Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Методические указания к лабораторным работам
и организации самостоятельной работы для студентов направления
«Государственное и муниципальное управление»
(уровень магистратуры)

2018

Сидоров Анатолий Анатольевич, Салмина Нина Юрьевна

Моделирование социально-экономических систем и процессов: Методические указания к лабораторным работам и организации самостоятельной работы для студентов направления «Государственное и муниципальное управление» (уровень магистратуры) / А.А. Сидоров, Н.Ю. Салмина. – Томск, 2018. – 91 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение

Целью проведения лабораторных работ и организации самостоятельной деятельности по дисциплине «Моделирование социально-экономических систем и процессов» является практическое закрепление материала в области современных методов математического моделирования социально-экономических систем и процессов, а также методов и способов использования математического инструментария в решении задач управления.

Задачи дисциплины:

– знакомство с методами макроэкономического моделирования;

– изучение отдельных классов экономических моделей;

– получение навыков построения моделей при решении конкретных экономических задач;

– получение навыков интерпретации результатов моделирования.

По окончании изучения дисциплины «Моделирование социально-экономических систем и процессов» студент должен:

– ***знать*** основные принципы современных подходов к построению математических моделей сложных социально-экономических систем и процессов, ориентированных на применение компьютерных и информационных технологий;

– ***уметь*** строить базовые математические модели исследуемых систем и процессов, проводить их аналитическое исследование и оптимизацию;

– ***владеть*** основными навыками построения, аналитического и численного исследования математических моделей сложных социально-экономических систем и процессов с применением компьютерных технологий.

2 Методические указания к проведению лабораторных работ

2.1 Лабораторная работа «Модель Леонтьева»

Рассматривается экономическая система с четырьмя видами производимой продукции. В модели Леонтьева в качестве экзогенных переменных заданы: матрица расходных коэффициентов A, вектор объемов конечного спроса C и вектор добавленной стоимости по видам продукции V.

Необходимо определить:

1) требуемые объемы валовых выпусков по отраслям x_j;

2) цену продукции p_i;

3*) проверить равенство объема совокупного общественного продукта и национального дохода, исходя из следующего соотношения:

$$\sum_i c_i \cdot p_i = \sum_j v_j \cdot x_j .$$

Все расчеты удобнее проводить в среде Mathcad, так как здесь значительно облегчается работа с матрицами. Если вам необходимо решить систему линейных уравнений, представьте задачу в матричном виде. Так, модель Леонтьева в матричном виде примет вид:

$$X - AX = C ,$$

а двойственная ей система для определения цены:

$$P - A^T P = V$$

Теперь достаточно провести преобразования и выразить X через C, а также P через V, чтобы получить требуемые значения валовых выпусков и цены.

Примечание: Перед проведением расчетов необходимо проверить прибыльность и продуктивность модели. Если какое-то из проверяемых свойств модели не выполняется, необходимо обратиться к преподавателю для корректировки данных с целью обеспечения разрешимости системы.

Варианты заданий

Вариант 1.

A=	0.1	0.3	0.1	0.1	C=	3	V=	2
	0	0	0	0.2		4		1
	0.8	0	0	0		1		2
	0	0.2	0.2	0		1		3

Вариант 2.

A=	0.2	0	0	0.3	C=	5	V=	3
	0	0.1	0.05	0.1		2		1
	0.2	0.2	0	0.1		4		2
	0	0.05	0.2	0		6		3

Вариант 3.

A=	0	0	0	0.1	C=	2	V=	4
	0.1	0.2	0.3	0		5		2
	0.3	0.1	0.1	0.1		2		3
	0	0.2	0.2	0		1		3

Вариант 4.

A=	0.3	0.4	0	0	C=	1	V=	1
	0.05	0	0.1	0		2		1
	0.2	0.1	0	0.3		5		2
	0	0.2	0.2	0.1		2		2

Вариант 5.

A=	0	0	0	0.2	C=	5	V=	2
	0.6	0	0.1	0		6		2
	0.1	0.1	0.3	0		4		2
	0.1	0.2	0.2	0.1		2		2

Вариант 6.

A=	0.2	0.2	0.3	0	C=	4	V=	1
	0.2	0	0	0.1		4		2
	0	0.3	0.2	0		3		1
	0	0	0.1	0.2		6		3

Вариант 7.

A=	0.5	0	0.1	0.1	C=	5	V=	2
	0	0	0.2	0.2		6		1
	0.1	0.2	0	0		4		2
	0	0.2	0.2	0		10		1

Вариант 8.

A=	0	0	0	0.1	C=	3	V=	2
	0.	0.2	0.2	0		4		1
	0.3	0.1	0	0.1		5		2
	0.2	0	0.1	0		2		3

Вариант 9.

A=	0.1	0.2	0.1	0.1	C=	6	V=	4
	0	0.1	0	0.2		6		3
	0.4	0	0.1	0.2		2		2
	0	0.2	0.2	0		8		2

Вариант 10.

A=	0	0	0.1	0.1	C=	7	V=	3
	0.2	0.1	0	0.2		2		2
	0.3	0	0.2	0		9		4
	0	0.1	0.3	0.1		4		3

Вариант 11.

A=	0.2	0.2	0	0.1	C=	2	V=	1
	0.1	0	0	0.2		8		1
	0.2	0	0.4	0		8		2
	0	0.2	0.2	0		1		2

Вариант 12.

A=	0.3	0.2	0	0	C=	9	V=	3
	0	0	0.1	0.2		7		2
	0.4	0.1	0	0		2		2
	0	0	0.2	0.2		4		3

Вариант 13.

A=	0.1	0.3	0.1	0.1	C=	3	V=	2
	0	0	0	0.2		4		1
	0.8	0	0	0		1		2
	0	0.2	0.2	0		1		3

Вариант 14.

A=	0	0	0.2	0.1	C=	2	V=	3
	0.1	0	0	0.2		5		3
	0.3	0.1	0	0		2		1
	0	0.2	0.1	0		4		4

Вариант 15.

A=	0.1	0	0	0	C=	4	V=	3
	0	0.2	0.1	0.1		5		4
	0.2	0	0.2	0		6		2
	0.1	0.05	0	0.1		2		3

Вариант 16.

A=	0.1	0.3	0.1	0.1	C=	3	V=	1
	0	0	0	0.2		4		2
	0.8	0	0	0		7		3
	0	0.2	0.2	0		5		4

Вариант 17.

A=	0.2	0.1	0	0.1	C=	1	V=	2
	0	0	0.2	0.2		3		4
	0.3	0.1	0	0		4		6
	0	0.5	0.12	0		6		8

Вариант 18.

A=	0.2	0	0.2	0	C=	5	V=	4
	0	0	0.2	0		4		2
	0.1	0.3	0	0.1		1		2
	0.1	0.04	0.1	0		2		3

Вариант 19.

A=	0.1	0.3	0.1	0.1	C=	3	V=	5
	0	0	0	0.2		4		1
	0.8	0	0	0		1		3
	0	0.2	0.2	0		1		4

Вариант 20.

A=	0.1	0.3	0.1	0	C=	3	V=	1
	0.1	0	0	0.2		3		5
	0.4	0	0.2	0		5		8
	0	0.1	0.1	0		1		2

2.2 Лабораторная работа «Линейная модель межотраслевого баланса. Прямые и полные коэффициенты затрат»

Рассматривается экономическая система с пятью видами производимой продукции. Известно, что за прошлый год в результате расчета межотраслевого баланса были получены следующие данные:

а) объемы валовых выпусков по отраслям (X_i);

б) объемы затрат продукции на производство (X_{ij}).

На планируемый период известны требуемые объемы конечного продукта Y .

Необходимо определить следующие показатели:

1) Матрицу прямых коэффициентов затрат;
2) Матрицу полных коэффициентов затрат;
3) *Матрицу косвенных затрат первого порядка;
4) Объемы валовых выпусков на планируемый период;
5) *Объемы условно-чистой продукции на планируемый период.

Помните, что прямые коэффициенты затрат определяются по данным за прошлый год. После того, как определена матрица прямых коэффициентов затрат, о данных за прошлый год можно забыть: больше ни в каких расчетах они не участвуют.

При определении объемов условно-чистой продукции первоначально необходимо рассчитать объемы затрат продукции на производство на планируемый период, а только затем уже определять условно-чистую продукцию. При этом и объемы валовых выпусков берутся на планируемый период.

Варианты заданий

Вариант 1.

X_i	21	34	87	12	120
X_{ij}	0	1.4	2	0	0.9
	0.3	0	1.2	0	2.4
	0.5	0.8	0.8	0	1
	0	0	0	0	0
	1.7	2.5	4	0.8	1
Y	18	29	85	11	110

Вариант 2.

X_i	125	101	86	24	36
X_{ij}	7.8	10	2	0.4	0.8
	4.7	5.5	8.5	0.8	1.5
	12.5	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	2.4	0	0	1.2	0
Y	105	80	74	22	35

Вариант 3.

X_i	55	145	202	24	65
X_{ij}	0	0	0	0	1.2
	5.8	8.3	12.5	0	2.8
	4.4	8.6	22	2.4	3.7
	0	0	0	0	0
	1.2	3.4	2.1	0	5.1
Y	50	123	160	22	58

Вариант 4.

X_i	15	73	36	48	110
X_{ij}	0	0	0	0	0
	0	3.8	0.8	1.2	5.5
	0	1.9	0	2.3	4
	0	1.2	1.2	0	4.6
	1.2	4.2	0.6	4.8	5
Y	16	63	30	44	92

Вариант 5.

X_i	37	18	91	62	66
X_{ij}	1.8	0	2.4	3.1	4
	0	0	2.1	0	0.8
	2.3	2.2	3.7	5.6	4.4
	1.5	1.8	6.6	2.6	0
	3.7	0	9.1	2.3	4.6
Y	30	15	70	50	46

Вариант 6.

X_i	46	48	82	25	51
X_{ij}	0	0	0	0	0
	0	1.4	4.1	3.3	0
	5.2	5.8	6.3	2.5	6.2
	0	0	2	0	0
	1.2	3.2	0	0	7.4
Y	46	40	60	27	42

Вариант 7.

X_i	86	13	15	52	40
X_{ij}	8.6	0.8	2.1	4.5	2
	0	0	0	0	0
	0	0	3.4	5.8	2.5
	10.2	0	1.2	7	1.5
	5.2	0	0	0	0
Y	65	14	5	34	36

Вариант 8.

X_i	109	156	102	73	82
X_{ij}	0	14.5	9.2	8.1	5.8
	11	16.2	8.9	9.3	10.5
	8.4	7.5	3.4	6.7	8.2
	9.9	5	3.1	0	6.7
	6	21	9.8	7.3	4.1
Y	72	100	68	48	34

Вариант 9.

X_i	43	46	200	107	132
X_{ij}	0	0	0	0	0
	0	2.5	6.7	5.3	4.6
	5.6	0	24	12.3	9.4
	0	8.4	12	0	14.2
	0	0	16.3	9.3	9.8
Y	43	32	155	70	93

Вариант 10.

X_i	76	34	76	14	51
X_{ij}	2.4	3.4	5.6	2.3	0
	5.2	0	0	0	5.1
	7.6	0	0	0	6.4
	0	0	0	0	0
	0	2.2	5.6	0.8	2.3
Y	64	24	62	15	43

Вариант 11.

X_i	240	56	142	70	90
X_{ij}	12	0	10	7	12
	0	0	0	0	0
	15.2	4.5	7.1	7.6	9.8
	10	4.5	6.5	0	7.5
	8.5	0	14.2	4.5	5.6
Y	200	60	98	45	58

Вариант 12.

X_i	64	162	111	72	88
X_{ij}	0	0	0	0	0
	6.4	14.5	12.2	8.7	10
	0	18	8.8	9.2	0
	0	0	11.1	7.2	13.2
	0	12.3	4.5	0	8.8
Y	65	110	76	45	62

Вариант 13.

X_i	77	81	92	24	25
X_{ij}	7.7	2	0	1.2	2
	0	5	2.3	0	0
	3.3	1	4.5	1	1.1
	0	0	0	0	0
	2.1	0	4.5	0	0
Y	65	74	82	25	22

Вариант 14.

X_i	65	271	208	183	46
X_{ij}	0	2.7	6	4	0
	2.1	12	24	8	1.1
	6.5	27.1	4	12	2
	1	8	10.5	5.4	4.6
	0	0	0	0	0
Y	54	224	160	170	50

Вариант 15.

X_i	43	56	120	12	240
X_{ij}	0	0	1.2	0	3.4
	0	5.6	4.8	1.2	0
	2	0	4.3	0	6.5
	0	0	0	0	0
	2.1	2	8.8	2	0
Y	40	46	110	14	230

Вариант 16.

X_i	50	20	120	10	45
X_{ij}	2.3	2	12	0	0
	0	0	2.1	0	1.2
	5	0	10	0.5	1.1
	0	0	0	0	0
	1.5	1	6	0	4.5
Y	37	18	113	11	32

Вариант 17.

X_i	20	33	50	77	230
X_{ij}	0	0	0	0	0
	1.2	0	2.5	1.4	2
	0	1.2	0	3.4	2.5
	1	3.3	1.1	0	4.4
	0	1	5	7.7	3.8
Y	19	26	44	68	220

Вариант 18.

X_i	243	24	150	160	54
X_{ij}	12	1.2	1.5	16	2.5
	0	0	0	0	0
	15	0.6	0	5.6	2
	2.8	1	8	8	1
	0	0	1.5	3.2	5.4
Y	210	25	130	140	45

Вариант 19.

X_i	100	12	134	182	25
X_{ij}	2	0	3.4	4.2	0
	0	0	0	0	0
	4.5	1.1	10	8.8	0.8
	4.6	0.4	2.1	8	2.5
	0	0	0	2.3	0
Y	90	13	110	165	26

Вариант 20.

X_i	14	80	100	45	26
X_{ij}	0	0	0	0	0
	0	2.4	6	1.2	0
	1.4	4	6.5	0	3
	0	2	1	2.4	0
	2	0	0	0	2.4
Y	15	70	90	40	25

2.3 Лабораторная работа «Планирование трудовых ресурсов и основных производственных фондов»

Рассматривается экономическая система с пятью видами производимой продукции. Известно, что за прошлый год в результате расчета межотраслевого баланса были получены следующие данные: объемы валовых выпусков, объемы затрат продукции на производство. Также известны требуемые объемы конечного продукта на планируемый период (значения соответствующих характеристик берутся из предыдущей лабораторной работы).

Кроме этого, в качестве исходных данных рассматриваются объемы трудовых ресурсов (L) и основных производственных фондов (Φ) за прошедший период.

Необходимо определить:

1) прямые и полные коэффициенты трудоемкости;

2) прямые и полные коэффициенты фондоемкости;

3) требуемые объемы трудовых ресурсов и основных производственных фондов суммарно по всем отраслям через прямые и полные коэффициенты;

4) *требуемые объемы трудовых ресурсов и основных производственных фондов по каждой отрасли в отдельности.

Для самопроверки: общие объемы рудовых ресурсов, рассчитанные через прямые и через полные коэффициенты, должны совпадать. То же самое справедливо и для основных производственных фондов.

Помните, что объемы трудовых ресурсов и основных производственных фондов по отраслям рассчитываются только через прямые коэффициенты.

Варианты заданий.

Вариант 1.

L	2	8	4	3	12
Ф	5	5	3	2	24

Вариант 2.

L	10	4	4	1	2
Ф	8	11	2	5	3

Вариант 3.

L	2	8	6	5	5
Ф	4	12	16	4	2

Вариант 4.

L	3	8	2	3	11
Ф	2	5	4	5	14

Вариант 5.

L	3	4	7	2	6
Ф	5	2	9	3	4

Вариант 6.

L	4	5	8	2	1
Ф	5	8	13	1	5

Вариант 7.

L	8	4	5	6	2
Ф	10	3	2	5	4

Вариант 8.

L	14	14	8	5	9
Ф	5	8	10	7	6

Вариант 9.

L	6	2	20	13	8
Ф	5	4	18	16	12

Вариант 10.

L	9	4	8	2	5
Ф	6	2	10	1	3

Вариант 11.

L	24	4	17	5	10
Ф	16	3	12	7	8

Вариант 12.

L	6	13	12	4	10
Ф	8	17	10	3	7

Вариант 13.

L	4	9	9	2	3
Ф	9	10	8	1	2

Вариант 14.

L	5	30	20	20	5
Ф	7	20	25	20	3

Вариант 15.

L	4	3	12	2	25
Ф	3	7	9	1	34

Вариант 16.

L	5	1	14	1	6
Ф	4	3	10	2	5

Вариант 17.

L	1	5	3	8	10
Ф	2	2	5	6	12

Вариант 18.

L	24	2	10	8	8
Ф	20	3	15	12	5

Вариант 19.

L	9	1	14	20	2
Ф	12	2	10	18	2

Вариант 20.

L	2	8	12	4	2
Ф	1	10	7	5	3

2.4 Лабораторная работа «Построение схемы межотраслевого баланса»

Рассматривается экономическая система с пятью видами производимой продукции. За прошлый год в результате расчета межотраслевого баланса были получены следующие данные: объемы валовых выпусков, объемы затрат продукции на производство. Также определены требуемые объемы конечного продукта на планируемый период (значения соответствующих характеристик берутся из второго практического занятия).

При этом известно, что по некоторым отраслям объемы валовых выпусков ограничены сверху.

Необходимо проверить, выполняются ли заданные ограничения (объемы валовых выпусков на планируемый период рассчитывались на втором практическом занятии).

Требуется:

1. определить новые объемы конечных продуктов по тем отраслям, для которых указанные ограничения не выполняются;

2. откорректировать объемы валовых выпусков по остальным отраслям.

Если в результате расчетов получаются отрицательные значения объемов конечных продуктов по некоторым отраслям, необходимо проанализировать ситуацию, пояснить причины ее возникновения.

При этом необходимо определить, какие минимальные объемы валовых выпусков требуется установить для соответствующих отраслей с тем, чтобы обеспечить хотя бы производственные нужды (минимальные значения объемов конечных продуктов по этим отраслям при этом должны быть равны нулю).

Варианты заданий.

№ варианта	**№ отрасли**	**Объем валового выпуска**
1	1	22
	3	87
	5	120
2	1	125
	2	110
	5	37
3	2	148
	3	220
	5	69
4	2	74
	3	38
	4	50
5	1	40
	4	62
	5	70
6	3	85
	4	27
	5	58
7	1	90
	3	16
	5	40
8	1	105
	2	160
	4	70
9	2	50
	3	204
	4	110
10	1	77
	4	20
	5	52
11	3	150
	4	72
	5	90

12	2	162
	4	75
	5	90
13	1	78
	3	100
	5	26
14	1	67
	3	210
	4	190
15	1	45
	2	57
	5	242
16	1	50
	3	130
	5	50
17	1	25
	4	77
	5	235
18	3	151
	4	165
	5	54
19	2	12
	3	134
	5	27
20	1	20
	3	102
	5	28

2.5 Лабораторная работа «Модель межотраслевого баланса в условиях заданных ограничений»

Рассматривается экономическая система с пятью видами производимой продукции. Известно, что за прошлый год в результате расчета межотраслевого баланса были получены следующие данные: объемы валовых выпусков, объемы затрат продукции на производство, объемы трудовых ресурсов и основных производственных фондов. Также известны требуемые объемы конечного продукта на планируемый период. Все значения соответствующих характеристик берутся из предыдущих лабораторных работ.

Необходимо построить полную схему межотраслевого баланса.

Полная схема межотраслевого баланса должна включать в себя три раздела, плюс дополнительные забалансовые строки по трудовым ресурсам и основным производственным фондам.

Первый раздел межотраслевого баланса должен содержать объемы продукции по отраслям, расходуемые на производство в планируемом периоде.

Второй раздел должен включать итоговые объемы конечного продукта по отраслям, с учетом возможной корректировки этих объемов в связи с заданными ограничениями на валовый выпуск (лабораторная работа «Построение схемы межотраслевого баланса»).

Третий раздел должен содержать объемы условно-чистой продукции на планируемый период.

После построения схемы межотраслевого баланса необходимо проверить все основные балансовые соотношения, включая сравнение общих итогов второго и третьего разделов.

2.6 Лабораторная работа «Модель функционирования производства. Принцип жесткого управления»

При управлении производством за основу взят принцип жесткого управления. Известны следующие характеристики системы:

– количество предприятий – N;

– нижняя граница коэффициентов эффективности предприятий – d;

– верхняя граница коэффициентов эффективности предприятий – D;

– коэффициенты эффективности предприятий – r;

– объем производства, определенный центром – R;

– цена, установленная центром – λ.

Необходимо определить:

1) соотношение предложения на выпуск продукции со стороны предприятий и спрос на выпуск продукции со стороны центра (определить один из возможных пяти случаев, соответствующий вашему варианту). Для этого определите объемы продукции, которые желали бы выпускать

предприятия при данной цене v_i и сравните их суммарный объем с объемом производства, определенным центром R;

2) равновесную ситуацию: оценки эффективности предприятий, которые они будут сообщать центру (s^*);

3) планы предприятий, назначаемые центром;

4) прибыль предприятий в равновесной ситуации;

5) затраты центра в равновесной ситуации.

Примечание: при определении равновесной ситуации помните, что

1) предприятия необходимо упорядочить по эффективности;

2) те предприятия, которые сообщают оценки эффективности, отличные от граничных, должны в результате получить оптимальные с их точки зрения планы (v_i);

3) общая сумма планов предприятий, назначенных центром должна равняться объему производства R.

Варианты заданий.

№ варианта	N	d	D	r	R	λ
1	5	4	9	5, 6, 5, 6, 8	100	3
2	6	1	6	2, 3, 5, 5, 4, 2	25	1
3	6	1	8	6, 8, 1, 3, 2, 5	90	3
4	7	2	4	2, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 3.5	20	1
5	5	1	6	1, 2, 3, 4, 5	40	2
6	6	2	6	2, 4, 2, 2, 3, 5	14	1
7	5	3	8	4, 3, 6, 8, 5	70	2
8	5	1	10	3, 5, 9, 7, 2	90	5
9	7	3	6	3, 3, 4, 4, 5, 6, 3	54	2
10	5	4	8	8, 7, 6, 5, 4	100	3

11	5	2.5	5.5	3, 4.5, 3.5, 4, 5	35	2
12	6	1	6	6, 4, 4, 3, 1, 5	110	4
13	7	1	8	3, 2, 4, 8, 5, 6, 3	54	3
14	5	3	9	8, 7, 6, 5, 4	140	4
15	5	1.5	8	3, 5, 3.5, 4, 7	50	2
16	6	1	10	6, 10, 4, 3, 1, 5	160	4
17	6	2	14	6, 2, 10, 12, 8, 3	100	2
18	5	1	20	16, 8, 14, 3, 5	100	3
19	7	1	30	2, 22, 16, 8, 14, 3, 5	100	2
20	6	2	18	3, 7, 7, 12, 14, 10	130	2

2.7 Лабораторная работа «Модель функционирования производства. Принцип открытого управления»

При управлении производством принцип жесткой централизации сменили на принцип открытого управления.

Известны следующие характеристики системы (значения характеристик берутся из вариантов предыдущего практического занятия):

– количество предприятий – N;

– нижняя граница коэффициентов эффективности предприятий – d;

– верхняя граница коэффициентов эффективности предприятий – D;

– коэффициенты эффективности предприятий – r;

– объем производства, определенный центром – R.

Необходимо определить:

1) равновесную ситуацию: оценки эффективности предприятий, которые они будут сообщать центру (s^*);

3) планы предприятий, назначаемые центром;

4) прибыль предприятий в равновесной ситуации;

5) затраты центра в равновесной ситуации.

Примечание: при определении равновесной ситуации необходимо проводить расчеты в несколько итераций, первоначально установив оценки эффективности, равными нижней границе коэффициентов эффективности предприятий. Итерации требуется проводить до тех пор, пока по всем предприятиям не будет достигнута точность (разница между значениями оценок эффективности на последней и предпоследней итерации), равная или выше 0.001. Таким образом, на каждой k -ой итерации необходимо проверять условие:

$$\forall i \quad \left| s_i^{(k)} - s_i^{(k-1)} \right| \le 0.001$$

Как только заданное условие будет выполняться по всем предприятиям, необходимая точность достигнута и в качестве результата берутся данные по последней итерации.

Помните, что при открытом управлении цена не устанавливается центром, а зависит от оценок эффективности предприятий, сообщаемых центру. Соответственно, для определения прибыли предприятий необходимо рассчитать новую цену.

После определения всех требуемых характеристик, сравнить прибыль предприятий и затраты центра с условиями жесткого управления.

Проанализировать ситуацию, принимая во внимание разницу в ценах при жестком и открытом управлении.

2.8 Лабораторная работа «Модель функционирования производства. Штрафы. Адаптивный способ формирования данных»

При управлении производством действует принцип открытого управления (характеристики системы возьмите из предыдущих двух практик). Рассмотреть следующие варианты управления:

1. Штрафы.

а) определить минимальное значение коэффициента штрафа β , при котором все предприятия будут вынуждены сообщать свои реальные коэффициенты эффективности; определить при этом планы предприятий, значения целевых функций предприятий и центра и сравнить с результатами жесткого управления и открытого управления;

б) определить равновесную ситуацию для заданного коэффициента штрафа (по варианту) β. Оценки эффективности в равновесной ситуации рассчитываются так же, как и при открытом управлении, итеративным способом. Точность расчетов бреется, как и раньше, равной 0.001. Помните, что при расчете оценок в условиях штрафов действуют более жесткие ограничения: на каждой итерации проверяйте выполнимость ограничений. Как правило, при штрафах, младшие предприятия (с более низкими коэффициентами эффективности) вынуждены сообщать свои реальные коэффициенты эффективности. Если на какой-то итерации оценка эффективности предприятия приравнивается (в силу ограничений) реальному коэффициенту эффективности, то на последующих итерациях для этого предприятия можно сразу устанавливать оценку равной реальному коэффициенту эффективности.

2. Адаптивный способ формирования данных.

Заданы дисконтирующие множители предприятий (δ_i). Необходимо определить оценки коэффициентов эффективности в ситуации равновесия (s^*), если i-тое предприятие будет иметь коэффициент эффективности r_i (по всем остальным предприятиям коэффициенты остаются прежними). Указанное предприятие становится монополистом.

Определить для этой ситуации цену продукции, планы предприятий, их прибыль и затраты центра. Сравнить полученные результаты с результатами жесткого и открытого управления. Особое внимание уделите монополисту.

Варианты заданий.

№ варианта	β	δ	i	r_i
1	0.2	0.8, 0.5, 0.4, 0.4, 0.9	5	50
2	0.3	0.95, 0.5, 0.2, 0.4, 0.9, 0.1	1	30
3	0.3	0.6, 0.5, 0.5, 0.2, 0.8, 0.1	5	40
4	0.1	0.8, 0.5, 0.4, 0.4, 0.9, 0.1, 0.2	5	35
5	0.2	0.95, 0.1, 0.2, 0.5, 0.6	1	25
6	0.3	0.3, 0.3, 0.5, 0.6, 0.4, 0.95	6	30
7	0.3	0.5, 0.2, 0.7, 0.5, 0.9	5	50
8	0.2	0.1, 0.2, 0.95, 0.5, 0.8	3	40

9	0.25	0.2, 0.9, 0.2, 0.5, 0.8, 0.1, 0.2	2	50
10	0.25	0.1, 0.3, 0.9, 0.8, 0.1	3	30
11	0.3	0.4, 0.9, 0.3, 0.5, 0.95	5	28
12	0.3	0.8, 0.5, 0.4, 0.4, 0.9, 0.5	1	45
13	0.4	0.2, 0.98, 0.1, 0.3, 0.95, 0.8, 0.1	2	40
14	0.3	0.1, 0.3, 0.95, 0.5, 0.9	3	38
15	03	0.98, 0.8, 0.2, 0.9, 0.5	4	30
16	0.4	0.2, 0.92, 0.1, 0.4, 0.3, 0.7	2	50
17	0.35	0.5, 0.7, 0.1, 0.95, 0.2, 0.4	4	40
18	0.2	0.85, 0.5, 0.9, 0.1, 0.2	1	50
19	0.2	0.2, 0.2, 0.85, 0.4, 0.9, 0.9, 0.1	3	70
20	0.3	0.3, 0.1, 0.5, 0.7, 0.2, 0.9	6	60

2.9 Лабораторная работа «Теория благосостояния. Функции коллективной полезности»

В теории благосостояния любое решение представляется в виде вектора полезности, элементы которого определяют полезность для каждого агента.

При нахождении оптимального решения единственным и бесспорным принципом оптимальности является оптимальность по Парето. Необходимо помнить, что решение является оптимальным по Парето только в том случае, если оно выгодно всем агентам одновременно. Таким образом, при сравнении двух векторов полезности, доминирование по Парето наблюдается тогда, когда все элементы одного вектора больше или равны соответствующих элементов второго вектора.

Доминирование по Парето, как правило, выделяет несколько векторов полезности. Любой разумный принцип оптимальности выбирает решение из множества векторов, оптимальных по Парето. Если доминирование по Парето приводит к единственному решению, то в этом случае любой разумный критерий (эгалитаризм, утилитаризм и т.д.) выберет в качестве решения этот же вектор.

Для нахождении эгалитарного решения определяется эгалитарная функция по каждому вектору полезности, которая равна минимальному элементу ветора. В качестве оптимального решения с точки зрения эгалитаризма выбирается вектор с максимальной функцией полезности. Если таких векторов несколько, то можно выбрать наилучший по лексиминному порядку.

Внимание! Помните, что эгалитарное решение не просто уравнивает полезности агентов, а максимизирует полезность беднейшего агента. Решение, дающее всем агентам равные доли полезности, не всегда является оптимальным по Парето!

Эгалитарное решение является частным случаем диктата (диктат бедных). При выборе в качестве критерия оптимальности диктата богатых наилучшим является вектор, в котором максимальный элемент является максимальным среди всех остальных векторов полезности.

Утилитаризм предлагает выбирать в качестве оптимального решения вектор полезности с максимальной суммой элементов.

Функция Нэша определяется как произведение элементов вектора полезности. Наилучшим решением по Нэшу является вектор с максимальным значением функции Нэша.

Пример выполнения работы.

Задача дележа пирога.

Двум братьям подарили пирог, который необходимо разделить между ними. Пусть полезность, которую получает каждый брат от поедания пирога, определяется следующими функциями:

$$u_1 = 3x_1 + 2, \quad u_2 = x_2 + 3,$$

где x_1 – доля пирога, которую получит первый брат,

x_2 – доля пирога, которую получит второй брат, и

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Необходимо определить, каким образом разделить пирог между братьями с точки зрения эгалитаризма, утилитаризма, оптимальности по Нэшу и диктата богатых.

1. Эгалитарное решение.

Эгалитаризм предлагает максимизировать полезность «беднейшего» агента. В случае двух агентов это означает уравнивание их полезностей. Приравняем функции полезностей братьев, и учитывая, что $x_2 = 1 - x_1$ получаем: $3x_1 + 2 = x_2 + 3$ или $3x_1 + 2 = 4 - x_1$, отсюда

$x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$.

Вектор полезности: $(3.5,\ 3.5)$.

2. Утилитарное решение.

Утилитаризм предлагает максимизировать суммарную полезность агентов: $3x_1 + 2 + x_2 + 3 \to \max \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 6 \to \max$.

Данная функция достигает максимума при $x_1 = 1, x_2 = 0$.

Вектор полезности: $(5, 3)$.

3. Оптимальность по Нэшу.

Решение по Нэшу мы ищем, максимизируя произведение функций полезности: $(3x_1 + 2)(x_2 + 3) \to \max \quad \Rightarrow \quad 10x_1 - 3x_1^2 + 8 \to \max$.

Максимум функции находим через первую производную:

$10 - 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10/6$.

Так как x_1 не может превышать 1 (любой из братьев не может получить больше одного пирога), то устанавливаем $x_1 = 1,\ x_2 = 0$.

Вектор полезности: $(5, 3)$.

4. Диктат богатых.

Диктат богатых предлагает максимизировать полезность самого «богатого» агента.

Если максимизировать функцию полезности первого брата, получим: $3x_1 + 3 \to \max$ при $x_1 = 1$ и максимум равен $u_1 = 5$.

Максимизируя функцию полезности второго брата, получаем $x_2 + 3 \to \max$ при $x_2 = 1$, здесь $u_2 = 4$.

Из двух максимумов выбираем максимальное значение, тогда $x_1 = 1,\ x_2 = 0$ и вектор полезности $(5, 3)$.

2.10 Лабораторная работа «Теория благосостояния. Свойства порядков коллективного благосостояния»

На данном практическом занятии рассматриваются различные порядки коллективного благосостояния. Изучаются различные свойства этих порядков: независимость от нуля, независимость от масштаба, независимость от общей шкалы полезности, сепарабельность и сокращение неравенства. Проводится проверка различных ПКБ на соответствие указанным свойствам.

Утилитарный ПКБ обладает свойством независимости от нуля. Независимостью от масштаба обладает ПКБ Нэша. Эгалитарный и все диктаторские ПКБ обладают свойством независимости от общей шкалы полезности. Сепарабельностью обладают утилитарный, лексиминный ПКБ и ПКБ Нэша. Независимостью от общего нуля и от общего масштаба обладают все рассмотренные ПКБ.

Необходимо помнить, что при изменении любой из указанных характеристик (масштаба, шкалы и т.д.), решение для соответствующего ПКБ не изменяется. При этом может измениться вектор полезности. Для других ПКБ (зависимых от рассматриваемого свойства) решение может измениться, а может и остаться прежним.

Сокращение неравенства выделяет множество векторов полезности, оптимальных по Лоренсу. Для нахождения указанного множества векторов строятся кривые Лоренса, среди которых выбираются оптимальные по Парето. Полученное множество векторов всегда оптимально по Парето. Более того, любое разумное решение (эгалитарное, утилитарное и т.д.) будет выбирать вектор, оптимальный по Лоренсу.

Пример выполнения работы.

а) независимость от масштаба.

Функции полезности двух агентов определены следующим образом: $u_1(x) = 2x_1$, $u_2(x) = x_2$, причем $x_1 + x_2 = 1$.

Необходимо найти, каким образом распределить прибыль между агентами, если в качестве принципа оптимальности взять эгалитарное решение, и решение по Нэшу.

Как изменятся предложенные решения, если функцию полезности первого агента уменьшить в два раза?

1) эгалитарное решение.

$$2x_1 = x_2 \text{ или } 2x_1 = 1 - x_1 \Rightarrow x_1 = 1/3,\ \ x_2 = 2/3,$$

вектор полезности $(2/3,\ 2/3)$.

Если уменьшить функцию полезности первого агента в два раза, получаем: $x_1 = x_2 = 1/2$ – решение изменилось (эгалитарный ПКБ зависит от масштаба). Новый вектор полезности: $(1/2,\ 1/2)$.

2) решение по Нэшу.

$$2x_1 \cdot x_2 \to \max \Rightarrow 2x_1(1 - x_1) = 2x_1 - 2x_1^2 \to \max \text{, отсюда}$$

$$2 - 4x_1 = 0,\ \ x_1 = 0.5,\ \ x_2 = 0.5,$$

Вектор полезности $(1,\ 0.5)$.

После уменьшения функции первого агента

$x_1 \cdot x_2 \to \max \Rightarrow x_1(1 - x_1) = x_1 - x_1^2 \to \max$, отсюда – решение не изменилось (ПКБ Нэша не зависит от масштаба). Новый вектор полезности $(0.5,\ 0.5)$.

б) сокращение неравенства.

Дано следующее множество допустимых векторов полезности u:

$$(1, 3, 10), (4, 2, 5), (6, 1, 12), (5, 3, 3), (2, 5, 6), (7, 2, 2), (4, 10, 2).$$

Необходимо на этом множестве определить:

1) множество векторов, оптимальных по Лоренсу;
2) эгалитарное решение;
3) утилитарное решение.

Для нахождения оптимумов по Лоренсу упорядочим элементы векторов по возрастанию полезности (u^*) и построим кривые Лоренса ($L(u)$):

	u	u^*	$L(u)$
1.	$(1, 3, 10)$,	$(1, 3, 10)$,	$(1, 4, 14)$,
2.	$(4, 2, 5)$,	$(2, 4, 5)$,	$(2, 6, 11)$,
3.	$(6, 1, 12)$,	$(1, 6, 12)$,	$(1, 7, 19)$,
4.	$(5, 3, 3)$,	$(3, 3, 5)$,	$(3, 6, 11)$,
5.	$(2, 5, 6)$,	$(2, 5, 6)$,	$(2, 7, 13)$,
6.	$(7, 2, 2)$,	$(2, 2, 7)$,	$(2, 4, 11)$,
7.	$(4, 10, 2)$.	$(2, 4, 10)$.	$(2, 6, 16)$.

Первая, вторая и шестая кривые Лоренса доминируются по Парето седьмой кривой, поэтому множество векторов, оптимальных по Лоренсу, составляют: $(6, 1, 12), (5, 3, 3), (2, 5, 6), (4, 10, 2)$.

На этом множестве эгалитарным решением является вектор $(5, 3, 3)$, утилитарным – вектор $(6, 1, 12)$.

2.11 Лабораторная работа «Теория благосостояния. Эгалитаризм и утилитаризм»

В данной лабораторной работе необходимо решить две задачи коллективного благосостояния: задачу расположения объекта общего пользования на кольце и задачу расположения объекта на графе. В обоих случаях необходимо найти эгалитарное и утилитарное решение.

В качестве инструментального средства для выполнения лабораторной работы используется автоматизированная система «Теория благосостояния. Расположение объекта коллективного пользования».

Для решения задачи «Расположение объекта на кольце» выберите пункт меню «Задача/Кольцо». В выведенном окне введите сначала длину кольца согласно вашему варианту. В правой части окна будет нарисовано кольцо дороги. После этого вводите последовательно в поле «Точки/Новая» расстояния от нулевой отметки до городов. При вводе каждой точки города будут отображаться на кольце дороги.

После отображения всех городов введите в полях «Пробелы/Новый/с: по: » участок дороги, непригодный для строительства. При нажатии клавиши «Enter» введенный участок отобразится на кольце жирной линией.

После ввода всех данных нажмите кнопку «Векторы полезности». Вам будет предложен список всех возможных векторов полезностей (дискретность допустимых значений берется равной 0.5 километра). Вам необходимо пометить все невозможные вектора. Невозможными векторами являются те, которые расположены на участке дороги, непригодном для строительства. Границы этого участка являются допустимыми. Если вы правильно пометили нужные вектора, то следующим вам будет предложено расположить вектора полезности по убыванию эгалитарной функции полезности.

Примечание: в автоматизированной системе элементы векторов полезности всегда показываются положительными. Тем не менее, по смысловому содержанию, чем больше расстояние от объекта до города, тем меньше полезность. Поэтому, при сравнении векторов, худшим является вектор с максимальными значениями элементов!

После упорядочения векторов по убыванию эгалитарной функции полезности (первым должен располагаться вектор с наилучшей эгалитарной функцией, последним – с наихудшей) нажмите кнопку «Готово». Если вы правильно упорядочили вектора, в следующем окне вам будет предложено упорядочить вектора по убыванию утилитарной функции полезности.

Следующий этап – упорядочение векторов по убыванию в лексиминном порядке. Если вы провели все упорядочения верно, вам будет выдан график с указанием на нем эгалитарного и утилитарного решений. Если на каком-то этапе упорядочения вы ошиблись, система вернет вас на начало всех действий и весь процесс упорядочения векторов придется начинать сначала. *Совет:* учитывая возможность ошибки на каждом этапе, выписывайте себе упорядоченный список векторов (по номерам) каждый раз перед нажатием кнопки «Готово».

После получения графика запишите точки, которые соответствуют эгалитарному и утилитарному решению (им соответствуют вертикальные красные линии на графике). Для каждой точки запишите вектор полезности. Порядок элементов векторов полезности должен соответствовать городам по порядку: A, B, C, D, E. Если у вас получилось большое количество решений (больше трех) то можно записать вектора полезности только для некоторых из них. Для этого вам необходимо согласовать с преподавателем те точки, по которым будут записаны вектора полезности.

Внимание! На кольцевой дороге максимальное расстояние от объекта общего пользования до любого города не может превышать половину длины дороги (иначе от объекта до города можно добраться в другую сторону). Поэтому, если у вас какой-то элемент вектора полезности превысил половину длины кольца, то это значит, то вы неверно записали вектор.

Проверяйте полученные решения! В эгалитарном векторе полезности должно быть как минимум два максимальных по абсолютному значению элемента (в противном случае объект можно подвинуть к «беднейшему» городу и, тем самым, еще уравнять полезности). Исключение может составлять только эгалитарное решение, которое располагается на границе участка дороги, непригодного для строительства. Сумма элементов утилитарного вектора полезности (по модулю) должна быть не больше суммы элементов эгалитарного вектора. Если у вас несколько утилитарных решений, то во всех соответствующих векторах полезности должна быть одинаковая сумма элементов.

Для решения задачи «Расположение объекта на графе» выберите пункт меню «Задача/Граф». В выведенном окне введите сначала число вершин, которое соответствует числу городов в вашем варианте. После этого необходимо указать связи между городами и длину соответствующих дорог. Для этого выделите в левом и правом списке два города, между которыми есть дорога, в поле «Расстояние» укажите длину дороги и нажмите кнопку «Соединить». Соответствующая дорога отобразится на графике в правой части окна, а информация о длине дороги отобразится с поле «Связи». После ввода информации о всех дорогах в правой части окна будет отображена сеть дорог между городами. Для более удобного визуального анализа можно передвигать вершины графа (города) мышью. Расположите их таким образом, чтобы дороги не пересекались.

Нажмите кнопку «Векторы полезности». Система выдаст график, на котором будут отображены эгалитарная и утилитарная функции полезности для всей сети дорог. Используйте этот график для нахождения эгалитарного и утилитарного решений.

Эгалитарное решение определяется следующим образом: находятся два города, удаленные друг от друга на максимальное расстояние. На графике у этих городов должны быть максимальные функции полезности. Между этими двумя городами определяется кратчайший путь. Середина этого пути и является эгалитарным решением. На графике это решение является минимумом функции полезности и показывает, где примерно оно находится. Определите точную координату этого решения и запишите для него вектор полезности.

Утилитарное решение всегда находится в каком-то городе. Определите по графику город, в котором утилитарная функция полезности достигает минимума (мы по-прежнему ищем минимальное вместо максимального решения, так как учитываем, что расстояния должны указываться с отрицательным знаком). Выбранный город и будет являться утилитарным решением данной задачи: в этом городе наиболее удобно располагать объект общего пользования с точки зрения утилитаризма. Запишите для этого решения вектор полезности.

Примечание: для удобства можно изменять размер представленного графика, для этого в окне «решение задачи» в пункте меню «Размер» выберите наиболее удобное для вас представление.

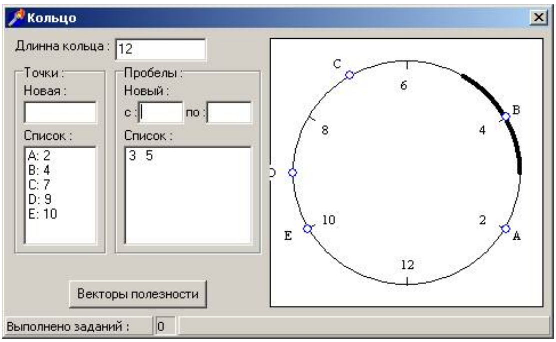
Не забывайте проверять полученные решения! Проверка проводится так же, как и в задаче расположения объектов на кольце.

Пример выполнения работы.

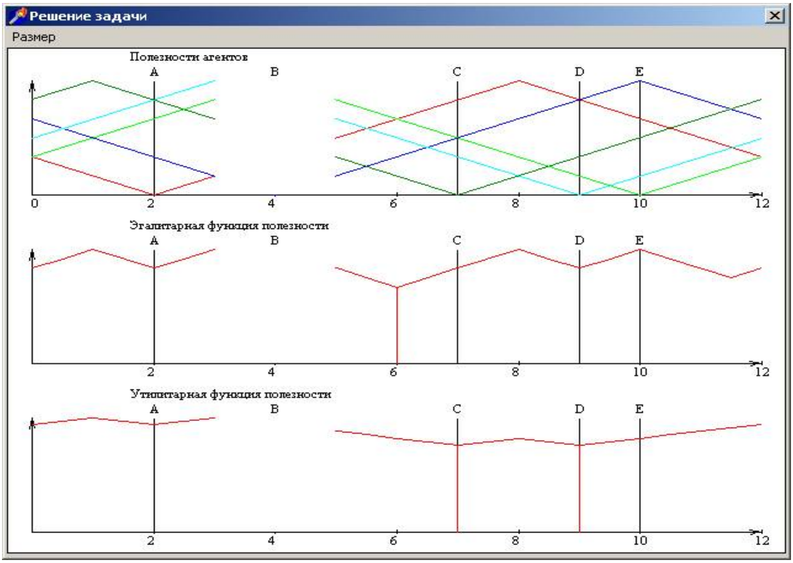
Расположение объекта на кольце.

Пять городов расположены на кольцевой дороге длиной 12 километров. Расстояние от нулевой отметки до городов: 2, 4, 7, 9 и 10. Участок дороги, непригодный для строительства расположен между 3 и 5 километрами.

После ввода всех данных получаем следующую картину:



После упорядочения всех векторов по эгалитарной, утилитарной функциям полезности и по лексиминному порядку получаем следующий график:



Мы видим из графика, что существует единственное эгалитарное решение, которое располагается в точке 6 (в шести километрах от нулевой отметки). Вектор полезности в этой точке:

(-4, -2, -1, -3, -4).

Заметим, что мы имеем два «беднейших» города (A и D), которые наиболее удалены от указанной точки.

С точки зрения утилитаризма существует два решения: расположить объект в городе C (точка 7) либо в городе D (точка 9). Вектора полезности:

объект в городе C (-5, -3, -0, -2, -3);

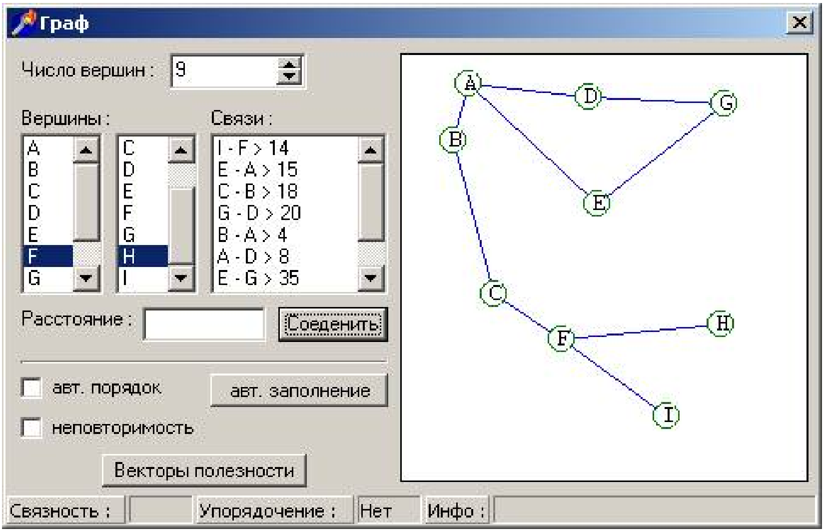
объект в городе D (-5, -5, -2, -0, -1).

Оба утилитарных вектора полезности имеют сумму элементов, равную -13, что больше (меньше по абсолютному значению) эгалитарного решения (сумма элементов эгалитарного вектора полезности равна -14).

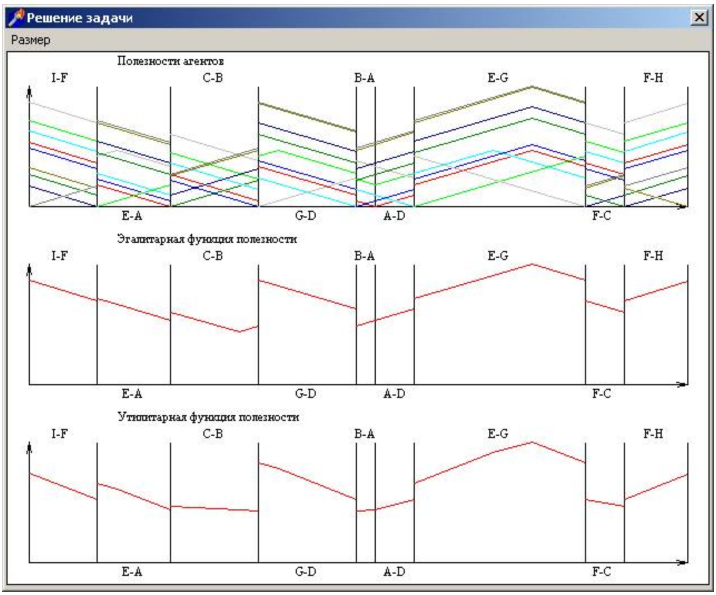
Расположение объекта на графе.

Девять городов соединены сетью дорог следующим образом: I-F=14, E-A=15, B-C=18, G-D=20, B-A=4, A-D=8, E-G=35, F-C=8, F-H=13.

Соединив города указанной сетью в системе, получим следующий граф:



Нажав кнопку «Векторы полезности» получим следующий график с решением задачи:



Из графика видно, что эгалитарное решение лежит где-то на участке C-B, причем ближе к городу B. Определим самые удаленные города: из графика видно, что это города I и G (они имеют максимальные полезности на графике эгалитарной функции). Кратчайший путь между этими городами составляет 72 километра, середина этого пути (по 36 километров от I и от G) находится на участке C-B, в 4-х километрах от города B. Вектор полезности в этой точке:

(-8, -4, -14, -16, -23, -22, -36, -35, -36).

Примечание: если вам сложно ориентироваться только по представленному графику, нарисуйте для себя граф дорог с указанием расстояний. По нарисованному графу иногда легче определять наиболее удаленные города, а также определять кратчайший путь между указанными городами.

Минимум утилитарной функции полезности, а, соответственно, и утилитарное решение, находится в городе B (на графике в точке B достигается минимум утилитарной функции полезности). Полезности городов, если расположить объект в этой точке, будут определяться следующим вектором:

(-4, -0, -18, -12, -19, -26, -32, -39, -40).

Задание на моделирование.

А. *Задача расположения объекта на кольце.*

Пять городов A, B, C, D, E соединены вместе кольцевой дорогой. Для каждого города задано расстояние от него до нулевой отметки. Необходимо расположить на дороге новый объект общего пользования, оптимально с точки зрения эгалитаризма и утилитаризма. Для этого необходимо:

1) разместить города на кольцевой дороге;

2) расположить вектора по убыванию эгалитарной функции полезности;

3) расположить вектора по убыванию утилитарной функции полезности;

4) расположить вектора в лексиминном порядке;

5) определить с помощью полученного графика эгалитарное и утилитарные решения, указав соответствующие точки на кольце. Записать вектора полезности для найденных точек.

B. *Задача расположения объекта на графе.*

Несколько городов соединены сетью дорог. Заданы длины дорог между городами. Необходимо расположить на сети новый объект общего пользования, оптимально с точки зрения эгалитаризма и утилитаризма. Для этого необходимо:

1) соединить города сетью дорог;

2) получить графики утилитарной и эгалитарной функций полезности;

3) с помощью графиков определить оптимальное размещение объекта на графе по обоим рассматриваемым критериям, записать вектора полезности для найденных решений.

Примечание: в автоматизированной системе элементы векторов полезности всегда показываются положительными. Тем не менее, по смысловому содержанию, чем больше расстояние от объекта до города, тем меньше полезность. Поэтому, при сравнении векторов, худшим является вектор с максимальными значениями элементов!

Варианты заданий.

А. Расположение объекта на кольце.

№ варианта	**Длина кольцевой дороги**	**Расстояние от нулевой отметки до города**					**Участок дороги, непригодный для строительства**
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	
1	21	2	5	12	14	18	18-21
2	19	0	6	7	10	11	5-9
3	24	1	3	4	8	15	3-5, 15-18
4	20	2	7	9	14	17	8-11
5	25	2	6	10	20	23	0-4
6	26	4	8	12	20	22	19-23
7	18	2	4	10	12	17	15-18
8	27	5	8	13	15	24	20-25
9	24	2	7	11	17	21	1-4

10	20	0	8	10	16	19	15-17
11	21	1	3	11	18	19	17-20
12	22	5	6	7	18	20	0-3
13	23	3	5	10	20	21	1-8
14	26	4	8	12	15	24	4-8
15	24	1	9	10	18	20	15-21
16	20	3	4	8	14	20	1-5
17	25	2	8	10	12	21	13-19

B. Расположение объекта на графе.

№ варианта	**Число городов**	**Длина дорог между городами**
1	7	G-B=3, G-A=8, C-G=4, F-C=11, B-A=3, C-A=2, E-B=19, C-D=3
2	7	C-F=16, G-A=1, B-E=5, A-C=13, E-A=8, G-F=2, F-E=5, B-G=3, C-E=12, D-C=6
3	7	F-E=17, E-D=4, F-D=8, B-E=11, D-G=20, F-G=9, G-A=6, A-C=5
4	8	H-D=20, C-G=10, G-D=8, B-G=19, D-E=9, F-H=19, D-C=8, F-C=41, F-B=20, A-B=12
5	7	B-D=1, F-E=8, G-C=8, A-F=19, F-D=10, E-B=5, A-E=23, A-G=2
6	8	E-G=4, F-B=2, F-C=18, E-C=5, B-A=1, D-F=19, E-D=11, C-B=18, G-C=7, H-D=19
7	9	F-A=19, I-G=13, I-D=18, A-G=20, E-I=14, H-A=6, I-A=9, B-G=20, D-E=17, I-B=15, C-E=6
8	7	C-G=2, G-A=16, E-B=6, A-B=9, A-E=1, E-C=4, F-C=2, F-D=16
9	7	A-C=16, D-G=11, D-E=9, E-G=18, G-C=19, F-E=20, E-A=31, A-G=29, B-C=8
10	9	A-B=1, B-F=18, C-E=6, B-D=11, F-C=8, F-D=15, F-G=4, E-G=9, H-A=4, A-D=5, E-I=6
11	7	B-E=7, G-C=11, E-F=1, B-C=15, D-E=8, G-E=16, C-A=10
12	8	H-C=21, E-F=13, F-A=13, E-C=19, H-B=14, G-B=14, D-B=7, D-F=4, F-B=9, C-F=2

13	7	C-G=1, C-D=9, G-B=17, A-F=17, G-A=17, G-D=2, B-F=20, A-E=1
14	7	B-F=16, A-D=10, C-B=2, D-F=16, B-A=18, F-A=2, E-B=10, D-C=16, C-F=1, F-G=1
15	7	D-A=11, F-E=5, D-G=16, F-C=1, D-F=2, A-E=4, G-F=1, A-G=1, C-G=1, D-C=16
16	9	B-F=11, D-B=20, G-H=9, C-H=9, F-G=8, G-E=1, G-I=17, G-B=11, B-I=27, H-D=24, F-C=4, I-E=14, G-D=22, D-A=14
17	7	F-G=14, E-F=10, F-B=13, D-F=9, G-B=7, G-E=2, E-D=18, E-B=8, A-F=7, B-D=2, D-G=7, C-D=20

2.12 Лабораторная работа «Представление кооперативных игр. Дележи»

На данной лабораторной работе рассматривается представление игр в форме характеристической функции. Если игра задана в нормальной форме, то переход к форме характеристической функции осуществляется путем решения ряда антагонистических игр, в которых в качестве первого (максимизирующего) игрока выступает коалиция, чью характеристическую функцию мы находим, а в качестве второго (минимизирующего) игрока выступают все остальные игроки.

Если дано словесное описание игры, то каждый раз необходимо внимательно изучить условия проведения игры, а затем попытаться сформулировать, каким образом должны определяться выигрыши игроков и коалиций. Только после этого проводится построение характеристической функции игры.

Следующий класс задач, рассматриваемый на данном практическом занятии – изучение понятия дележа, доминирования дележей, определения принадлежности дележей С-ядру игры.

Помните, что в любом дележе должна выполняться индивидуальная разумность: каждый игрок должен получать не меньше, чем он может заработать сам по себе. Кроме того, суммарный выигрыш игроков в каждом дележе не может превышать выигрыш максимальной коалиции (в лучшем случае он должен равняться этому выигрышу).

При рассмотрении доминирования одного дележа другим необходимо обращать внимание на следующие моменты. Во-первых, доминирование невозможно по коалиции из одного игрока и по максимальной коалиции. Следовательно, проверки на доминирование надо проводить только по промежуточным коалициям (для игр трех лиц – только по двойным). Во-вторых, проверка первого условия доминирования проводится по каждому игроку коалиции в отдельности. В-третьих, не забывайте проверять второе условие доминирования: доминирование возможно только в том случае, если рассматриваемая коалиция может обеспечить свой выигрыш.

Пример выполнения работы.

а) представление кооперативной игры в форме характеристической функции.

Рассматривается коллективный объект (система водоснабжения), обслуживающий четырех потребителей. Структура затрат считается симметричной:

затраты на обслуживание	один потребитель:	40
	два потребителя:	60
	три потребителя:	70
	все четыре потребителя:	80

Доходы агентов от использования объектов таковы:

$b_1 = 41,\ b_2 = 24,\ b_3 = 22,\ b_4 = 12.$

Известно, что потребитель i соглашается на покупку объекта тогда и только тогда, когда он должен заплатить не больше b_i, при этом ему безразлично, какое потребление объекта соответствует агенту j.

Необходимо построить характеристическую функцию игры.

При обслуживании коалиции S потребители из S получают прибыль $\sum\limits_{i \in S} b_i - c(S)$, где $c(S)$ – затраты коалиции на обслуживание объекта. Следовательно, максимально возможная прибыль для данной коалиции есть наибольшая прибыль по всем ее подкоалициям, включая нулевую прибыль, когда никто не обслуживается. Тогда характеристическая функция коалиции будет определяться как:

$$v(S) = \max_{T \subset S} \left\{ \sum_{i \in T} b_i - c(T), 0 \right\}.$$

В нашем случае:

$v(1)=1,\ v(2)=v(2)=v(3)=0,$

$v(12)=5,\ v(13)=3,\ v(14)=1,\ v(23)=v(24)=v(34)=0$,

$v(123)=17,\ v(124)=7,\ v(134)=5,\ v(234)=0$,

$v(N)=19$.

б) доминирование дележей.

Возьмем характеристическую функцию рассмотренной выше кооперативной игры четырех лиц. Запишем произвольно пять следующих дележей для данной игры:

$$X=(3,3,3,10),\ Y=(4,13,1,1),\ Z=(5,5,5,4),$$
$$V=(4.5,12,1.25,1.25),\ W=(6,6,7,0).$$

Определить, есть ли доминирование на данном множестве дележей. Какие из приведенных дележей принадлежат С-ядру игры?

Доминирование по одиночной коалиции невозможно.

В данном случае нет доминирования ни по одной двойной коалиции, так как нигде не выполняется второе условие доминирования (любая двойная коалиция в предложенном списке дележей получает больше, чем она может заработать сама по себе).

По тройным коалициям существует единственное доминирование: $Z \succ_{\{1,2,3\}} X$, так как 1, 2 и 3 игроки в дележе Z получают больше, чем в дележе X (первое условие доминирования), и $v(123)=17>\sum\limits_{i\in\{1,2,3\}} z_i=15$ (второе условие доминирования).

Теперь рассмотрим принадлежность перечисленных дележей С-ядру игры.

Дележи X и Z не принадлежат С-ядру игры, так как не выполняется принцип отделения по следующим коалициям:

$$\sum_{i\in\{1,2,3\}} x_i=9<17\,,\quad \sum_{i\in\{1,2,3\}} z_i=15<17\,.$$

Дележи Y, V и W принадлежат C-ядру, так как для них принцип отделения выполняется по всем промежуточным коалициям. Рассмотрим выполнение указанных условий на примере дележа Y:

$$y_1 + y_2 = 17 > 5,\ y_1 + y_3 = 5 > 3,\ y_1 + y_4 = 5 > 1,$$
$$y_2 + y_3 = 14 > 0,\ y_2 + y_4 = 14 > 0,\ y_3 + y_4 = 2 > 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 18 > 17,\ y_1 + y_2 + y_4 = 18 > 7,$$
$$y_1 + y_3 + y_4 = 6 > 5,\ y_2 + y_3 + y_4 = 15 > 0.$$

2.13 Лабораторная работа «Значение кооперативных игр»

В данной лабораторной работе рассматриваются задачи, связанные с решением кооперативных игр.

В качестве решения кооперативных игр могут выступать: C-ядро, вектор Шепли и N-ядро. В случае если игра не имеет C-ядра, решением могут служить вектор Шепли и N-ядро.

После представления игры в форме характеристической функции необходимо определить C-ядро игры (если оно существует). Будьте внимательны при переходе к вспомогательным переменным, а также при построении ограничений внутри симплекс-треугольника. Не забывайте провести обратные преобразования от вспомогательных переменных к основным. После нахождения C-ядра игры проверяйте правильность решения! Для этого проверьте найденные точки на принадлежность дележей C-ядру игры. Если C-ядро найдено верно, то должны выполняться следующие условия: во-первых, все найденные дележи должны принадлежать C-ядру: каждый игрок и каждая промежуточная коалиция должны получать не меньше, чем могут заработать сами по себе. Во-вторых, в каждом найденном дележе выигрыш хотя бы одной двойной коалиции должен равняться ее характеристической функции.

Вектор Шепли достаточно просто находится по формуле, заданной в определении вектора. Для игры трех лиц N-ядро проще всего найти как центр C-ядра. Помните, что C-ядро игры представлено точками в трехмерном пространстве, поэтому для правильного нахождения его центра каждое из ограничений должно учитываться два раза. Если C-ядра не существует, то N-ядро является центром «анти» C-ядра (области, в которой не выполняется ни одно из ограничений двойных коалиций).

N-ядро игры определяется как центр C-ядра. Помните, что C-ядро игры представлено точками в трехмерном пространстве, поэтому для правильного нахождения его центра каждое из ограничений должно учитываться два раза. Если игра не имеет С-ядра, то N -ядро находится как центр «анти-» С-ядра (центр области, в которой не выполняется ни одно из ограничений). «Анти» С-ядро также находится из симплекс-треугольника.

Для игр, в которых участвует больше трех игроков, N-ядро находится через вектор сверхдоходов коалиций (вектор эксцессов). Здесь необходимо записать вектор эксцессов в общем виде, а затем искать решение по максиминному критерию.

Пример выполнения работы.

а) нахождение С-ядра игры.

Дана игра трех лиц в форме характеристической функции:

$$V_x = 2.5; V_y = 1; V_z = 4; V_{xy} = 17; V_{xz} = 21; V_{yz} = 18; V_{xyz} = 30 \ .$$

Для того, чтобы определить, имеет ли игра С-ядро, проверим выполнение пяти условий:

$$V_x + V_y + V_z \le V_{xyz} \quad : \ 2.5+1+4<30;$$

$$V_x + V_{yz} \le V_{xyz} \quad : \ 2.5+18<30;$$

$$V_y + V_{xz} \le V_{xyz} \quad : \ 1+21<30;$$

$$V_z + V_{xy} \le V_{xyz} \quad : \ 4+7<30;$$

$$\frac{1}{2}\left(V_{xy} + V_{xz} + V_{yz}\right) \le V_{xyz} \quad : \ \frac{1}{2}\left(17+21+18\right) < 30.$$

Все условия выполняются, следовательно, игра имеет С-ядро. Для нахождения С-ядра рассмотрим ограничения:

$$x + y + z = 30$$
$$x + y \ge 17$$
$$x + z \ge 21$$
$$y + z \ge 18$$
$$x \ge 2.5$$
$$y \ge 1$$

$z \geq 4$.

Для удобства расчетов перейдем к новым переменным: $a = x - 2{,}5;\ b = y - 1;\ c = z - 4$. Тогда система ограничений примет следующий вид:

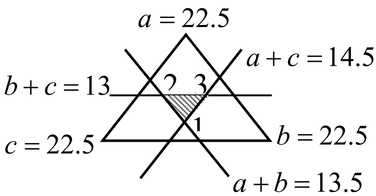
$$a + b + c = 22.5$$

$$a + b \geq 13.5$$

$$a + c \geq 14.5$$

$$b + c \geq 13 .$$

Здесь ядро игры является треугольником (заштрихованная область на рисунке):



Определим координаты вершин треугольника. Вершина 1 является пересечением прямых $a + c = 14.5$ и $a + b = 13.5$. Получаем систему уравнений

$$a + b + c = 22.5$$

$$a + b = 13.5$$

$$a + c = 14.5.$$

Отсюда $a = 5.5, b = 8, c = 9$.

Вершина 2 является пересечением прямых $b + c = 13$ и $a + b = 13.5$. Решая систему уравнений получаем точку (9.5; 4; 9).

Вершина 3 является пересечением прямых $b + c = 13$ и $a + c = 14.5$. Решая систему уравнений получаем точку (19.5; 8; 5).

Переходим к переменным x, y, z и получаем С-ядро игры, которое описывается тремя граничными точками:

(8, 9, 13),

(12, 5, 13),

(12, 9, 9).

Определим N -ядро игры, как центр с-ядра:

$$x: \quad \frac{1}{3}(8+12+12)=10\frac{2}{3};$$

$$y: \quad \frac{1}{3}(9+5+9)=7\frac{2}{3};$$

$$z: \quad \frac{1}{3}(13+13+9)=11\frac{2}{3}.$$

Теперь вычислим вектор Шепли:

$$\sigma_x=\frac{1}{3}(2.5-0)+\frac{1}{6}\left((17-1)+(21-4)\right)+\frac{1}{3}(30-18)=10\frac{1}{3};$$

$$\sigma_y=\frac{1}{3}(1-0)+\frac{1}{6}\left((17-2.5)+(18-4)\right)+\frac{1}{3}(30-21)=8\frac{1}{12};$$

$$\sigma_z=\frac{1}{3}(4-0)+\frac{1}{6}\left((21-2.5)+(18-1)\right)+\frac{1}{3}(30-17)=11\frac{7}{12}.$$

б) нахождение вектора Шепли и N-ядра.

Рассмотрим следующую кооперативную игру: в игре участвуют 4 игрока. У двух игроков есть по 2 левые перчатки, у двух остальных – по 2 правых перчатки. Одни левые (или одни правые) перчатки не стоят ничего. Пара перчаток (левая и правая) стоят 300 рублей.

Определить, какую сумму могут заработать игроки, как им лучше объединяться, и каким образом распределить общий выигрыш.

Определим первоначально характеристическую функцию игры. В качестве характеристической функции отдельной коалиции будем рассматривать сумму, которую может заработать коалиция от образовавшихся пар перчаток. Пусть левые перчатки принадлежат игрокам 1 и 2, а правые – игрокам 3 и 4. Тогда:

$$v(1)=0, v(2)=0, v(3)=0, v(4)=0,$$

$$v(12)=v(34)=0, v(13)=v(14)=v(23)=v(24)=600,$$

$$v(123)=v(124)=v(134)=v(234)=600,$$

$$v(N)=1200 .$$

Следовательно, объединившись в максимальную коалицию, игроки могут заработать 1200 рублей. Остается определить, как им распределить данную сумму. Для ответа на этот вопрос найдем сначала вектор Шепли. Принимая во внимание, что с точки зрения игры 1 и 2 игрок ничем ни различаются (также как 2 и 3), то достаточно будет найти долю первого и третьего игроков.

$$\delta_1=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{12}((0-0)+(600-0)+(600-0))+\frac{1}{12}((600-600)+$$
$$+(600-600)+(600-0))+\frac{1}{4}(1200-600)=300,$$

$$\delta_3=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{12}((0-0)+(600-0)+(600-0))+\frac{1}{12}((600-600)+$$
$$+(600-600)+(600-0))+\frac{1}{4}(1200-600)=300.$$

Вектор Шепли: $\delta=(300, 300, 300, 300)$.

Проверим, принадлежит ли найденный вектор Шепли С-ядру (проверку проводим только по промежуточным коалициям).

$$\delta_1+\delta_2=600 \ > \ v(12)=0 ,$$

$$\delta_3+\delta_4=600 \ > \ v(34)=0 ,$$

$$\delta_1+\delta_3=\delta_1+\delta_4=600 \ = \ v(13)=v(14)=600 ,$$

$$\delta_2+\delta_3=\delta_2+\delta_4=600 \ = \ v(23)=v(24)=600 ,$$

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3=\delta_1+\delta_2+\delta_4=900 \ > \ v(123)=v(124)=600 ,$$

$$\delta_1+\delta_3+\delta_4=\delta_2+\delta_3+\delta_4=900 \ > \ v(134)=v(234)=600 .$$

Все ограничения выполняются, следовательно, вектор Шепли принадлежит С-ядру.

Для нахождения N-ядра введем некоторые обозначения. Пусть первый и второй игроки (одинаковые с точки зрения игры) получают выигрыши, равные a, а третий и четвертый – выигрыши, равные b. Тогда должны выполняться следующие условия:

$$2a + 2b = 1200, \quad a + b = 600, \quad 0 \le a \le 600, \quad 0 \le b \le 600 .$$

Запишем в общем виде вектор эксцессов. Порядок сверхдоходов, записанных в векторе будет соответствовать следующему порядку коалиций (коалиции, взятые в скобки, имеют одинаковые сверхдоходы и в векторе эксцессов представлены одним выражением):

$$(1,2), (3,4), 12,\ 34, (13,14,23,24), (123,124), (134,234),$$
$$e(x) = (a, b, 2a, 2b, a+b-600, 2a+b-600, a+2b-600).$$

N-ядро будем находить из максиминного критерия:

$$\max_{0 \le a \le 600} \min \{a, b, 2a, 2b, a+b-600, 2a+b-600, a+2b-600\}.$$

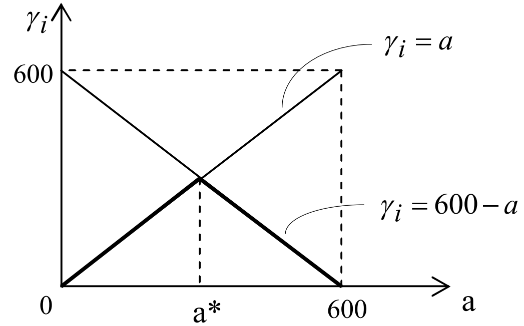
Исключим элементы, заведомо не являющиеся минимальными:

$$\max_{0 \le a \le 600} \min \{a, b, a+b-600\}.$$

Исключим одну из переменных: $a + b = 600 \quad \Rightarrow \quad b = 600 - a$

$$\max_{0 \le a \le 600} \min \{a, 600-a, 0\}.$$

Максимум из всех минимумов достигается в точке a^*, указанной на рисунке:



Тогда $a = 600 - a \quad \Rightarrow \quad a^* = 300$.

Получили N-ядро: $\gamma = (300, 300, 300, 300)$.

В данном случае оба найденных нами решения – вектор Шепли и N-ядро совпали. Можно сделать следующие выводы: в данной задаче единственным разумным решением будет разделить весь выигрыш поровну между игроками.

2.14 Лабораторная работа «Принятие решений в конфликтных ситуациях»

В качестве инструментального средства для выполнения лабораторной работы используется автоматизированная система «Моделирование конфликтных ситуаций».

В работе рассматривается две задачи: антагонистическая игра и некооперативная игра.

Решение антагонистической игры.

Антагонистической игрой называется игра двух лиц, в которой интересы игроков прямо противоположны: все, что выигрывает один игрок, проигрывает другой, и наоборот. Для описания такой игры достаточно указать стратегии обоих игроков и функцию выигрыша первого игрока в виде платежной матрицы.

Первоначально, до работы с системой, необходимо представить игру в нормальной форме. Для этого внимательно прочитайте описание игры, определите количество чистых стратегий для каждого игрока. Помните, что любая чистая стратегия – это правило, определяющее поведение игрока от начала до конца игры. Особенно внимательно определяйте стратегии в многоходовых играх.

После того, как стратегии определены, строится платежная матрица игры. В качестве элементов платежной матрицы выступают выигрыши первого игрока (проигрыши второго). Если в какой-то ситуации выигрывает первый игрок, то соответствующий элемент матрицы положителен, если второй – то соответствующий элемент матрицы отрицателен. После того, как матрица построена, она вводится через опцию меню «Ввод данных». Если выигрыши первого игрока можно записать в виде функции выигрыша (либо функция выигрыша сразу определена в варианте), то платежная матрица вводится формулой.

При вводе формулы нужно помнить следующее:

1) обязательно введите выражение “F(x)=”, либо просто не стирайте его с экрана. Примечание: не вводите “F(x,y)=”! Конечно, функция зависит от двух аргументов (стратегий первого и второго игроков) но в шаблоне распознавателя формул левая часть уравнения выглядит именно так, как она записана на экране по умолчанию;

2) все правое выражение заключается в скобки, все символы вводятся большими буквами; умножение обозначается через символ ‘*’, деление – через символ ‘/’, возведение в степень – через символ ‘^’, например, формула $(-1)^{x+y}(x+y)$ должна быть введена следующим образом:

F(x)=((-1)^(X+Y)*(X+Y));

3) под название встроенных функций отводится четыре позиции. Если функция обозначается тремя буквами, то четвертая позиция определяется пробелом, например:

F(x)=(SIN (X+Y))

4) обращайте особое внимание на расстановку скобок в сложных функциях: скобки определяют приоритеты операций по стандартной схеме приоритетов.

Введенные вами данные записываются в файл с именем “Dannie.txt” (если они введены матрицей) или в файл “Danform.txt” (если они введены формулой).

Введенная вами платежная матрица может быть при необходимости сокращена, если вы воспользуетесь пунктом меню «Размерность».

Внимание! Если вы сокращаете матрицу, обратите внимание на то, какие именно столбцы и строки будут сокращены. В окончательном варианте представления решения оптимальные стратегии должны быть даны для исходной (несокращенной матрицы)!

Пункт меню «Методы» позволит вам выбрать нужный метод для решения поставленной задачи. Решение может быть произведено одним из трех методов: аналитическим, итерационным, методом линейного программирования (симплекс-метод).

Аналитический метод. Для решения задачи данным методом платежная матрица должна иметь размерность 2х2. В случае, когда размерность матрицы больше, чем два на два, система предупреждает о некорректном вводе данных. Если введенную матрицу нельзя сократить до минимального размера, то расчеты все равно проводятся, в расчетах принимают участие первые четыре элемента матрицы. Внимание! В случае размерности матрицы больше, чем 2x2, результат получается абсолютно неверным! Не пользуйтесь аналитическим методом, если его применение невозможно!

Результат вычислений аналитическим методом записывается в файл “2x2.txt”. В системе результат решения можно просмотреть, выбрав опцию меню «Результат/Результат аналитического».

Метод итераций. Для решения задачи методом итераций пользователь должен ввести либо точность вычисления, либо количество итераций. Максимальное количество итераций, которое позволяет провести система, равно 999. Для игр с плохой сходимостью на таком количестве итераций заданная точность может быть не достигнута. Поэтому необходимо:

1) определить требуемую точность вычислений и решить задачу методом итераций;

2) если требуемая точность не достигнута, исследовать игру на сходимость: получить решение для разного количества итераций (например, для 50, 100, 200, 500, 999) и посмотреть, насколько изменяются результаты решения при различном количестве итераций.

После окончания работы метода итераций на экран выводятся краткие результаты вычислений (оптимальные стратегии игроков). Полностью вся полученная информация помещается в файл “iter.txt” (для заданного количества итераций) либо в файл “iter_toc.txt” (при заданной точности). В системе полную информацию с результатами решений можно посмотреть, выбрав опцию меню «Результат/Результат итеративного».

Метод линейного программирования (симплекс-метод). При выборе опции меню «Методы/Симплекс» ваша задача будет решаться двухэтапным симплекс-методом. После окончания работы метода на экран выдается сообщение об успешном завершении вычислений. Результаты расчетов по симплекс-методу размещаются в файле “simpl.txt”. В системе полную информацию можно посмотреть, выбрав опцию меню «Результат/Результат симплекс».

Внимание! Окончательное решение симплекс-метода содержит оптимальные планы, а не оптимальные стратегии игроков. Чтобы получить окончательное решение необходимо:

1) из окончательной симплекс-таблицы выбрать оптимальные стра-

тегии игроков. Здесь задача решается для второго игрока, поэтому оптимальный план первого игрока определяется по дополнительным переменным из строки целевой функции, а оптимальный план второго игрока определяется по значениям основных переменных в базисе. Будьте внимательны! При выборе значений основных переменных обращайте внимание на базис, который определяет порядок их расположения в таблице. Если какая-либо основная переменная в базисе отсутствует, значит ее значение равно нулю;

2) определить цену игры, как обратное значение целевой функции (-Z);

3) перейти от оптимальных планов к оптимальным стратегиям. Для этого необходимо умножить эти планы на цену игры;

4) откорректировать при необходимости цену игры: в связи с тем, что для решения игры симплекс-методом, исходная матрица делается положительной, то и цена игры выдается увеличенной на соответствующее число. В результатах решения указывается число, на которое была увеличена цена игры.

После проведения расчетов всеми указанными методами необходимо провести сравнительный анализ результатов. Прежде всего, определите, одинаковы ли оптимальные стратегии, полученные симплекс-методом и методом итераций. Различие между полученными стратегиями может быть:

а) незначительное, вызванное тем, что итерационный метод выдает решение лишь с какой-то точностью;

б) принципиальное, когда два метода дают абсолютно разные оптимальные стратегии.

Проанализируйте, какая ситуация сложилась в вашем случае. Если два решения принципиально различны, то ответьте на вопрос: какое из полученных решений удобнее применять на практике. Какое из решений лучше с точки зрения каждого игрока? Обоснуйте ваши рекомендации.

Решение некооперативной игры.

Рассматривается некооперативная игра двух лиц. В некооперативных играх, в отличие от антагонистических, интересы игроков не прямо противоположны, они могут пересекаться, частично совпадать. Здесь игроки одновременно могут быть в выигрыше или проигрыше. В связи с этим для каждого игрока должна быть определена своя функция выигрыша. При участии в игре только двух игроков функции выигрыша могут быть заданы в виде матриц.

Для построения матриц выигрышей сначала определите чистые стратегии игроков, а затем уже записывайте матрицы.

В качестве решения вы должны определить оптимальные стратегии игроков и их гарантированные выигрыши. Кроме того, необходимо найти точку status quo.

В связи с тем, что равновесная ситуация (точка Нэша) не всегда определяется однозначно, а кроме того, существуют сложности с ее нахождением, примем в качестве принципа оптимальности защитные стратегии игроков. Для нахождения защитных стратегий и гарантированных выигрышей игроков воспользуйтесь автоматизированной системой «Моделирование конфликтных ситуаций». Можно воспользоваться только симплекс-методом: он дает точное решение, в отличие от итеративного, и может быть использован для матриц любой размерности, в отличие от аналитического.

Внимание! Система «Моделирование конфликтных ситуаций» рассчитана на решение антагонистических игр. Поэтому здесь стратегии максимизирующего игрока (для которого элементы матрицы являются выигрышами) всегда расположены по строкам. Учитывайте это при построении матрицы выигрыша для второго игрока. В результате решения игры по каждой матрице мы получаем по две оптимальные стратегии (всего четыре). Нам же в результате необходимы только две из них. Внимательно определяйте, какую из двух оптимальных стратегий по каждой матрице вам необходимо выбрать. Для каждого из игроков оптимальная стратегия определяется по его матрице выигрыша. Если при построении матрицы выигрыша для второго игрока вы расположили его стратегии по строкам, то его оптимальная стратегия определяется также, как и для первого – по дополнительным переменным из целевой функции.

Цены двух игр являются гарантированными выигрышами игроков. Не забывайте корректировать цены, если в матрицах выигрышей присутствуют отрицательные элементы.

Принимая во внимание, что при использовании защитных стратегий обоими игроками, выигрыши игроков могут увеличиться по сравнению с гарантированным выигрышем, необходимо определить точку status quo. Для двух игроков эта точка представляет собой вектор из двух элементов, значения которых соответствуют выигрышам игроков, если они оба применяют свои защитные стратегии.

По результатам всех проведенных вычислений необходимо провести анализ полученного решения.

Пример выполнения работы.

Постановка задачи антагонистической игры.

У каждого из игроков по две монеты, достоинством 1 рубль и 2 рубля. Оба одновременно выкладывают по одной из них на стол. Если достоинство монет совпадает, то выложенные деньги забирает первый игрок, если нет – то второй.

Построение модели.

Построим модель в нормальной (матричной) форме. Обозначим стратегии:

a1 – первый игрок выложил 1 рубль;

a2 – первый игрок выложил 2 рубля;

b1 – второй игрок выложил 1 рубль;

b2 – второй игрок выложил 2 рубля.

Если полезность исхода считать равной величине выигрыша (а это может быть и не так, может быть кому-то нравится сам процесс игры, а выигрыш его не волнует), то матрицы полезности будут равны:

$$\text{A}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \text{B}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Принимая во внимание, что мы рассматриваем антагонистическую игру, в которой выигрыш первого игрока является проигрышем второго, в качестве платежной матрицы выбираем матрицу полезности первого игрока.

Смешанные стратегии определяются здесь как $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$. Цена игры определяется по формуле:

$$V=\sum_{i,j} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j \ .$$

Решая задачу итеративным методом, нам необходимо вычислить эмпирические смешанные стратегии игроков и цену игры:

$$S_1=(p_1,...,p_m), \quad S_2=(g_1,...,g_n),$$

где S_i – эмпирическая смешанная стратегия i -го игрока;

p_i, g_j – относительная частота применения i -го и j -го хода, соответственно, первого и второго игроков.

$$V = (v_н + v_в)/2,$$

где $v_н$ – минимально накопленный выигрыш, разделенный на число партий;

$v_в$ – максимально накопленный выигрыш, разделенный на число партий.

Решая задачу аналитическим методом, получим:

$$X = (0.667{,}0.333), \quad Y = (0.500{,}0.500), \quad V = 0.000.$$

Решая задачу итеративным методом (число итераций 100), получим: $S_1 = (0.670{,}0.330)$, $S_2 = (0.500{,}0.500)$, $V = 0.000$.

Решая задачу симплекс-методом, получаем следующие оптимальные планы игроков и значение целевой функции:

$$U^* = (0.333{,}0.167), \quad W^* = (0.25{,}0.25), \quad -Z = 0.5,$$

Кроме этого, указывается, что цена игры увеличена на 2, $V^* = 2$.

Переходим к смешанным стратегиям игроков:

$$X = (0.667{,}0.333), \quad Y = (0.5{,}0.5), \quad V = V^* - 2 = 0.$$

Все три метода дают одинаковое единственное решение.

Постановка задачи некооперативной игры.

Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут остаться дома и смотреть по телевизору футбольный матч, а могут пойти в театр. Причем муж больше заинтересован остаться дома, и от этого он получает удовлетворение, равное 3, а жена – 1. При посещении театра они получают, соответственно, 2 и 3. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по –1. Будем считать, что никакой сговор между ними невозможен.

Построение модели.

Так как это игра 2-х лиц, то мы можем представить ее в матричной форме, задав две матрицы выигрыша:

$$J_M = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad J_{Ж} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для нахождения решения воспользуемся симплекс-методом. Решая задачу по первой матрице (выигрыш мужа), получаем следующие оптимальные планы игроков и значение целевой функции:

$$U^* = (0.25, 0.333), \quad W^* = (0.25, 0.333), \quad -Z = 0.5833.$$

Кроме этого, указывается, что цена игры увеличена на 1, $V^* = 1.7143$.

Нас интересует оптимальный план только первого игрока (мужа) и его гарантированный выигрыш, получаем:

$$X = (0.429, 0.571), \quad V = V^* - 1 = 0.7143.$$

Для того, чтобы найти оптимальную стратегию жены, воспользуемся тем же симплекс-методом. Так как в системе все методы предназначены для нахождения решения в антагонистических играх, то стратегии максимизирующего игрока (для которого элементы матрицы являются выигрышами) всегда расположены по строкам. Транспонируем матрицу выигрыша жены (в нашем случае получим такую же) и находим оптимальные планы:

$$U^* = (0.5, 0.25), \quad W^* = (0.5, 0.25), \quad -Z = 0.75.$$

При этом цена игры увеличена на 1, $V^* = 1.33333$.

Нас опять интересует план только первого игрока (стратегии жены расположены по строкам) и его гарантированный выигрыш:

$$Y = (2/3, 1/3), \quad U = V^* - 1 = 0.3333.$$

Для окончательного решения нам необходимо найти точку status quo и сравнить ее с гарантированными выигрышами игроков.

$$v = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot J_м(x_i, y_j) = 0.715\,,$$

$$u = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot J_{ж}(x_i, y_j) = 0.333\,.$$

Мы получили оптимальные стратегии игроков $X = (0.429{,}0.571)$, $Y = (2/3{,}1/3)$, используя которые они получат (точка status quo): $(u, v) = (0.715{,}0.3333)$.

В данном случае точка status quo совпала с гарантированными выигрышами игроков (различие по первому игроку, судя по всему, вызвано погрешностями вычислений).

Задание на моделирование.

1. В каждом варианте даны две задачи. В первой задаче описана антагонистическая игра. Во второй задаче рассматривается некооперативная игра.

2. Решение антагонистической игры.

2.1. Необходимо представить игру в нормальной форме: описать чистые стратегии игроков и записать матрицу полезности.

2.2. Решить игру методом линейного программирования.

2.3. Решить игру методом итераций. Необходимо исследовать игру на сходимость, задавая различное количество итераций (возьмите 20, 50, 100 и 999 итераций). Решение определить при максимально достигаемой точности (минимальной разности между нижней и верхней ценой игры).

2.4. Сравнить результаты, полученные после вычисления всеми методами. Если различные методы привели к разным решениям, то необходимо проанализировать полученную ситуацию, дать рекомендации по возможности применения полученных решений.

3. Решение некооперативной игры двух лиц.

3.1. Необходимо представить игру в нормальной форме: описать чистые стратегии игроков и записать матрицы выигрышей для каждого из игроков.

3.2. Решить игру: для этого с помощью метода линейного программирования необходимо найти гарантированные выигрыши для каждого игрока и защитные стратегии.

3.3. Найти точку status quo.

3.4. Сравнить гарантированные выигрыши игроков и точку status quo. Ответить на вопрос, увеличились ли выигрыши игроков в точке status quo по сравнению с гарантированными выигрышами.

Варианты заданий.

Вариант 1.

1. В эту игру играют два человека, каждый из них показывает один, два или три пальца и одновременно называет число пальцев, которое, по его мнению покажет противник. Если один из игроков указывает правильно, то он выигрывает сумму, равную сумме пальцев, показанных им и его противником. Если угадывают оба игрока, или не угадывает ни один из них, то никто ничего не получает.

2. Два человека пытаются купить на аукционе одну вещь, за которую они могут предложить 2, 4, 6 или 8 долларов. Позже эту вещь можно продать за 14 долларов и получить соответствующую прибыль. оба устанавливают свою цену тайно друг от друга, при этом каждый из них должен внести аванс в половину от назначенной суммы. Если кто-то назвал цену выше другого, то он получает вещь, доплатив назначенную сумму. Второму при этом возвращается аванс (т.е. он остается при своих начальных условиях). Если же оба назвали одинаковую сумму, то выплаченные авансы отчисляются в пользу аукциона, а вещь с продажи в этот день снимается (игроки могут попытать судьбу в другой день).

Вариант 2.

1. Два игрока имеют на руках по 5 карт: шестерку, семерку, даму, короля и туза. «Стоимость» дамы – 3 очка, короля – 4 очка, туза – 1 очко. Шестерка и семерка стоят по номиналу. По старшинству карты располагаются следующим образом: 6<7<Д<К<Т, но при этом Т<6 (старшинство «по кругу»). Игроки одновременно выкладывают на стол по одной карте. Выигрывает тот, у кого карта старше, причем выигрыш определяется суммой очков выложенных карт. Если оба игрока выложили на стол карты одинакового номинала, то никто из них ничего не выигрывает.

2. Дети и родители решают, где им провести выходной день: они могут поехать за город на природу, пойти в луна-парк, или съездить в гости к бабушке. Дети и родители принимают решение независимо друг от друга. Дети больше всего хотели бы сходить в луна-парк (5 ед.), чуть

меньше – побывать у бабушки (4 ед.) и еще меньше - съездить на природу (3 ед.). Родители же, напротив, больше всего хотели бы побывать на природе (5 ед.), меньше – побывать у бабушки (4 ед.) и меньше – в лунапарке (2 ед.). Если дети и родители не договорятся, то выходной будет испорчен, все останутся дома, и полезности такого исхода будут для детей – -1 ед., а для взрослых – 0 ед.

Вариант 3.

1. Два игрока имеют по две белых и по две красных фишки. Оба выкладывают на стол произвольное количество фишек (или ни одной). Функция выигрыша первого игрока (проигрыш другого) определяется по количеству выложенных белых и красных фишек:

$$J(x,y)=(-1)^{(x_1+y_1)}(x_2+y_2),$$

где x_1, y_1 – количество белых фишек выложенных, соответственно, первым и вторым игроками;

x_2, y_2 – количество красных фишек выложенных, соответственно, первым и вторым игроками.

2. Два военных союзника проводят операцию по захвату вражеской территории. Каждый из союзников может выставить 1, 2, 3 или 4 полка. В зависимости от количества выставленных полков союзник несет потери 0.1, 0.2, 0.2 и 0.3, соответственно. При этом прибыль от военной операции составляет i/N, где i – количество выставленных игроком полков, а N – общее количество полков, выставленных от обоих союзников.

Вариант 4.

1. Игроки 1 и 2 выбирают по числу из множества {1, 2, 3, 4, 5}, не зная, что выбирает другой. Игрок 1 выигрывает, если сумма выбранных чисел четная, и проигрывает игроку 2, если сумма нечетная. При этом сумма выигрыша определяется по формуле:

$$J(x,y)=(x+y)/10,$$

где x, y – числа, выбранные, соответственно, 1-м и 2-м игроками.

2. Два мальчика играли в комнате и разбили вазу. Родители хотят узнать, кто из них это сделал. Каждый из мальчиков может: 1) ничего не сказать, 2) признаться, что это сделал он, 3) указать на приятеля. Если оба укажут на себя (признаются), то их ждет самое мягкое наказание – лише-

ние сладкого на 1 день (т.к. родители не смогут определить, кто же это сделал на самом деле). Если оба ничего не скажут, то их лишат сладкого на 3 дня. Если признается только один из них, то независимо от поведения другого (промолчит он или укажет на приятеля), виновного ждет наказание в 5 дней. Самое тяжелое наказание их ждет, если они покажут друг на друга – 7 дней.

Как вести себя детям, если их спрашивают о случившемся по отдельности.

Вариант 5.

1. В распоряжении 1-го игрока имеются четыре вида вооружений: $A1, A2, A3, A4$; у противника – 5 видов самолетов: $B1, B2, B3, B4, B5$. Задача первого игрока – поразить самолет, задача противника - сохранить его непораженным. Вооружением Ai самолет Bj поражается с вероятностью $J(i,j) = |\cos(i+j)|$.

2. Некий продукт производится двумя производителями. производственные возможности конкурентов ограничены тремя состояниями: 10 тыс. единиц продукта в месяц, 15 тыс. и 20 тыс. При этом рыночная цена продукта определяется общим объемом его производства:

Общий объем производства (тыс.ед.)	20	25	30	35	40
Стоимость (тыс.ед.)	3	2.5	2	1.5	1

Найти наилучшие варианты поведения для предпринимателей.

Вариант 6.

1. Две девочки прячут по выбору 0, 1 или 2 конфеты. Каждая из них пытается угадать общее число конфет, спрятанных ими, причем угадывают они одновременно. Угадавшая правильно получает от другой одну конфету. Если обе угадали, или не угадал никто, то считается ничья. Будем считать, что девочки достаточно умны, чтобы не выбирать заведомо проигрышный вариант. Например, если первая девочка спрятала 1 конфету, то она никак не скажет, что вместе они спрятали 0 конфет, зная, что уже получается не меньше единицы.

2. Два лица, подозреваемые в преступлении, арестованы и заключены в отдельные камеры. Оба они могут сознаться в содеянном или нет. Если они оба не сознаются, то судья, сформулировав соответствующим образом обвинение, присудит каждому из них по два года. Если оба сознаются, то наказание будет 3 года. Если признается только один из них,

то признавшийся получает 3 месяца, а не признавшийся – 8 лет. Как вести себя заключенным?

Вариант 7.

1. Полковник Блотто и его противник пытаются занять две позиции, распределив надлежащим образом свои силы. Все полки должны быть выставлены на позиции, причем может быть ситуация, когда на одной позиции выставлены все полки, а на другой – ни одного. Полковник имеет 4 полка, а его противник – три полка. Если на позиции у полковника Блотто полков больше, чем у его противника, то он получает все полки противника на этой позиции. Если на данной позиции у полковника меньше полков, то он теряет полки на этой позиции. Общий выигрыш равен сумме приобретенных/потерянных полков на обеих позициях.

2. Два знакомых решают провести совместно торговую операцию. Каждый из них может выделить сумму в 100, 200 или 300 тыс. рублей. Причем доля его прибыли прямо пропорциональна доле его денег в общей сумме. Закупочная стоимость продукта – 1 тыс.руб./штука. Но продажная стоимость товара зависит от объема партии:

Всего куплено товара (штук)	200	300	400	500	600
Продажная стоимость (тыс.руб.)	3	2.5	2	1.6	1.2

Как должен поступить каждый из них, чтобы максимизировать свою прибыль?

Вариант 8.

1. Дана антагонистическая игра между игроками А и В, в которой А – один человек, а В – команда из двух человек В1 и В2. Эти три человека изолированы друг от друга в отдельных комнатах и во время игры не могут общаться между собой. В начале игры судья входит в комнату, в которой находится А и предлагает ему выбрать одно из чисел {1, 2, 3, 4}. Затем судья обходит В1 и В2 и предлагает им выбрать по числу из множества {1, 2, 3}. Если сумма всех выбранных чисел оказывается четной, выигрывает игрок А. Если сумма нечетная - выигрывает команда В. Сумма выигрыша определяется суммой выбранных чисел.

2. Два предпринимателя для совместного дела должны выделить суммы в 1, 2, 3 или 4 млн. долларов. При этом чистая прибыль для каждого из них составит:

$$J(i,j)=\begin{cases}10\cdot j/N, & i>j\\ 10\cdot i/N, & i\le j\end{cases},$$

где $N=i+j$, а i,j – количество миллионов, выделенных 1-м и 2-м предпринимателями, соответственно.

Вариант 9.

1. Два игрока одновременно называют по одному целому числу из диапазона [1,6]. Если разница между двумя названными числами оказывается четной, выигрывает первый игрок, если четной – выигрывает второй. Если игроки назвали одинаковые числа – ничья. Величина выигрыша при этом определяется по формуле:

$$J(x,y)=x+y+x\cdot y,$$

где x,y – числа, названные первым и вторым игроками, соответственно.

2. Муж с женой решают, где им провести отпуск: они могут поехать к родителям мужа, к родителям жены или пойти в турпоход. Жена больше всего хочет поехать к своим родителям (3 ед.), меньше – к родителям мужа (2 ед.) и еще меньше – идти в турпоход (1 ед.). Муж, напротив, предпочел бы турпоход (3 ед.), и ему все равно к каким родителям ехать (1 ед.). При этом, если они не договорятся и проведут отпуск отдельно, то оба не получат никакого удовольствия (0 ед.).

Вариант 10.

1. Двум мальчикам подарили по две конфеты – шоколадной и карамели. Они решили сыграть в следующую игру. Каждый из них прячет по одной конфете, а потом пытается угадать, какую конфету спрятал противник. Если оба угадали, или оба не угадали, то каждый остается при своих (ничья). Если угадал только один из них, то он получает от противника спрятанную тем конфету. Мальчики оценивают конфеты следующим образом: шоколадная – 5 единиц, карамель – 1 единицу (оба предпочитают шоколад).

2. Некий продукт производится двумя производителями. производственные возможности 1-го конкурента ограничены тремя состояниями: 10 тыс. Единиц продукта в месяц, 15 тыс. и 20 тыс., а второго – четырьмя состояниями – 15, 20, 25 и 30 тыс. ед. продукта/месяц. При этом рыночная цена продукта определяется общим объемом его производства:

Общий объем производства (тыс.ед.)	25	30	35	40	45	50
Стоимость (тыс.ед.)	3	2.4	2	1.6	1.2	1

2.15 Лабораторная работа «Решение кооперативных игр»

В данной лабораторной работе рассматривается кооперативная игра трех лиц в нормальной форме. Необходимо найти решение игры. В качестве решения будем рассматривать: С-ядро игры, вектор Шепли, N -ядро игры.

При нахождении решения прежде всего необходимо перейти от нормальной формы игры к форме характеристической функции.

Для определения характеристических функций коалиций необходимо решить 6 антагонистических игр. Характеристическая функция коалиции $V(S)$ определяется как цена антагонистической игры, где в качестве первого (максимизирующего) игрока выступает коалиция S, а в качестве второго (минимизирующего) игрока выступает коалиция N/S. Здесь множество чистых стратегий коалиции S – это множество всех совместных чистых стратегий игроков данной коалиции. Причем элементами платежной матрицы являются суммарные выигрыши игроков из коалиции S.

Характеристическая функция максимальной коалиции N определяется как максимальное значение функции выигрыша всех трех игроков, определенной на множестве всех возможных стратегий.

Для решения антагонистических игр сначала составьте соответствующие платежные матрицы. Цену игры представленных игр можно определить с помощью автоматизированной системы «Решение задач теории игр», опция меню «Антагонистич. игра».

Внимание! Если в исходной платежной матрице присутствуют отрицательные элементы, то цена игры будет выдаваться увеличенной на минимальный элемент матрицы. В этом случае необходимо откорректировать цену игры.

После решения антагонистических игр перейдите к опции меню «Характеристич. функция» и введите полученную характеристическую функцию игры и нажмите кнопку «Найти решение». Программа выдаст следующие данные: существует ли в игре С-ядро, а также выведет вектор Шепли и N-ядро игры.

После того, как вы получите указанные решения, необходимо проверить принадлежность вектора Шепли С-ядру. Эта проверка особенно важна, если игра не является выпуклой. Для того, чтобы вектор Шепли принадлежал С-ядру игры, должны выполняться следующие условия: все коалиции должны получать не меньше, чем могут заработать сами по себе.

Необходимо проверить, является ли игра выпуклой. Внимание! Выпуклость проверяется по всем трем игрокам. Если условие выпуклости хотя бы по одному игроку не выполняется, игра не является выпуклой.

После нахождения всех решений сравните и проанализируйте результаты. Дайте рекомендации по их дальнейшему применению. Выберите решение, лучшее с вашей точки зрения, обоснуйте.

Пример выполнения работы.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 15, 20, 30

II: 10, 15, 20

III: 10, 30, 40.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Стоимость (тыс. ед.)	7	6.5	6	5.6	5.2	5	4.8	4.2	3.8	3.4	3	2.8	2.5

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Чтобы перейти от нормальной формы игры к форме игры в виде характеристической функции необходимо решить 6 антагонистических игр. Обозначим первого предпринимателя как игрока x, второго предпринимателя – как игрока y, третьего – как игрока z.

$V(\{x\})$ находится как цена антагонистической игры, где x играет против коалиции $\{y, z\}$. Под стратегией коалиции $\{y, z\}$ будем понимать общий объем продукции, который предприниматели из этой коалиции могут выпускать совместно. Элементы матрицы выигрышей равны прибыли игрока x, которая определяется, исходя из объемов производимой им продукции и цены на эту продукцию. Цена в каждой ситуации определяется из таблицы, где объем продукции – это общий объем, производимый всеми тремя предпринимателями.

Матрица выигрышей:

x	yz							
	20	25	30	40	45	50	55	60
15	97.5	90	84	75	72	63	57	51
20	120	112	104	96	84	76	68	60
30	156	150	144	114	102	90	84	75

Данная игра имеет решение в чистых стратегиях (седловая точка $a_{38} = 75$) и $V(x) = 75$.

$V(\{y\})$ находится из антагонистической игры y против $\{x, z\}$.

Матрица выигрышей:

y	xz							
	25	30	35	40	50	55	60	70
10	65	60	56	52	48	42	38	30
15	90	84	78	75	63	57	51	42
20	112	104	100	96	76	68	60	50

Данная игра имеет решение в чистых стратегиях (седловая точка $a_{38} = 50$) и $V(y) = 50$.

$V(\{z\})$ находится из антагонистической игры z против $\{x, y\}$.

Матрица выигрышей:

z	xy					
	25	30	35	40	45	50
10	65	60	56	52	50	48
30	150	144	126	114	102	90
40	168	152	136	120	112	100

Данная игра имеет решение в чистых стратегиях (седловая точка $a_{36} = 100$) и $V(z) = 100$.

$V(\{xy\})$ находится из антагонистической игры $\{xy\}$ против z.

Матрица выигрышей:

xy	z		
	10	30	40
25	162.5	125	105
30	180	144	114
35	196	147	119
40	208	152	120
45	225	153	126
50	240	150	125

Данная игра имеет решение в чистых стратегиях (седловая точка $a_{53} = 126$) и $V(xy) = 126$

$V(\{xz\})$ находится из антагонистической игры $\{xz\}$ против y.

Матрица выигрышей:

xz	y		
	10	15	20
25	162.5	150	140
30	180	168	156
35	196	182	175
40	208	200	192
50	240	210	190
55	231	209	187
60	228	204	180
70	210	196	175

Данная игра имеет решение в чистых стратегиях (седловая точка $a_{43} = 192$) и $V(xz) = 192$.

$V(\{yz\})$ находится из антагонистической игры $\{yz\}$ против x.

Матрица выигрышей:

yz	x		
	15	20	30
20	130	120	104
25	150	140	125
30	168	156	144
40	200	192	152
45	216	189	153
50	210	190	150
55	209	187	154
60	204	180	150

Данная игра имеет решение в чистых стратегиях (седловая точка $a_{73} = 154$) и $V(yz) = 154$

$V(\{xyz\})$ находится как максимально возможная общая прибыль, если все три предпринимателя объединятся. Запишем все возможные общие прибыли предпринимателей, и найдем среди них максимальную:

$$(227.5, 240, 252, 260, 275, 288, 273, 266, 255, 240, 238, 225).$$

Здесь максимум равен 288 и $V(xyz) = 288$.

Занесем полученные данные в систему.

В результате получим следующие сообщения:

С-ядро существует.

Вектор Шепли равен: $(97.667,\ 66.167,\ 124.167)$.

N-ядро: $(96.763,\ 80.068,\ 111.169)$.

Проверим выпуклость игры.

$$V_x - V(\{0\}) \le \begin{bmatrix} V_{xy} - V_y \\ V_{xz} - V_z \end{bmatrix} \le V_{xyz} - V_{yz} \quad \to \quad 2.5 < \begin{bmatrix} 17-1 \\ 21-4 \end{bmatrix} < 30-18$$

— условие не выполняется (17–1=16>30–18=12), следовательно, игра не выпукла (так как условие выпуклой игры не выполнилось при проверке уже первого игрока, по остальным игрокам проводить проверку необязательно).

Вектор Шепли не совпадает с N -ядром, но принадлежит С-ядру, т.к. выполняются условия:

$$\sigma_x \ge V_x \quad \left(10\frac{1}{3} > 2.5\right), \quad \sigma_x + \sigma_y \ge V_{xy} \quad \left(18\frac{5}{12} > 17\right),$$

$$\sigma_y \ge V_y \quad \left(8\frac{1}{12} > 1\right), \quad \sigma_x + \sigma_z \ge V_{xz} \quad \left(21\frac{11}{12} > 21\right),$$

$$\sigma_z \ge V_z \quad \left(11\frac{7}{12} > 4\right), \quad \sigma_y + \sigma_z \ge V_{yz} \quad \left(19\frac{8}{12} > 18\right).$$

Задание на моделирование.

1. Дана кооперативная игра трех лиц. Необходимо представить игру в форме характеристической функции.
2. Определить, имеет ли игра С-ядро.
3. Проверить, является ли игра выпуклой.
4. Найти вектор Шепли, проверить его принадлежность С-ядру.
5. Найти N-ядро игры.
6. Сравнить все полученные решения. Дать рекомендации по возможности их дальнейшего применения. Указать наилучшее решение с Вашей точки зрения.

Варианты заданий.

Вариант 1.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 10, 15, 25

III: 15, 35.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Стоимость (тыс. ед.)	3	2.8	2.6	2.5	2.4	2.2	2	1.8	1.6	1.4	1	0.5

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 2.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 20, 50

II: 10, 20, 30

III: 10, 20, 40.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Стоимость (тыс. ед.)	4	3.6	3.2	2.8	2.4	2	1.6	1.2	1

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 3.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 15, 30

II: 10, 20, 40

III: 15, 20.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70	75	85	90
Стоимость (тыс.ед.)	4	3.6	3.2	3	2.8	2.5	2.2	2	1.6	1.4	1

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 4.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 15, 30

III: 10, 15, 20.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Стоимость (тыс. ед.)	3	2.8	2.6	2.2	2	1.8	1.6	1.5	1.2	1

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 5.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 30

II: 10, 15, 20

III: 10, 20, 25.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
Стоимость (тыс. ед.)	3.5	3.2	3	2.6	2.2	2	1.8	1.5	1.2	1

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 6.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 5, 10, 20

II: 10, 15, 20

III: 15, 25.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	30	35	40	45	50	55	60	65
Стоимость (тыс. ед.)	3	2.8	2.4	2	1.8	1.4	1.2	1

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 7.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 10, 15, 20

III: 15, 20.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70
Стоимость (тыс. ед.)	3	2.6	2.4	2	1.6	1.4	1.2	1

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 8.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 20, 40

II: 20, 30, 40

III: 15, 50.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	55	65	75	85	90	95	100	110	120	130
Стоимость (тыс. ед.)	5	4.6	4.2	4	3.6	3.4	3.2	3	2.5	2

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 9.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 15, 20, 30

II: 15, 40

III: 15, 20, 25

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
Стоимость (тыс. ед.)	4	4.8	4.6	4.2	4	3.6	3.2	3	2.6	2.2	2

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 10.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 15, 30

III: 10, 15, 20.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Стоимость (тыс. ед.)	5	4.8	4.6	4.4	4.2	4	3.5	3	2.4	1.6

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 11.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 150, 400

II: 100, 150, 200

III: 100, 200, 300.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
Стоимость (тыс. ед.)	5	4.6	4.2	4	3.6	3.2	3	2.8	2.6	2.4	2	1.6

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 12.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 10, 15, 20

III: 10, 30, 40.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Стоимость (тыс. ед.)	5	4.8	4.6	4.2	4	3.6	3.4	3	2.8	2.6	2.4	2.2	2

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 13.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 10, 15, 20

III: 15, 20, 30.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Стоимость (тыс. ед.)	4	3.6	3.4	3	2.8	2.5	2.2	2	1.8	1.6

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 14.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 150, 200, 300

II: 100, 150, 200

III: 100, 200, 300

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
Стоимость (тыс. ед.)	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 15.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 15, 20, 30

II: 10, 15, 20

III: 10, 20, 30

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Стоимость (тыс. ед.)	7	6.5	6	5.6	5.2	4.6	4	3.6	3.2	2.5

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 16.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 150, 200, 300

II: 100, 150, 200

III: 100, 300

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
Стоимость (тыс. ед.)	5	4.8	4.6	4	3.6	3.2	3	2.6	2.2	2

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 17.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 10, 15, 25

III: 15, 35.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Стоимость (тыс. ед.)	6	5.8	5.4	5	4.5	4.2	3.8	3.5	3	2.6	2	1

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

Вариант 18.

Три предпринимателя могут производить следующее количество продукции в месяц (тысяч единиц):

I: 10, 20, 30

II: 10, 15, 20

III: 10, 30, 40.

При этом известно, что цена продукции зависит от производимого объема следующим образом:

Объем продукции	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Стоимость (тыс. ед.)	7	6.5	6	5.8	5.6	5.4	5	4.8	4.6	4.2	3.6	3	2

Необходимо определить оптимальное поведение предпринимателей, если известно, что они могут договариваться между собой и перераспределять при необходимости прибыль.

2.16 Лабораторная работа «Механизмы коллективного принятия решений. Модели дележа прибыли и модели распределения затрат»

В данной лабораторной работе рассматриваются основные методы решения задач с распределением затрат на производство неделимого общественного продукта. В качестве возможных решений рассматриваются: подушный, пропорциональный и уровневый налоги, а также вектор Шепли и N-ядро. Для каждого из этих решений определяются вектор затрат и вектор прибыли.

Подушный налог предлагает делить затраты поровну между агентами, но при этом затраты не должны превышать возможные доходы агентов от использования общественного продукта.

Уровневый налог, напротив, предлагает поровну делить между агентами кооперативную прибыль (разность между суммарными доходами агентов и стоимостью коллективного объекта). На прибыль также налагаются ограничения: для каждого агента индивидуальная прибыль не должна превышать его дохода.

Помните, что для каждого агента сумма его затрат и его прибыли должна равняться его личным доходам. Таким образом, если мы определили вектор затрат, то вектор прибыли определяется как разность вектора доходов и вектора затрат. Аналогично, если первоначально мы определяем вектор прибыли, то вектор затрат находим из разности вектора доходов и вектора прибыли.

При определении *вектора Шепли* выбирайте наиболее удобную траекторию нахождения решения: если стоимость объекта велика (превышает половину общих доходов), то проще и быстрее находить вектор Шепли по прибыли; если стоимость объекта низка, то проще находить решение по затратам.

При нахождении *N-ядра* прежде всего необходимо определить ситуацию с затратами: велики они или нет. Если стоимость коллективного объекта превышает половину общих доходов, то N-ядро, так же как и уровневый налог, предлагает поровну разделить прибыль. Но! В отличие от уровневого налога ограничения на прибыль здесь более жесткие: в N-ядре каждый агент не должен получить прибыль больше, чем половина его индивидуального дохода. Если стоимость коллективного объекта меньше половины общих доходов, то N-ядро, так же как и подушный налог, предлагает поровну разделить затраты. В этом случае затраты также не могут превышать половину индивидуальных доходов агентов.

Совет: для удобства нахождения N-ядра запишите вспомогательный вектор, элементами которого будут являться половины доходов агентов.

Внимание! Проверяйте каждое найденное решение: элементы любого найденного вектора затрат (прибыли) в сумме должны равняться стоимости коллективного объекта (прибыли от эксплуатации этого объекта). Если заданное условие не выполняется, ищите ошибку в решении! Для вектора Шепли находите решение в простых дробях: если при проверке равенство не будет выполняться, то это точно ошибка в нахождении решения (при переходе к десятичным числам возможна еще ошибка округления).

Пример выполнения работы.

Умирает человек, у него остается три жены, претензии которых на наследство мужа составляют соответственно 100, 200 и 300. необходимо определить долю каждой жены в случае, если наследство составляет 200.

В данной задаче претензии жен можно представить, как ожидаемые доходы агентов: b_i. Затраты составят разницу между претензиями жен и величиной наследства:

$$c = \sum b_i - e = 600 - 200 = 400 .$$

Определим решение как N-ядро игры.

Здесь затраты превышают половину доходов агентов, а значит поровну должно быть разделено наследство. При этом доля каждой жены не должна превышать половину ее ожидаемых доходов. Таким образом, наследство первой жены не может превышать $50 = \frac{1}{2} b_1$, оставшиеся 150 единиц будут поделены между второй и третьей женой поровну. Тогда наследство будет поделено следующим образом: $(50,\ 75,\ 75)$.

Нахождение вектора Шепли может быть проинтерпретировано следующим образом: агенты бегут в банк и получают наследство полностью в соответствии с заявкой (по принципу «кто первый пришел, тот первый и обслуживается»), пока наследство полностью не исчерпается. Тогда первая жена получит полностью свой доход, если придет в банк первой (вероятность этой ситуации равна 1/3) и не получит ничего, если придет второй или третьей. Таким образом, ее доля наследства составит $33\frac{1}{3}$.

Далее, вторая жена получит 200, если придет в банк первой (вероятность 1/3), и получит всего 100, если придет следом за первой женой (вероятность 1/6). Придя после третьей, вторая жена не получит ничего. Ее доля наследства, таким образом, составит $\frac{1}{3}\cdot 200+\frac{1}{6}\cdot 100=83\frac{1}{3}$. Для третьей жены рассуждения повторяются, и ее доля наследства совпадет с долей второй жены.

Таким образом, вектор Шепли предлагает разделить наследство следующим образом: $\left(33\frac{1}{3},\ 83\frac{1}{3},\ 83\frac{1}{3}\right)$.

2.17 Лабораторная работа «Механизмы коллективного принятия решений. Распределение затрат на производство неделимого коллективного продукта»

В данной лабораторной работе рассматриваются основные методы решения задач с распределением затрат на производство неделимого общественного продукта. В качестве возможных решений рассматриваются: подушный, пропорциональный и уровневый налоги, а также вектор Шепли и N-ядро. Для каждого из этих решений определяются вектор затрат и вектор прибыли.

Подушный налог предлагает делить затраты поровну между агентами, но при этом затраты не должны превышать возможные доходы агентов от использования общественного продукта.

Уровневый налог, напротив, предлагает поровну делить между агентами кооперативную прибыль (разность между суммарными доходами агентов и стоимостью коллективного объекта). На прибыль также налагаются ограничения: для каждого агента индивидуальная прибыль не должна превышать его дохода.

Помните, что для каждого агента сумма его затрат и его прибыли должна равняться его личным доходам. Таким образом, если мы определили вектор затрат, то вектор прибыли определяется как разность вектора доходов и вектора затрат. Аналогично, если первоначально мы определяем вектор прибыли, то вектор затрат находим из разности вектора доходов и вектора прибыли.

При определении *вектора Шепли* выбирайте наиболее удобную траекторию нахождения решения: если стоимость объекта велика (превышает половину общих доходов), то проще и быстрее находить вектор Шепли по прибыли; если стоимость объекта низка, то проще находить решение по затратам. Если вам сложно находить вектор Шепли по интерпретации (затраты – сборщик налогов, прибыль – банк), то его всегда можно найти традиционным способом. Для этого необходимо построить характеристическую функцию игры по формуле $v(S) = \left[\sum_{i \in S} b_i - c\right]^+$, после чего вектор Шепли рассчитывается обычным способом по формуле, приведенной в определении вектора.

При нахождении *N-ядра* прежде всего необходимо определить ситуацию с затратами: велики они или нет. Если стоимость коллективного объекта превышает половину общих доходов, то N-ядро, так же как и уровневый налог, предлагает поровну разделить прибыль. Но! В отличие от уровневого налога ограничения на прибыль здесь более жесткие: в N-ядре каждый агент не должен получить прибыль больше, чем половина его индивидуального дохода. Если стоимость коллективного объекта меньше половины общих доходов, то N-ядро, так же как и подушный налог, предлагает поровну разделить затраты. В этом случае затраты также не могут превышать половину индивидуальных доходов агентов.

Совет: для удобства нахождения N-ядра запишите вспомогательный вектор, элементами которого будут являться половины доходов агентов.

Внимание! Проверяйте каждое найденное решение: элементы любого найденного вектора затрат (прибыли) в сумме должны равняться стоимости коллективного объекта (прибыли от эксплуатации этого объекта). Если заданное условие не выполняется, ищите ошибку в решении! Для вектора Шепли находите решение в простых дробях: если при проверке равенство не будет выполняться, то это точно ошибка в нахождении решения (при переходе к десятичным числам возможна еще ошибка округления).

После нахождения всех решений, сведите их в таблицу:

	Вектор прибыли	**Вектор затрат**
Подушный налог		
Пропорциональный налог		
Уровневый налог		
Вектор Шепли		
N-ядро		

Пример выполнения работы.

Имеется пять агентов, для которых известно, что от использования коллективного объекта они могут получить доходы, соответственно, 8, 10, 12, 20 и 32. Необходимо определить, каким образом должны быть распределены затраты между агентами, если стоимость коллективного объекта равна 32.

Найдем различные варианты распределения затрат.

Подушный налог предлагает нам поровну поделить затраты между агентами. Получаем: $\frac{32}{5} = 6.4$.

Тогда вектор затрат будет $x = (6.4,\ 6.4,\ 6.4,\ 6.4,\ 6.4)$,

Вектор прибыли: $y = (1.6,\ 3.6,\ 5.6,\ 13.6,\ 25.6)$.

Пропорциональный налог определяет затраты пропорционально доходам агентов: $x_i = c \cdot \frac{b_i}{\sum_j b_j}$.

Тогда вектор затрат: $x = (3.122,\ 3.9,\ 4.683,\ 7.805,\ 12.488)$.

Вектор прибыли: $y = (4.878,\ 6.1,\ 7.317,\ 12.195,\ 19.512)$.

Уровневый налог предлагает равномерно распределять между агентами прибыль. В нашем случае суммарные доходы агентов равны 82, соответственно, прибыль равна $e = 82 - 32 = 50$.

Если мы попытаемся распределить прибыль поровну $\frac{50}{5} = 10$, то первые два агента получат прибыль, превышающую их доходы. Это недопустимо, поэтому установим их прибыль равной доходам: $y_1 = 8$, $y_2 = 10$. У нас еще остается $50 - 18 = 32$ единицы прибыли, которую попытаемся равномерно распределить между оставшимися тремя агентами: $\frac{32}{3} = 10.667$.

Получаем вектор прибыли: $y = (8, 10, 10.667, 10.667, 10.667)$.

Тогда вектор затрат: $x = (0, 0, 1.333, 9.333, 21.333)$.

Вектор Шепли в данном случае проще находить через затраты:

$$x_1 = \frac{1}{5}\cdot 8 + \frac{1}{20}(8+8+8) + \frac{1}{30}(8+2) = \frac{94}{30},$$

$$x_2 = \frac{1}{5}\cdot 10 + \frac{1}{20}(10+10+10) + \frac{1}{30}(10+4) = \frac{119}{30},$$

$$x_3 = \frac{1}{5}\cdot 12 + \frac{1}{20}(12+12+12) + \frac{1}{30}(12+4+2) = \frac{144}{30},$$

$$x_4 = \frac{1}{5}\cdot 20 + \frac{1}{20}(20+20+20) + \frac{1}{30}(14+12+10) + \frac{1}{20}\cdot 2 = \frac{249}{30},$$

$$x_5 = \frac{1}{5}\cdot 32 + \frac{1}{20}(24+22+20+12) + \frac{1}{30}(14+12+4+10+2) + \frac{1}{20}\cdot 2 = \frac{354}{30}.$$

Полученный вектор Шепли по затратам:

$$x = \left(\frac{94}{30}, \frac{119}{30}, \frac{144}{30}, \frac{249}{30}, \frac{354}{30}\right).$$

Тогда вектор Шепли по прибыли: $y = \left(\frac{146}{30}, \frac{181}{30}, \frac{216}{30}, \frac{351}{30}, \frac{606}{30}\right)$.

Для нахождения *N-ядра* определим прежде всего ситуацию: в нашем случае затраты составляют меньше половины доходов, поэтому будем распределять поровну затраты, но при этом они не должны превышать половину доходов каждого игрока. При распределении затрат поровну получаем: $\frac{32}{5} = 6.4$. Первый агент не должен платить больше половины своего дохода, поэтому $x_1 = 4$. Оставшиеся 28 единиц затрат попытаемся снова поделить поровну между агентами: $\frac{28}{4} = 7$ – эта величина превышает половину доходов второго и третьего агентов, поэтому устанавливаем $x_2 = 5,\ x_3 = 6$.

Осталось распределить $32 - 4 - 5 - 6 = 17$ единиц затрат. поделим их поровну между оставшимися двумя агентами: $\frac{17}{2} = 8.5$.

Получаем вектор затрат: $x = (4,\ 5,\ 6,\ 8.5,\ 8.5)$.

Тогда вектор прибыли будет: $y = (4,\ 5,\ 6,\ 11.5,\ 23.5)$.

Задание на моделирование.

Рассматривается модель распределения затрат с пятью агентами. Известны доходы агентов b_i от использования коллективного объекта. Даны два варианта стоимости коллективного объекта c. Для каждого варианта необходимо определить (по затратам и по прибыли):

1) подушный налог;
2) пропорциональный налог;
3) уровневый налог;
4) вектор Шепли;
5) N-ядро.

Сравнить и проанализировать полученные результаты. Ответьте на вопрос: какое распределение затрат, с Вашей точки зрения, наиболее справедливо.

Варианты заданий.

№ варианта	**Доходы агентов**					**Стоимость коллективного объекта c**	
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	**а)**	**б)**
1	12	14	20	24	40	40	68
2	5	8	8	25	28	28	42
3	10	14	30	34	50	54	75
4	4	5	6	12	14	21	36
5	20	22	24	30	34	42	86
6	6	8	16	24	34	40	54
7	2	6	12	22	46	30	56
8	10	14	28	35	42	84	100

9	12	24	46	50	54	76	120
10	5	15	25	40	45	54	95
11	11	21	30	38	45	101	130
12	7	9	16	35	45	65	95
13	4	12	16	34	46	52	84
14	20	24	34	36	68	88	146
15	4	16	34	36	54	44	96
16	5	12	15	35	45	56	85
17	6	14	24	26	42	42	94
18	14	16	34	36	44	70	100
19	4	8	14	22	24	20	42
20	2	5	5	12	16	12	32

2.18 Лабораторная работа «Регулируемая монополия. Две экономики производства»

В данной лабораторной работе рассматриваются две экономики производства: экономика с производством общественного продукта и экономика с продуктом личного пользования.

При рассмотрении *модели производства общественного продукта* первоначально строится характеристическая функция игры. Характеристическая функция каждой коалиции определяется как максимум возможной прибыли коалиции. Прибыль коалиции равна суммарной полезности агентов коалиции минус затраты на производство общественного продукта.

Внимание! Коалиция никогда не будет заниматься производством, если это ей не выгодно. Соответственно, если максимальное значение прибыли получается отрицательным, то характеристическая функция рассматриваемой коалиции устанавливается равной нулю. Кроме того, необходимо помнить, что нельзя производить отрицательное количество продукта. Поэтому всегда $y \ge 0$.

При нахождении С-ядра по прибыли достаточно знать характеристическую функцию игры. От любого дележа, распределяющего прибыль, мы можем перейти к распределению затрат, принимая во внимание, что сумма прибыли и затрат любого агента равны его доходам: $u_i + x_i = b_i$.

При этом доходы агента определяются через объем общественного продукта, производимого максимальной коалицией.

При рассмотрении *экономики с продуктом личного пользования* прежде всего необходимо определить тип производственной функции: является ли она с постоянным, уменьшающимся или возрастающим доходом на масштаб. В первых двух случаях кооперация невозможна или бессмысленна. В случае возрастающего дохода на масштаб необходимо определить гарантированный выигрыш отдельных агентов (характеристические функции единичных коалиций) и множество возможных значений характеристической функции максимальной коалиции (оптимальных по Парето распределений).

Здесь для C-ядра определяются возможные значения оптимального выпуска продукта y^*, исходя из объемов которого определяется и C-ядро игры. Заметим, что в задачах с продуктом личного пользования, C-ядро игру является не линейным отрезком (для случая двух агентов), а отрезком кривой, определяющей множество оптимальных векторов полезностей. Оптимальный объем выпуска продукции y^* здесь также может быть определен не единственным значением, а множеством допустимых значений на заданном интервале.

Пример выполнения работы.

Экономика с производством общественного продукта.

Технология производства общественного продукта имеет следующий вид: $c(y) = 2y$. Есть два агента с квазилинейными предпочтениями $u_i = b_i(y) - x_i$, где $b_1(y) = y$, $b_2(y) = 2\sqrt{y}$.

Определим характеристическую функцию игры.

$v(1) = \max(y - 2y) = 0$ (при $y = 0$ – объем выпуска продукции не может быть отрицательным),

$v(2) = \max\left(2\sqrt{y} - 2y\right) = 0.5$ (при $y = 0.25$),

$v(12) = \max\left(y + 2\sqrt{y} - 2y\right) = 1$ (при $y = 1$).

Затраты на производство общественного продукта максимальной коалиции при $y = 1$ составят $c(1) = 2$. Доходы агентов при этом:

$b_1(1)=1,\ b_2(1)=2$.

Прибыль от кооперации составит:

$v_{12}-v_1-v_2=1-0.5-0=0.5$.

Определим C-ядро игры по прибыли:

$(0.5,\,0.5)$ – вся прибыль от кооперации отдана первому агенту,

$(0,\,1)$ – вся прибыль отдана второму агенту.

C-ядро по затратам определяется как $x_i=b_i-u_i$:

$(0.5,\,1.5)$,

$(1,\,1)$.

N-ядро определяется, как центр C-ядра. Тогда N-ядро по прибыли: $(0.25,\,0.75)$, по затратам – $(0.75,\,1.25)$.

Вектор Шепли по прибыли:

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=0.25,$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}\cdot 0.5+\frac{1}{2}(1-0)=0.75.$$

Вектор Шепли по затратам: $(0.75,\,1.25)$.

Экономика с продуктом личного пользования.

Имеются два агента со следующими функциями полезности: $u_1=(1-x_1)y_1$, $u_2=(2-x_2)y_2$. Функция затрат: $c(y)=2\sqrt{y}$.

Здесь рассматривается производственная функция с возрастающим доходом на масштаб (средние затраты уменьшаются по y): $c(y)/y=\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

Построим игру, соответствующую данной экономике. Определим сначала характеристические функции одиночных коалиций (максимумы соответствующих функций находятся через первую производную).

$$v(1)=\max\left(1-2\sqrt{y_1}\right)\cdot y_1=\frac{1}{27}=0.037\text{, при } y_1=\frac{1}{9},$$

$$v(2)=\max\left(2-2\sqrt{y_2}\right)\cdot y_2=\frac{8}{27}=0.296\text{, при } y_2=\frac{4}{9}.$$

Множество $v(12)$ определяется из оптимальных по Парето распределений. Условия эффективности приводят здесь к следующим равенствам:

$$\frac{1-x_1}{y_1}=\frac{2-x_2}{y_2}=\frac{1}{\sqrt{y}}\text{, где } y=y_1+y_2.$$

Отсюда:

$$\left(1-x_1\right)\cdot\sqrt{y}=y_1,\ \left(2-x_2\right)\cdot\sqrt{y}=y_2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{y}\left(3-\left(x_1+x_2\right)\right)=y.$$

Принимая во внимание, что $x_1+x_2=2\sqrt{y}$, получаем:

$$\sqrt{y}\left(3-2\sqrt{y}\right)=y \quad\Rightarrow\quad 3\sqrt{y}=3y \quad\Rightarrow\quad y^*=1.$$

Таким образом, для коалиции $\{1,2\}$ наиболее оптимальным является выпуск 1 единицы продукции. Учитывая, что $\left(1-x_1\right)=\dfrac{y_1}{\sqrt{y}}$ и $\left(2-x_2\right)=\dfrac{y_2}{\sqrt{y}}$, получаем $u_1=\dfrac{y_1^2}{\sqrt{y^*}}=y_1^2$, $u_2=y_2^2$.

Определим теперь С-ядро игры.

Если вся прибыль от кооперации достается второму агенту, то прибыль первого устанавливается равной его характеристической функции: $u_1=0.037$, отсюда $y_1=\sqrt{u_1}=0.1924$. Учитывая, что $y=y_1+y_2$, получаем $y_2=0.80755 \quad\Rightarrow\quad u_2=0.652$.

Первая точка С-ядра: $\left(0.037,\ 0.652\right)$.

Если вся прибыль от кооперации отдается первому агенту, второй получает минимальную прибыль: $u_2 = 0.296 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0.544$. Отсюда $y_1 = 0.456 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0.2076$.

Вторая точка С-ядра: $(0.2076,\ 0.296)$.

3 Методические указания для организации самостоятельной работы

3.1 Общие положения

Целями самостоятельной работы являются систематизация, расширение и закрепление теоретических знаний, приобретение навыков исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студента по дисциплине «Моделирование социально-экономических систем и процессов» включает следующие виды деятельности:

1) проработка лекционного материала;
2) подготовка к лабораторным работам;
3) подготовка к экзамену.

В ходе самостоятельной работы студент, ориентируясь на изложенные рекомендации, планирует свое время и перечень необходимых работ в зависимости от индивидуальных психофизических особенностей. Формат самостоятельной работы студентов может отличаться в зависимости от формы обучения и объема аудиторной работы.

3.2 Проработка лекционного материала и подготовка к лабораторным работам

Для качественного усвоения учебного материала целесообразно осуществлять проработку лекционного материала, которая направлена как на систематизацию имеющегося материала, так и на подготовку к освоению практических аспектов, связанных с содержанием дисциплины.

Проработка лекционного материала включает деятельность, связанную с изучением рекомендуемых преподавателем источников, в которых отражены основные моменты, затрагиваемые в ходе лекций. Кроме того, важное место отведено работе с собственноручно составленным конспектом лекций. При конспектировании во время лекции помните, что не следует записывать все, что говорит и/или демонстрирует лектор: старайтесь выявить главное и записать только это. Цель конспекта – формирование целостного логически выстроенного взгляда на круг вопросов, затрагиваемых в ходе изучения соответствующей темы, а не механическая фиксация текстовой и графической информации.

Во внеаудиторное время проработка лекционного материала может быть выстроена в двух основных форматах:

а) отработка прослушанной лекции (прочтение конспекта и рекомендованных преподавателем источников с сопоставлением записей) и восполнение пробелов, если они имелись (например, если студент не понял чего-то, не успел записать);

б) прочтение перед каждой последующей лекцией предыдущей, дабы не тратилось много времени на восстановление контекста изучения дисциплины при продолжающейся или связанной теме.

В ходе проработки лекционного материала обращайте внимание на контрольные вопросы, которые, как правило, имеются в конце каждой темы учебника (учебного пособия). Отвечая на них, можно сделать вывод о степени понимания материала. Если ответы на какие-то вопросы вызвали затруднения, то следует предпринять еще одну попытку изучения отдельных вопросов.

При подготовке к лабораторным занятиям необходимо заранее изучить методические рекомендации по его проведению, обратить внимание на цель, формат и содержание занятия. Если какие-то моменты вызвали дополнительные вопросы, целесообразно обратиться к содержанию лекционного материала, рекомендациям преподавателя по изучению теоретической части курса (рекомендуемым источникам) или за личной консультацией. В ходе подготовки к лабораторным работам может потребоваться обращение к различным источникам. Проявляйте инициативу и самостоятельность в данном вопросе. При этом следует пользоваться только авторитетными изданиями, как печатными, так и электронными.

3.3 Подготовка к экзамену

Подготовка к экзамену осуществляется во время сессии и включает в себя изучение теоретического материала и выполнение практических заданий. Экзаменационный билет содержит теоретические вопросы и практическую задачу, направленную на определение умений применить знания на конкретном примере.

4 Рекомендуемые источники

Салмина, Н. Ю. Моделирование социально-экономических систем и процессов: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Салмина Н. Ю. – Томск: ТУСУР, 2016. – 198 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/6416.