

---

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**

Государственное образовательное учреждение высшего образования  
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И  
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ**

*Учебно – методическое пособие по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов» по выполнению лабораторных, практических работ и самостоятельной работы для студентов ВУЗа*

Томск  
2018

Пособие составлено в соответствии с тематикой лабораторных и практических работ и самостоятельной работы по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов». Пособие содержит темы и содержание лабораторных и практических работ, методические указания к их проведению.

Для преподавателей, аспирантов, студентов и магистрантов.

СОСТАВИТЕЛЬ: Е.А. Шельмина

## СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Практические работы.....	4
Практическая работа №1 .....	4
Практическая работа №2 .....	4
Практическая работа №3 .....	5
Практическая работа №4 .....	6
Практическая работа №5 .....	7
Практическая работа №6 .....	7
Практическая работа №7 .....	8
Практическая работа №8 .....	8
Раздел 2. Лабораторные работы.....	9
Лабораторная работа №1 .....	9
Лабораторная работа №2 .....	9
Лабораторная работа №3 .....	9
Лабораторная работа №4 .....	9
Лабораторная работа №5 .....	9
Лабораторная работа №6 .....	9
Лабораторная работа №7 .....	9
Лабораторная работа №8 .....	10
Раздел 3. Самостоятельная работа .....	10
Список литературы.....	10

## Раздел 1. Практические работы

### Практическая работа №1

#### Булева алгебра

Для выполнения практической работы необходимо изучить раздел «Основы булевой алгебры». Теоретические сведения приведены в [1-2].

#### Задания для самостоятельной работы

1. Составить таблицу «сложения» и «умножения» для алгебры Буля из трех чисел  $0, \frac{1}{2}$  и  $1$ , где  $x \oplus y = \max\{x, y\}$ ,  $x \otimes y = \min\{x, y\}$ . Проверить для этой алгебры выполнение аксиом алгебры Буля.

2. Проверить с помощью диаграммы Эйлера справедливость соотношения  $A \cup (CA \cap B) = A \cup B$ .

3. Сконструировать контактные схемы, соответствующие высказываниям:

$$а) (A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}); б) (A \wedge B \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B) \wedge \bar{C}.$$

### Практическая работа №2

#### Представление булевых функций формулами.

#### Сводка тавтологий. Совершенные формы

Для выполнения практической работы необходимо изучить следующие разделы: представление булевых функций формулами, сводка тавтологий, совершенные формы. Теоретические сведения приведены в [1-2].

#### Задания для самостоятельной работы

1) Покажите, что а)  $\bar{a} \leftrightarrow a + 1$ ; б)  $\forall a \leftrightarrow ((a \wedge 1) \leftrightarrow a)$  + в)  $a \rightarrow b \leftrightarrow ((a \wedge b) + a) + 1$ ; г)  $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a + b) + 1$ , где "+" — сумма Жегалкина,  $1 = 1(x) = 1$  для всех  $x$ .

2) Построить таблицы истинности для следующих булевых функций:

$$а) f(a, b) = ((a \rightarrow b) \wedge \bar{b}) \rightarrow \bar{a}; б) f(a, b, c) = (((a | b) \downarrow c) | b) \downarrow c.$$

3) Выразить с помощью суперпозиций функции  $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, +, |, \downarrow$  через функции  $\wedge$  и  $\neg$ .

Чтобы привести формулу  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , не являющуюся тождественно ложной, к СДНФ, достаточно:

- 1) привести её к какой-нибудь ДНФ;
- 2) удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную с её отрицанием;
- 3) из одинаковых членов дизъюнкции оставить только один член;
- 4) из одинаковых членов каждой конъюнкции удалить все, кроме одного члена;
- 5) если в какой-нибудь конъюнкции нет переменной  $x_i$  из переменных,

входящих в исходную формулу, то добавить к этой конъюнкции член  $x_i \vee \bar{x}_i$  и применить дистрибутивный (распределительный) закон конъюнкции относительно дизъюнкции, затем опять воспользоваться правилом 3) по удалению одинаковых членов дизъюнкции.

Полученная формула будет СДНФ.

Если данная формула  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не является тавтологией (тождественно истинной), то её КНФ будет совершенной формой, т. е. будет СКНФ, если выполнены следующие свойства:

- 1) различны все члены конъюнкции;

- 2) различны все члены каждой дизъюнкции;
- 3) ни одна дизъюнкция не содержит переменную вместе с её отрицанием;
- 4) каждая дизъюнкция содержит все переменные, входящие в исходную формулу.

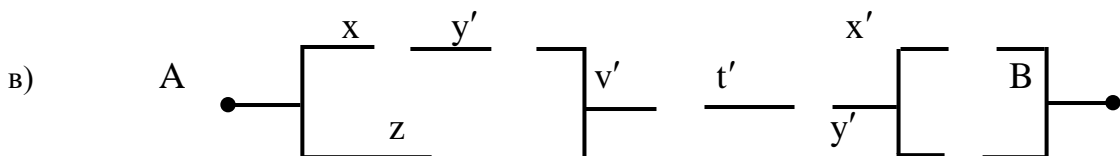
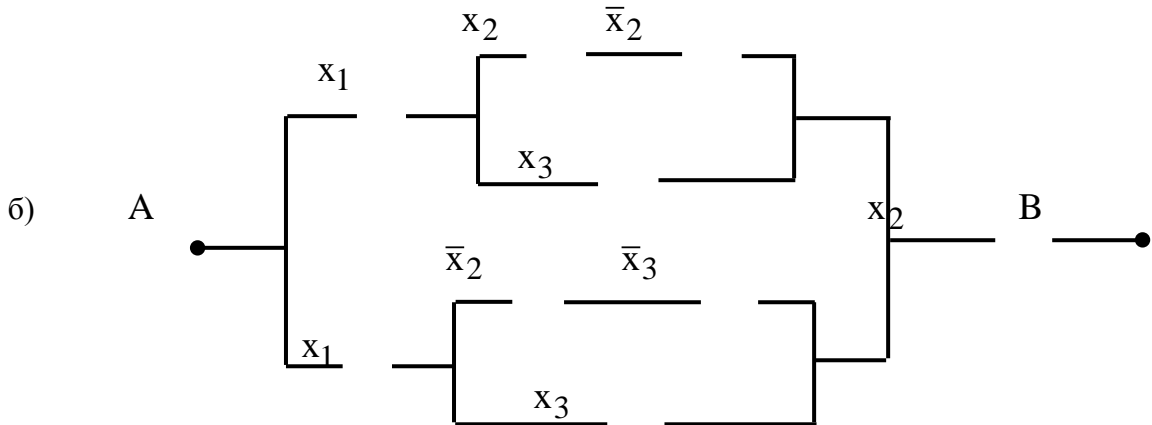
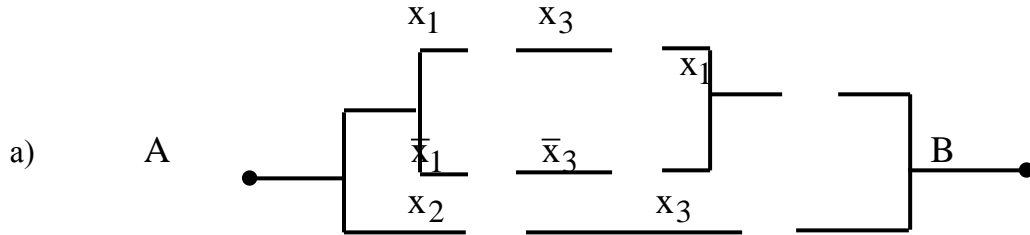
### Практическая работа №3

#### Конструирование и упрощение контактных схем

Для выполнения практической работы необходимо изучить раздел: конструирование и упрощение контактных схем. Теоретические сведения приведены в [1-2].

#### Задания на самостоятельную работу

1. Найти функцию проводимости данных релейно-контактных схем:



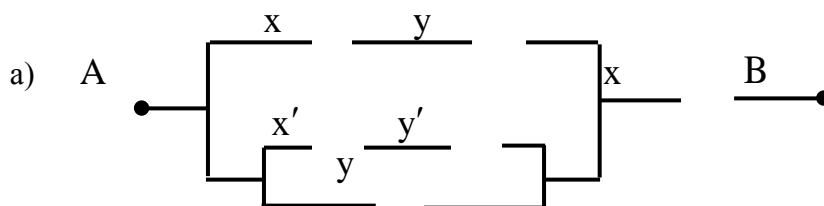
2. Построить релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

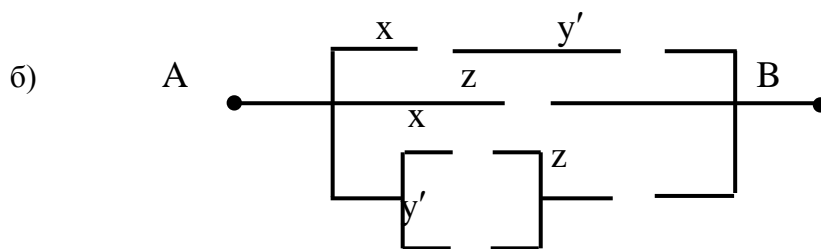
а)  $f(x; y; z) = (x \vee y) z \vee \bar{z} y$ ;

б)  $f(x; y; z) = (x \rightarrow y) \vee x$ ;

в)  $f(x; y; z) = (x \leftrightarrow y) z$ ;

3. Упростить следующие релейно-контактные схемы:





4. Составьте схему цепи с тремя независимыми контактами, которая замкнута тогда и только тогда, когда:
- замкнута по меньшей мере два контакта;
  - замкнуты не более, чем два контакта;
  - разомкнут только один контакт.

### Практическая работа №4

#### Логические функции (предикаты) и операции над ними

Для выполнения практической работы необходимо изучить раздел «Логические функции (предикаты) и операции над ними». Теоретические сведения приведены в [1-2].

#### Задания для самостоятельной работы

1. Найти значение истинности следующих высказываний:

- $\exists x \exists y : x + y = 5$ ;
- $\forall x \forall y : x + y = 5$ ;
- $\exists x \exists y : (x > y > 0) \wedge (x + y = 0)$ ;
- $\forall x : (x^2 > x) \leftrightarrow [(x > 1) \vee (x < 0)]$ .

2. Найти множества истинности следующих предикатов и изобразить их на числовой прямой:

а)  $x^2 + 6x - 16 \leq 0$ ; б)  $|x| < 2$ ; г)  $|x - 4| \geq 1$ ; д)  $|x - 1| \leq |2x + 4|$ .

3. Изобразить на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов: а)  $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$ ; б)  $(|x| < 3) \wedge (|y| < 2)$ ; в)

4. Определить является ли один из предикатов следствием другого, если они оба заданы на  $M = Y$ :

- " $x^2 = 16$ " и " $x^2 = -4$ ";
- " $\sin x = 4$ " и " $x + 2 = 2 + x$ ";
- " $x^2 = 1$ " и " $x - 1 = 0$ ".

$P^+(\text{" } x + 2 = 2 + x \text{ "}) = Y$ : Так как  $\emptyset \subset Y$ , то предикат " $x + 2 = 2 + x$ " является следствием предиката " $\sin x = 4$ ".

5. Из следующих предикатов с помощью навешивания кванторов и подстановки значений свободных переменных получить высказывания и определить их значения истинности:

а)  $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0)$ ; б)  $x^2 = 25$ ; в)  $|x - y| \leq 3$ .

**Практическая работа №5**  
**Общезначимые формулы. Представление формул логики предикатов в предваренной нормальной форме**

Для выполнения практической работы необходимо изучить следующие разделы: **Общезначимые формулы. Представление формул логики предикатов в предваренной нормальной форме.** Теоретические сведения приведены в [1-2].

**Задания для самостоятельной работы**

1. Указать свободные и связанные переменные в следующих формулах:

а)  $(\exists x) (\exists y) (P(x, y) \wedge Q(z));$

б)  $(\forall x) (\exists y) (x < y + z);$

в)  $(\exists x) (\forall z) (z < x + y).$

2. Дать интерпретацию следующим формулам логики предикатов:

а)  $(\exists x) (\exists y) (P(x, y) \wedge \square);$

б)  $(\forall x) (\exists y) (P(x, y) \wedge Q(x) \wedge \square) .$

3. Для следующих формул найти равносильную им приведенную форму:

а)  $\neg[(\forall x) (P(x)) \vee (\exists x) (Q(x) \rightarrow \square(x))];$

б)  $((\exists x) (P(x)) \rightarrow (\forall y) (Q(y))) \rightarrow \square(Z);$

в)  $\neg[(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge (\exists y) (\neg\square(y) \wedge S(z)))] .$

4. Привести следующие формулы к предваренной (пренексной) нормальной форме:

а)  $(\exists y) [P(x) \rightarrow Q(y)] \rightarrow (\forall y) [P(y) \vee (\forall z) (Q(z))];$

б)  $P(y) \rightarrow \neg[(\forall x) (Q(x, y)) \rightarrow P(y)].$

**Практическая работа №6**  
**Логика предикатов и алгебра множеств. Уравнения и неравенства как логические функции (предикаты). Комплекс теорем в геометрии. Необходимые и достаточные условия**

Для выполнения практической работы необходимо изучить следующие разделы: **Логика предикатов и алгебра множеств. Уравнения и неравенства как логические функции (предикаты). Комплекс теорем в геометрии. Необходимые и достаточные условия.** Теоретические сведения приведены в [1-2].

**Задания для самостоятельной работы**

1. Решить неравенство  $\frac{1 - \sqrt{8x - 3}}{4x} \geq 0.$

2. Решить неравенство  $|2\sqrt{2x - 1} - 1| < 3.$

3. Решить уравнение  $\log_{|x-1|} 2 = 1.$

4. Решить уравнение  $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1.$

**Указание.** Использовать метод интервалов.

## Практическая работа №7

### Машина Тьюринга

Для выполнения практической работы необходимо изучить раздел «Машина Тьюринга». Теоретические сведения приведены в [1-2].

#### Задания для самостоятельной работы

1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом  $A_0 = \{a_0; 1\}$ , алфавитом внутренних состояний  $Q = \{q_0; q_1; q_2; q_3; q_4; q_5; q_6; q_7\}$  и программой:

Q \ A	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$
$a_0$	$q_4 a_0 П$	$q_6 a_0 П$	$q_6 a_0 П$	$q_0 1$	$q_4 a_0 П$	$q_0 a_0$	$q_6 a_0 П$
1	$q_2 1Л$	$q_3 1Л$	$q_1 1Л$	$q_5 a_0$	$q_5 a_0$	$q_7 a_0$	$q_7 a_0$

В какие слова переведёт машина из начального стандартного положения следующие слова:

а) 11111;      б) 111111;      в) 1111 ;

2. Сконструируйте машину Тьюринга с внешним алфавитом  $A = \{a_0; 1\}$ , алфавитом внутренних состояний  $Q = \{q_0; q_1; q_3; q_3\}$ , которая каждое слово в алфавите  $A_1 = \{1\}$  перерабатывает в пустое слово, исходя из стандартного начального состояния.

## Практическая работа №8

### Вычислительные алгоритмы

Для выполнения практической работы необходимо изучить следующие разделы: представление булевых функций формулами, сводка тавтологий, совершенные формы. Теоретические сведения приведены в [1-2].

#### Задания для самостоятельной работы

1. Составить блок-схему решения квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) в области действительных чисел.

2. Составить блок-схему вычисления факториала  $n!$ , где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

3. Составить блок-схему вычисления членов последовательности  $a_k = \frac{3k}{k^2 + 2}$  ( $k = 1, 2, \dots, 40$ ).

4. Даны три числа  $a, b, c$ . Составить блок-схему алгоритма, позволяющего определить, имеются ли среди них хотя бы одна пара взаимно обратных чисел.

5. Дан массив  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Требуется определить, имеется ли в этом массиве хотя бы одна пара взаимно обратных чисел.

6. Составить блок-схему поиска максимального элемента в массиве  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

7. Составить блок-схему решения задачи: имеется ли среди трех чисел  $a, b, c$  хотя бы одна пара равных между собой чисел.

8. Составить блок-схему и программу на Бейсике решения задачи: подсчитать количество отрицательных чисел среди чисел  $a, b$  и  $c$ .



## **Раздел 2. Лабораторные работы**

### **Лабораторная работа №1**

#### **Задания для выполнения лабораторной работы**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №1.

### **Лабораторная работа №2**

#### **Представление булевых функций формулами.**

#### **Сводка тавтологий. Совершенные формы**

#### **Задания для выполнения лабораторной работы**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №2.

### **Лабораторная работа №3**

#### **Конструирование и упрощение контактных схем**

#### **Задания на самостоятельную работу**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №3.

### **Лабораторная работа №4**

#### **Логические функции (предикаты) и операции над ними**

#### **Задания на самостоятельную работу**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №4.

### **Лабораторная работа №5**

#### **Общезначимые формулы. Представление формул логики предикатов в предваренной нормальной форме**

#### **Задания на самостоятельную работу**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №5.

### **Лабораторная работа №6**

#### **Логика предикатов и алгебра множеств. Уравнения и неравенства как логические функции (предикаты). Комплекс теорем в геометрии. Необходимые и достаточные условия**

#### **Задания на самостоятельную работу**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №6.

### **Лабораторная работа №7**

#### **Машина Тьюринга**

#### **Задания на самостоятельную работу**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №7.

### **Лабораторная работа №8 Вычислительные алгоритмы**

#### **Задания на самостоятельную работу**

Разработать алгоритм и написать программу на языке Си для решения задачи из практической работы №8.

#### **Раздел 3. Самостоятельная работа**

- 3.1. Проработка лекционного материала.
- 3.2. Подготовка к практическим занятиям согласно разделу 1.
- 3.3. Выполнение лабораторных работ и оформление отчетов согласно разделу 2.

#### **Список литературы**

1. Перемитина Т. О. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Т. О. Перемитина. — Томск: ТУСУР, 2016. — 132 с. — Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/5949>, дата обращения: 5.07.2018
2. Зюзьков В. М. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие [Электронный ресурс] / В. М. Зюзьков. — Томск: ТУСУР, 2015. — 236 с. — Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/5988>, дата обращения: 5.07.2018