4 \frac{2}{1+4x^2}$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 * \frac{1}{8} * \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{32} * \frac{2}{1+4 * \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} * \frac{\pi}{4} + \frac{1}{16} * \frac{2}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}$$

$$д) y(x) = (x^4 + 3x^2 + 2x + 3)^{20}$$

$$t = x^4 + 3x^2 + 2x + 3$$

$$y' = (t^{20})' = 20t^{19} * t' = 20(x^4 + 3x^2 + 2x + 3)^{19} * (4x^3 + 6x + 2);$$

$$y'(0) = 40 * 3^{19}$$

$$e) y(x) = (\operatorname{arccotg} \sqrt{x})^2$$

$$t = \operatorname{arccotg} \sqrt{x}$$

$$y' = (t^2)' = 2t * t' = 2 * \operatorname{arccotg} \sqrt{x} * (\operatorname{arccotg} \sqrt{x})' = 2 \operatorname{arccotg} \sqrt{x} * \left(-\frac{1}{1+x} * \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\text{Пусть } d = \sqrt{x}$$

$$(\operatorname{arccotg} d)' = -\frac{1}{1+d^2} * d' = -\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} * (\sqrt{x})' = -\frac{1}{1+x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(1) = -\frac{\pi}{8}$$

Пример №2

Задание:

Найти производную функции:

$$y(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$$

Решение:

$$y' = (\sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}))' = (\sqrt{x+1})' - (\ln(1 + \sqrt{x+1}))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} * \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y' = (\sqrt{x+1})'$$

$$t = x+1$$

$$(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}} * t' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y' = (\ln(1 + \sqrt{x+1}))'$$

$$t = 1 + \sqrt{x+1}$$

$$(\ln t)' = \frac{1}{t} * t' = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} * \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Пример №3

Задание:

Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от следующих функций:

$$a) z = \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy$$

$$б) z = x^4 y^3 + 2y \ln x$$

$$в) z = (\sin x)^{\cos y} + (\cos y)^{\sin x}$$

$$г) u(x, y) = \begin{vmatrix} \sin(x^2 + y^2) \\ \cos(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$$

Решение:

$$a) z = \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{y=\text{const}}} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)'_x + 2(x'y + xy')_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} * (x^2 + y^2)'_x +$$

$$+ 2(x'y + xy')_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} * 2x + 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_{x=\text{const}}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} * 2y + 2x$$

$$б) z = x^4 y^3 + 2y \ln x$$

$$z'_x = \left((x^4)'_x y^3 + x^4 (y^3)'_x \right) + 2 \left(y'_x \ln x + y (\ln x)'_x \right) = 4x^3 y^3 + \frac{2y}{x}$$

$$z'_y = 3x^4 y^2 + 2 \ln x$$

$$в) z = (\sin x)^{\cos y} + (\cos y)^{\sin x}$$

$$z'_x = \cos y * (\sin x)^{\cos y - 1} \cos x + \cos y^{\sin x} \ln(\cos y) \cos x$$

$$z'_y = \sin x^{\cos y} \ln(\sin x) (-\sin y) + \sin x * (\cos y)^{\sin x - 1} (-\sin y)$$

$$г) u(x, y) = \begin{vmatrix} \sin(x^2 + y^2) \\ \cos(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$$

$$U'_{1x} = \cos(x^2 + y^2) * (x^2 + y^2)'_x = \cos(x^2 + y^2) * 2x$$

$$U'_{1y} = \cos(x^2 + y^2) * 2y$$

$$U'_{2x} = -\sin(x^2 + y^2) * (x^2 + y^2)'_x = -\sin(x^2 + y^2) * 2x$$

$$U'_{2y} = -\sin(x^2 + y^2) * 2y$$

Пример №4

Задание:

Найдите частные производные второго порядка и вычислите их значение в указанной точке M_0 от функции:

$$u(x, y, z) = e^{x^2 + 2y + 3z}, M_0(0, 0, 0)$$

Решение:

$$U'_x = e^{x^2 + 2y + 3z} * (x^2 + 2y + 3z)'_x = e^{x^2 + 2y + 3z} * 2x$$

$$U'_y = e^{x^2 + 2y + 3z} * 2 \quad U'_z = e^{x^2 + 2y + 3z} * 3$$

$$U''_x = (e^{x^2 + 2y + 3z})' * (x^2 + 2y + 3z)'_x * 2x + e^{x^2 + 2y + 3z} * (2x)'_x = e^{x^2 + 2y + 3z} * 2x * 2x + 2 * e^{x^2 + 2y + 3z}$$

$$U''_y = 4e^{x^2 + 2y + 3z} \quad U''_z = 9e^{x^2 + 2y + 3z}$$

$M_0(0, 0, 0)$, следовательно $U''_x(0) = 2$, $U''_y(0) = 4$, $U''_z(0) = 9$

Пример №5

Задание:

Найти производные функций:

$$а) y(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$$

$$б) y = \sin^2 3x$$

$$в) y = \ln(\operatorname{arctg} 5x)$$

Решение:

$$а) y(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$$

$$y' = 4(\sqrt{x} + 5)^3 * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$б) y = \sin^2 3x$$

Пусть $t = \sin 3x$ (т.к. сложная функция)

$$y' = (t^2)' = 2t * t' = 2 * \sin 3x * (\sin 3x)' = 2 * \sin 3x * \cos 3x * 3$$

$$(\sin 3x)' \text{ пусть } d = 3x$$

$$(\sin d)' = \cos d * d' = \cos 3x * 3$$

$$в) y = \ln(\operatorname{arctg} 5x)$$

$t = \operatorname{arctg} 5x$ (т.к. сложная функция)

$$y' = (\ln t)' = \frac{1}{t} * t' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 5x} * (\operatorname{arctg} 5x)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 5x} * \frac{5}{1 + 25x^2}$$

$$(\operatorname{arctg} 5x)' \text{ пусть } p = 5x$$

$$(\operatorname{arctg} p)' = \frac{1}{1 + t^2} * t' = \frac{5}{1 + 25x^2}$$

Пример №6**Задание:**

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2, 1]$

Решение:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \quad x(4x^2 - 4) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm 1$$

Подставляем в исходную функции: $x_1, x_2, x_3 \in [-2, 1]$

$$f(-2) = (-2)^4 - 2 * (-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$$

$$f(0) = (0)^4 - 2 * (0)^2 + 3 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2 * (-1)^2 + 3 = 2, \quad f(1) = (1)^4 - 2 * (1)^2 + 3 = 2$$

Ответ: при $x = -2$ т.е. $f(-2) = 11$ наибольшее значение
при $x = \pm 1$ т.е. $f(\pm 1) = 2$ наименьшее значение

Пример №7**Задание:**

Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$

Решение:

$$y = \sin^5 3x$$

$$y' = 5(\sin(3x))^4 * (\sin 3x)' = 5(\sin(3x))^4 * 3 \cos 3x = 15(\sin 3x)^4 * \cos 3x dx$$

Пример №8

Задание:

Найти предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3}{3x^2 + 10x - 6} = \frac{16}{13}$$

Пример №9

Задание:

Найти производную:

$$a) y = \frac{\sin x}{x^2} \quad б) y = \frac{\ln x}{x}$$

Решение:

$$a) y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x)' x^2 - \sin x * (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\cos x * x^2 - \sin x * 2x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$$

$$б) y = \frac{\ln x}{x}$$

$$y' = \frac{(\ln x)' x - \ln x * x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} * x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2.4. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике.

Пример №1

Задание:

Объем продукции лампочек в течение рабочего дня представлен функцией

$$y = -\frac{2}{7}t^3 + \frac{13}{27}t^2 + 300t + 10$$

t – время, часов

Вычислить производительность труда в течение каждого часа работы?

Решение:

Пусть производительность труда $y=y(t)$ выражает количество произведенной продукции лампочек за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0 .

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $y_0=y(t_0)$ до значения $y_0 + \Delta y = y(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда

за этот период времени

$$z_{\text{cp}} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Производительность труда в момент времени t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ т.е. } z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t)$$

Производительность труда = производная объема выпускаемой продукции.

$$y' = -\frac{6}{7}t^2 + \frac{26}{27}t + 300$$

$$y'(1) = 300,1 \quad y'(2) = 598,49 \quad y'(3) = 295,1 \quad y'(4) = 290,1$$

Ответ: после второго часа работы наблюдается спад производительности труда (упадок сил, плохо проветренное помещение и т.д.).

Задачи для самостоятельного решения

2) Если $a_n = \frac{2n+8}{4+3n}$, найдите a_2 .

3) Пусть последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_n = 5^n + n$. Последовательность убывающая или возрастающая?

4) Исследовать последовательность на монотонность

$$x_n = \frac{n}{n+1}.$$

5) Исследовать последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$ на ограниченность.

6) Найдите следующие пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n - 1}{2n^3 + n^2 - 4}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 - 3n^2 - 2}{2n^2 + n + 5}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^3 + 8n^2 - 18}{7n^3 - 5}\right)^3$

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+5} - \sqrt{n})$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n}}{n+1}$; е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n^5 + 1}{2n^5 + 3n^3 - x}$

ж) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - n^2 + n}{n^5 + 2n + 5}$

7) Используя теорему о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, докажите существование следующих пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

8) Найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$

9) Найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x$.

10) Найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} \right); \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} \right); \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3 - 27}{x - 3} \right).$$

11) Исходя из определения, докажите непрерывность функции:

$$f(x) = x^2 + 3x + 1, \text{ при любом } x.$$

12) Исследовать на непрерывность функцию:

$$y = \frac{x^2}{x - 2}.$$

13) Первоначальная сумма вклада равна 7000 ден.ед., период начисления – 2 года, сложная процентная ставка – 12%. Известно, что начисление процентов осуществляется непрерывно. Необходимо найти наращенную сумму вклада.

14) Вкладчик положил в банк 10000 руб. Проценты сложные. Какая сумма будет на счете у вкладчика через три года, если процентная ставка в первый год – 20%, во второй – 30%, в третий – 25%?

15) Вычислить производные следующих функций:

$$\text{а) } y = x^2(x^3 - 1); \text{ б) } y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}; \text{ в) } y = \sqrt[3]{x}; \text{ г) } y = x^2 \sin(2x) + 2x \cos(3x);$$

$$\text{д) } y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right); \text{ е) } y = x^5 - 4x^3 + 2x; \text{ ж) } y = \arctg x + \text{arcctg} x; \text{ з) } y = \frac{e^x}{x^2};$$

$$\text{и) } y = (x^2 - 2x + 2)e^x; \text{ к) } y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}; \text{ л) } y = \arcsin x + \arccos x.$$

16) Найти производную:

$$1) y = x^2; 2) y = \sqrt{x}; 3) y = \frac{1}{x^2}; 4) y = \sin \frac{2x}{3};$$

$$5) y = \sqrt{1 + 3x}; 6) y = x\sqrt{x}; 7) y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1;$$

$$8) y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4; 9) y = 4x^5 - 3\sin x + 5\text{ctg} x;$$

$$10) y = \log_2 x + 3\log_3 x; 11) y = \arctg x - \text{arcctg} x;$$

$$12) y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x; 13) y = x^2 \log_3 x; 14) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$15) y = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}; 16) y = \frac{\text{ctg} x}{\sqrt{x}}; 17) y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}; 18) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}.$$

17) Найти производные сложных функций:

$$1)y = \sin 3x; \quad 2)y = \sqrt{1-x^2}; \quad 3)y = \sin(x^2 + 5x + 2); \quad 4)y = \sqrt{1+5\cos x};$$

$$5)y = \sqrt{2x - \sin 2x}; \quad 6)y = \sin^3 x; \quad 7)y = \ln \cos x; \quad 8)y = \ln(1 + \cos x);$$

$$9)y = \ln(x^2 - 3x + 7); \quad 10)y = \sin^2 x; \quad 11)y = e^{\operatorname{tg} x}; \quad 12)y = \ln \operatorname{tg} 5x;$$

$$13)y = \operatorname{tg}(x^2 + 3); \quad 14)y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}; \quad 15)y = \sin^4 x + \cos^4 x; \quad 16)y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5};$$

$$17)y = 2^{3x} + x^5 + e^{-x^2} + \frac{1}{x}; \quad 18)y = e^{\frac{x}{3}} \cos\left(\frac{x}{3}\right); \quad 19)y = \log_5 \cos 7x; \quad 20)y = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}.$$

18) Найти дифференциал функции:

$$1)y = x^5; \quad 2)y = \operatorname{tg} x;$$

$$3)y = \sin^3 2x; \quad 4)y = \ln x;$$

$$5)y = \ln(\sin \sqrt{x}); \quad 6)y = 2^{-x^2}.$$

19) Найти дифференциал функции в точке x_0 :

$$1)y = x^{-4}, \quad x_0 = -1; \quad 2)y = x^3 - 3x^2 + 3x, \quad x_0 = 0.$$

20) Найти наибольшее и наименьшее значения данных функций на указанных отрезках и в указанных интервалах:

$$1)y = x^4 - 2x^2 + 5, \quad x \in [-2; 2];$$

$$2)y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad x \in [-1; 2];$$

$$3)y = x + 2\sqrt{x}, \quad x \in [0; 4].$$

21) Показать, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале $(-2; 1)$.

22) Вычислить пределы с помощью правила Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2\sin x - 1}{\cos 3x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\cos 3x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x x - 2}{x^2 - 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{\ln(5 - 2x)}.$$

23) Найти объем производства, при котором фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, будет получать максимальную прибыль, если

$$p = 82, \quad TC(q) = q^3 + 7q.$$

24) Найти оптимальный объем производства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = q^2 - 16q + 19$$

25) Объем продукции u и цеха в течение рабочего дня представляет функции

$$u = -t^3 - 14t^2 + 34t + 367$$

где t -время(ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Практическая работа №3

Интегральное исчисление. Первообразная функции и неопределенный интеграл.

Цель работы: научиться вычислять определенные и неопределенные интегралы.

Задача интегрирования является обратной по отношению к задаче дифференцирования функции, а именно по функции $f(x)$, являющейся производной некоторой функции $F(x)$, требуется найти эту функцию $F(x)$.

Определение. Функция $F(x)$, определенная в промежутке (a, b) , называется первообразной данной функции $f(x)$ в этом промежутке, если для любого значения $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Так, функция $F(x) = x^4$ – первообразная функции $f(x) = 4x^3$ в интервале $(-\infty, +\infty)$, т.к. $(x^4)' = 4x^3$ для всех x .

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является ее первообразной, т.к.

$$(\Phi(x))' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Обратно, если $\Phi(x)$ и $F(x)$ – две первообразные функции $f(x)$, то они отличаются произвольным слагаемым: $\Phi(x) - F(x) = C, \Phi(x) = F(x) + C$.

Определение. Неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$. Знак \int называется знаком неопределенного интеграла; функция $f(x)$ – подынтегральной функцией; выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Свойства интеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$, где $k - const$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

Основные неопределенные интегралы

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
10. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
12. $\int e^x dx = e^x + C$
13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Интегрирование методом замены переменной.

Пример. Вычислить $\int \sin(2-3x)dx$ методом замены переменной.

Решение. Введем новую переменную $t = 2 - 3x$, тогда $x = \frac{2-t}{3}$, $dx = -\frac{dt}{3}$, и

интеграл можно выразить: $\int \sin(2-3x)dx = \int \sin t \cdot \left(-\frac{dt}{3}\right) = -\frac{1}{3} \int \sin t dt = \frac{1}{3} \cos t + C =$
 $\frac{1}{3} \cos(2-3x) + C.$

Ответ: $\int \sin(2-3x)dx = \frac{1}{3} \cos(2-3x) + C.$

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. По свойствам дифференциала имеем: $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$, или $u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$.

Интегрируя левую и правую части полученного равенства и учитывая свойства интегралов, получаем формулу **интегрирования по частям**:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Определение. **Определенным интегралом** обозначают выражение вида: $\int_a^b f(x)dx$,

где значение a называется нижним пределом интегрирования, b – верхним пределом интегрирования, $f(x)$ – подинтегральная функция, непрерывная на интервале (a, b) .

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$, где $k - const$
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $c \in (a, b)$.

Связь между определенным и неопределенным интегралом выражается **формулой Ньютона-Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов так же, как и неопределенных, можно использовать **метод замены переменной**.

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Данная формула называется **формулой интегрирования по частям для определенного интеграла**.

Пример №1

Задание:

Найти неопределенный интеграл по методу разложения:

$$\text{a) } \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx \quad \text{в) } \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1-2x+x^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2x}{x\sqrt{x}} + \frac{x^2}{x\sqrt{x}} \right) dx = \\ &= \int \left(x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - 2 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \\ &= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{x^3 e^x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} \right) dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx - \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C;$$

$$\text{в) } \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример №2

Задание:

Найти неопределенный интеграл по методу замены переменной:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{(2x-5)^5} \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x+3}} \quad \text{в) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}} \\ \text{г) } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \quad \text{д) } \int (2x+1)e^{x^2+x+3} dx \quad \text{е) } \int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{dx}{(2x-5)^5} &= \int \frac{2dx}{2(2x-5)^5} = \int \frac{du}{2u^5} = \frac{1}{2} \int u^{-5} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-4}}{-4} + C = \\ &= -\frac{1}{8} (2x-5)^{-4} + C \end{aligned}$$

Пусть $u = 2x - 5$, тогда $du = 2dx$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{4x+3}} = \int \frac{4dx}{4\sqrt{4x+3}} = \int \frac{du}{4u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} * \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{4x+3}$$

$$u = 4x + 3$$

$$du = 4dx$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{2x * x^2 dx}{2\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{du(u-9)}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \int \left(u^{\frac{1}{2}} - 9u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \\ &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 9u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 9(9+x^2)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

$$u = 9 + x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$x^2 = u - 9$$

$$\text{г)} \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{\frac{2}{u^{\frac{2}{3}}}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du = 3u^{\frac{1}{3}} + C = 3(\sin x)^{\frac{1}{3}} + C$$

$$u = \sin x \quad du = \cos x dx$$

$$\text{д)} \int (2x+1)e^{x^2+x+3} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2+x+3} + C;$$

$$u = x^2 + x + 3$$

$$du = 2x + 1$$

$$\text{е)} \int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt[3]{u} du = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{\ln x^{\frac{4}{3}} * 3}{4} + C.$$

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Пример №3

Задание:

Найти неопределенный интеграл по методу интегрирования по частям:

$$\int x * \operatorname{arctg} x dx$$

Решение:

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C$$

$$u = \operatorname{arctg} x \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} dx$$

$$\int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{x^2+1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x + C)$$

Задачи для самостоятельного решения

1) Путем преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

$$1) \int \frac{7x^4 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{2x-1}; \quad 3) \int \frac{x dx}{4+x^4}; \quad 4) \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$$

$$5) \int \frac{dx}{(2x-3)^5}; \quad 6) \int (x+1)^{15} dx; \quad 7) \int \frac{x^3 dx}{x^4-2}$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}; \quad 9) \int (e^x+1)^3 dx; \quad 10) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$11) \int \frac{dx}{1+9x^2}; \quad 12) \int \frac{dx}{9+2x^2}; \quad 13) \int \sqrt{8-2x} dx;$$

$$14) \int \cos 2x dx; \quad 15) \int \sin^2 x dx.$$

2) Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

$$1) \int \ln x dx; \quad 2) \int x^4 \ln x dx; \quad 3) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$$

$$4) \int x e^{-x} dx; \quad 5) \int x^2 e^{-2x} dx; \quad 6) \int x \cos x dx;$$

$$7) \int x^2 \sin 2x dx; \quad 8) \int \operatorname{arctg} x dx; \quad 9) \int x^2 \arccos x dx;$$

$$10) \int \frac{x dx}{\cos^2 x}; \quad 11) \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

3) Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

$$1) \int \sin^4 x dx; \quad 2) \int \cos^6 x dx; \quad 3) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{\cos^5 x}; \quad 5) \int \sin^4 x \cos^2 x dx; \quad 6) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}.$$

4) Найти неопределенный интеграл:

$$1) \int \frac{x^3}{5+3x^4} dx; \quad 2) \int \frac{e^{2x} dx}{3+e^{2x}}; \quad 3) \int \frac{x^2 dx}{25+16x^3};$$

$$4) \int \frac{x dx}{3+5x^2}; \quad 5) \int \frac{x^3 dx}{1+4x^8}; \quad 6) \int \frac{dx}{49+9x^2};$$

$$7) \int x^2 e^{x^3} dx; \quad 8) \int x^2 e^{5x^3+4} dx; \quad 9) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}};$$

$$10) \int \frac{x+3}{2x-3} dx; \quad 11) \int \sin^2 5x dx; \quad 12) \int (x^2+3x) \sin 2x dx;$$

$$13) \int \operatorname{arctg} x dx.$$

Практическая работа №4

Основные сведения о матрицах. Действия над матрицами. Свойства определителя. Решения систем линейных уравнений. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

Цель работы: получение навыков обработки матриц и решения систем линейных уравнений.

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов. Числа, из которых состоит матрица, называются ее **элементами** и нумеруются двумя **индексами**, обозначающими соответственно номер строки и номер столбца, в которых расположен этот элемент.

В общем виде матрица обозначается так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

или кратко одной буквой A , или $\|a_{ij}\| = [a_{ij}]$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$), где первый индекс: i – индекс, обозначающий номер строки, второй индекс: j – номер столбца, в котором расположен элемент a_{ij} .

В частности, если матрица содержит одну строку и несколько столбцов ($n=1, m>1$) матрица называется **матрицей-строкой** (или **вектор-строка**): $A = (a_1, \dots, a_m)$.

Если же матрица содержит несколько строк и один столбец ($n>1, m=1$), то матрица называется **матрицей-столбцом** (или **вектором-столбцом**): $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$. Если $m=n$, то матрицу

называют **квадратной** порядка n .

Определение. Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковую размерность и числа, стоящие на соответствующих местах этих матриц, равны.

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается как O .

Определение. **Единичной** называют матрицу, у которой по главной диагонали расположены единицы, а все остальные элементы равны нулю: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Определение. Матрица A^T , полученная из матрицы A заменой строк столбцами с теми же номерами и наоборот, называется **транспонированной** по отношению к матрице A :

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Определение. Треугольной называется матрица, у которой все элементы, расположенные ниже (или выше) элементов главной диагонали, равны нулю. Например, A и B – две треугольные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Диагональной называется матрица, у которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Основные операции над матрицами

Определение. Суммой матриц A и B одинаковой размерности называется матрица C такой же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Обозначают операцию сложения как $C = A + B$.

Определение. Результатом умножения матрицы A на число λ является матрица C (такой же размерности, что и исходная), у которой элементы равны соответствующим элементам исходной матрицы, умноженным на это число: $C = \lambda \cdot A$ или $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

Определение. Разность матриц A и B определяется через введенные выше операции: $C = B - A = A + (-1) \cdot B$.

Определение. Пусть даны две матрицы $A = \|a_{ik}\|$ ($i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p$) и $B = \|b_{kj}\|$ ($k = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, m$), причем число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Произведением A на B называется матрица C , элементы которой находятся по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m).$$

Перечислим свойства операций над матрицами:

- | | |
|---|---|
| 1) $A + B = B + A$ | 10) $A \cdot B \neq B \cdot A$ |
| 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ | 11) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A(\lambda B)$ |
| 3) $A + O = O + A$ | 12) $A(BC) = (AB)C$ |
| 4) Для матрицы $-A = (-1)A$: | 13) $(A + B)C = AC + BC$; |
| $A + (-A) = (-A) + A = O$ | $C(A + B) = CA + CB$. |
| 5) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ | 14) $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$ |
| 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ | 15) $(AB)^T = B^T A^T$ |
| 7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ | 16) Для любой квадратной матрицы |
| 8) $O \cdot A = O$; $\lambda \cdot O = O$ | $AE = EA = A$. |
| 9) $1 \cdot A = A$; $(-\lambda)A = -\lambda A$ | |

Замечание. Относительно свойств 12) и 13) заметим, что если действия, указанные по одну сторону равенств, возможны, то возможны и действия, указанные по другую сторону равенства, и результаты в обеих частях одинаковы.

Определитель матрицы. Необходимость во введение понятия определителя связано с решением систем линейных уравнений. Обозначается определитель как Δ , или $|A|$, или $\det A$.

Определение. Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или определителем первого порядка называется элемент a_{11} : $\Delta_1 = a_{11}$.

Определение. Определителем матрицы второго порядка $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ называется число, определяемое как разность между произведением элементов главной диагонали и произведением элементов побочной диагонали: $\Delta_2 = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$.

Определение. Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое по формуле:

$$\Delta_3 = \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

В данное выражение входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Можно не запоминать данное выражение, так как в дальнейшем выведем более простое правило нахождения определителя любого порядка n .

Определение. Минором произвольного элемента a_{ij} матрицы называется определитель M_{ij} , который получается вычеркиванием i -той строки и j -того столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя матрицы называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение обозначается как A_{ij} , следовательно: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Вычисление определителя квадратной матрицы произвольного порядка осуществляется согласно следующей теореме.

Теорема Лапласа. Определитель Δ матрицы A равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения: $\Delta = \det A = a_{i_0 1} A_{i_0 1} + a_{i_0 2} A_{i_0 2} + \dots + a_{i_0 n} A_{i_0 n}$, где i_0 - фиксировано. Данное выражение еще называют разложением определителя D по элементам строки с номером i_0 . Аналогично можно записать разложение определителя по элементам фиксированного столбца:

$$\Delta = a_{1 j_0} A_{1 j_0} + a_{2 j_0} A_{2 j_0} + \dots + a_{m j_0} A_{m j_0}.$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению трех определителей второго порядка. Вычисление определителя 4-го порядка сводится к вычислению четырех определителей третьего порядка и т.д. Можно сказать, что вычисление определителя n -го порядка сводится к вычислению определителей меньшего порядка, но при этом, число этих определителей увеличивается. Такой способ является неэффективным.

Приведем ряд **свойств**, которые позволяют определить другой способ вычисления определителя n -го порядка.

- 1) Определитель равен нулю, если содержит две одинаковые строки (или два одинаковых столбца) или нулевую строку (нулевой столбец).
- 2) Определитель меняет знак при перестановке двух строк (столбцов).
- 3) При умножении строки (столбца) на число определитель умножается на это число.
- 4) Определитель не меняется, если к строке (столбцу) прибавить любую другую строку (столбец), умноженный на произвольное число.

5) Определитель квадратной транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

6) Определитель единичной матрицы равен единице: $\det E = 1$.

7) Определитель произведения матриц равен произведению определителей:
 $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Исходя из этих свойств, можно упростить вычисление определителя n -го порядка, а именно, с их помощью определитель последовательно преобразуют к такому виду, чтобы в какой-нибудь строке (столбце) все элементы, кроме одного, стали нулевыми. Затем вычисляют определитель разложением по этой строке (столбцу).

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если для этих матриц выполняются следующие условия: $A \cdot A^{-1} = E$, $A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Обратную матрицу имеет только квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. Причем, определители прямой и обратной матриц связаны соотношением: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, что следует из определения обратной матрицы.

Если у матрицы не существует обратной (определитель равен нулю), то матрица называется **вырожденной**.

Обратная матрица обладает **свойствами**:

1) Если обратная матрица существует, то она единственна.

2) Если матрица A^{-1} является обратной для матрицы A , то и матрица A является обратной для матрицы A^{-1} : $(A^{-1})^{-1} = A$.

3) Если у квадратных матриц A и B существуют обратные им матрицы, то и у их произведения также существует обратная матрица, для которой справедливо соотношение: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Элементы обратной матрицы определяются следующим образом:

Находится определитель прямой матрицы A .

Записывается транспонированная матрица A^T .

Находятся алгебраические дополнения для каждого элемента транспонированной матрицы и записываются в транспонированную матрицу вместо ее элементов: $a_{ij} = A_{ij}$.

Каждый элемент полученной матрицы делится на определитель прямой матрицы A .

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Пусть имеется n различных отраслей, каждая из которых производит свой продукт. В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Анализ проводим в заданном промежутке времени (обычно таким промежутком служит плановый год). Ниже приведем следующие обозначения: x_i – объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый валовой выпуск отрасли i ;

x_{ij} – объем продукции отрасли i , расходуемый отраслью j в процессе своего производства;

y_i – объем продукции отрасли i , предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере – объем конечного потребления. Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (образование, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт.

Очевидно, что при $i = 1, \dots, n$ должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \quad (1.2.1)$$

означающее, что валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление, равное $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}$ и непроизводственное потребление, равное y_i . Будем называть (1.2.1) соотношениями баланса.

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (штуки, киловатт-часы и т. п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают натуральный и стоимостной межотраслевой балансы. Далее рассматриваем пример расчета стоимостного баланса.

В модели Леонтьева материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Принцип линейности распространяется и на другие виды издержек, например, на оплату труда, а также на нормативную прибыль.

Коэффициенты a_{ij} называют коэффициентами прямых затрат.

В предположении линейности соотношения (1.2.1) принимают вид:

$$x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + y_1,$$

$$x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + y_2,$$

.....

$$x_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + y_n,$$

или, в матричной записи, $x = Ax + y$, (1.2.2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

где — матрица коэффициентов прямых затрат;

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

— столбец неизвестных объемов валового выпуска;

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

— столбец объемов конечного потребления.

Соотношение (1.2.2) называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов x и y это соотношение называют также моделью Леонтьева.

Уравнения межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для предстоящего планового периода задается вектор y конечного потребления. Требуется определить вектор x валового выпуска. Проще говоря, нужно решить задачу: сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления? В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений, соответствующую матричному уравнению (1.2.2) с неизвестным вектором x при заданных матрице A и векторе y .

Если обратная матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то решение находится в виде $x = (E - A)^{-1}y$. (1.2.3) **Добавить пример.**

Задачи для самостоятельного решения

- 1) Найти линейные комбинации заданных матриц:

$$A - \lambda E, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4A - 5B, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$3A + 4B, A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

2) Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A = (4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 1), B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислить определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4) Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Найти матрицу, обратную к матрице:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

Практическая работа №5

Линейные, квадратичные, степенные, дробно-рациональные функции. Показательные функции. Логарифмические функции. Непрерывность и дифференцируемость.

Цель работы: получить навыки исследования функций.

Основные классы функций и методы их исследования были рассмотрены в практической работе №1. Далее на примерах рассмотрим более подробное исследование функций.

Пример №1

Задание:

Исследовать на непрерывность функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2, & -3 \leq x < 7 \\ 13x + 7, & 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Решение:

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Она называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$

Функцию f определенную на промежутке $[a, x_0)$ называется непрерывной слева в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$

Функцию f определенную на промежутке $(x_0, b]$ называется непрерывной справа в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$

Односторонние пределы функции $f(x)$ в этой точке :

$$f(7-0) = \lim_{x \rightarrow 7-} 12x^2 = 588$$

$$f(7+0) = \lim_{x \rightarrow 7+} 13x + 7 = 98$$

Функция непрерывна, если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$

Следовательно, $x_0 = 7$ – точка разрыва 1^{го} рода.

Пример №2

Задание:

Исследовать на непрерывность в точке $x_0 = 0$ функцию $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$. Указать в ответе

односторонние пределы функции в этой точке.

Решение:

$x_0 = 0$ точка разрыва функции в которой функция не определена т.к. $1 - \cos 0 = 0$

Односторонние пределы :

$$x \rightarrow 0 \quad x > 0 \quad \sin^2 x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow +0} (1 + \cos x) = 2$$

$$x \rightarrow 0 \quad x < 0 \quad \sin^2 x > 0 \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2$$

$f(+0)$ и $f(-0)$ конечны и равны, следовательно $x_1 = 0$ точка устранимого разрыва

Пример №3

Задание:

Исследовать функцию на непрерывность:

$$y = \frac{x}{x^2 + x - 6}$$

Решение:

$$y = \frac{x}{x^2 + x - 6} = \frac{x}{(x-2)(x+3)}$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 25 \quad x_{1/2} = 2; -3$$

$x_{1/2}$ – точки разрыва функции

Односторонние пределы :

$$x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = -\infty$$

$$x \rightarrow -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = -\infty$$

$x_{1/2}$ – точки разрыва 2^{го} рода

Пример №4

Задание:

Исследовать функцию на непрерывность:

$$y = 3^{\frac{x}{1-x^2}}$$

Решение:

$$y = 3^{\frac{x}{1-x^2}}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

$x_{1/2}$ – точки разрыва функции

Односторонние пределы :

$$x \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = 3^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = 3^{\infty} = \infty$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = \infty$$

$x_{1/2}$ – точки разрыва $2^{\text{го}}$ рода

Пример № 5

Задание:

Исследовать функцию на непрерывность:

$$y = \lg(x-1)^2$$

Решение:

$$y = \lg(x-1)^2$$

$x = 1$ – точка разрыва функции

Логарифм функция монотонна определена в интервале при $a > 1 \quad x \in (0; +\infty)$

$f(x_0) = (-\infty; +\infty)$ непрерывна за исключением точки $x = 1$

Односторонние пределы :

$$x \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \lg(x-1)^2 = 3^{-\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \lg(x-1)^2 = \infty$$

$x = 1$ – точка разрыва $2^{\text{го}}$ рода

Задачи для самостоятельного решения:

1) Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

$$1) y = \frac{x}{(1+x)^2}; \quad 2) y = \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$3) y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad 4) y = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

2) Доказать, что функция $y(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения, если:

$$1)y = 2x - 1; \quad 2)y = x^2; \quad 3)y = \sqrt{x};$$

$$4)y = \frac{1}{x}; \quad 5)y = |x|; \quad 6)y = \frac{1}{x^2}.$$

3) Доказать непрерывность функции в каждой точке ее области определения:

$$1)y = 3x^5 + \frac{1}{x^3}; \quad 2)y = \frac{\sin x^2}{x^4 + 2x^2}.$$

4) Найти точки разрыва функции:

$$1)y = \frac{x}{x^2 + x - 6}; \quad 2)y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}; \quad 3)y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$4)y = \frac{1+x}{1+x^3}; \quad 5)y = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2}; \quad 6)y = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}.$$

5) Найти точки разрыва функции:

$$1)y = \frac{x}{\cos x}; \quad 2)y = \frac{2}{1-2^x}; \quad 3)y = \frac{1}{\lg x};$$

$$4)y = 2^{\frac{1}{x}}; \quad 5)y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right); \quad 6)y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}};$$

$$7)y = \frac{x+1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}; \quad 8)y = \frac{x}{x+2}; \quad 9)y = \frac{x^2-5x+5}{x^2-3x+2};$$

$$10)y = 2^{\frac{-1}{x}}; \quad 11)y = e^{\operatorname{tg} x}; \quad 12)y = \operatorname{tg} x.$$

6) Найдите производные функций:

$$1)y = \frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5; \quad 2)y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5};$$

$$3)y = x^2 \cos x; \quad 4)y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}; \quad 5)y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3};$$

$$6)y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{x}; \quad 7)y = \sin \frac{x}{2}; \quad 8)y = \cos(3-4x);$$

$$9)y = \cos^3 x; \quad 10)y = \sin^4 x + \cos^4 x; \quad 11)y = \sqrt{x^4 + 2x + 3};$$

$$12)y = (2x^2 - 7)^3; \quad 13)y = -\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg} x + 3x; \quad 14)y = \frac{\sin^2 x}{\cos x};$$

$$15)y = \cos^2 x^2; \quad 16)y = \ln(x^2 + 5x + 6); \quad 17)y = e^{\cos^2 x};$$

$$18)y = \arcsin 2x; \quad 19)y = \arccos \sqrt{x}; \quad 20)y = \operatorname{tg}^2 5x;$$

$$21)y = (\cos x)^{\sin x}; \quad 22)y = (\operatorname{arctg} x)^x.$$

Практическая работа №6 Основы векторной алгебры

Цель работы: получить навыки решения задач векторной алгебры.

Определение. Пусть даны две точки на плоскости A и B . **Вектором** называется направленный отрезок, идущий из точки A в точку B . Точка A называется **началом** вектора, точка B – **концом**.



Рис.1. Направленный отрезок – вектор

Вектор обозначают строчной латинской буквой со стрелкой – \vec{a} или прописными буквами, обозначающими начало и конец вектора – \overrightarrow{AB} .

Определение. Величину, не имеющую направления, называют **скалярной** или **скаляром**.

Определение. Расстояние между началом и концом вектора называется его **длиной** и обозначается как $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB$ (читается как «модуль вектора a » или «модуль вектора AB »).

Когда начало и конец вектора совпадают, то говорят о **нулевом векторе**, который обозначают как $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю.

Определение. Вектор, модуль которого равен единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

Определение. Два вектора называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и обозначают как $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной (или в параллельных) плоскостях.

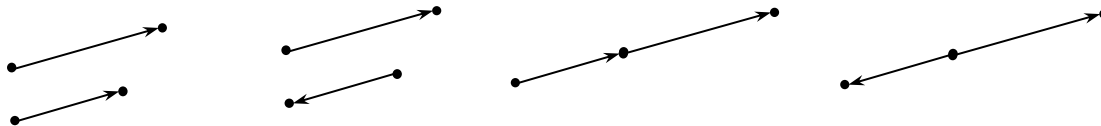


Рис.2. Взаимное расположение коллинеарных векторов

Определение. Два вектора называют **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины совпадают: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Условие сонаправленности в данном определении очень важно, так как вектора, имеющие одинаковую длину, но направленные в разные стороны, уже не являются равными.

Операции над векторами

Над векторами возможны следующие операции: сложения, вычитания, умножение вектора на число.

Определение. Операции сложения, вычитания векторов и операция умножения вектора на скаляр называются **линейными** операциями.

Сложение векторов. Сумма двух векторов $\vec{a} + \vec{b}$ строится как вектор, идущий от начала вектора \vec{a} к концу вектора \vec{b} , если вектор \vec{b} приложен к вектору \vec{a} .

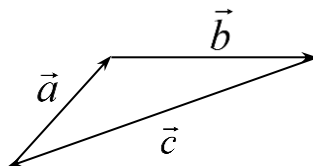


Рис.3. Сумма двух векторов

Для построения сумму двух векторов нужно («правило параллелограмма»): приложить два вектора к одной точке и достроить до параллелограмма. Диагональ параллелограмма, идущая из точки приложения векторов и есть их сумма.

Для построения суммы произвольного числа векторов нужно приложить второй вектор к концу первого, третий к концу второго и т.д., сумма находится как вектор, идущий из начала первого к концу последнего.

Свойства операции сложения векторов:

- 1) коммутативность $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 2) ассоциативность: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3) для любого вектора \vec{a} : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- 4) для любого вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ справедливо:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

Вектор \overrightarrow{BA} называют **противоположным** вектору \overrightarrow{AB} и обозначают как $-\vec{a}$.

Вычитание векторов. Вектор, являющийся результатом **вычитания** двух векторов строится также, по правилу параллелограмма, но является второй диагональю в нем:

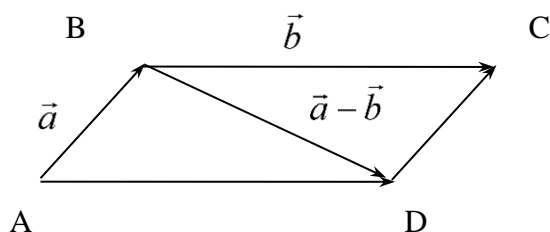


Рис. 4. Вычитание векторов по правилу параллелограмма

Умножение вектора на число (скаляр). Произведением вектора \vec{a} на скаляр является λ вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

- 1) вектор $\lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору \vec{a} ;
- 2) имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- 3) сонаправленный \vec{a} при $\lambda > 0$ и антинаправленный при $\lambda < 0$.

Свойства операции умножения вектора на скаляр:

1) ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$;

2) умножение вектора на скаляр ассоциативно относительно умножения скаляров: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

3) умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения чисел: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

4) умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения векторов: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a})$.

Из свойств произведения скаляра на вектор следует, в частности, что при умножении нуля на вектор получается нулевой вектор $\vec{0}$.

Свойства операций над векторами позволяют обращаться с ними, как с обычными числами: переносить их из одной части равенства в другую с противоположным знаком, делить обе части на ненулевое число, приводить подобные члены и т.п.

Базис и разложение векторов

Определение. **Линейной комбинацией** векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется вектор $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение. Совокупность векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$; если же для заданных векторов равенство выполняется только тогда, когда все $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называют **линейно зависимыми**.

Теорема. Пусть даны два ненулевых и неколлинеарных вектора \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Тогда любой вектор \vec{x} можно представить в виде: $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ и притом, единственным образом.

Такое представление вектора называют **разложением вектора по базису**, набор \vec{e}_1, \vec{e}_2 – **базисом**, а коэффициенты при базисе: x_1, x_2 – **координатами** разложения.

С базисом на плоскости можно связать **систему координат**. Для этого на плоскости зафиксировать начало координат – точку O и тогда каждой точке A на плоскости соответствует вектор \vec{OA} , который называется **радиус-вектором** точки. Координаты радиуса-вектора при разложении по базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 называются **координатами точки** в построенной системе координат: x_1, x_2 .

Самая распространенная система координат образуется двумя взаимно перпендикулярными векторами \vec{e}_1, \vec{e}_2 , длина которых равна единице: $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. Такая система координат называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Обычно векторы декартового базиса обозначают как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а координаты вектора \vec{a} относительно декартова базиса как x, y, z .

В декартовой системе координат справедливо **свойство**: длина вектора $\vec{a} = \{x, y\}$ равна: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Кроме декартовой системы координат существует полярная и криволинейная система координат.

В общем случае введенный в пространстве базис называют **аффинным**, и, соответственно, систему координат, состоящую из произвольной точки O и векторного аффинного базиса пространства называют **аффинной системой координат** этого пространства. Точка O - **начало** аффинной системы координат.

Для любой системы координат (не только декартовой) справедливы следующие свойства:

- 1) линейные операции над векторами сводятся к таким же операциям над их соответствующими координатами;
- 2) координаты вектора равны разностям соответствующих координат его начала и конца;

векторы $\vec{a} = \{x_1, x_2\}$ и $\vec{b} = \{y_1, y_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны: $x_1 y_2 = x_2 y_1$

Скалярное произведение векторов

Определение. Углом между двумя векторами называется часть плоскости между их лучами, если вектора приложить к одной точке (Рис.). Угол между векторами обозначается как $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ или строчными греческими буквами (например, φ).

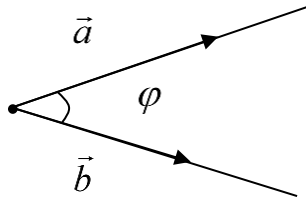


Рис. 5. Угол между двумя векторами

Как известно из школьного курса, *осью* называется направленная прямая. Как правило, ось определяется единичным вектором, имеющим общее с ней направление и задающим положительную направленность оси. Чтобы получить проекцию точки, требуется опустить на ось перпендикуляр из этой точки.

Определение. Проекцией вектора \vec{a} на ось (или вектор) \vec{b} называется вектор, началом которого служит проекция начала вектора \vec{a} , а концом – проекция конца вектора \vec{a} на ось (или вектор)

Приведем свойства проекции:

- 1) $|pr_{\vec{b}} \vec{a}| = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$;
- 2) $pr_{\vec{c}}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda pr_{\vec{c}} \vec{a} + \mu pr_{\vec{c}} \vec{b}$, где λ и μ - любые числа;
- 3) равные вектора имеют равные проекции.

Определение. Скалярным произведением векторов называется число (скаляр), равное произведению их длин и косинуса угла между ними; обозначают скалярное произведение как (\vec{a}, \vec{b}) : $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

Следующие свойства скалярного произведения векторов вытекают прямо из определения:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- 2) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$, где λ - любое число;
- 3) $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;
- 4) если $|\vec{e}| = 1$, то $(\lambda \vec{e}, \mu \vec{e}) = \lambda \mu$, где λ и μ - любые числа;
- 5) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны или один из них равен нулю;
- 6) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;
- 7) для декартовой системы координат справедливо следующее свойство: если $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ и $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Введем для определенности обозначения: пусть координаты векторов $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. С помощью скалярного произведения решаются следующие задачи:

1. определение длины вектора:

- а) для декартового базиса: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$;
- б) для любого базиса: $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

2. определение расстояния между точками A и B:

$d = |\overrightarrow{AB}|$ по вышеприведенным формулам (в зависимости от базиса).

3. определение проекции одного вектора на направление другого:

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$$

4. определение косинуса угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

5. определение для декартового базиса косинусов углов, образуемых вектором с осями координат:

$$\cos \alpha = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}; \quad \cos \beta = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

где α – угол вектора с осью x , β – угол вектора с осью y , γ – угол вектора с осью z .

Определение. Векторным произведением двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор, обозначаемый как $[\vec{a}, \vec{b}]$, удовлетворяющий условиям:

- вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} ;

- длина $[\vec{a}, \vec{b}]$ равна $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$;

- векторы \vec{a} , \vec{b} , $[\vec{a}, \vec{b}]$ образуют правую тройку, то есть если векторы \vec{a} , \vec{b} , $[\vec{a}, \vec{b}]$ приведены к общему началу, то из конца $[\vec{a}, \vec{b}]$ поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} на меньший угол происходит против часовой стрелки.

Векторное произведение обладает **свойствами**:

- 1) векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они коллинеарны, в частности $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$;
- 2) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$, где λ – скаляр;
- 3) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;
- 4) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;
- 5) длина $[\vec{a}, \vec{b}]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , приведенных к одной точке;
- 6) если координаты векторов \vec{a} и \vec{b} известны в декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ как $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, то их векторное произведение можно представить в виде:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Определение. Смешанным произведением трех ненулевых некопланарных векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется число, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ и \vec{c} .

Обозначается смешанное произведение как $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение обладает следующими **свойствами**:

- 1) геометрически смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах и взятого со знаком «+», если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая тройка и со знаком «-», если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – левая тройка;

2) в смешанном произведении неважно, в каком порядке брать векторное и скалярное произведение: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$,

но при перестановке двух сомножителей меняется знак:
 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;

3) три вектора компланарны, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю;

4) если координаты векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} известны в декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ как $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ и $\vec{c} = (x_c, y_c, z_c)$, то их векторное произведение можно представить в виде:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Пример №1

Задание:

Даны точки $A(7; -3; 1)$ и $B(4; -1; -3)$. Найдите координаты векторов \vec{AB} и \vec{BA} .

Решение:

$$A(7; -3; 1) \quad B(4; -1; -3)$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (4 - 7; -1 - (-3); -3 - 1) = (-3; 2; -4)$$

A – начало вектора

B – конец вектора

$$\vec{BA} = (7 - 4; -3 - (-1); 1 - (-3)) = (3; -2; 4)$$

B – начало вектора

A – конец вектора

Пример №2

Задание:

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (0; -1; 3)$, $\vec{c} = (-2; 3; -4)$.

Найдите координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$

Решение:

$$\vec{a} = (1; 2; -2) \quad \vec{b} = (0; -1; 3) \quad \vec{c} = (-2; 3; -4) \quad \vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$$

$$\vec{d}_1 = 2 * 1 + 4 * 0 - 3 * (-2) = 2 + 0 + 6 = 8$$

$$\vec{d}_2 = 2 * 2 + 4 * (-1) - 3 * 3 = -9$$

$$\vec{d}_3 = 20$$

Пример №3

Задание:

Найдите координаты векторного произведения векторов:

$$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

Решение:

$$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}(-15 + 2) - \vec{j}(-5 + 6) + \vec{k}(1 - 9) = -13\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}$$

Пример №4

Задание:

Найдите косинус угла между векторами :

$$\vec{a} = (3; 3; 1) \text{ и } \vec{b} = (3; 1; -3)$$

Решение:

$$\vec{a} = (3; 3; 1) \text{ и } \vec{b} = (3; 1; -3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{9}{\sqrt{19}}$$

Пример №5

Задание:

Даны 2 вектора:

$$\vec{a} = \{1, 2\} \quad \vec{b} = \{-1, 3\}$$

Найти координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$

Решение:

$$\vec{a} = \{1, 2\} \quad \vec{b} = \{-1, 3\}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1 + (-1); 2 + 3\} = \{0; 5\}$$

Пример №6

Задание:

Определить скалярное произведение $\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b})$, если $\vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

$$|\vec{e}_1| = 1 \quad |\vec{e}_2| = 2 \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{\pi}{6}$$

Решение:

$$\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}), \text{ если } \vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \quad \vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad |\vec{e}_1| = 1 \quad |\vec{e}_2| = 2 \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, 2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1, -\vec{e}_2) + (3\vec{e}_2, 2\vec{e}_1) + (3\vec{e}_2, -\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1^2 + 5(\vec{e}_1, \vec{e}_2) - 3\vec{e}_2^2 = \\ &= 2 * 1^2 + 5 * 1 * 2 \cos \frac{\pi}{6} - 3 * 2^2 = 2 + 10 \frac{\sqrt{3}}{2} - 12 = -10 + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Пример №7

Задание:

Определить векторное произведение $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$$|\vec{e}_1| = 1 \quad |\vec{e}_2| = 1 \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{\pi}{3}$$

Решение:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}], \text{ если } \vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, |\vec{e}_1| = 1, |\vec{e}_2| = 1, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2] = [3\vec{e}_1, \vec{e}_1] + [3\vec{e}_1, \vec{e}_2] + [-2\vec{e}_2, \vec{e}_1] + [-2\vec{e}_2, \vec{e}_2] =$$

$$= 5 * 1 * 1 * \sin \frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Задачи для самостоятельного решения

- 1) Даны две точки A(3;-4;1) и B(4;6;-3). Найти координаты вектора $\vec{a} = \overline{A_1A_2}$.
- 2) Найти скалярное произведение векторов: $\vec{a} = (3, -4, 1), \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$.
- 3) Разложить вектор \vec{x} по базису, образованному векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:
 - а) $\vec{x} = -9\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}; \vec{e}_1 = (3, -1, 2), \vec{e}_2 = (-2, 5, -1), \vec{e}_3 = (0, 2, 3)$;
 - б) $\vec{x} = (8, 4, -1); \vec{e}_1 = (1, 5, 4), \vec{e}_2 = (3, 0, 1), \vec{e}_3 = (2, -2, -3)$.
- 4) Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, угол между векторами составляет 120° .
- 5) Найти векторное произведение векторов $\vec{p} = 5i - 2j + k, \vec{q} = 3i + j + 4k$.

Практическая работа №7 Исследование функций

Пример 1

Задание:

Исследовать функцию

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Решение:

$$1) D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

2) Точки пересечения с осью Ox и Oy

Ox :

$$\text{Пусть } y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Oy :

$$\text{Пусть } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

3) четность / нечетность

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1}$$

$$-f(x) = -\frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ нечетная}$$

4) Асимптоты

Знаменатель обращается в нуль при $x = \pm 1$ – точка разрыва функции

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = 3^{-\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = 3^{-\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

Точки $x_{\frac{1}{2}}$ – точки разрыва 2^{го} рода

Вывод: односторонние пределы бесконечны, значит прямая $x_{\frac{1}{2}} = \pm 1$

является вертикальной асимптотой графика функции

5) Интервалы возрастания / убывания, точки экстремума :

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y' = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{3} \text{ – критические точки}$$

$$(x^2 - 1)^2 \neq 0 \quad x_{1/2} \neq \pm 1$$

Определим знак производной на полученных интервалах :

$$f'(-2) > 0 \quad (-\infty; -\sqrt{3}) \quad \square$$

$$f'(-1,5) < 0 \quad (-\sqrt{3}; -1) \quad \square$$

$$f'(-0,5) < 0 \quad (-1; 0) \quad \square$$

$$f'(0,5) < 0 \quad (0; 1) \quad \square$$

$$f'(1,5) < 0 \quad (1; \sqrt{3}) \quad \square$$

$$f'(2) > 0 \quad (\sqrt{3}; +\infty) \quad \square$$

$$y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$$

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$$

б) Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика :

$$f'' = -\frac{4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} + \frac{4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'' = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

Определим знак производной на полученных интервалах :

$$f''(x) < 0 \quad (-\infty; -\sqrt{3}) \quad \text{функция выпукла вверх}$$

$$f''(x) > 0 \quad (-\sqrt{3}; 0) \quad \text{вниз}$$

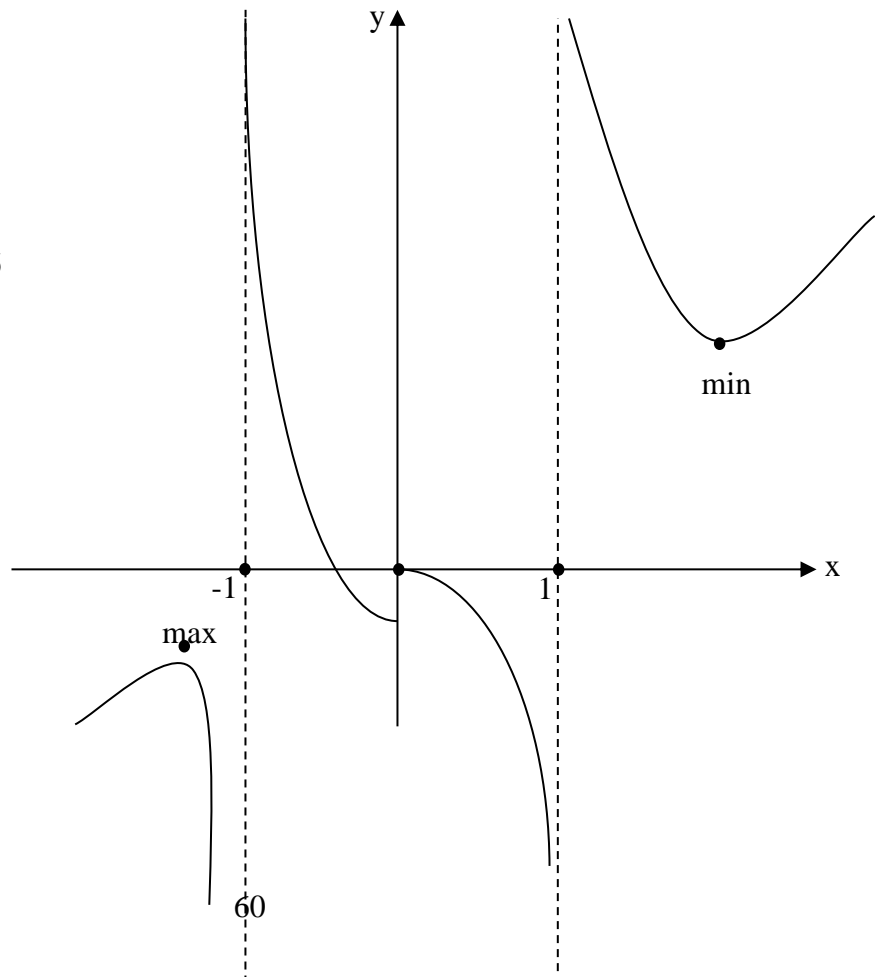
$$f''(x) < 0 \quad (0; \sqrt{3}) \quad \text{вверх}$$

$$f''(x) > 0 \quad (\sqrt{3}; +\infty) \quad \text{вниз}$$

$$y_{\min} = y(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$$

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$$

$$y(0) = 0 \quad \text{— точка перегиба}$$



Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать функцию $y(x) = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$ с помощью производных и построить график.
3. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график:
 $y(x) = -\frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)$

Практическая работа №8 Логарифмическая функция

Цель работы: получить навыки исследования логарифмической функции.

Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a(x)$, где a - любое положительное число не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием a . Здесь и далее для обозначения логарифма мы будем использовать следующую нотацию: $\log_a(b)$ - данная запись будет обозначать логарифм b по основанию a .

Основные свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают \mathbf{R}^+ . Очевидное свойство, так как каждое положительное число имеет логарифм по основанию a .

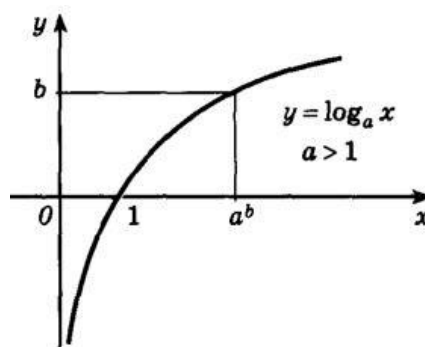
2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.

3. Если основание логарифмической функции $a > 1$, то на всей области определения функции возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство $0 < a < 1$

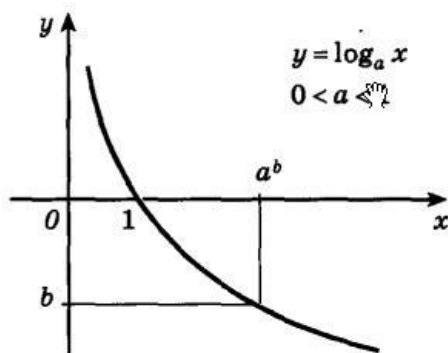
4. График логарифмической функции всегда проходит через точку $(1; 0)$.

5. Возрастающая логарифмическая функция, будет положительной при $x > 1$, и отрицательной при $0 < x < 1$.

6. Убывающая логарифмическая функция, будет отрицательной при $x > 1$, и положительной при $0 < x < 1$:



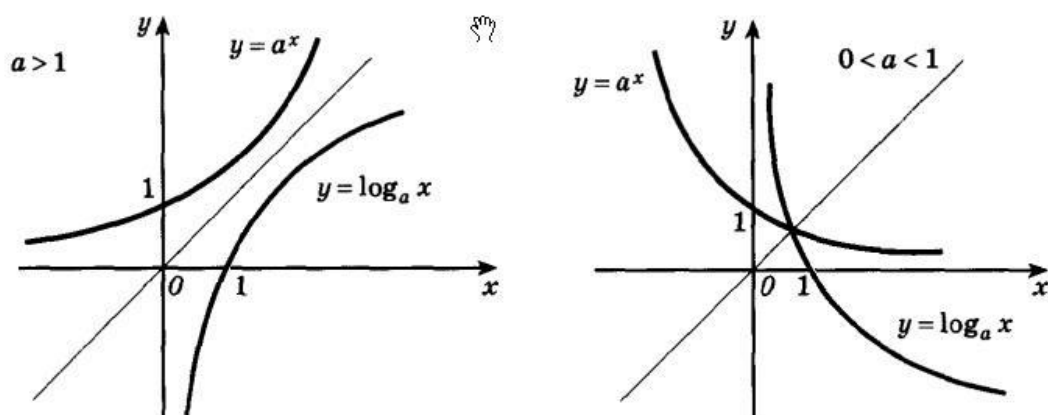
На следующем рисунке представлен график убывающей логарифмической функции - ($0 < a < 1$):



7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция – функция общего вида.

8. Функция не имеет точек максимума и минимума.

Если построить в одной оси координат показательную и логарифмическую функции с одинаковыми основаниями, то графики этих функций будут симметричны относительно прямой $y = x$. Данное утверждение показано на следующем рисунке.



Изложенное выше утверждение будет справедливо, как для возрастающих, так и для убывающих логарифмических и показательных функций.

Пример

Задание. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \ln \frac{x+1}{x+2}$$

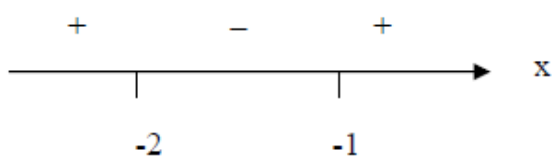
Решение:

Область определения функции

$$\frac{x+1}{x+2} > 0,$$

$$(x+1)(x+2) > 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = -2.$$



То есть $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln \left(\frac{-1}{-0} \right) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln \left(\frac{+0}{1} \right) = -\infty.$$

Получаем, что $x = -1$ и $x = -2$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y = \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = 0, \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = 1, x+1 = x+2, \text{ нет решений.}$$

$$Oy: x = 0, \Rightarrow y = \ln \left(\frac{0+1}{0+2} \right) = -\ln 2 \approx -0,69. \text{ Точка } (0, -0,69).$$

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x+2} = \ln \frac{x-1}{x-2} \neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = \left(\ln \frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \frac{x+2 - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} \frac{x+2-x-1}{(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Находим критические точки: $x_1 = -1, x_2 = -2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2), (-1; +\infty)$. Экстремумов нет.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x) = \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)' = -\frac{x+1+x+2}{(x+1)^2(x+2)^2} = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

Находим критические точки: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -1,5$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



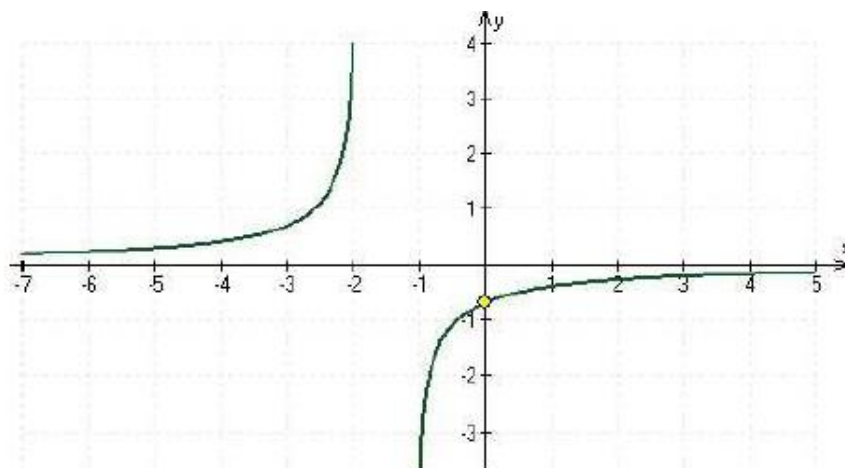
Функция выпукла вниз на $(-\infty; -2)$, выпукла вверх на $(-1; +\infty)$.

6) Горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+1/x}{1+2/x} = 0,$$

Асимптота $y = 0$.

7) Строим график функции, отметим ключевые точки:



Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать логарифмическую функцию:

$$f(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{5}\right)$$

Раздел 2. Самостоятельная работа

- 3.1. Проработка лекционного материала.
- 3.2. Подготовка к практическим занятиям согласно разделу 1.